

排列组合常用公式

$$1. A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$2. \text{圆排列: } Q_n^m = \frac{A_n^m}{m} = \frac{n!}{m \cdot (n-m)!}$$

$$3. \binom{n}{m} = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$4. \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

$$5. \binom{n}{m} = \frac{n}{m} \binom{n-1}{m-1}$$

$$6. \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

$$7. \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

$$8. \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

$$9. \text{范德蒙恒等式: } \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

$$10. \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$11. \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} = n2^{n-1}$$

$$12. \sum_{i=0}^n i^2 \binom{n}{i} = n(n+1)2^{n-2}$$

$$13. \text{朱世杰恒等式: } \sum_{i=0}^n \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

$$14. \sum_{i=0}^m \binom{n+i}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$$

$$15. \binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k}$$

$$16. \sum_{i=0}^n \binom{n-i}{i} = F_{n+1}, \text{ 其中 } F \text{ 是斐波那契数列}$$

$$17. \text{李善兰恒等式: } \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

$$18. \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = (a+b)^n$$

$$19. \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i = 3^n$$

$$20. H(x) = \sum_{i=0} \sum_{j+k=i} f(j) \cdot g(k) x^i$$

$$F(x) = \sum_{i=0} f(i) x^i$$

$$G(x) = \sum_{i=0} g(i) x^i$$

$$H(x) = F(x) \cdot G(x)$$

Min-Max容斥

对于满足全序关系并且其中元素满足可加减性的序列 $\{x_i\}$, 设其长度为 n , 并设 $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, 则有:

$$\begin{aligned} \max_{i \in S} x_i &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min_{j \in T} x_j \\ \min_{i \in S} x_i &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \max_{j \in T} x_j \end{aligned}$$

对于期望上:

$$\begin{aligned} E(\max_{i \in S} x_i) &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} E(\min_{j \in T} x_j) \\ E(\min_{i \in S} x_i) &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} E(\max_{j \in T} x_j) \end{aligned}$$

对于 k th 上:

$$\begin{aligned} \text{kthmax } x_i &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} \min_{j \in T} x_j \\ \text{kthmin } x_i &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} \max_{j \in T} x_j \\ E\left(\text{kthmax}_{i \in S} x_i\right) &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} E\left(\min_{j \in T} x_j\right) \\ E\left(\text{kthmin}_{i \in S} x_i\right) &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} E\left(\max_{j \in T} x_j\right) \end{aligned}$$

对于 gcd 和 lcm 上:

$$\begin{aligned} \text{lcm } x_i &= \prod_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \gcd_{j \in T} x_j \\ \text{gcd } x_i &= \prod_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \text{lcm}_{j \in T} x_j \end{aligned}$$

错位排列

定义:

设 (a_1, a_2, \dots, a_n) 是 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个全排列, 若对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 都有 $a_i \neq i$, 则称 (a_1, a_2, \dots, a_n) 是 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的错位排列。

用 D_n 表示 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的错位排列的个数。

递推公式:

$$D_0 = 1, D_1 = 0, D_2 = 1$$

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

通项公式：

$$D_n = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$$

自然幂，上升幂、下降幂

自然幂： m^n 称作 m 的 n 次方，公式表达如下：

$$m^n = \prod_{i=0}^{n-1} m$$

上升幂：记作 $m^{\bar{n}}$ ，公式表达如下：

$$m^{\bar{n}} = \prod_{i=0}^{n-1} (m+i) = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!}$$

下降幂：记作 $m^{\underline{n}}$ ，公式表达如下：

$$m^{\underline{n}} = \prod_{i=0}^{n-1} (m-i) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

上升幂和下降幂的转换：

$$(-m)^{\bar{n}} = (-1)^n m^{\underline{n}}$$

$$(-m)^{\underline{n}} = (-1)^n m^{\bar{n}}$$

组合数表示成下降幂形式：

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!}$$

上指标反转：

$$\binom{n}{m} = (-1)^m \binom{m-n-1}{m}$$

广义牛顿二项式定理

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} (-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{n-1} x^i$$

常见例子：

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} x^n \\
&= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n \cdot n!} x^n \\
1. \quad &= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1) \cdot 4^n} \binom{2n}{n} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1) \cdot 4^n} \binom{2n}{n} x^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1-4x)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1) \cdot 4^n} \binom{2n}{n} (-4x)^n \\
2. \quad &= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1-4x)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} (-4x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} (-4x)^n \\
3. \quad &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} (-4x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} (-1)^n 4^n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n
\end{aligned}$$

