

# La fonction zêta de Riemann

Amaury Martiny

23 mai 2019

## Résumé

This is the paper's abstract ...

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Un peu d'histoire . . . . .	2
1.2	Notations . . . . .	2
1.3	Tchebychev et ses fonctions . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Prérequis</b>	<b>3</b>
2.1	Méthodes d'analyse réelle . . . . .	3
2.1.1	Formule d'Euler-Maclaurin . . . . .	3
2.2	Méthodes d'analyse complexe . . . . .	3
2.2.1	La fonction $\Gamma$ . . . . .	3
<b>3</b>	<b>La fonction <math>\zeta</math> de Riemann</b>	<b>4</b>
3.1	Lien avec les nombres premiers . . . . .	4
3.2	Quelques propriétés de $\zeta$ . . . . .	4
3.2.1	Dérivées de la fonction $\zeta$ . . . . .	6
3.2.2	Expression intégrale . . . . .	6
3.3	Prolongement à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ . . . . .	6
3.3.1	Par la formule d'Euler-Maclaurin . . . . .	7
3.3.2	Par le contour de Hankel . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Le théorème des nombres premiers</b>	<b>9</b>

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Un peu d'histoire

### 1.2 Notations

somme de  $p$  = somme sur nombres premiers

### 1.3 Tchebychev et ses fonctions

Nous introduisons ici la fonction  $\zeta$  de Riemann, ainsi que les fonctions de Tchebychev, car elles vont nous suivre dans toute la suite de ce rapport.

**Définition 1.3.1** (Fonctions de Tchebychev). *Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,*

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

## Chapitre 2

# Prérequis

### 2.1 Méthodes d'analyse réelle

#### 2.1.1 Formule d'Euler-Maclaurin

**Théorème 2.1.1.** *Pour tout entier  $k \geq 0$  et toute fonction  $f$  de classe  $C^r$  sur  $[a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ , on a*

$$\sum_{n=a}^b f(n) = \int_a^b f(t) dt + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=2}^r \frac{b_k}{k!} (f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)) + \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_a^b B_r(t) f^{(r)}(t) dt$$

Les  $b_n$  sont les nombres de Bernoulli, et les  $B_n$  sont les polynômes de Bernoulli, définis sur  $[0, 1]$  par la récurrence classique, et ensuite prolongés par 1-périodicité.

### 2.2 Méthodes d'analyse complexe

#### 2.2.1 La fonction $\Gamma$

## Chapitre 3

# La fonction $\zeta$ de Riemann

### 3.1 Lien avec les nombres premiers

La fonction que nous appelons aujourd'hui fonction  $\zeta$  de Riemann a en réalité été introduite par Euler au XVIIIème siècle. Il a défini, pour tout  $x \in \mathbb{R}, x > 1$ , la fonction

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

La somme de droite est clairement convergente, donc  $\zeta(x)$  est bien défini. Euler démontra par la suite le résultat suivant, qui définit un lien entre les nombres premiers et l'analyse.

**Théorème 3.1.1** (Produit eulérien).

$$\zeta(x) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-x}} \quad (\sigma > 1)$$

*Démonstration.*

□

A ce stade, nous commençons à nous convaincre du rôle important de la fonction  $\zeta$  dans l'étude des nombres premiers. Une analyse plus approfondie de cette fonction va nous aider grandement, c'est ce que nous allons faire tout de suite.

### 3.2 Quelques propriétés de $\zeta$

Avant d'étudier ses propriétés, commençons par définir officiellement  $\zeta$ . L'idée de Riemann, dans son TODO, a été de partir de la définition d'Euler, et de considérer  $\zeta$  comme fonction d'une variable complexe :

**Définition 3.2.1** (Fonction  $\zeta$  de Riemann). *On définit, pour tout  $s$  complexe tel que  $\sigma > 1$ ,*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

**Proposition 3.2.2.** *Pour  $\sigma > 1$ , la série  $\zeta(s)$  est absolument convergente.*

*Démonstration.* C'est évident car  $|\frac{1}{n^s}| = \frac{1}{n^\sigma}$ , qui est le terme général d'une série convergente.  $\square$

Cette proposition montre que la fonction  $\zeta$  est bien définie sur le demi-plan  $\sigma > 1$ .

Cela va sans dire, mais cela ira encore mieux en le disant :

**Théorème 3.2.3** (Produit eulérien, variable complexe).

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (\sigma > 1)$$

*Démonstration.* La démonstration est exactement la même que dans le cas réel : voir la proposition 3.1.1.  $\square$

Il en découle immédiatement cette 1ère propriété intéressante :

**Proposition 3.2.4.**

$$\zeta(s) \neq 0 \quad (\sigma > 1)$$

*Démonstration.* Soit  $p$  premier fixé. L'inégalité triangulaire donne  $|1 - p^{-s}| \leq 1 + p^{-\sigma}$ . Par conséquent,

$$\log(|1 - p^{-s}|) \leq \log(1 + p^{-\sigma}) \leq p^{-\sigma}$$

où les inégalités sont données respectivement par la croissance et par la concavité du logarithme.

