

# 排列组合常用公式

$$1. A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$2. \text{圆排列: } Q_n^m = \frac{A_n^m}{m} = \frac{n!}{m \cdot (n-m)!}$$

$$3. \binom{n}{m} = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$4. \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

$$5. \binom{n}{m} = \frac{n}{m} \binom{n-1}{m-1}$$

$$6. \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

$$7. \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

$$8. \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

$$9. \text{范德蒙恒等式: } \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

$$10. \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$11. \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} = n2^{n-1}$$

$$12. \sum_{i=0}^n i^2 \binom{n}{i} = n(n+1)2^{n-2}$$

$$13. \text{朱世杰恒等式: } \sum_{i=0}^n \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

$$14. \sum_{i=0}^m \binom{n+i}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$$

$$15. \binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k}$$

$$16. \sum_{i=0}^n \binom{n-i}{i} = F_{n+1}, \text{ 其中 } F \text{ 是斐波那契数列}$$

$$17. \text{李善兰恒等式: } \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

$$18. \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = (a+b)^n$$

$$19. \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i = 3^n$$

$$\begin{aligned}
20. H(x) &= \sum_{i=0} \sum_{j+k=i} f(j) \cdot g(k) x^i \\
F(x) &= \sum_{i=0} f(i) x^i \\
G(x) &= \sum_{i=0} g(i) x^i \\
H(x) &= F(x) \cdot G(x)
\end{aligned}$$

## Min-Max容斥

对于满足**全序**关系并且其中元素满足可加减性的序列  $\{x_i\}$ , 设其长度为  $n$ , 并设  $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , 则有:

$$\begin{aligned}
\max_{i \in S} x_i &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min_{j \in T} x_j \\
\min_{i \in S} x_i &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \max_{j \in T} x_j
\end{aligned}$$

对于期望上:

$$\begin{aligned}
E(\max_{i \in S} x_i) &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} E(\min_{j \in T} x_j) \\
E(\min_{i \in S} x_i) &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} E(\max_{j \in T} x_j)
\end{aligned}$$

对于  $k$ th 上:

$$\begin{aligned}
\text{kthmax}_{i \in S} x_i &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} \min_{j \in T} x_j \\
\text{kthmin}_{i \in S} x_i &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} \max_{j \in T} x_j \\
E\left(\text{kthmax}_{i \in S} x_i\right) &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} E\left(\min_{j \in T} x_j\right) \\
E\left(\text{kthmin}_{i \in S} x_i\right) &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} E\left(\max_{j \in T} x_j\right)
\end{aligned}$$

对于 gcd 和 lcm 上:

$$\begin{aligned}
\text{lcm}_{i \in S} x_i &= \prod_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \text{gcd}_{j \in T} x_j \\
\text{gcd}_{i \in S} x_i &= \prod_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \text{lcm}_{j \in T} x_j
\end{aligned}$$

## 错位排列

定义:

设  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  是  $\{1, 2, \dots, n\}$  的一个全排列, 若对任意的  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  都有  $a_i \neq i$ , 则称  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  是  $\{1, 2, \dots, n\}$  的错位排列。

用  $D_n$  表示  $\{1, 2, \dots, n\}$  的错位排列的个数。

递推公式:

$$D_0 = 1, D_1 = 0, D_2 = 1$$

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

通项公式：

$$D_n = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$$

## 自然幂，上升幂、下降幂

自然幂： $m^n$  称作  $m$  的  $n$  次方，公式表达如下：

$$m^n = \prod_{i=0}^{n-1} m$$

上升幂：记作  $m^{\overline{n}}$ ，公式表达如下：

$$m^{\overline{n}} = \prod_{i=0}^{n-1} (m+i) = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!}$$

下降幂：记作  $m^{\underline{n}}$ ，公式表达如下：

$$m^{\underline{n}} = \prod_{i=0}^{n-1} (m-i) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

上升幂和下降幂的转换：

$$(-m)^{\overline{n}} = (-1)^n m^{\overline{n}}$$

$$(-m)^{\underline{n}} = (-1)^n m^{\underline{n}}$$

组合数表示成下降幂形式：

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!}$$

上指标反转：

$$\binom{n}{m} = (-1)^m \binom{m-n-1}{m}$$

## 广义牛顿二项式定理

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} (-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{n-1} x^i$$

常见例子：

1.

