Linguaggi di Programmazione AA 2023-2024 2023-07 Progetto E4P

Polinomi Multivariati

Marco Antoniotti e Fabio Sartori Dipartimento di Informatica, Sistemistica e Comunicazione Università degli Studi di Milano Bicocca

4 luglio, 2024

Scadenza

La consegna del progetto è fissata per il giorno 24 luglio 2024 entro le 23:55 GMT+1.

1 Introduzione

Una delle prime e più importanti applicazioni dei calcolatori fu la manipolazione simbolica di operazioni matematiche. In particolare, i sistemi noti come Computer Algebra Systems (cfr., Mathematica, Maple, Maxima, Axiom, etc.) forniscono funzionalità per la manipolazione di polinomi multivariati.

Lo scopo di questo progetto è la costruzione di due librerie (in Prolog ed in Common Lisp) per la manipolazione – per l'appunto – di polinomi multivariati.

Ma prima ancora, lo scopo di questo progetto è che

...leggiate bene e con cura TUTTE le istruzioni per la consegna.

Le trovate nella Sezione 8.

1.1 Polinomi multivariati

Un polinomio multivariato è un'espressione matematica che contiene diverse *variabili* a cui possono essere associati dei valori in un certo *dominio*¹. Due esempi sono (con le solite regole di associatività):

$$x^2 + y^2$$
,
 $42 \times x \times y^3 - z^2 \times y \times w \times x - x^3 \times w^3$.

Il secondo polinomio viene normalmente riscritto in modo compatto come:

$$42xy^3 - z^2ywx - x^3w^3$$

omettendo il simbolo di moltiplicazione \times .

Un polinomio è composto da *monomi*: i termini corrispondenti alle moltiplicazioni di *coefficienti* (elementi del dominio) e delle variabili (elevate a potenze). Nel secondo esempio qui sopra i monomi sono

$$42xy^3,$$

$$-z^2ywx,$$

$$-x^3w^3.$$

¹Il dominio deve in realtà essere un campo algebrico $\mathbf{F} = \langle U, +, \times \rangle$.

Notate anche che il polinomio qui sopra può anche essere scritto come

$$-w^3x^3 + 42xy^3 - wxyz^2$$
,

ovvero riordinando i monomi (i quali a loro volta sono ordinati secondo un preciso schema).

Buona parte di questo progetto consiste nel costruire delle procedure di riordinamento delle variabili (con le loro potenze) in un monomio e dei monomi in un polinomio.

2 Operazioni da implementare e rappresentazione

Le librerie che implementerete dovranno contenere alcune operazioni standard per la manipolazione di vari polinomi: estrazione dei coefficienti, calcolo del grado del polinomio, sua valutazione in un punto $\mathbf{v} = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ (dove k è il numero di variabili che compaiono nel polinomio), somma, moltiplicazione, etc, etc.

La rappresentazione di monomi e polinomi dovrà essere la seguente.

```
Prolog. I monomi devono essere rappresentati da termini siffatti:
```

```
m(Coefficient, TotalDegree, VarsPowers)
per i quali si può scrivere il predicato<sup>2</sup>:
is_monomial(m(_C, TD, VPs)) :-
    integer(TD),
    TD >= 0,
    is_list(VPs).
```

Tralasciamo al momento come controllare Coefficient. La lista VarsPowers contiene termini come il seguente:

```
v(Power, VarSymbol)
per i quali possiamo scrivere il predicato:
is_varpower(v(Power, VarSymbol)) :-
    integer(Power),
    Power >= 0,
    atom(VarSymbol).
```

Ovvero la query seguente è verificata.

```
?- m(_, _, [v(2, x), v(2, y)]) = m(_, _, VPs),
| foreach(member(VP, VPs), is_varpower(VP)).
| VPs = [v(2, x), v(2, y)]
```

I polinomi sono rappresentati da termini più semplici.

```
poly(Monomials)
```

dove Monomials è una lista di monomi. Ovvero possiamo scrivere:

```
is_polynomial(poly(Monomials)) :-
    is_list(Monomials),
    foreach(member(M, Monomials), is_monomial(M)).
```

 $^{^2}$ Non è necessario che usiate esattamente questo ed altri predicati o funzioni presentati nel testo.

