État de l'art

Simulation de variables aléatoires

5 mai 2020

Étudiants :

Tigzirine	Suliman	suliman.tigzirine@um6p.ma
Lechguar	Yassine	yassine.lechguar@um6p.ma
BADIDI	Amine	amin.badidi@um6p.ma

Professeur :

Name SURNAME

Keywords : Keyword 1; Keyword 2; Keyword 3; Keyword 4; Keyword 5

Abstract :

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Nunc ultrices urna ligula, sit amet congue eros efficitur ac. Curabitur aliquet nisl quis gravida consectetur. Nam condimentum varius elit id condimentum. Cras sem leo, pharetra at scelerisque a, sodales sed elit. Suspendisse eleifend felis in orci suscipit, sed lobortis diam maximus. Duis efficitur mollis nunc, ut accumsan nunc molestie id. Morbi rhoncus fringilla enim vel dapibus. Nulla rutrum, dui et ultricies vestibulum, lectus erat maximus magna, non efficitur risus velit a mauris. Praesent dapibus egestas turpis et blandit.

Table des matières

Introduction

Praesent dictum dapibus nisl, eu maximus mi blandit maximus. Morbi id accumsan nibh. Morbi et molestie purus. Sed pretium egestas lectus vitae pretium. Duis feugiat tempor augue, in rutrum nisl venenatis non. Ut sagittis arcu eget elit sodales luctus. Aliquam nec sagittis dolor. Cras pretium, lorem tincidunt congue dapibus, est lacus ornare nunc, eu iaculis neque odio in lacus. Vivamus dictum id mi sit amet pretium. Ut hendrerit in lacus quis dignissim. Donec eget consequat magna, pellentesque mollis libero. Mauris in sem molestie, mollis metus nec, fermentum tortor. Duis ut tempor nisi. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae ;

Aliquam elit est, sagittis ac enim vitae, finibus tristique lectus. Proin maximus velit tortor, ut fermentum purus aliquet sit amet. Quisque vitae fermentum enim, vitae feugiat nibh. Ut semper odio vitae mauris tincidunt fermentum. Suspendisse ornare congue lectus, ac commodo lectus euismod in. Duis eu scelerisque tortor. Vestibulum venenatis arcu id lectus bibendum ullamcorper. Integer vel bibendum tellus. Nullam quis accumsan lorem. Sed sed tempus dui. Nulla justo felis, iaculis a turpis eu, hendrerit gravida est. Etiam felis enim, accumsan cursus tellus et, faucibus dapibus lacus. Fusce ac mollis elit. Vestibulum pulvinar consectetur ipsum non congue. Vestibulum id ligula est. Sed vehicula ligula molestie molestie facilisis.

Ut pulvinar sodales tempus. Sed efficitur felis eu imperdiet sollicitudin. Quisque quis cursus purus, id accumsan quam. Vivamus vitae nibh facilisis, accumsan purus ut, blandit nibh. Donec mollis quam ac libero laoreet luctus. Proin blandit fringilla massa sit amet sollicitudin. Nunc ac tempor arcu. Etiam sit amet metus urna. Quisque eleifend vulputate purus, blandit iaculis nisi hendrerit quis. Cras tempus, velit sed tempor congue, neque neque lobortis tortor, in gravida ante justo at erat. Maecenas mollis, quam id placerat auctor, ipsum metus mattis tellus, non sollicitudin turpis mauris eget nibh.

Aliquam id rutrum nisi, id aliquet nulla. Pellentesque luctus magna eget nunc malesuada suscipit. Suspendisse dignissim nibh at purus ultricies, quis tempus sem mollis. Phasellus nec mauris vitae arcu suscipit fermentum vitae quis justo. Interdum et malesuada fames ac ante ipsum primis in faucibus. Integer sed enim viverra, efficitur dui a, pretium magna. Nullam vulputate condimentum neque, non pretium erat gravida et. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Quisque eu ultricies sapien. In id urna nulla. Nunc consequat tortor eget leo imperdiet elementum. Praesent in erat ipsum. Nullam convallis, arcu at tincidunt cursus, lorem ex finibus magna, ac feugiat augue magna sed neque. Aliquam suscipit pellentesque lectus. Sed ac tellus nec lorem sollicitudin varius.