二项式反演

$$f_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} g_i \iff g_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f_i$$

证明：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} f(i) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} g(j) \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j} (-1)^{n-i} g(j) \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{n-i} g(j) \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g(j) \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{n-i} \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g(j) \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} (-1)^{n-j-i} \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g(j) \cdot 0^{n-j} \\
&= g(n)
\end{aligned}$$

斐波那契数列

斐波那契数列的定义如下：

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

卢卡斯数列的定义如下：

$$L_0 = 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

斐波那契数列的通项公式为：

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

卢卡斯数列的通项公式为：

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

于是：

$$\frac{L_n + F_n \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

因此有：

$$L_n^2 - 5F_n^2 = -4$$

斐波那契数列的矩阵形式：

$$[F_{n-1} \quad F_n] = [F_{n-2} \quad F_{n-1}] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

设 $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 可得：

$$[F_n \quad F_{n+1}] = [F_0 \quad F_1] P^n$$

快速倍增法：

$$\begin{aligned} F_{2k} &= F_k (2F_{k+1} - F_k) \\ F_{2k+1} &= F_{k+1}^2 + F_k^2 \end{aligned}$$

斐波那契数列的性质：

1. $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$
2. $\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n}$
3. $\sum_{i=1}^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1$
4. $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$
5. $F_{n+m} = F_{n+1} F_m + F_n F_{m-1}$
6. $F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$
7. $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$
8. $F_n = \frac{F_{n+2} + F_{n-2}}{3}$
9. $F_{2n} = F_n (F_{n+1} + F_{n-1})$
10. $\forall k \in \mathbb{N}, F_n | F_{nk}$
11. $\forall F_a | F_b, a | b$
12. $\gcd(F_n, F_m) = F_{\gcd(n,m)}$

卡特兰数

Catalan 数列 H_n 其对应的序列为：

H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6
1	1	2	5	14	42	132

卡特兰数的常见公式：

$$\begin{aligned} H_n &= \begin{cases} \sum_{i=1}^n H_{i-1} H_{n-i} & n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+ \\ 1 & n = 0, 1 \end{cases} \\ H_n &= \frac{4n-2}{n+1} H_{n-1} \\ H_n &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \end{aligned}$$

卡特兰数的封闭形式：

$$H_n = \sum_{i=1}^n H_{i-1} H_{n-i} \quad n \geq 2$$

$$H(x) = 1 + xH^2(x)$$

$$H(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} x^n$$

斯特林数

第二类斯特林数

第二类斯特林数 (斯特林子集数) $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$, 也可记做 $S(n, k)$, 表示将 n 个两两不同的元素, 划分为 k 个互不区分的非空子集的方案数。递推式:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

边界是 $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = [n=0]$ 。

通项公式:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i} i^n}{(k-i)! i!}$$

同一行第二类斯特林数的计算:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{-1^i}{i!} x^i$$

$$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{i!} x^i$$

$$C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} x^i = A(x) * B(x)$$

同一列第二类斯特林数的计算:

暂无

第二类斯特林数的性质:

1. $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0^n$
2. $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$
3. $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$
4. $\left\{ \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{3^{n-1} + 1}{2} - 2^{n-1}$
5. $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1$
6. $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}$

$$7. \left\{ \begin{matrix} n \\ n-2 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{3} + 3 \cdot \binom{n}{4}$$

$$8. \left\{ \begin{matrix} n \\ n-3 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{4} + 10 \cdot \binom{n}{5} + 15 \cdot \binom{n}{6}$$

$$9. \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = B_n, \text{ 其中 } B_n \text{ 是贝尔数}$$

$$10. \forall n < m, \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n = 0$$

$$11. \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^m = m!$$

$$12. n^k = \sum_{i=0}^k \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} \cdot i! \cdot \binom{n}{i}$$

第一类斯特林数

第一类斯特林数 (斯特林轮换数) $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$, 也可记做 $s(n, k)$, 表示将 n 个两两不同的元素, 划分为 k 个互不区分的非空轮换的方案数。

递推式:

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right] + (n-1) \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]$$

边界是 $\left[\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right] = [n=0]$ 。

通项公式:

没有通项公式

第一类斯特林数的性质:

$$1. \left[\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] = (n-1)!$$

$$2. \left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right] = (n-1)! \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$$

$$3. \left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right] = \binom{n}{2}$$

$$4. \left[\begin{matrix} n \\ n-2 \end{matrix} \right] = 2 \cdot \binom{n}{3} + 3 * \binom{n}{4}$$

$$5. \sum_{i=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right] = n!$$

贝尔数

贝尔数 B_n 表示将 n 个互不相同的集合划分成若干个非空集合的方案数。

递推公式:

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i$$

通项公式：

$$B_n = \sum_{i=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\}$$

生成函数：

$$B(x) = e^{e^x - 1}$$

贝尔数的性质：

1. $\forall p \in \mathbb{P}, B_{p^m+n} = mB_n + B_{n+1}$
2. Bell 数列模质数 p 意义下循环节长度为 $\frac{p^p - 1}{p - 1}$

分拆数

分拆

将自然数 n 写成递降正整数和的表示。

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 1$$

分拆数

分拆数： p_n 。自然数 n 的分拆方法数。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_n	1	1	2	3	5	7	11	15	22

递推公式：

$$F_n = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (F_{n-\frac{k(3k-1)}{2}} + F_{n-\frac{k(3k+1)}{2}}) & n > 0 \end{cases}$$

按照递推公式求分拆数的时间复杂度： $O(n\sqrt{n})$ 。

生成函数：

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x^{k(3k-1)} + x^{k(3k+1)})}$$

k 部分分拆数

k 部分分拆数：将 n 分成恰有 k 个部分的分拆，称为 k 部分分拆数，记作 $p(n, k)$ 。

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 1$$

k 部分分拆数 $p(n, k)$ 同时也是下面方程的解数：

$$n - k = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 0$$

如果这个方程里面恰有 j 个部分非 0，则恰有 $p(n - k, j)$ 个解。因此有和式：

$$p(n, k) = \sum_{j=0}^k p(n - k, j)$$

由此可得递推式：

$$p(n, k) = p(n - 1, k - 1) + p(n - k, k)$$

Ferrers 图

Ferrers 图：将分拆的每个部分用点组成的行表示。每行点的个数为这个部分的大小。

根据分拆的定义，Ferrers 图中不同的行按照递减的次序排放。最长行在最上面。

例如：分拆 $12 = 5 + 4 + 2 + 1$ 的 Ferrers 图。



将一个 Ferrers 图沿着对角线翻转，得到的新 Ferrers 图称为原图的共轭，新分拆称为原分拆的共轭。显然，共轭是对称的关系。

例如上述分拆 $12 = 5 + 4 + 2 + 1$ 的共轭是分拆 $12 = 4 + 3 + 2 + 2 + 1$ 。

最大 k 分拆数

自然数 n 的分拆最大部分为 k 的分拆个数。

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 1, \quad x_1 = k$$

根据共轭的定义，有显然结论：

最大 k 分拆数与 k 部分拆数相同，均为 $p(n, k)$ 。

互异分拆

将自然数 n 写成互异递降正整数和的表示。

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_1 > x_2 > \dots > x_k \geq 1$$

互异分拆数

互异分拆数: pd_n 。自然数 n 的各部分互不相同的分拆方法数。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_n	1	1	1	2	2	3	4	5	6

k 部互异分拆数

k 部互异分拆数: 将 n 分成恰有 k 个部分的分拆, 称为 k 部分拆数, 记作 $pd(n, k)$ 。

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_1 > x_2 > \dots > x_k \geq 1$$

k 部分互异拆数 $pd(n, k)$ 同时也是下面方程的解数:

$$n - k = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_1 > x_2 > \dots > x_k \geq 0$$

由于互异, 新方程中至多只有一个部分为零。

因此直接得到递推:

$$pd(n, k) = pd(n - k, k - 1) + pd(n - k, k)$$

普通生成函数

定义

序列 a 的普通生成函数 (ordinary generating function, OGF) 定义为形式幂级数:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

a 既可以是有穷序列, 也可以是无穷序列。常见的例子 (假设 a 以 0 为起点) :

1. 序列 $a = (1, 2, 3)$ 的普通生成函数是 $1 + 2x + 3x^2$ 。
2. 序列 $a = (1, 1, 1, \dots)$ 的普通生成函数是 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 。
3. 序列 $a = (1, 2, 4, 8, 16, \dots)$ 的生成函数是 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ 。
4. 序列 $a = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ 的生成函数是 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)x^n$ 。