Common Lisp. I monomi devono essere rappresentati (analogamente al caso del Prolog) con oggetti siffatti:

Sorvoliamo anche in questo caso su come controllare coefficient. La lista vars-n-powers contiene termini come il seguente:

```
(v power var-symbol)
per i quali possiamo scrivere il predicato:
(defun is-varpower(vp)
  (and (listp vp)
       (eq 'v (first vp))
       (let ((p (varpower-power vp))
              (v (varpower-symbol vp))
          (and (integerp p)
               (>= p 0)
               (symbolp v)))))
Anche nel caso Common Lisp, i polinomi sono rappresentati da termini più semplici.
(poly monomials)
Ovvero possiamo scrivere:
(defun is-polynomial (p)
  (and (listp p)
       (eq 'poly (first p))
       (let ((ms (monomials p)))
         (and (listp ms)
               (every #'is-monomial ms)))))
```

(Naturalmente possiamo aggiungere atri test di consistenza delle strutture dati).

Rappresentazioni dello zero. Il monomio pari al numero 0 è rappresentato con m(0, 0, []) in Prolog e con (M 0 0 ()) in Common Lisp. Le vostre implementazioni devono normalizzare lo zero a questi casi. Naturalmente, anche il polinomio poly([]) in Prolog e il polinomio (POLY ()) in Common Lisp sono rappresentazioni dello 0.

Note. Ripetiamo! I predicati e le funzioni riportate nel testo sono solo *esempi*, non necessariamente completi. Le vostre versioni possono essere diverse e tener conto di più casi.

2.1 Operazioni da implementare

Le vostre librerie dovranno implementare le operazioni seguenti. Notate che ci si aspetta che i vostri algoritmi ritornino sempre monomi e polinomi "minimizzati". Ad esempio, $2x + y^3 - 2x \Rightarrow y^3$.

Prolog. I predicati che dovrete implementare (oltre a quelli descritti sopra) servono a ispezionare le strutture dati e a fare calcoli simbolici con i polinomi.

$Predicate is_zero(X)$

Il predicato è vero quanto X è una rappresentazione dello 0 (incluso, ovviamente il caso in cui sia proprio 0).

Predicate coefficients (Poly, Coefficients)

Il predicato coefficients è vero quando Coefficients è una lista dei – ovviamente – coefficienti di Poly.

Predicate variables(Poly, Variables)

Il predicato variables è vero quando Variables è una lista dei simboli di variable che appaiono in Poly.

Predicate monomials (Poly, Monomials)

Il predicato monomials è vero quando Monomials è la lista – ordinata, si veda sotto – dei monomi che appaiono in Poly.

Predicate max_degree(Poly, Degree)

Il predicato max_degree è vero quando Degree è il massimo grado dei monomi che appaiono in Poly.

Predicate min_degree(Poly, Degree)

Il predicato min_degree è vero quando Degree è il minimo grado dei monomi che appaiono in Poly.

Predicate mvp_plus(Poly1, Poly2, Result)

Il predicato mvp_plus è vero quando Result è il polinomio somma di Poly1 e Poly2.

Predicate mvp_minus(Poly1, Poly2, Result)

Il predicato mvp_minus è vero quando Result è il polinomio differenza di Poly1 e Poly2.

Predicate mvp_times(Poly1, Poly2, Result)

Il predicato mvp_times è vero quando Result è il polinomio risultante dalla moltiplicazione di Poly1 e Poly2.

Predicate as_monomial(Expression, Monomial)

Il predicato as_monomial è vero quando *Monomial* è il termine che rappresenta il monomio risultante dal "parsing" dell'espressione *Expression*; il monomio risultante deve essere appropriatamente ordinato (si veda sotto).

Predicate as_polynomial(Expression, Polynomial)

Il predicato as_polynomial è vero quando *Polynomial* è il termine che rappresenta il polinomio risultante dal "parsing" dell'espressione *Expression*; il polinomio risultante deve essere appropriatamente ordinato (si veda sotto).

Predicate mvp_val(Polynomial, VariableValues, Value)

Il predicato mvp_val è vero quanto *Value* contiene il valore del polinomio *Polynomial* (che può anche essere un monomio), nel punto *n*-dimensionale rappresentato dalla lista *VariableValues*, che contiene un valore per ogni variabile ottenuta con il predicato variables/2.

$Predicate \ pprint_polynomial(Polynomial)$

Il predicato pprint_polynomial risulta vedo dopo aver stampato (sullo "standard output") una rappresentazione **tradizionale** del termine polinomio associato a *Polynomial*. Si puó omettere il simbolo di moltiplicazione.

Common Lisp. Le funzioni che dovrete implementare (oltre a quelle descritti sopra) servono a ispezionare le strutture dati e a fare calcoli simbolici con i polinomi.

