

Resolución del problema de los tres cuerpos a partir del sistema Kepler-16

En este trabajo se ha resuelto el problema de los tres cuerpos, mediante el uso de la herramienta Matlab, con los métodos de Euler y Verlet. Se ha resuelto la órbita del Sistema Kepler-16 con exactitud, con un error relativo $Error\% = (4.92 \times 10^{-8})\%$ en la energía mecánica.

Se han buscado nuevas órbitas adaptando las condiciones de inicio. Con esto, se han obtenido resultados de distinta complejidad y analizado los datos obtenidos sobre ellos. Además, se ha observado que la presencia de órbitas no estables es mucho mayor, debido a que leves cambios en las condiciones de inicio afectan a la órbita en gran medida. Dicho esto, se ha comprobado que los sistemas binarios albergando planetas, que recorren órbitas tanto internas como externas, son teóricamente posibles.

En resumen, este acercamiento numérico ofrece resultados del problema con exactitud, además de mostrar aspectos como la conservación de la energía mecánica y momento angular.

Autores: Martín San Juan y Amaia Vicario

Filiación: Universidad Autónoma de Madrid

Fecha: 4 de mayo del 2021

1. Introducción:

El problema de los tres cuerpos consiste en resolver las posiciones de tres cuerpos libres, en movimiento debido a la atracción gravitatoria que ejerce cada uno. Para ello, se ha usado la ecuación de Newton:

$$\frac{d^2 \vec{r}_l}{dt^2} = G \left(\frac{m_j \vec{r}_{lj}}{d_{ij}^3} + \frac{m_k \vec{r}_{lk}}{d_{ik}^3} \right) \quad (1)$$

Donde $\frac{d^2 \vec{r}_l}{dt^2}$ es la aceleración del objeto, \vec{r}_l su posición, m_j y m_k son las masas de los otros cuerpos, G es la constante de gravitación universal; d_{ij} y d_{ik} son las distancias entre el cuerpo y los otros dos; y \vec{r}_{lj} y \vec{r}_{lk} son los vectores que unen al objeto con los otros dos cuerpos.

El interés que tiene este problema es que no tiene una solución analítica general. Exceptuando algunas soluciones encontradas, la mayoría de los casos presentan órbitas no periódicas o inestables.

En este trabajo se parte del cálculo de la órbita del sistema Kepler-16; después, se varían las condiciones iniciales de las que parten los tres cuerpos para observar posibles soluciones de este problema y estudiar su estabilidad.

2. Ecuaciones de movimiento:

Como se ha comentado, se necesita la ecuación de Newton (1) para obtener las aceleraciones de cada cuerpo, y así resolver sus posiciones.

Aparte de eso, dado que los cuerpos se aceleran, el sistema se desplaza a medida que avanza el tiempo. Por esta razón, se han calculado las posiciones y energías con las distancias respecto al centro de masas, que constituye el sistema de referencia en el que el momento lineal total es cero. Las fórmulas para obtener las posiciones relativas al centro de masas son las siguientes:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i^3 m_i \vec{r}_i}{\sum_i^3 m_i} ; \quad \vec{r}_{rel} = \vec{r}_i - \vec{r}_{CM} \quad (2)$$

Donde \vec{r}_{CM} es la posición del centro de masas y \vec{r}_{rel} su posición relativa. Además, se ha estudiado la estabilidad de las órbitas observando la conservación de la energía total y del momento angular. La energía total (E) es la suma de las energías cinética (K) y potencial (U) totales, descritas por las fórmulas:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \cdot \overline{v(r)_i^2} ; K_{tot} = \sum_i^3 K_i \quad (3) ; \quad U_i = \frac{G m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} + \frac{G m_i m_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} ; U_{tot} = \sum_i^3 U_i \quad (4)$$

El momento angular es en esencia un producto vectorial que describimos como:

$$L_i = \vec{r}_i \times (m_i \cdot \vec{v}_i) ; \quad L_{tot} = |\vec{L}_i + \vec{L}_j + \vec{L}_k| \quad (5)$$

Siendo L_{tot} la norma de la suma de los momentos de cada cuerpo. La dirección de L_i viene determinada por la regla de la mano derecha.

3. Métodos y desarrollo del código:

En este trabajo se ha hecho uso del programa Matlab para calcular las órbitas numéricamente; es decir, creando un algoritmo que simule una aproximación de la solución buscada. Con el fin de calcular las posiciones y velocidades de los cuerpos en cada instante, se comenzó aplicando tanto el método Euler^[5] como el método Verlet^[6] de velocidades.

Como se observa de los cálculos hechos con distintos métodos, la diferencia de tiempo estimada en el cálculo es menor para Euler: $t_{Verlet} = 15.46\text{ s}$ y $t_{euler} = 11.29\text{ s}$. Sin embargo, el método Verlet muestra una mejor aproximación a la solución¹; Verlet muestra un error relativo de $Verlet\ Error\ \% = (4.92 \times 10^{-8})\%$ en la energía mecánica, mientras que $Euler\ Error\ \% = (6.32 \times 10^{-4})\%$, valor considerablemente mayor. Por esta razón, se usa Verlet para las órbitas finales, exceptuando el caso de las figuras con el segundo centro de masas, las cuales se calculan con Euler.