1 Loi d'une variable aléatoire réelle - Fonction de répartition

1.1 Variable aléatoire réelle et sa loi

$\mathbb{R}$ sera toujours muni de sa tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Rappel 1. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $]-\infty, a] \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.*

Définition 1.1. Une **variable aléatoire réelle** $X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est telle que pour tout $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on a $X^{-1}(B) = \{X \in B\} \in \mathscr{A}$.
X est une application mesurable de $(\Omega, \mathscr{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

On pose :

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B).$$

Alors la loi P_X de X est une probabilité sur (R,B(R)).
Question : Comment caractériser $\mathbb{P}_X$?
Grosse difficulté : $\mathbb{R}$ est constitué d'une infinité **non dénombrable** de singletons.

1.2 Fonction de répartition

Définition 1.2. On appelle **fonction de répartition** de X la fonction suivante :

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x) \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1. *La fonction de répartition F_X caractérise la probabilité $\mathbb{P}_X$ et elle vérifie les trois conditions suivantes :*

1. *elle est croissante*
2. *elle est continue à droite*
3. $\liminf_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\limsup_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Corollaire 1. *Si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition, alors elles ont la même loi.*

Ce corollaire est un résultat d'unicité.

Théorème 1. *Si F vérifie les conditions (1)–(3) ci-dessus, c'est la fonction de répartition d'une (unique) probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. (Admis).*

Ce théorème est un résultat d'existence. Il existe une probabilité μ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ telle que pour tout $x \in (R)$,

$$F(x) = \mu(]-\infty, x]).$$

C'est un théorème de construction de mesure qui est très délicat à montrer.
On ne peut pas en général définir cette probabilité sur la tribu $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ des parties de $\mathbb{R}$.
Comme F_X est croissante, elle admet une limite à gauche en chaque point, notée $F_X(x-)$, et $F_X(x-) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x])$.

$$\mathbb{P}_X(]x,y]) = \mathbb{P}(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x), \tag{1}$$
$$\mathbb{P}_X([x,y]) = \mathbb{P}(x \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(x-). \tag{2}$$

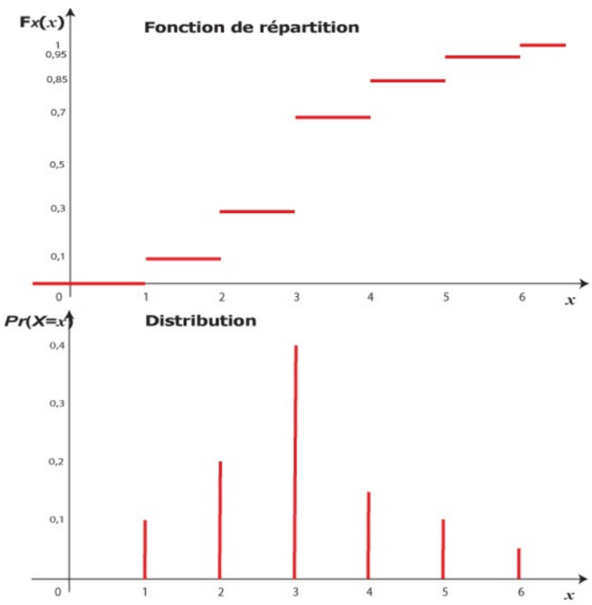
En particulier, $\mathbb{P}_X(\{x\}) = F_X(x) - F_X(x-)$ est le saut de la fonction F_X au point x. On a donc

Proposition 2.

$$\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) = 0 \iff F_X \text{ est continue en } x.$$

Exemple 1.1. *$F(x) = x$ sur $[0,1]$, avec $F(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $F(x) = 1$ pour $x \geq 1$ détermine une probabilité appelée **probabilité uniforme sur** $[0,1]$ ou encore **mesure de Lebesgue sur** $[0,1]$, qui correspond à "la longueur" des intervalles.*

Remarque 1. Si X prend un nombre fini de valeurs, sa fonction de répartition est une fonction en escalier.