Si noti che in Common Lisp sarà necessario costruire anche delle funzioni che servono ad estrarre parti delle varie strutture dati he rappresentano monomi e polinomi. In Prolog possiamo usare l'unificazione per ottenere questo risultato, in Common Lisp no^3 .

$Function \; ext{is-zero} \; X o Result$

La funzione ritorna T come Result, quando X è una rappresentazione dello 0 (incluso, ovviamente il caso in cui sia proprio 0).

$Function \ ext{var-powers} \ Monomial ightarrow VP ext{-}list$

Data una struttura Monomial, ritorna la lista di varpowers VP-list.

$Function \ \mathtt{vars} ext{-of} \ Monomial o Variables$

Data una struttura Monomial, ritorna la lista di variabili Variables.

$Function \ { t monomial-degree} \ Monomial ightarrow \ Total Degree$

Data una struttura Monomial, ritorna il suo grado totale TotalDegree.

$Function ext{ monomial-coefficient } Monomial o Coefficient$

Data una struttura Monomial, ritorna il suo coefficiente Coefficient.

Function coefficients Poly o Coefficients

La funzione coefficients ritorna una lista Coefficients dei – ovviamente – coefficienti di Poly.

$Function \ { t variables} \ Poly ightarrow Variables$

La funzione variables ritorna una lista Variables dei simboli di variabile che appaiono in Poly.

$Function \ \mathtt{monomials} \ Poly o Monomials$

La funzione monomials ritorna la lista – ordinata, si veda sotto – dei monomi che appaiono in Poly.

$Function \; { t max-degree} \; Poly ightarrow Degree$

La funzione max-degree ritorna il massimo grado dei monomi che appaiono in Poly.

$Function \ \mathtt{min-degree} \ Poly o Degree$

La funzione min-degree ritorna il minimo grado dei monomi che appaiono in Poly.

$Function \; exttt{mvp-plus} \; Poly1 \; Poly2 ightarrow Result$

La funzione mvp-plus produce il polinomio somma di Poly1 e Poly2.

³A meno di implementare un "unificatore" per CL, ovviamente.

$Function \; exttt{mvp-minus} \; Poly1 \; Poly2 \; ightarrow \; Result$

La funzione mvp-minus produce il polinomio differenza di Poly1 e Poly2.

$Function \; exttt{mvp-times} \; Poly1 \; Poly2 \; ightarrow \; Result$

La funzione myp-times ritorna il polinomio risultante dalla moltiplicazione di Poly1 e Poly2.

$Function ext{ as-monomial } Expression o Monomial$

La funzione as-monomial ritorna la struttura dati (lista) che rappresenta il monomio risultante dal "parsing" dell'espressione *Expression*; il monomio risultante deve essere appropriatamente ordinato (si veda sotto)

$Function ext{ as-polynomial } Expression o Polynomial$

La funzione as-polynomial ritorna la struttura dati (lista) che rappresenta il monomio risultante dal "parsing" dell'espressione *Expression*; il polinomio risultante deve essere appropriatamente ordinato (si veda sotto).

$Function \; exttt{mvp-val} \; Polynomial \; Variable Values ightarrow \; Value$

La funzione mvp-val restituisce il valore Value del polinomio Polynomial (che può anche essere un monomio), nel punto n-dimensionale rappresentato dalla lista Variable Values, che contiene un valore per ogni variabile ottenuta con la funzione variables.

$Function \; exttt{pprint-polynomial} \; Polynomial \; o \; NIL$

La funzione pprint-polynomial ritorna NIL dopo aver stampato (sullo "standard output") una rappresentazione **tradizionale** del termine polinomio associato a *Polynomial*. Si puó omettere il simbolo di moltiplicazione.

3 Ordinamento di monomi e polinomi multivariati

Un polinomio univariato è normalmente scritto in ordine decrescente (o crescente) delle potenze della variabile. Ad esempio:

$$y^4 - 3y^2 - 42y + 123$$
.

I monomi ed i polinomi multivariati possono essere invece scritti e "ordinati" in molti modi diversi; ognuno di questi ordinamenti ha una sua funzione in *Computer Algebra*. Per questo progetto dovrete implementare il seguente ordinamento.

Ordinamento di un monomio. Un monomio deve essere ordinato in *ordine lessicografico crescente* delle variabili. Ovvero:

$$y^{42}x^4sz^2t^2 \Rightarrow st^2x^4y^{42}z^2$$
.

Si noti come l'esponente non modifichi l'ordinamento.