Ceci entraîne la convergence de la série  $\sum_p \log(|1 - p^{-s}|)$ , pour tout  $s$  avec  $\sigma > 1$ . Notons  $L_s$  sa limite :

$$\log \left( \prod_p |1 - p^{-s}| \right) = L_s,$$

et ainsi

$$\left| \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \right| = e^{-L_s} > 0,$$

Le terme de gauche est exactement  $|\zeta(s)|$  par le produit eulérien du théorème 3.2.3.  $\square$

### 3.2.1 Dérivées de la fonction $\zeta$

**Proposition 3.2.5.**  $\zeta$  est holomorphe sur le demi-plan  $\sigma > 1$ .

*Démonstration.* Soit  $K$  un compact du demi-plan  $\sigma > 1$ , alors  $K$  est inclus dans un  $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \geq a\}$  pour un certain réel  $a > 1$ . Mais alors en définissant  $f_n : s \mapsto 1/n^s$ , la fonction  $f_n$  est holomorphe sur  $\sigma > 1$ , et  $\|f_n\|_\infty \leq 1/n^a$  sur  $K$ , qui est le terme général d'une série convergente.

La série de fonctions  $\sum f_n$  converge vers  $\zeta$ , normalement (donc uniformément) sur  $K$ . Par suite  $\zeta$  est holomorphe sur le demi-plan  $\sigma > 1$ .  $\square$

**Proposition 3.2.6.**

$$\zeta^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^s}$$

*Démonstration.* TODO  $\square$

### 3.2.2 Expression intégrale

**Proposition 3.2.7.** Pour tout complexe  $\sigma > 1$ ,

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

*Démonstration.* On part de la formule TODO

$$\Gamma(s)n^{-s} = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-nt} dt \quad (\sigma > 0)$$

En sommant pour  $n \geq 1$ , il vient pour  $\sigma > 1$

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty t^{s-1}e^{-nt} dt = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

Or la série numérique  $\sum \int_0^\infty |t^{s-1}|e^{-nt} dt = \sum \int_0^\infty t^{\sigma-1}e^{-nt} dt$  converge, donc l'interversion somme/intégrale est justifiée.  $\square$

## 3.3 Prolongement à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

**Théorème 3.3.1.** La fonction  $\zeta$  admet un unique prolongement en une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$  ayant un unique pôle en  $s = 1$  de résidu 1.

Une fois ce théorème démontré, nous allons noter  $\zeta$  cet unique prolongement. Nous allons donner plusieurs démonstrations de ce théorème.



### 3.3.1 Par la formule d'Euler-Maclaurin

*Démonstration.* Fixons  $s$  tel que  $\sigma > 1$ , et appliquons la formule d'Euler-Maclaurin 2.1.1 à l'ordre  $r \geq 1$  sur l'intervalle  $[1, N]$  à la fonction  $f : t \mapsto t^{-s}$ , de classe  $C^\infty$  sur  $[1, N]$  :

$$\sum_{n=1}^N n^{-s} = \frac{1 - N^{1-s}}{s-1} + \frac{1 + N^{-s}}{2} + \sum_{k=2}^r B_k \frac{s(s+1)\dots(s+k-2)}{k!} (1 - N^{-s-k+1}) - R_{r,N}(s)$$

où l'on a défini le reste  $R_{r,N}(s)$  par

$$R_{r,N}(s) = \frac{s(s+1)\dots(s+r-1)}{r!} \int_1^N B_r(t) t^{-s-r} dt$$

Comme les  $B_r$  sont périodiques et polynomiaux sur  $[0, 1[$ , ils sont bornés. Le terme à l'intérieur de l'intégrale de  $R_{r,N}(s)$  est donc  $O(t^{-s-r})$ , qui intégrable sur  $[1, +\infty]$ . En faisant tendre  $N$  vers l'infini, on obtient alors

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + F_r(s)$$

où l'on a noté

$$F_r(s) = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^r B_k \frac{s(s+1)\dots(s+k-2)}{k!} - \frac{s(s+1)\dots(s+r-1)}{r!} \int_1^\infty B_r(t) t^{-s-r} dt.$$

Montrons que  $F_r$  est holomorphe sur  $\Omega_r = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > 1 - r\}$ . Il suffit que montrer que  $G_r$  l'est, où

$$G_r(s) = \int_1^\infty B_r(t) t^{-s-r} dt.$$

On remarque que, à  $t$  fixé, la fonction à l'intérieur  $s \mapsto B_r(t) t^{-s-r}$  l'est. Soit  $K$  un compact de  $\Omega_r$ , on peut fixer un  $\delta > 0$  tel que  $K \subset \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > 1 - r + \delta\}$ . Sur ce compact,

$$\sup_{s \in K} \left| \frac{B_r(t)}{t^{s+r}} \right| = O\left(\frac{1}{t^{1+\delta}}\right)$$

ce qui assure, par régularité des intégrales à paramètre, que  $G_r$ , et par suite  $F_r$  est holomorphe sur  $\Omega_r$ .

On peut ainsi définir une fonction entière  $F$  par

$$F(s) = F_r(s) \quad \text{si } s \in \Omega_r.$$

$F$  est bien définie car si  $1 \leq q \leq r$ ,  $F_q(s) = F_r(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ , donc  $F_q$  et  $F_r$  sont holomorphes et coïncident sur  $\Omega_q$  connexe.

On obtient finalement que  $s \mapsto \frac{1}{s-1} + F(s)$  est une fonction méromorphe avec un unique pôle simple en 1 de résidu 1 qui prolonge la fonction  $\zeta$  de Riemann. L'unicité est triviale par prolongement analytique.  $\square$

### 3.3.2 Par le contour de Hankel

## Chapitre 4

# Le théorème des nombres premiers