La razón para dejarlas así es que el código inicial se escribió con Euler, y los resultados eran prácticamente iguales que con Verlet, por lo que, por razones de comodidad (cambiar el código para volver a añadir los centros de masas era bastante complicado), se han dejado con Euler.

Con el fin de optimizar el cálculo y que sea lo más sencillo posible, se agrupan las posiciones y velocidades en matrices de dimensión $3 \times NS$ (NS: número de pasos), una para cada componente del parámetro (x, y, z), donde cada columna indica la posición o velocidad de los tres planetas en cada paso y cada fila indica la evolución de un planeta respecto a un parámetro. Para las masas de los planetas se utiliza un vector fila, de manera que las operaciones matriciales cuadren. Agrupar las masas minimiza el número de veces que se ejecuta Verlet y por lo tanto hace el código más eficiente.

Para obtener las órbitas de los cuerpos son necesarias ciertas condiciones iniciales, su periodo orbital y su radio, así como su masa. La velocidad se obtiene por aproximación a órbitas circulares ($v(\vec{r})_i = \frac{2\pi \cdot \vec{r}}{T}$), para no perder el rango de estabilidad de los parámetros, de ahí se llega al resto de las soluciones.

4. Resultados:

El orden de magnitud de las energías y del momento angular es casi el mismo entre sistema y sistema, siendo el máximo dos órdenes de diferencia, debido a que los demás parámetros también son de orden similar.

Se aprecia que la energía potencial es siempre negativa y la cinética siempre positiva, además de que la energía total y el momento angular total (módulo y todas las componentes/dirección), calculados con (4) y (5), se conservan.

¹La solución para la que se ha estudiado el error relativo del método Verlet y Euler es la del sistema Kepler-16.

4.1 Órbitas coplanarias

En estos sistemas, solo hay momento angular en la dirección z , por lo que el momento total en z es el total de todas las direcciones. La razón de ello es que cuando las órbitas son coplanarias el vector posición y el de velocidad no tienen en ningún momento componente z (según los ejes escogidos).

4.1.1 Órbitas externas

- Órbitas elípticas, sistema Kepler-16 real^{[3][8]}

La aproximación para la velocidad con la fórmula para órbitas circulares da buenos resultados, elípticos de todas formas, por lo que parece ser que un pequeño cambio no afecta al resultado final del equilibrio.

Al ser órbitas periódicas, las energías cinética y potencial en función del tiempo también lo son. El período de las estrellas es más corto que el del planeta y cada período de las curvas de energías corresponde a una órbita entera de las estrellas.

El momento angular total resulta ser positivo, porque los tres cuerpos giran de forma que el camino más corto desde el vector posición al vector momento lineal va en dirección contrario a las agujas del reloj. Es decir, se trata de órbitas ‘progrado’^[2], porque los tres cuerpos giran en el mismo sentido. Los momentos angulares de cada cuerpo no se conservan a diferencia del total.

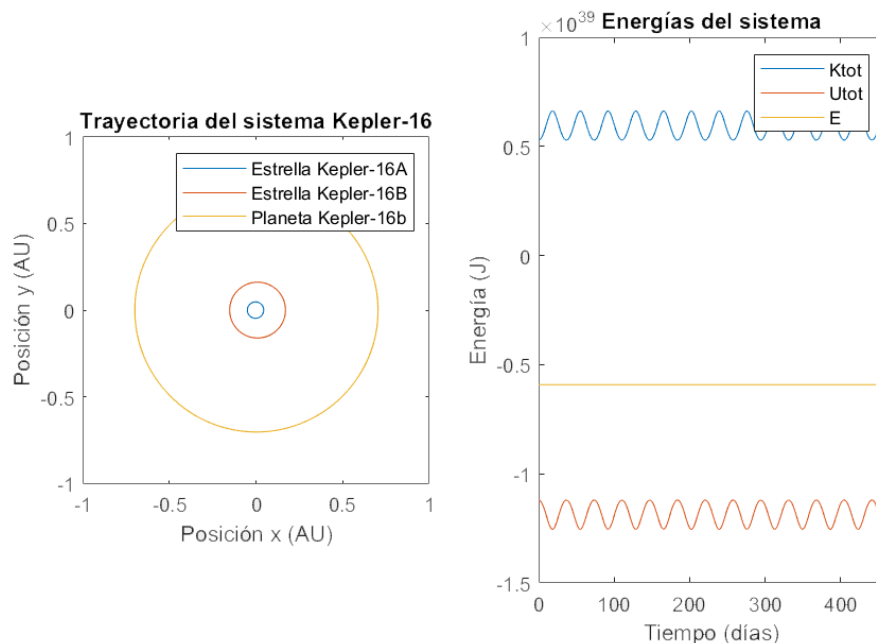


Figura 1. Trayectoria, energías mecánica, cinética y potencial en función del tiempo del sistema Kepler-16.