Ordinamento di un polinomio. Dato un insieme di monomi (ordinati), il polinomio risultante sarà ordinato prima in *ordine crescente del grado dei monomi* con spareggi determinati dalle variabili (questa è la ragione per tener traccia del grado complessivo di un monomio). Ad esempio:

$$y^4zx^5 - yzr + y^4rz^5 \Rightarrow -ryz + ry^4z^5 + x^5y^4z.$$

L'ordinamento di due monomi con le stesse variabili va fatto in modo $\it crescente$ rispetto alle combinazioni variabile/esponente. Ad esempio:

$$ac + a^2 + ab + a \Rightarrow a + ab + ac + a^2$$
.

Dove $ab \prec a^2$, dato che $a \prec a^2$.

Indicazioni per l'implementazione

I vostri predicati as_monomial, as_polynomial e le vostre funzioni as-monomial e as-polynomial dovranno tenere presenti questi ordinamenti. I predicati di libreria SWI sort/4 e msort serviranno a questa bisogna; lo stesso dicasi per la funzione Common Lisp sort⁴. La produzione di strutture dati che non rispettano questi ordinamenti risulterà in voti insufficienti.

4 "Parsing" di polinomi

I predicati as_monomial, as_polynomial e le funzioni as-monomial e as-polynomial si preoccupano di trasformare un monomio e un polinomio nella rappresentazione canonica interna. Il loro ruolo è quello di fare il *parsing* di una rappresentazione superficiale di monomi e polinomi. Queste rappresentazioni sono diverse per Prolog e Common Lisp.

Prolog In questo caso la rappresentazione superficiale di monomi e polinomi è quella normale, con moltiplicazioni e potenze esplicite. Per semplicità potete sempre aspettarvi di avere il coefficiente come primo elemento; il coefficiente 1 può sempre essere omesso. Ad esempio:

(N.B. L'ultimo esempio è stato indentato manualmente per facilitare la lettura).

Common Lisp In questo secondo caso, la rappresentazione superficiale di monomi e polinomi utilizza la semplice sintassi prefissa Common Lisp. Anche in questo caso, potete sempre aspettarvi che il primo coefficiente di un monomio sia il primo elemento e che il coefficiente 1 può sempre essere omesso. Ad esempio:

(N.B. L'ultimo esempio è stato indentato manualmente per facilitare la lettura).

 $^{^4}$ Attenzione che la sort di Common Lisp è una funzione cosiddetta "distruttiva"; è sempre bene *copiare* il suo input prima di invocarla.

Come potete notare i polinomi in sintassi Common Lisp sono molto semplici: hanno un + come operatore principale, expt per indicare le potenze e l'eventuale segno di sottrazione - è inglobato nel coefficiente. La sintassi superficiale dei polinomi è la seguente:

5 Esempi

Questi sono alcuni esempi di come si può usare questa libreria. NB. Dovete naturalmente essere preparati a calcolare anche altri esempi.

Common Lisp

Prolog

```
?- as_monomial(42, QD).
QD = m(42, 0, []).
?- as_polynomial(-1 * x + x * y, P1).
P1 = poly([m(-1, 1, [v(1, x)]), m(1, 2, [v(1, x), v(1, y)])])
?- as_polynomial(-1 * x + x * y, P1), variables(P1, Vs).
P1 = poly([m(-1, 1, [v(1, x)]), m(1, 2, [v(1, x), v(1, y)])])
```

6 Suggerimenti

Si suggerisce di procedere inizialmente con la costruzione dei predicati as_... e delle funzioni as-... e con il predicato pprint_polynomial e la funzione pprint-polynomial, al fine di avere una base su cui poi costruire le operazioni successive. Le funzionalità di ordinamento di Prolog, (sort, msort, predsort, ...) e di Common Lisp (sort) sono senz'altro utili per il progetto. Per Prolog sarà utile anche list_to_set; per Common Lisp potrete anche considerare remove-duplicates.

7 Conclusioni

La libreria di funzioni che avrete costruito è un primo passo verso la costruzione di un sistema di Computer Algebra quali MathematicaTM, Maxima, Axiom etc.

La rappresentazione di polinomi e monomi non è necessariamente la migliore e sono molte le variazioni sul tema; lo scopo di questa rappresentazione è di coniugare semplicità e flessibilità, oltre ad essere facile da manipolare⁵. Qualora si vogliano fare operazioni più sofisticate sui polinomi, ad esempio, calcolare il **gcd** di due polinomi o calcolare una *base di Gröbner*, allora sarà necessario adottare delle rappresentazioni e degli ordinamenti diversi.