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} x^n \\
 &= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n \cdot n!} x^n \\
 &= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1) \cdot 4^n} \binom{2n}{n} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2i-1) \cdot 4^n} \binom{2i}{n} x^n
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 (1-4x)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1) \cdot 4^n} \binom{2n}{n} (-4x)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 (1-4x)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} (-4x)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} (-4x)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} (-4x)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} (-1)^n 4^n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n
 \end{aligned}$$

## 二项式反演

$$f_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} g_i \iff g_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f_i$$

证明:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} f(i) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} g(j) \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j} (-1)^{n-i} g(j) \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{n-i} g(j) \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g(j) \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{n-i} \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g(j) \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} (-1)^{n-j-i} \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g(j) \cdot 0^{n-j} \\
&= g(n)
\end{aligned}$$

## 斐波那契数列

斐波那契数列的定义如下：

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

卢卡斯数列的定义如下：

$$L_0 = 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

斐波那契数列的通项公式为：

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

卢卡斯数列的通项公式为：

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

于是：

$$\frac{L_n + F_n \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

因此有：

$$L_n^2 - 5F_n^2 = -4$$

斐波那契数列的矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

设  $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，可得：

$$\begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 \end{bmatrix} P^n$$

快速倍增法：

$$F_{2k} = F_k (2F_{k+1} - F_k)$$

$$F_{2k+1} = F_{k+1}^2 + F_k^2$$

斐波那契数列的性质：

1.  $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$
2.  $\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n}$
3.  $\sum_{i=1}^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1$
4.  $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$
5.  $F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_n F_{m-1}$
6.  $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$
7.  $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$
8.  $F_n = \frac{F_{n+2} + F_{n-2}}{3}$
9.  $F_{2n} = F_n (F_{n+1} + F_{n-1})$
10.  $\forall k \in \mathbb{N}, F_n | F_{nk}$
11.  $\forall F_a | F_b, a | b$
12.  $\gcd(F_n, F_m) = F_{\gcd(n, m)}$

## 卡特兰数

Catalan 数列  $H_n$  其对应的序列为：

$H_0$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	$H_6$
1	1	2	5	14	42	132

卡特兰数的常见公式：

$$H_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^n H_{i-1}H_{n-i} & n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+ \\ 1 & n = 0, 1 \end{cases}$$

$$H_n = \frac{4n-2}{n+1}H_{n-1}$$

$$H_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

卡特兰数的封闭形式：

$$H_n = \sum_{i=1}^n H_{i-1} H_{n-i} \quad n \geq 2$$

$$H(x) = 1 + xH^2(x)$$

$$H(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} x^n$$

# 斯特林数

## 第二类斯特林数

**第二类斯特林数**（斯特林子集数） $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ ，也可记做  $S(n, k)$ ，表示将  $n$  个两两不同的元素，划分为  $k$  个互不区分的非空子集的方案数。递推式：

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

边界是  $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = [n = 0]$ 。

通项公式：

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i} i^n}{(k-i)! i!}$$

同一行第二类斯特林数的计算：

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{-1^i}{i!} x^i$$

$$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{i!} x^i$$

$$C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} x^i = A(x) * B(x)$$

同一列第二类斯特林数的计算：

暂无

第二类斯特林数的性质：

1.  $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0^n$
2.  $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$
3.  $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$
4.  $\left\{ \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{3^{n-1} + 1}{2} - 2^{n-1}$
5.  $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1$
6.  $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}$

7.  $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-2 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{3} + 3 \cdot \binom{n}{4}$
8.  $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-3 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{4} + 10 \cdot \binom{n}{5} + 15 \cdot \binom{n}{6}$
9.  $\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = B_n$ , 其中  $B_n$  是贝尔数
10.  $\forall n < m, \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n = 0$
11.  $\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^m = m!$
12.  $n^k = \sum_{i=0}^k \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} \cdot i! \cdot \binom{n}{i}$

## 第一类斯特林数

**第一类斯特林数**（斯特林轮换数） $\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ ，也可记做  $s(n, k)$ ，表示将  $n$  个两两不同的元素，划分为  $k$  个互不区分的非空轮换的方案数。

递推式：

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right] + (n-1) \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]$$

边界是  $\left[ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right] = [n=0]$ 。