2 Loi d'une variable aléatoire à densité

2.1 Variable aléatoire à densité

Définition 2.1. 1. Soit X une variable aléatoire. On dit que X **a une loi de densité** f et que $P_{\mathbf{X}}$ **a pour densité** f, si pour tout réel x,

$$F_{\mathbf{X}}(x) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}(]-\infty,x]) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y) fy.$$

Dans ce cas

$$\mathbb{P}(X = x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Une fonction réelle f sur $\mathbb{R}$ est appelée une **densité de probabilité**, ou simplement une "densité", si elle est positive, intégrable, et vérifie

$$\int_{\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Remarque fondamentale 1. *Si f est une densité de probabilité, la fonction F définie par*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

est une fonction qui vérifie les propriétés (1), (2), (3). Elle permet donc de définir une unique probabilité μ sur R, telle que

$$\mu(]-\infty,x]) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy.$$

si μ est la loi de X, alors $\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$.

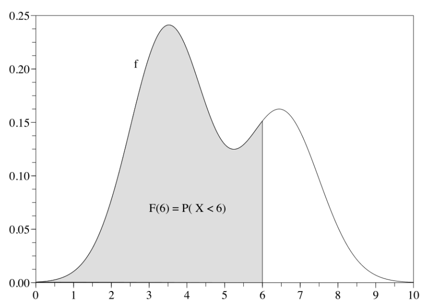


FIGURE 1 – Graphe de la densité f.

Proposition 3. 1. *Soit X de loi de densité f. La fonction F_X est dérivable en tout point x où f est continue, et*

$$F_X'(x) = f(x).$$

2. *Si F_X est dérivable en tout point, alors X a une loi de densité*

$$f = F_X'.$$

Preuve:
Dérivée d'une intégrale fonction de sa borne supérieure. ■

Interprétation 1. *si Δx est un "petit" accroissement de la quantité x, on a (si du moins f est continue en x) :*

$$f(x) \sim \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} = \frac{\mathbb{P}_X([x, x+\Delta x])}{\Delta x}.$$

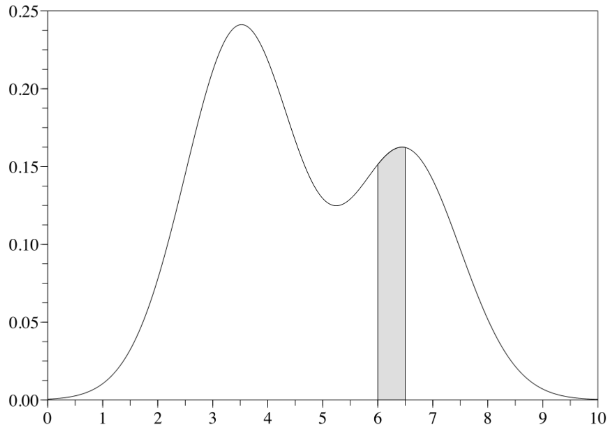


FIGURE 2 – $f(6) \sim \frac{(F_X(6.5) - F_X(6))}{0.5}$.

2.2 Lois usuelles et simulation

2.2.1 Variable aléatoire uniforme

•Variable aléatoire uniforme sur $[a,b]$, $a < b$: $X(\Omega) = [a,b]$, et

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Autant de chances de tomber au voisinage de chaque point de $[a,b]$.

Exemple 2.1. *Horaires navette Massy-Ecole Polytechnique : 8h12, 8h20, 8h26, 8h32.*
- *L'arrivée du RER suit une variable uniforme sur [8h15,8h30].*
- *Probabilité d'attendre la navette moins de 3 minutes ?*
- *Probabilité d'attendre plus de 5 minutes ?*

2.2.2 Simulation d'une variable aléatoire

- **But : générer les valeurs d'une variable aléatoire X de fonction de répartition F donnée**.
- Cas le plus simple :simuler les valeurs d'une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0,1]$.
- On utilise un générateur de nombres pseudo-aléatoires : fonction "RANDOM" de l'ordinateur.