⁵Specie per il correttore.

8 Istruzioni...

LEGGERE ATTENTAMENTE LE ISTRUZIONI QUI SOTTO (IN ITALIANO!).

PRIMA DI CONSEGNARE, CONTROLLATE **ACCURATAMENTE** CHE TUTTO SIA NEL FORMATO E CON LA STRUTTURA DI CARTELLE RICHIESTI.

8.1 Versioni Prolog e Common Lisp

Le versioni Prolog e Common Lisp che usiamo per la valutazione sono le più recenti pubblicate sui siti SWI Prolog (https://www.swi-prolog.org/download/stable) e Lispworks (http://www.lispworks.com/downloads/index.html).

8.2 Consegna

Dovete consegnare:

```
Uno .zip file dal nome <Cognome>_<Nome>_<matricola>_mvp_LP_202407.zip che conterrà una cartella dal nome <Cognome>_<Nome>_<matricola>_mvp_LP_202407.
```

Se il vostro nome e cognome sono: Gian Giacomo Pier Carl Luca Serbelloni Lupmann Vien Dal Mare, allora il nome del file sarà:

```
Serbelloni_Lupmann_Vien_Dal_Mare_Gian_Giacomo_Pier_Carl_Luca_123456_mvp_LP_202407.zip.
```

Questo file deve contenere una sola directory con lo stesso nome del file stesso. Al suo interno si devono trovare un file chiamato Gruppo.txt e due sottodirectory chiamate rispettivamente Lisp e Prolog. Al loro interno ciascuna sottodirectory deve contenere i rispettivi files, caricabili e interpretabili in automatico, più tutte le istruzioni che ritenete necessarie. Il file Prolog deve chiamarsi mvp.pl ed il file Lisp deve chiamarsi mvp.lisp. Entrambe le directory devono contenere un file di testo chiamato README.txt. In altre parole, questa è la struttura della directory (folder, cartella) una volta spacchettata.

```
Cognome_Nome_Matricola_mvp_LP_202406
Gruppo.txt
Lisp
mvp.lisp
README.txt
Prolog
mvp.pl
README.txt
```

Potete aggiungere altri files, ma il loro caricamento dovrà essere fatto automaticamente al momento del caricamento ("loading") dei files sopracitati. Il file Gruppo.txt deve contenere, in ordine alfabetico, il nome dei componenti del gruppo, uno per linea con il formato

Cognome<tab>Nome<tab>Matricola

Fate molta attenzione ai caratteri di tabulazione. Le prime righe dei files mvp.pl e mvp.lisp dovranno contenere i nomi e le matricole delle persone che hanno svolto il progetto in gruppo; in ordine alfabetico e con il formato da usarsi per il file Gruppo.txt.

ATTENZIONE! Consegnate solo dei files e directories con nomi costruiti come spiegato. Niente spazi extra e soprattutto niente .rar or .7z o .tgz - solo .zip!

Repetita juvant! NON CONSEGNARE FILES .rar!!!!

Nel caso non si sia capito: NON CONSEGNARE FILES .rar!!!!

Esempio:

File .zip:

Antoniotti_Marco_424242_mvp_LP_202407.zip

Che contiene:

prompt\$ unzip -1 Antoniotti_Marco_424242_mvp_LP_202407.zip
Archive: Antoniotti_Marco_424242_mvp_LP_202407.zip

Length	Date	Time	Name
0	12-02-24	09:59	Antoniotti_Marco_424242_mvp_LP_202407/
0	12-04-24	09:55	Antoniotti_Marco_424242_mvp_LP_202407/Gruppo.txt
0	12-04-24	09:55	Antoniotti_Marco_424242_mvp_LP_202407/Lisp/
4783	12-04-24	09:51	Antoniotti_Marco_424242_mvp_LP_202407/Lisp/mvp.lisp
10598	12-04-24	09:53	Antoniotti_Marco_424242_mvp_LP_202407/Lisp/README.txt
0	12-04-24	09:55	Antoniotti_Marco_424242_mvp_LP_202407/Prolog/
4623	12-04-24	09:51	Antoniotti_Marco_424242_mvp_LP_202407/Prolog/mvp.pl
10622	12-04-24	09:53	Antoniotti_Marco_424242_mvp_LP_202407/Prolog/README.txt
30626			7 files

8.3 Valutazione

Il programma sarà valutato sulla base di una serie di test standard. In particolare si valuterà la copertura e correttezza delle operazione di base sui polinomi.