通项公式：

没有通项公式

第一类斯特林数的性质：

1.  $\left[ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] = (n-1)!$
2.  $\left[ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right] = (n-1)! \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$
3.  $\left[ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right] = \binom{n}{2}$
4.  $\left[ \begin{matrix} n \\ n-2 \end{matrix} \right] = 2 \cdot \binom{n}{3} + 3 \cdot \binom{n}{4}$
5.  $\sum_{i=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right] = n!$

## 贝尔数

贝尔数  $B_n$  表示将  $n$  个互不相同的集合划分成若干个非空集合的方案数。

递推公式：

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i$$

通项公式：

$$B_n = \sum_{i=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\}$$

生成函数：

$$B(x) = e^{e^x - 1}$$

贝尔数的性质：

1.  $\forall p \in \mathbb{P}, B_{p^m+n} = mB_n + B_{n+1}$
2. Bell 数列模质数  $p$  意义下循环节长度为  $\frac{p^p - 1}{p - 1}$

## 分拆数

### 分拆

将自然数  $n$  写成递降正整数和的表示。

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 1$$

### 分拆数

分拆数：  $p_n$  。自然数  $n$  的分拆方法数。

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p_n$	1	1	2	3	5	7	11	15	22

递推公式：

$$F_n = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (F_{n-\frac{k(3k-1)}{2}} + F_{n-\frac{k(3k+1)}{2}}) & n > 0 \end{cases}$$

按照递推公式求分拆数的时间复杂度：  $O(n\sqrt{n})$ 。

生成函数：

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x^{k(3k-1)} + x^{k(3k+1)})}$$

### $k$ 部分拆数

$k$  部分拆数：将  $n$  分成恰有  $k$  个部分的分拆，称为  $k$  部分拆数，记作  $p(n, k)$ 。

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 1$$

$k$  部分拆数  $p(n, k)$  同时也是下面方程的解数：

$$n - k = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 0$$

如果这个方程里面恰有  $j$  个部分非 0，则恰有  $p(n - k, j)$  个解。因此有和式：

$$p(n, k) = \sum_{j=0}^k p(n-k, j)$$

由此可得递推式：

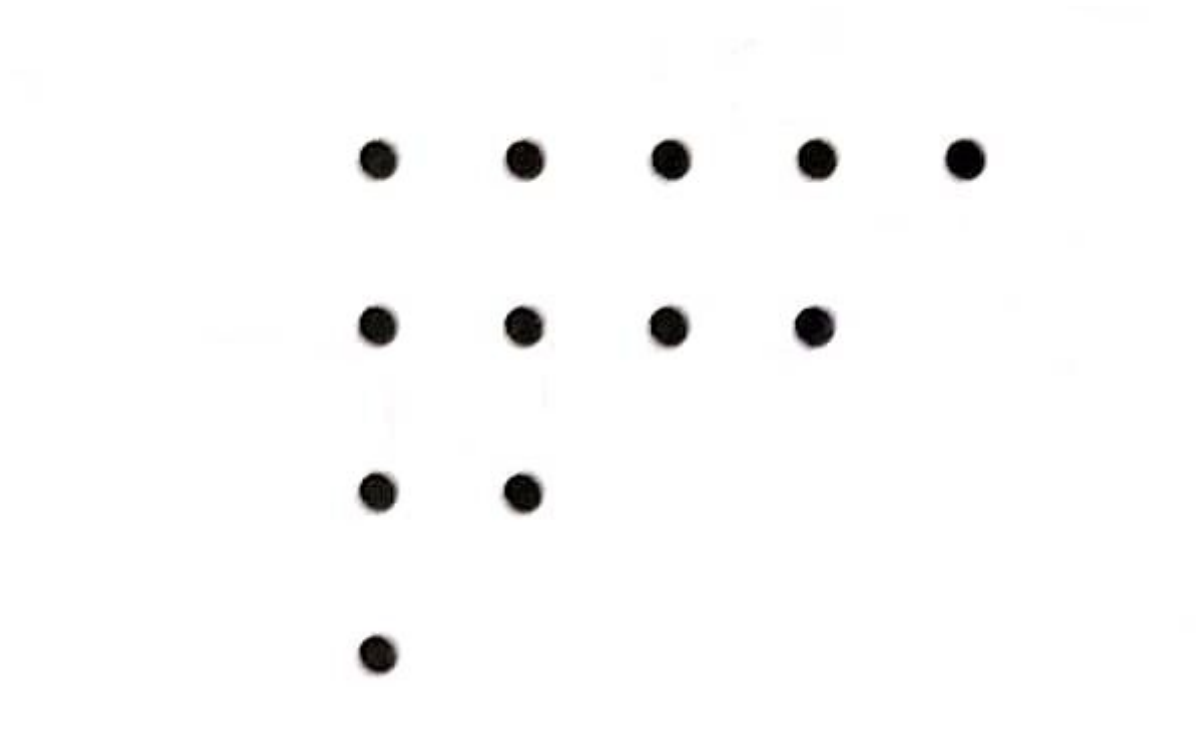
$$p(n, k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k)$$