— Pour simuler X, on peut souvent se ramener à la simulation de U,
en utilisant une inversion de la fonction de répartition de X

.

Théorème 2. *Soit F une fonction vérifiant les propriétés (1), (2), (3). Soit $F^1 :]0,1[\to \mathbb{R}$, l'inverse généralisée de F :*

$$F^1(u) = \min\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq u\},$$

alors $X = F^1(U)$ est une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$, où $\mathbb{P}_X$ a pour fonction de répartition F.

Preuve:

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x).$$

■

Conclusion 1. *Pour simuler X, on simule U en utilisant rand et on calcule son image par F^{-1}.*

Exemple 2.2. *X variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p.*
— *Si $U \in [0,1-p[$, on pose $X = 0$,*
— *Si $U \in [1-p,1]$, on pose $X = 1$.*

2.2.3 Variable aléatoire exponentielle

Définition 2.2. **X suit la loi exponentielle de paramètre** $\lambda > 0 : X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{P}_X$ admet la loi de densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{sinon .} \end{cases}$$

On la note $\mathscr{E}(\lambda)$.

Modélisation d'une durée de vie ou d'un temps d'attente entre événements spécifiques :
— durée de vie d'une bactérie
— durée d'une conversation téléphonique
— temps entre deux tremblements de terre.

2.2.4 Loi exponentielle sans mémoire

$X : \Omega \to \mathbb{R}_+$.
Propriété de non-vieillissement :

$$\mathbb{P}(X > t+s | X > t) = \mathbb{P}(X > s) = e^{-\lambda s}.$$

Exemple 2.3. *hypothèse naturelle pour modéliser des durées de vie d'atomes radioactifs.*

Propriété caractéristique : si $t \to \rho(t) = P(X > t)$ verifie

$$\rho(t+s) = \rho(t)\rho(s)$$

on a (en dérivant en s, avec $s = 0$),

$$\rho'(t) = -\rho(t)\lambda \quad \text{avec} \quad \lambda = -\rho'(0) \geq 0.$$

Ainsi $\rho(t) = e^{-\lambda t}$ et $f(t) = e^{-\lambda t}$ (Loi exponentielle). ($\rho(0) = 1$.)

Simulation d'une v.a. de loi $\mathscr{E}(\lambda), \lambda > 0$:

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad \forall x \geq 0.$$

Ainsi, si $u \in [0,1[$,

$$F^{-1}(u) = -(1/\lambda)\log(1-u).$$

On simulera donc une loi uniforme U et on posera

$$X = -\frac{1}{\lambda}\log U.$$

X est une variable aléatoire de loi $\mathscr{E}(\lambda)$.
En effet, les variables aléatoires U et $1-U$ ont même loi.

2.2.5 Lois Gamma

Définition 2.3. **X suit la loi gamma de paramètres $\beta, \alpha > 0$** si $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{P}_X$ admet la loi de densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

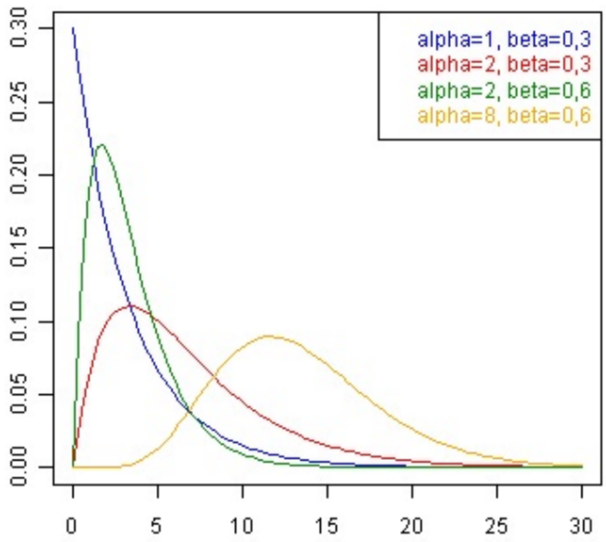


FIGURE 3 – Densités Gamma.