换句话说, 如果序列 a 有通项公式, 那么它的普通生成函数的系数就是通项公式。

封闭形式

在运用生成函数的过程中, 我们不会一直使用形式幂级数的形式, 而会适时地转化为封闭形式以更好地化简。

例如 $1, 1, 1, \dots$ 的普通生成函数 $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, 我们可以发现

$$F(x)x + 1 = F(x)$$

那么解这个方程得到

$$F(x) = \frac{1}{1-x}$$

这就是 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的封闭形式。

考虑等比数列 $1, p, p^2, p^3, p^4, \dots$ 的生成函数 $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n x^n$ 有

$$\begin{aligned} F(x)p + 1 &= F(x) \\ F(x) &= \frac{1}{1-px} \end{aligned}$$

下列常见数列的普通生成函数 (形式幂级数形式和封闭形式)。

1. $a = (0, 1, 1, 1, 1, \dots)$ 。

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ F(x) &= xF(x) + x \\ F(x) &= \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

2. $a = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ 。

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \\ F(x) &= x^2 F(x) \\ F(x) &= \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

3. $a = (1, 2, 3, 4, \dots)$ 。

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\ F(x) &= xF(x) + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ F(x) &= xF(x) + \frac{1}{1-x} \\ F(x) &= \frac{1}{1-2x+x^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

4. $a_n = \binom{m}{n}$ (m 是常数, $n \geq 0$)。

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n \\ F(x) &= (1+x)^m \end{aligned}$$

5. $a_n = \binom{m+n}{n}$ (m 是常数, $n \geq 0$)。

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} x^n \\ F(x) &= \frac{1}{(1-x)^{m+1}} \end{aligned}$$

斐波那契数列的生成函数

斐波那契数列定义为 $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n > 1$)。

设它的普通生成函数是 $F(x)$, 那么根据它的递推式, 我们可以类似地列出关于 $F(x)$ 的方程:

$$F(x) = xF(x) + x^2F(x) + a_0 + a_1x - a_0x$$

解得

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

常见生成函数的封闭式

$$1. \sum_{i=0}^n x^{ki} = \frac{1 - x^{kn+k}}{1 - x^k}$$

$$2. \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i x^i = (1 + px)^n$$

$$3. \sum_{i=0}^{\infty} x^{ki} = \frac{1}{1 - x^k}$$

$$4. \sum_{i=0}^{\infty} p^i x^i = \frac{1}{1 - px}$$

$$5. \sum_{i=1}^{\infty} x^i = \frac{x}{1 - x}$$

$$6. \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)x^i = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$7. \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i}{i} x^i = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

指数生成函数

定义

序列 a 的指数生成函数 (exponential generating function, EGF) 定义为形式幂级数:

$$\hat{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

基本运算

$$\begin{aligned} \hat{F}(x)\hat{G}(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} b_j \frac{x^j}{j!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \frac{1}{j!(i-j)!} x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} a_j b_{i-j} \frac{x^i}{i!} \end{aligned}$$

常见指数生成函数的封闭式

$$1. e^{px} = \sum_{i=0}^{\infty} p^i \frac{x^i}{i!}$$

$$2. \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

$$3. \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$4. \ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} (i-1)! \frac{x^i}{i!}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i}$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$5. -\ln(1-x) = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)! \frac{x^i}{i!}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}$$
$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

球盒模型

模型1

n 个无标号的球放到 m 个无标号的盒子中，盒子允许为空。

即为 k 部分拆数 $p(n, m)$ 。

1. 直接递推

时间复杂度： $O(n^2)$

$$p(n, m) = p(n-1, m-1) + p(n-m, m)$$

模型2

n 个无标号的球放到 m 个无标号的盒子中，盒子至多装一个球。

模型3

n 个无标号的球放到 m 个无标号的盒子中，盒子不允许为空。

模型4

n 个无标号的球放到 m 个有标号的盒子中，盒子允许为空。

模型5

n 个无标号的球放到 m 个有标号的盒子中，盒子至多装一个球。

模型6

n 个无标号的球放到 m 个有标号的盒子中，盒子不允许为空。

模型7

n 个有标号的球放到 m 个无标号的盒子中，盒子允许为空。

模型8

n 个有标号的球放到 m 个无标号的盒子中，盒子至多装一个球。

模型9

n 个有标号的球放到 m 个无标号的盒子中，盒子不允许为空。

模型10

n 个有标号的球放到 m 个有标号的盒子中，盒子允许为空。

模型11

n 个有标号的球放到 m 个有标号的盒子中，盒子至多装一个球。

模型12

n 个有标号的球放到 m 个有标号的盒子中，盒子不允许为空。

图论计数

外向树的拓扑序：

一棵 n 个点的外向树的拓扑序个数为：

$$n! \prod_{i=1}^r \frac{1}{size_i}, size_i \text{ 为节点 } i \text{ 的子树大小}$$

欧拉示性公式

对于任意的连通的平面图 G 有：

$$n - m + r = 2$$

其中 n, m, r 分别为 G 的阶数，边数和面数。

式子化简

例一：

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} \left\lfloor \frac{|i-j|}{2} \right\rfloor \left(|i-j| - \left\lfloor \frac{|i-j|}{2} \right\rfloor \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} \left\lfloor \frac{|i-j|}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{|i-j|}{2} \right\rceil \end{aligned}$$