## Ferrers 图

Ferrers 图：将分拆的每个部分用点组成的行表示。每行点的个数为这个部分的大小。

根据分拆的定义，Ferrers 图中不同的行按照递减的次序排放。最长行在最上面。

例如：分拆  $12 = 5 + 4 + 2 + 1$  的 Ferrers 图。



将一个 Ferrers 图沿着对角线翻转，得到的新 Ferrers 图称为原图的共轭，新分拆称为原分拆的共轭。显然，共轭是对称的关系。

例如上述分拆  $12 = 5 + 4 + 2 + 1$  的共轭是分拆  $12 = 4 + 3 + 2 + 2 + 1$ 。

## 最大 $k$ 分拆数

自然数  $n$  的分拆最大部分为  $k$  的分拆个数。

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 1, \quad x_1 = k$$

根据共轭的定义，有显然结论：

最大  $k$  分拆数与  $k$  部分拆数相同，均为  $p(n, k)$ 。

## 互异分拆

将自然数  $n$  写成互异递降正整数和的表示。

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_1 > x_2 > \dots > x_k \geq 1$$

## 互异分拆数

互异分拆数： $pd_n$ 。自然数  $n$  的各部分互不相同的分拆方法数。

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$pd_n$	1	1	1	2	2	3	4	5	6

## $k$ 部互异分拆数

$k$  部互异分拆数：将  $n$  分成恰有  $k$  个部分的分拆，称为  $k$  部分分拆数，记作  $pd(n, k)$ 。

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_1 > x_2 > \dots > x_k \geq 1$$

$k$  部分互异分拆数  $pd(n, k)$  同时也是下面方程的解数：

$$n - k = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_1 > x_2 > \dots > x_k \geq 0$$

由于互异，新方程中至多只有一个部分为零。

因此直接得到递推：

$$pd(n, k) = pd(n - k, k - 1) + pd(n - k, k)$$

## 普通生成函数

### 定义

序列  $a$  的普通生成函数 (ordinary generating function, OGF) 定义为形式幂级数：

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

$a$  既可以是有穷序列，也可以是无穷序列。常见的例子（假设  $a$  以 0 为起点）：

- 序列  $a = (1, 2, 3)$  的普通生成函数是  $1 + 2x + 3x^2$ 。
- 序列  $a = (1, 1, 1, \dots)$  的普通生成函数是  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 。
- 序列  $a = (1, 2, 4, 8, 16, \dots)$  的生成函数是  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ 。
- 序列  $a = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$  的生成函数是  $\sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)x^n$ 。

换句话说，如果序列  $a$  有通项公式，那么它的普通生成函数的系数就是通项公式。

## 封闭形式

在运用生成函数的过程中，我们不会一直使用形式幂级数的形式，而会适时地转化为封闭形式以更好地化简。

例如  $1, 1, 1, \dots$  的普通生成函数  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ，我们可以发现

$$F(x)x + 1 = F(x)$$

那么解这个方程得到

$$F(x) = \frac{1}{1-x}$$

这就是  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  的封闭形式。

考虑等比数列  $1, p, p^2, p^3, p^4, \dots$  的生成函数  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n x^n$  有

$$\begin{aligned} F(x)px + 1 &= F(x) \\ F(x) &= \frac{1}{1-px} \end{aligned}$$

下列常见数列的普通生成函数（形式幂级数形式和封闭形式）。

1.  $a = (0, 1, 1, 1, 1, \dots)$ 。

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ F(x) &= xF(x) + x \\ F(x) &= \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

2.  $a = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ 。

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \\ F(x) &= x^2 F(x) + 1 \\ F(x) &= \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