- Órbitas inestables

Al adaptar las condiciones del sistema Kepler para obtener otras órbitas se dan dificultades para obtener órbitas estables. El planeta debe estar, para las órbitas externas, a una distancia amplia de las estrellas, para no adquirir demasiada aceleración. Para las órbitas internas, sin embargo, la masa debe ser menor y debe estar más cerca de una de las estrellas, para evitar que la fuerza ejercida por la otra estrella lo saque de órbita.

De no cumplir estas condiciones, el planeta choca con una de las estrellas o sale despedido debido a una fuerte aceleración, como se puede observar en la figura 2.

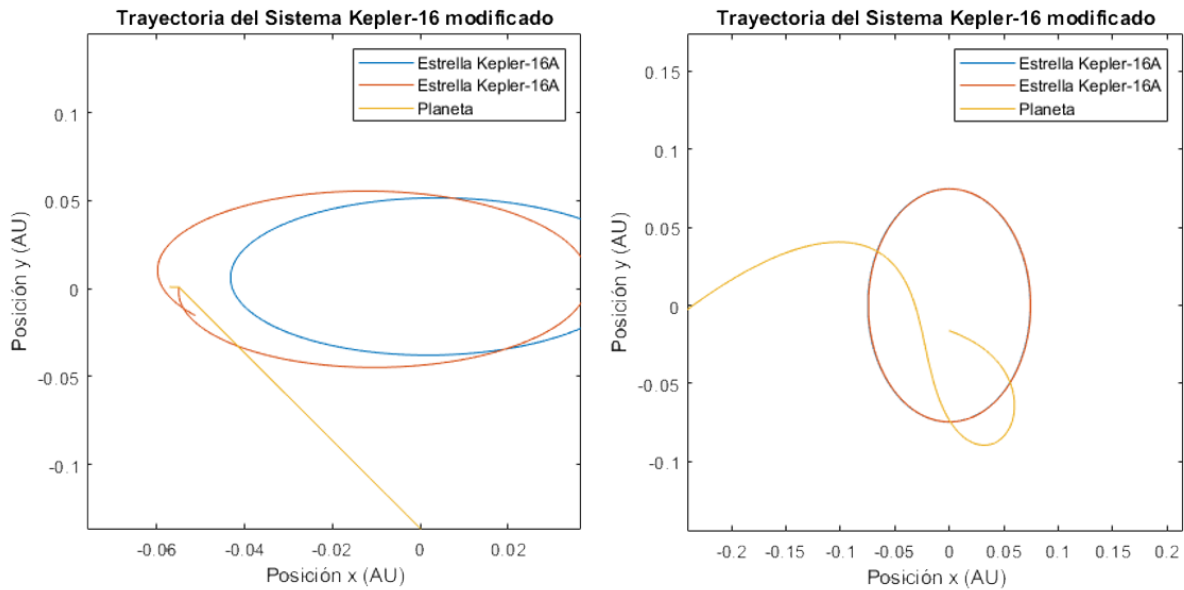


Figura 2. Casos no estables. A la izquierda el planeta colapsa contra una estrella. A la derecha se acerca demasiado a una estrella y sale despedido.

- Órbita circular alrededor de estrellas con giros internos^[1]

Modificando las masas, esta vez los tres cuerpos son estrellas², y, multiplicando las posiciones y velocidades iniciales por las proporciones adecuadas^[1], se llega a estas órbitas.

Las energías cinética y potencial en función del tiempo son aproximadamente periódicas y las órbitas también. Las energías fluctúan más que en el caso anterior, debido a que la interacción entre las estrellas centrales es más fuerte y tardan menos en completar un ciclo pequeño del aro que las anteriores en completar su órbita.

Como las velocidades de los tres cuerpos son de la misma escala y la estrella exterior está a gran distancia respecto a las otras, teniendo en cuenta la ecuación del momento angular es razonable pensar que esta sea quien más aporte al momento angular total y, efectivamente, el total es negativo como el de la estrella exterior (a diferencia del de las otras dos). La de la estrella exterior se trata de una órbita retrógrada^[2], que gira en el sentido contrario a la de las estrellas centrales.

²Nos referimos a estrellas a los cuerpos de masa del orden de la masa del Sol, y a planetas a cuerpos de masa del orden de la masa de Júpiter.