1. 若 $|i-j|$ 为奇数：

$$\left\lfloor \frac{|i-j|}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{|i-j|}{2} \right\rceil = \frac{(i-j)^2}{4}.$$

2. 若 $|i-j|$ 为偶数：

$$\left\lfloor \frac{|i-j|}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{|i-j|}{2} \right\rceil = \frac{(i-j)^2 - 1}{4}.$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} \left\lfloor \frac{|i-j|}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{|i-j|}{2} \right\rceil \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} (i-j)^2 - \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ |i-j| \text{ is odd}}}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} \right) \\ & \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} (i-j)^2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} (i^2 - 2ij + j^2) \\ & \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} i^2 = \sum_{i=0}^n i^2 \binom{n}{i} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} = n(n+1)2^{n+m-2} \\ & \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} ij = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} \sum_{j=0}^m j \binom{m}{j} = nm2^{n+m-2} \\ & \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} j^2 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{j=0}^m j^2 \binom{m}{j} = m(m+1)2^{n+m-2} \\ & \quad \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ |i-j| \text{ is odd}}}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} = 2^{n+m-1} \\ & \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} \left\lfloor \frac{|i-j|}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{|i-j|}{2} \right\rceil = ((n-m)^2 + n + m - 2)2^{n+m-4} \end{aligned}$$

例二：

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{x}{1-x-x^2} \\
 \frac{1}{1-F(x)} &= \frac{1-x-x^2}{1-2x-x^2} = 1 + \frac{x}{1-2x-x^2} \\
 \frac{A}{1-px} + \frac{B}{1-qx} &= \frac{x}{1-2x-x^2} \\
 &= \frac{A+B-(Aq+Bp)x}{1-(p+q)x+pqx} \\
 A+B &= 0 \\
 Aq+Bp &= -1 \\
 p+q &= 2 \\
 pq &= -1 \\
 p-q &= 2\sqrt{2} \\
 p &= 1+\sqrt{2}, q = 1-\sqrt{2} \\
 A &= \frac{\sqrt{2}}{4}, B = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\
 \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{1-(1+\sqrt{2})x} - \frac{1}{1-(1-\sqrt{2})x} \right) &= \frac{\sqrt{2}}{4} \sum_{i=0}^{\infty} ((1+\sqrt{2})^i - (1-\sqrt{2})^i) x^i
 \end{aligned}$$

常用模数原根表

$$p = r \times 2^k + 1$$

b	a	f	d
3	1	1	2
5	1	2	2
17	1	4	3
97	3	5	5
193	3	6	5
257	1	8	3
7681	15	9	17
12289	3	12	11
40961	5	13	3
65537	1	16	3
786433	3	18	10
5767169	11	19	3
7340033	7	20	3

p	r	k	g
23068673	11	21	3
104857601	25	22	3
167772161	5	25	3
469762049	7	26	3
754974721	45	23	11
998244353	119	23	3
1004535809	479	21	3
2013265921	15	27	31
2281701377	17	27	3
3221225473	3	30	5
75161927681	35	31	3
77309411329	9	33	7
206158430209	3	36	22
2061584302081	15	37	7
2748779069441	5	39	3
6597069766657	3	41	5
39582418599937	9	42	5
79164837199873	9	43	5
263882790666241	15	44	7
1231453023109121	35	45	3
1337006139375617	19	46	3
3799912185593857	27	47	5
4222124650659841	15	48	19
7881299347898369	7	50	6
31525197391593473	7	52	3
180143985094819841	5	55	6
1945555039024054273	27	56	5
4179340454199820289	29	57	3

$$F_n = m * (m - 1)^{n-1} - (m - 1) F_{n-2}$$

$$G(x) = \sum_{i=1} m * (m - 1)^{i-1} x^i$$

$$G(x) = \frac{\frac{m}{m-1}}{1-(m-1)x}-\frac{m}{m-1}$$

$$F(x)=x+x^3$$

$$F(x)=G(x)-(m-1)F(x)*x^2$$