Cours

Probabilité

Espace probabilisé

Définition :

1. Ω est l'ensemble des possibles de toutes les expériences, supposé fini.
2. Un évènement est un sous-ensemble A $\subset \Omega$.
3. Un évènement élémentaire est un singleton $\{\omega\} \subset \Omega$
4. L'ensemble des parties de Ω est $P(\Omega)$ = {les sous-ensembles de Ω}

Évènements disjoints

- Des évènementes $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux **disjoints** si $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j \neq \varnothing$.

Leur union : $A_1 \cup \ldots \cup A_n = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$

Ces évènements forment alors une **partition** de Ω si

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n = \Omega$$

Fonction de probabilité

Une probabilité sur un ensemble Ω est une application

$$P : \begin{cases} P(\Omega) & \rightarrow & [0;1] \\ A & \mapsto & P(A) \end{cases}$$

vérifiant :

1. $P(\Omega)$ = 1
2. $\forall (A, B) \in [P(\Omega)]^2, A \cap B = \varnothing, P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$

Le triplet $(\Omega, P(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

Propriétés :

1. $P(\varnothing) = 0$
2. $\forall (A, B) \in [P(\Omega)]^2, P(A) = P(A|B) + P(A \cap B)$
3. $\forall (A, B) \in [P(\Omega)]^2, P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Cas équiprobable

Cas équiprobable : Ω = {$\omega_1, \ldots \omega_n$}, $P(\omega_i) = C$

- Condition :

$$\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1 \Rightarrow n \times C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{n} = \frac{1}{Card(\Omega)}$$

- $\forall A \in P(\Omega), A =${$w_k1, \ldots w_kp$}

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = p \times C = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$$

exemple : lancer de dé. $P(résultat <= 2) = P(1,2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Formule de Bayes

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}}$$

Variables aléatoires

Définition : On définit une **variable aléatoire** en associant un nombre réel à chaque éventualité d'une expérience aléatoire.

Une variable aléatoire X est une application

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Conséquences : $\forall B \subset X(\Omega), P_X(B) = P(X \in B) = P(A)$

La distribution de la variablea aléatoire X est donnée par **UNE LOI DE** X

- l'ensemble des valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- les valeurs $P(X) = x_1, P(X) = x_2, \ldots, P(X) = x_i$

Loi binomiale

$$\boxed{\forall k \in [\![0; n]\!], P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

Éspérance

L'éspérance est la **moyenne arithmétique** de X.

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)}$$

Variance

La variance permet **d'estimer la dispersion des valeurs de X autour de $E(X)$**.

$$V(X) = E((x_i - E(X)))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i)$$

$$\boxed{= E(X^2) - (E(X))^2}$$

avec :

$$\boxed{E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \times P(X = x_i)}$$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, X$ et Y deux variables aléatoires,

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

$$V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$$

exemple : voir exercice 4.12 polycopié