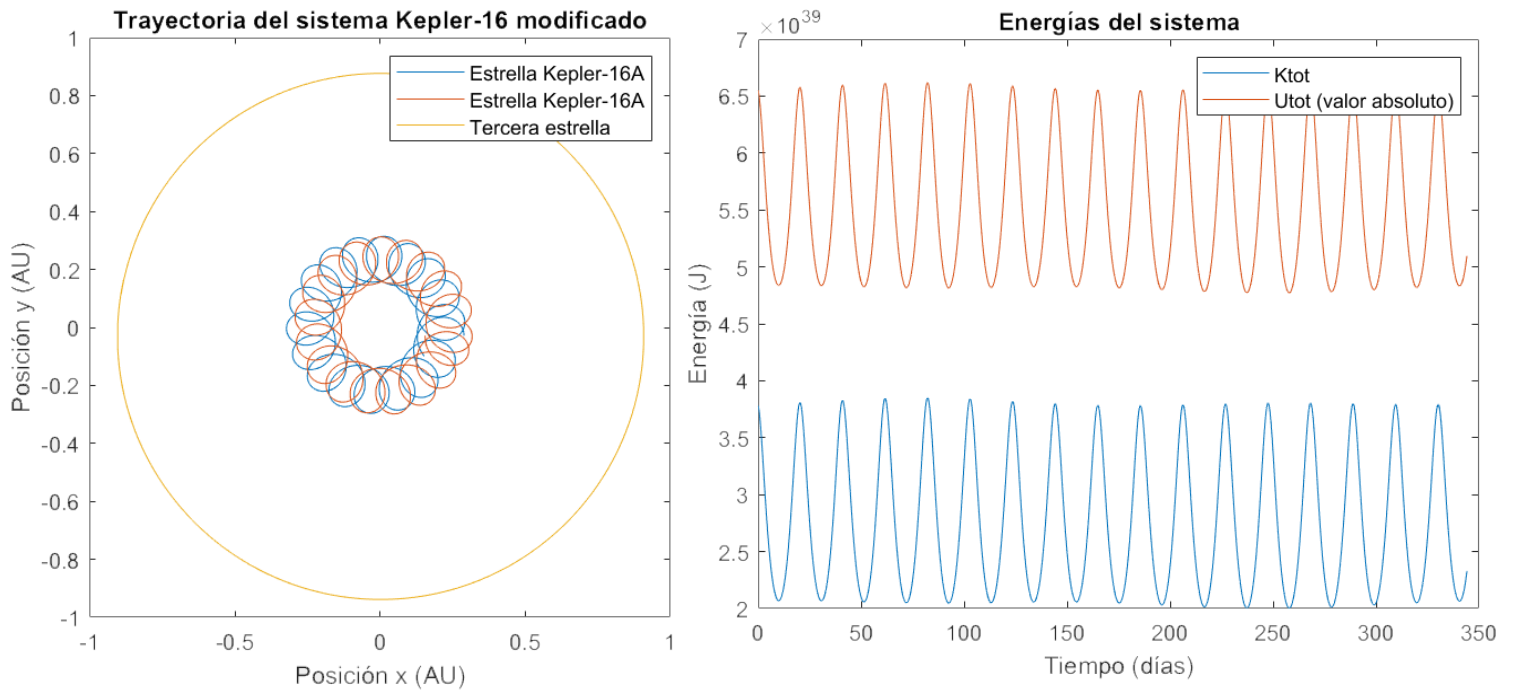


Figura 3. Trayectoria, energías cinética y potencial (valor absoluto) en función del tiempo de la órbita circular alrededor de estrellas con giros internos.

- Órbita circular alrededor de dos estrellas con giros internos pequeños

Esta figura se consigue igualando la masa de la que era antes más pequeña a la de las otras dos. Además, la distancia entre las otras dos masas se acorta. Todo ello lleva a dos órbitas de estrellas más finas: los dos cuerpos centrales están más juntos, se atraen más, y la órbita circular planetaria tiene un radio menor. Las energías cinética y potencial en función del tiempo fluctúan aún más en este caso que en el anterior, porque las estrellas centrales forman giros internos a su órbita principal más pequeños y, por tanto, completan una órbita interior en menos tiempo.