2.2.6 Variable aléatoire normale (variable gaussienne)

Définition 2.4. On appelle **variable aléatoire normale centrée réduite** une variable aléatoire X de loi de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

Remarque 2.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

En effet

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x)f(y)dxdy = \frac{1}{2\pi}\int\int e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}dxdy$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi}e^{-\rho^2/2}\rho d\rho = 1. \text{ (passage en polaire)}$$

f n'a pas de primitive évidente : tables numériques.

Pour $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, **une variable normale Y de loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$ a pour densité**

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}).$$

Distribution normale :

- taille d'un individu choisi au hasard
- composantes de la vitesse d'une molécule de gaz
- erreur de mesure d'une quantité physique.

taille d'un individu choisi au hasard composantes de la vitesse d'une molécule de gaz erreur de mesure d'une quantité physique.

Approximation de toute somme de variables aléatoires indépendantes et de même loi : **théorème de la limite centrale**.

3 Simuler des variables aléatoires

But : générer une X variable aléatoire à partir d'une variable aléatoire uniforme $U \sim \mathcal{U}([0,1])$.

3.1 Simuler le hasard avec un ordinateur

De très nombreuses applications :

Simulations de phénomènes physiques, méthodes de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales, étude de tests statistiques, simulation de fonctionnement de réseaux, cryptographie, imagerie, algorithmes probabilistes, etc.

Pourquoi le terme SIMULER ?

Parce qu'un ordinateur exécute un algorithme, c'est-à-dire une suite d'opérations parfaitement déterminées.

L'idée est de produire une suite de nombres suffisamment imprévisibles qui « imite » une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes uniformes dans l'intervalle [0,1[.

Fonction " **random** " des langages de programmation courants

Elle est basée sur la suite de nombres $(X_n)_{n\geq 1}$ vérifiant une relation de récurrence

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \mod M$$

On prend

$$U_n = \frac{X_n}{M} \in [0,1[$$

Exemple de *Scilab (https ://www.scilab.org/fr)* :

$$M = 2^{31}; \quad a = 843314861; \quad c = 453816693$$

Il faut initialiser la suite, c'est-à-dire donner X_0 (la « graine »,*seed* en anglais)

Exemple de *Scilab* : la graine par défaut est 0.

Si on ne change pas la graine, on obtient donc toujours la même suite (U_n). (Pratique pour pouvoir avoir des simulations reproductibles.)
On peut automatiser l'initialisation en utilisant l'horloge de l'ordinateur.
La suite (U_n) est périodique : il y a un rang n_0 tel que $U_{n_0} + k = U_k$ pour tout $k \geq 1$ (mémoire finie de l'ordinateur).
Il faut donc que la période soit plus grande que le nombre de termes de (U_n) qu'on utilise !
Exemple de *Scilab* : $n_0 = M = 2^{31} \approx 2$ *milliards*.

Conclusion

Un ordinateur génère une suite de nombres PSEUDO-ALÉATOIRES compris entre 0 et 1.

La qualité du générateur (c-à-d sa déviation par rapport au hasard parfait) doit être analysée avec un certain nombre de tests statistiques.

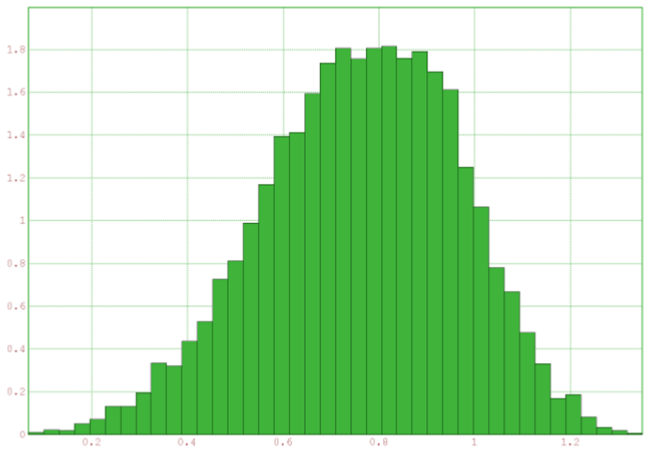
Question fondamentale

On suppose qu'on a un bon générateur de nombre pseudo-aléatoires (U_n).

