Intégrations

Intégration par parties

Hypothèses : soit u et v deux fonctions de classes C_1 (dérivables et continues sur $\mathbb{R}$) sur $I \subset \mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$, alors :

Formule :

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx}$$

Démonstration : *à connaitre par coeur*

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)dx$$

$$= \int_a^b (u'v + uv')(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Intégration par changement de variables

Soient I et T deux intervalles de $\mathbb{R}$. $(\alpha, \beta) \in J^2, f$ une fonction continue sur I. φ une fonction de classe C_1 de J vers I.

$\underline{alors}$:

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}$$

$\underline{démonstration}$:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = [F(t)]_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)}, F'(t) = f(t)$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F \circ \varphi(\beta) - F \circ \varphi(\alpha)$$

$$= [F \circ \varphi(t)]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta F \circ \varphi'(t)dt$$

$$\int_\alpha^\beta F' \circ \varphi(t) \times \varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) \times \varphi'(t)dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt$$