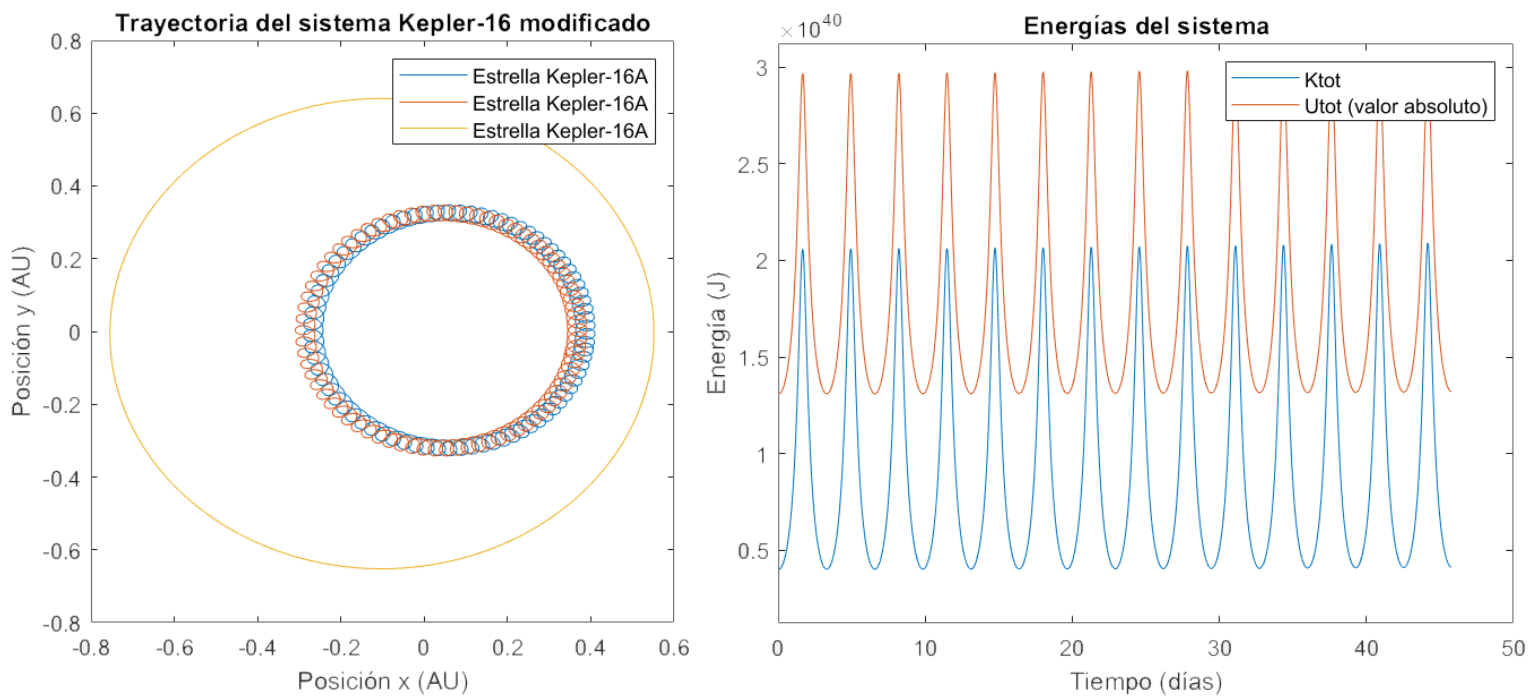


Figura 4. Trayectoria (en 250 días) y energías cinética y potencial en función del tiempo de la órbita circular y las dos órbitas estelares con giros internos pequeños.

- Órbita planetaria externa^[2]

Para esta figura se ha minimizado la distancia del planeta a las dos estrellas y aumentado la distancia inicial entre las órbitas estelares. También, se han utilizado otras proporciones para las posiciones y velocidades iniciales^[2]. De esta forma, las órbitas estelares sufren el efecto contrario y casi se solapan. La órbita planetaria es más compleja, debido a la cercanía respecto a las estrellas.

En este caso, las energías cinética y potencial en función del tiempo fluctúan casi con la misma frecuencia de la órbita circular y los dos aros con pétalos. Esto es curioso porque, en este caso, la órbita más compleja es la del planeta y no la de las estrellas interiores, y a pesar de ello, las energías varían de forma parecida, debido a la periodicidad y complejidad similar de las órbitas.