3.  $a = (1, 2, 3, 4, \dots)$ 。

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\ F(x) &= xF(x) + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ F(x) &= xF(x) + \frac{1}{1-x} \\ F(x) &= \frac{1}{1-2x+x^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

4.  $a_n = \binom{m}{n}$  ( $m$ 是常数,  $n \geq 0$ ) 。

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n \\ F(x) &= (1+x)^m \end{aligned}$$

5.  $a_n = \binom{m+n}{n}$  ( $m$ 是常数,  $n \geq 0$ ) 。

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} x^n \\ F(x) &= \frac{1}{(1-x)^{m+1}} \end{aligned}$$

## 斐波那契数列的生成函数

斐波那契数列定义为  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n > 1)$ 。

设它的普通生成函数是  $F(x)$ ，那么根据它的递推式，我们可以类似地列出关于  $F(x)$  的方程：

$$F(x) = xF(x) + x^2F(x) + a_0 + a_1x - a_0x$$

解得

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

## 常见生成函数的封闭式

1.  $\sum_{i=0}^n x^{ki} = \frac{1-x^{k(n+1)}}{1-x^k}$
2.  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i x^i = (1+px)^n$
3.  $\sum_{i=0}^{\infty} x^{ki} = \frac{1}{1-x^k}$
4.  $\sum_{i=0}^{\infty} p^i x^i = \frac{1}{1-px}$
5.  $\sum_{i=1}^{\infty} x^i = \frac{x}{1-x}$
6.  $\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)x^i = \frac{1}{(1-x)^2}$
7.  $\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i}{i} x^i = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$

## 指数生成函数

### 定义

序列  $a$  的指数生成函数 (exponential generating function, EGF) 定义为形式幂级数：

$$\hat{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

### 基本运算

$$\begin{aligned}\hat{F}(x)\hat{G}(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} b_j \frac{x^j}{j!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \frac{1}{j!(i-j)!} x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} a_j b_{i-j} \frac{x^i}{i!}\end{aligned}$$

## 常见指数生成函数的封闭式

$$1. e^{px} = \sum_{i=0}^{\infty} p^i \frac{x^i}{i!}$$

$$2. \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

$$3. \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$\begin{aligned} 4. \ln(1+x) &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} (i-1)! \frac{x^i}{i!} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. -\ln(1-x) &= \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)! \frac{x^i}{i!} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots \end{aligned}$$

## 球盒模型

### 模型1

$n$  个**无标号**的球放到  $m$  个**无标号**的盒子中，盒子**允许**为空。

即为  $k$  部分拆数  $p(n, m)$ 。

1. 直接递推

时间复杂度： $O(n^2)$

$$p(n, m) = p(n-1, m-1) + p(n-m, m)$$

### 模型2

$n$  个**无标号**的球放到  $m$  个**无标号**的盒子中，盒子**至多装一个球**。

### 模型3

$n$  个**无标号**的球放到  $m$  个**无标号**的盒子中，盒子**不允许**为空。

### 模型4

$n$  个**无标号**的球放到  $m$  个**有标号**的盒子中，盒子**允许**为空。

## 模型5

$n$  个无标号的球放到  $m$  个有标号的盒子中，盒子至多装一个球。

## 模型6

$n$  个无标号的球放到  $m$  个有标号的盒子中，盒子不允许为空。

## 模型7

$n$  个有标号的球放到  $m$  个无标号的盒子中，盒子允许为空。

## 模型8

$n$  个有标号的球放到  $m$  个无标号的盒子中，盒子至多装一个球。

## 模型9

$n$  个有标号的球放到  $m$  个无标号的盒子中，盒子不允许为空。

## 模型10

$n$  个有标号的球放到  $m$  个有标号的盒子中，盒子允许为空。

## 模型11

$n$  个有标号的球放到  $m$  个有标号的盒子中，盒子至多装一个球。

## 模型12

$n$  个有标号的球放到  $m$  个有标号的盒子中，盒子不允许为空。

## 图论计数

### 外向树的拓扑序：

一棵  $n$  个点的外向树的拓扑序个数为：

$$n! \prod_{i=1}^n \frac{1}{size_i}, size_i \text{ 为节点 } i \text{ 的子树大小}$$

## 欧拉示性公式

对于任意的连通的平面图  $G$  有：

$$n - m + r = 2$$

其中  $n, m, r$  分别为  $G$  的阶数，边数和面数。

# 式子化简

## 例一：

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} \left\lfloor \frac{|i-j|}{2} \right\rfloor \left( |i-j| - \left\lfloor \frac{|i-j|}{2} \right\rfloor \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} \left\lfloor \frac{|i-j|}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{|i-j|}{2} \right\rceil \end{aligned}$$