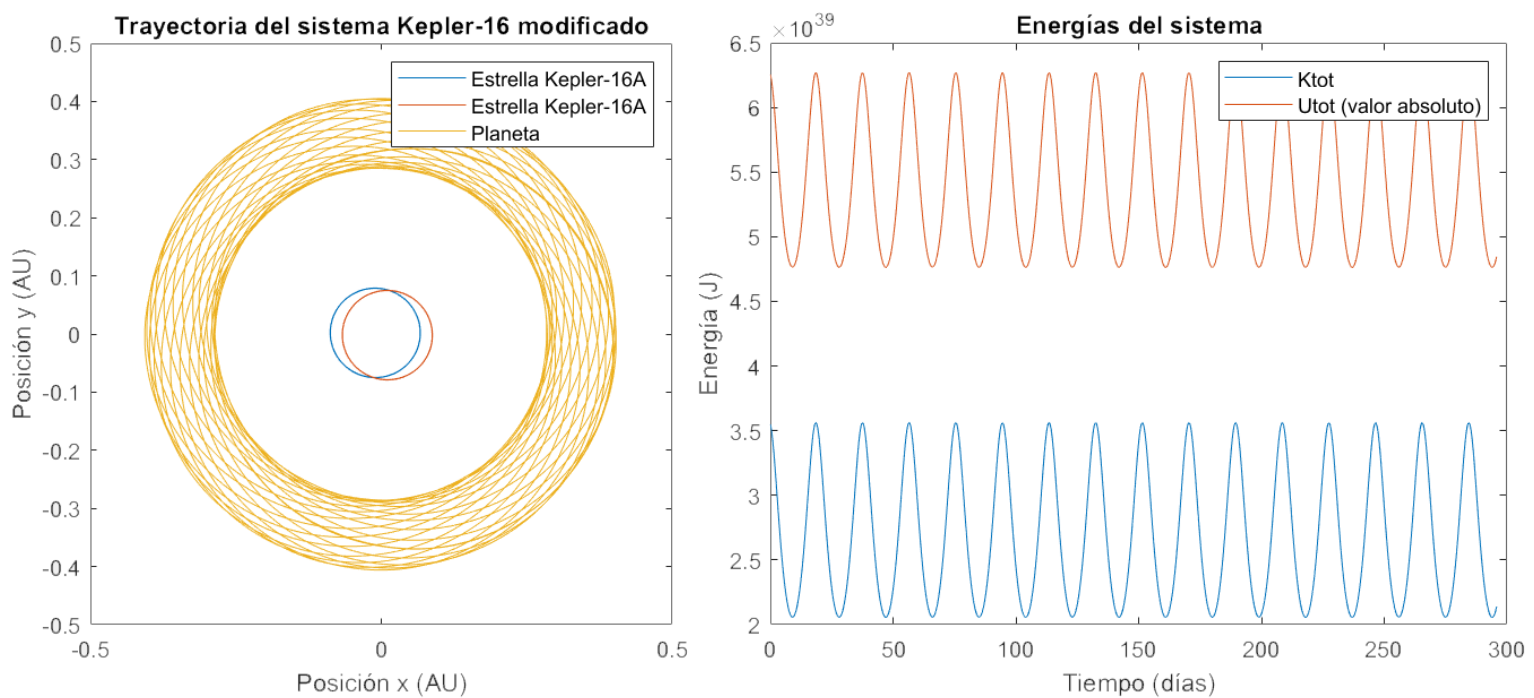


Figura 5. Trayectoria (en 1500 días) y energías cinética y potencial (en valor absoluto) en función del tiempo de la órbita planetaria externa.

Como curiosidad, se añadió un segundo centro de masas (de dos cuerpos) en varios sistemas para ver qué pasaba y, como era de esperar, este orbitaba alrededor del centro de masas común de los tres cuerpos.

4.1.2 Órbitas internas

- Órbita interna alrededor de estrellas con órbita circular

Para conseguir este sistema, se parte del código del anterior. Los cambios efectuados más notables son las posiciones y velocidades iniciales y la masa del planeta. La masa del planeta es 100 veces inferior a la de Júpiter, inferior al resto de planetas del trabajo, por lo que no afecta demasiado a las órbitas de las estrellas al cruzarse con ellas.

Las energías cinética y potencial difieren en $\sim 12.5 \cdot 10^{39}$ J, lo mismo a efectos prácticos que en los casos anteriores, pero varían mucho menos en el tiempo, tan poco que parece que las dos se mantienen constantes. Esto ocurre porque la masa del planeta es muy pequeña, la quinta parte de la de Júpiter, en comparación con la de las estrellas. Por lo tanto, las estrellas son las que más energía aportan al sistema y, al ser sus órbitas muy cercanas a circulares (las estrellas están una en oposición a la otra, a una distancia aproximadamente constante en el tiempo), sus energías potenciales y cinética son aproximadamente constantes.

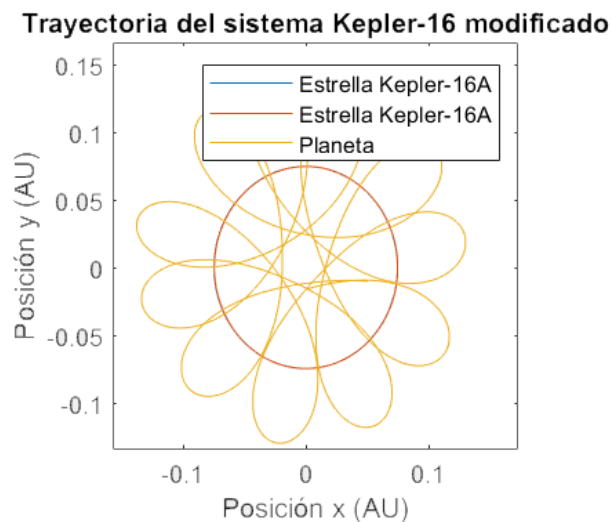


Figura 6. Trayectoria de la órbita planetaria interna alrededor de estrellas en órbita circular.

- Órbita interna, planeta orbitando una de las dos estrellas^[2]

Para conseguir este sistema, lo determinante son las posiciones iniciales, después se ajusta todo para que pueda salir una figura a partir de esas posiciones. La estrategia consiste en dar un valor pequeño a la masa, aunque mayor que la real, y ponerla cerca de una de las estrellas. De esa forma, se asegura que quede confinada al campo gravitatorio de esa estrella.

Cabe mencionar que, para conseguir el sistema anterior, se empieza aproximándose por una parecida a esta, ya que las órbitas deseadas también son internas, y eso otorga los resultados esperados.

En este caso, la variación de las energías cinética y potencial en función del tiempo se debe a dos razones principales, la órbita del planeta alrededor de una de las estrellas, y el movimiento relativo de las estrellas. Como en el caso anterior, las energías las determinan principalmente las estrellas. En cambio, el planeta está tan cerca de una de las estrellas que afecta a su energía y crea oscilaciones pequeñas en las energías totales.

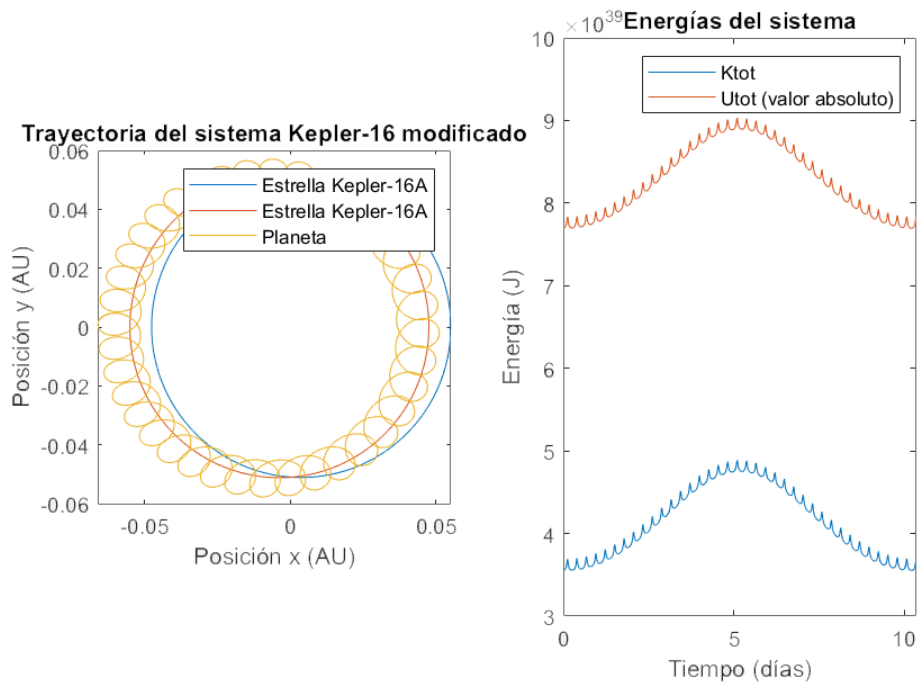


Figura 7. Trayectoria y energías cinética y potencial en valor absoluto en función del tiempo del a órbita interna del planeta alrededor de una de las dos estrellas.

4.2. Órbitas no coplanarias^[4]

Para obtener un sistema con órbitas no coplanarias a partir del sistema Kepler-16, se intercambia la componente y de la estrella Kepler-16B con la componente z y, después de ejecutar el código, se copian las condiciones del último paso, teniendo en cuenta que los sistemas tienden a estabilizarse y estas condiciones son más cercanas a las del sistema estable. El momento angular total se distribuye en todas sus componentes, pero siendo constante en todas ellas, por lo que se conserva en módulo y dirección. La energía mecánica se conserva y la cinética y potencial son periódicas en función del tiempo. Aun reduciendo la masa del planeta drásticamente, las energías fluctúan igual, por lo que la variación de la energía se debe exclusivamente a las órbitas elípticas de las estrellas. Cuando las estrellas están más cerca entre sí, sufren una aceleración mayor y las energías cinética y potencial cambian rápidamente por un tiempo (véanse los mínimos de la energía potencial y máximos de la cinética en la figura 8).