1. 若  $|i-j|$  为奇数：

$$\left\lfloor \frac{|i-j|}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{|i-j|}{2} \right\rceil = \frac{(i-j)^2}{4}.$$

2. 若  $|i-j|$  为偶数：

$$\left\lfloor \frac{|i-j|}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{|i-j|}{2} \right\rceil = \frac{(i-j)^2 - 1}{4}.$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} \left\lfloor \frac{|i-j|}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{|i-j|}{2} \right\rceil \\ &= \frac{1}{4} \left( \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} (i-j)^2 - \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ |i-j| \text{ is odd}}}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} (i-j)^2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} (i^2 - 2ij + j^2)$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} i^2 = \sum_{i=0}^n i^2 \binom{n}{i} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} = n(n+1)2^{n+m-2}$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} ij = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} \sum_{j=0}^m j \binom{m}{j} = nm2^{n+m-2}$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} j^2 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{j=0}^m j^2 \binom{m}{j} = m(m+1)2^{n+m-2}$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ |i-j| \text{ is odd}}}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} = 2^{n+m-1}$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} \left\lfloor \frac{|i-j|}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{|i-j|}{2} \right\rceil = ((n-m)^2 + n + m - 2)2^{n+m-4}$$

例二：

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x}{1-x-x^2} \\ \frac{1}{1-F(x)} &= \frac{1-x-x^2}{1-2x-x^2} = 1 + \frac{x}{1-2x-x^2} \\ \frac{A}{1-px} + \frac{B}{1-qx} &= \frac{x}{1-2x-x^2} \\ &= \frac{A+B-(Aq+Bp)x}{1-(p+q)x+pqx} \\ A+B &= 0 \\ Aq+Bp &= -1 \\ p+q &= 2 \\ pq &= -1 \\ p-q &= 2\sqrt{2} \\ p=1+\sqrt{2}, q=1-\sqrt{2} \\ A &= \frac{\sqrt{2}}{4}, B = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{1}{1-(1+\sqrt{2})x} - \frac{1}{1-(1-\sqrt{2})x} \right) &= \frac{\sqrt{2}}{4} \sum_{i=0}^{\infty} ((1+\sqrt{2})^i - (1-\sqrt{2})^i) x^i \end{aligned}$$

常用模数原根表

$p = r \times 2^k + 1$

$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{v}$	$\mathfrak{d}$
3	1	1	2
5	1	2	2
17	1	4	3
97	3	5	5
193	3	6	5
257	1	8	3
7681	15	9	17
12289	3	12	11
40961	5	13	3
65537	1	16	3
786433	3	18	10
5767169	11	19	3
7340033	7	20	3

$p$	$r$	$k$	$g$
23068673	11	21	3
104857601	25	22	3
167772161	5	25	3
469762049	7	26	3
754974721	45	23	11
998244353	119	23	3
1004535809	479	21	3
2013265921	15	27	31
2281701377	17	27	3
3221225473	3	30	5
75161927681	35	31	3
77309411329	9	33	7
206158430209	3	36	22
2061584302081	15	37	7
2748779069441	5	39	3
6597069766657	3	41	5
39582418599937	9	42	5
79164837199873	9	43	5
263882790666241	15	44	7
1231453023109121	35	45	3
1337006139375617	19	46	3
3799912185593857	27	47	5
4222124650659841	15	48	19
7881299347898369	7	50	6
31525197391593473	7	52	3
180143985094819841	5	55	6
1945555039024054273	27	56	5
4179340454199820289	29	57	3

$$F_n = m * (m-1)^{n-1} - (m-1)F_{n-2}$$

$$G(x) = \sum_{i=1} m * (m-1)^{i-1} x^i$$

$$G(x) = \frac{\frac{m}{m-1}}{1 - (m-1)x} - \frac{m}{m-1}$$

$$F(x) = x + x^3$$

$$F(x) = G(x) - (m-1)F(x) * x^2$$