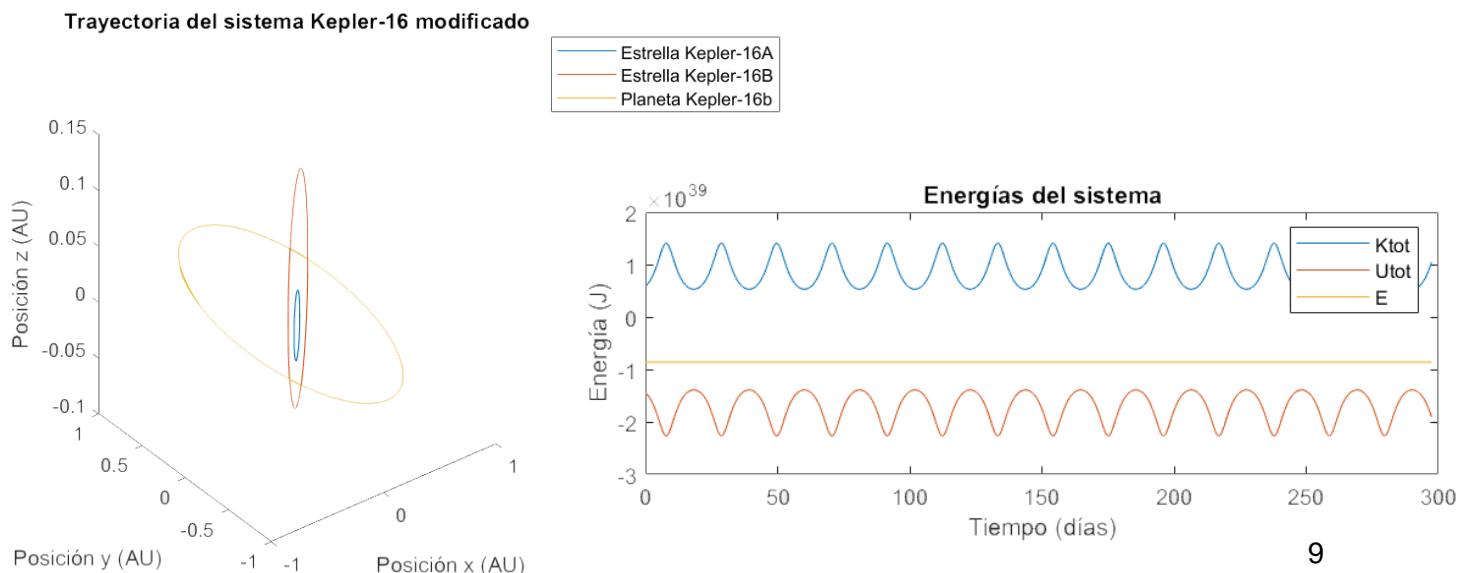


Figura 8. Trayectoria y energías mecánica, cinética y potencial en función del tiempo de las órbitas no coplanarias.

5. Conclusiones:

El objetivo de este trabajo era partir del sistema Kepler-16 y llegar a soluciones estables del problema de los tres cuerpos. Se han logrado sistemas variados, desde órbitas coplanarias a no coplanarias, tanto externas como internas y de formas diferentes.

Se ha observado que la periodicidad de las energías cinética y potencial en función del tiempo está directamente correlacionada con la periodicidad de las órbitas. Se ha encontrado una relación entre la forma de las órbitas y las variaciones en las energías estudiadas. Por otra parte, se han comprobado de forma numérica las leyes de la conservación tanto de la energía total como la del momento angular total (módulo y dirección).

Lo normal es que las órbitas de tres cuerpos no sean estables: que no se atraigan lo suficiente, que un cuerpo sea expulsado y que los otros dos formen un sistema de dos o que los tres objetos choquen en algún momento y se alejen infinitamente.

Finalmente, concluir que el problema de los tres cuerpos alberga una riqueza adicional respecto al de dos, ya que en el de dos las únicas soluciones estables posibles son las secciones cónicas (órbitas coplanarias)^[7]. Se ha estudiado un número limitado de sistemas con la restricción de partir del sistema Kepler-16 y usando la constante de gravitación universal. En cambio, la diversidad real del problema es mucho mayor y todavía es objeto de estudio.

6. Referencias:

1. Sheen, M. (2016, septiembre). *3 Body Solutions*. Github. https://github.com/mws262/MAE5730_examples/tree/master/3BodySolutions
2. Edgeworth, S. (2001b). *Theoretical Orbits of Planets in Binary Star Systems*. S. Edgeworth. <https://www.dsf.unica.it/~fiore/binaryth.pdf>
3. Colaboradores de Wikipedia. (2021, 24 de marzo) *Kepler-16*. Wikipedia, the free Encyclopedia. [Kepler-16 - Wikipedia](#)
4. Henríquez, R. A. (2019). Estabilidad orbital de planetas no coplanares en un sistema estelar binario. *Revista de La Escuela de Física*, 5(1), 1–5. <https://doi.org/10.5377/ref.v5i1.8313>
5. Rechtenwald, Gerald. *Euler's method for Integration of Ordinary Differential Equations for Initial Value Problems*. Portland State University. [ME350 Lecture09 slides ODE Euler.pdf \(pdx.edu\)](#)
6. K. Nikolic, Branislav. (2003) *Verlet Method*. University of Delaware. [Computational Methods of Physics \(udel.edu\)](#)
7. Fratus, Keith. (2015) *The Two-Body Problem*. University of California, Santa Barbara. [TBP.pdf \(ucsb.edu\)](#)
8. Exoplanet Exploration Program. Kepler-16b. NASA. [Kepler-16b \(nasa.gov\)](#)

7. Agradecimientos:

Queríamos agradecer a la UAM por la licencia de Matlab y a Gabino Rubio, nuestro profesor de Computación, por su ayuda en el proyecto, tanto a la hora de plantear el código como al buscar información.