Comment, à partir d'une suite (U_n) de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi uniforme sur [0,1], construire une variable aléatoire de loi donnée ?

Sur les histogrammes

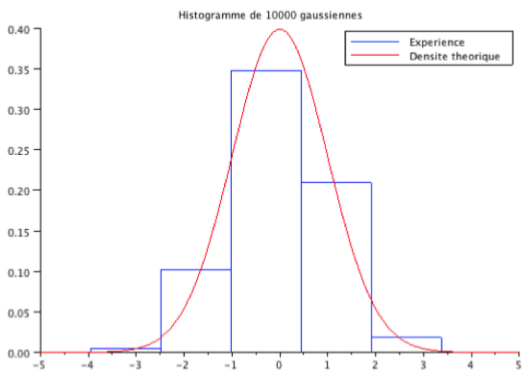
Un histogramme est un outil d'exploration de données empiriques, typiquement aléatoires.
On répartit les valeurs des données en classes (de largeur identique).
La hauteur de chaque colonne est déterminée par le nombre de valeurs tombant dans la classe correspondante.
On normalise de telle sorte que l'aire totale des colonnes soit égale à 1.



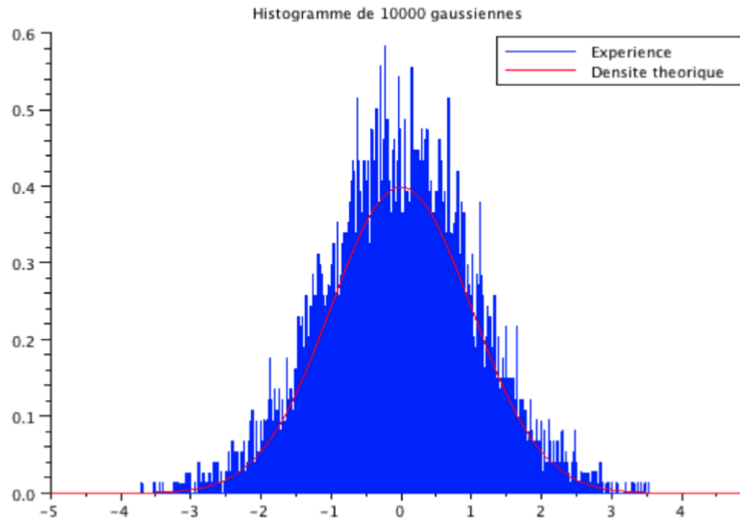
Représentation de lois continues, nombres de colonnes

Exemple : on tire 10 000 variables gaussiennes centrées réduites.

Trop peu de colonnes :



Trop de colonnes :



Idéal : prendre nombre de colonnes $\approx \sqrt{nombre\,de\,donnes}$

SIMULATION DES VARIABLES ALÉATOIRES

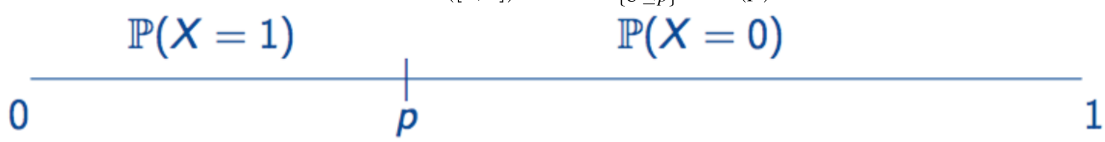
But : Générer une X variable aléatoire à partir d'une variable aléatoire uniforme $U \sim \mathscr{U}[0,1])$.

SIMULATION DES VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

- Méthodes particulières
- Méthode générale.

Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$

Si $U \in \mathscr{U}([0,1])$ alors $X\mathbb{1}_{\{U\leq p\}} \sim \mathscr{B}(p)$



En effet : $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(U \leq p) = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{u\leq p\}} \mathrm{d}u = p$

Loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$

Si $U_1, ...U_n$ sont n v.a. uniformes sur [0,1] dépendantes alors

$$X = \mathbb{1}_{\{U_1\leq p\}} + \cdots + \mathbb{1}_{\{U_n\leq p\}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i\leq p\}} \sim \beta(n,p)$$

En effet, les v.a. $\mathbb{1}_{\{U_i\leq p\}}$, $1 \leq i \leq n$, sont Bernoulli de paramètre p et indépendantes.

Loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$

C'est la loi du temps de 1er succès dans une suite d'expériences aléatoires indépendantes avec probabilité de succès p. Donc

$$N = \inf\{i \geq 1 : U_i \leq p\} \sim \mathscr{G}o(p)$$

Défaut : nombre moyen de v.a. uniformes utilisées égal à $\mathbb{E}[N] = 1/p$ qui est grand pour des petites valeurs de p.

Méthode avec une seule variable aléatoire uniforme

Si $U \sim \mathscr{U}([0,1])$ alors $1 + E\left(\frac{\ln(U)}{\ln(1-p)}\right)$ suit la loi géométrique de paramètre p. ($E(x)$ est la partie entière : $E(x) \leq x < E(x)+1$.)

Démonstration

Soit $X = 1 + E\left(\frac{\ln(U)}{\ln(1-p)}\right)$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}\Big(E\Big(\frac{\ln(U)}{\ln(1-p)}\Big) = k-1\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(k-1 \leq \frac{\ln(U)}{\ln(1-p)} < k\Big) \\
&= \mathbb{P}(k\ln(1-p) < \ln(U) \leq (k-1)\ln(1-p)) \\
&= \mathbb{P}\big((1-p)^k < U \leq (1-p)^{k-1}\big) \\
&= (1-p)^{k-1} - (1-p)^k \\
&= (1-p)^{k-1} p
\end{aligned}$$

SIMULATION DES VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

- Méthode par inversion de la fonction de répartition
- Méthodes particulières
- Méthode du rejet.

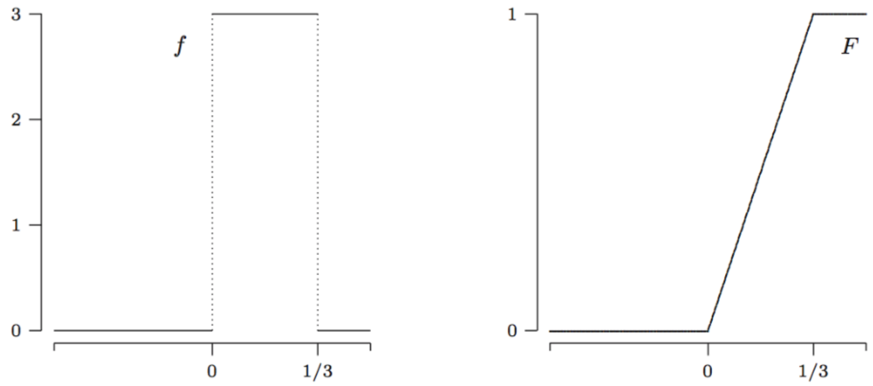
Préliminaires

Soit X unev.a. réelle de fonction de répartition F définie par

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

F est croissante, continue à droite et limitée à gauche en tout point de $\mathbb{R}$ et que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 1$

Si X a une densité f (c-à-d si $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y$),
$F'(x) = f(x)$ en tout point où f est continue.



$$X \sim \mathscr{U}([0,1/3]) f(x) = 3\mathbb{1}_{[0,1/3]}(x),\ F(x) = \begin{cases} 0 & si x < 0 \\ 3x & si 0 \leq x < 1/3 \\ 1 & si x \geq 1/3 \end{cases}$$

3.2 Méthode d'inversion de la fonction de répartition

Si $U \sim \mathscr{U}([0,1])$ et si X a pour fonction de répartition F alors X et $F^1(U)$ ont même loi.

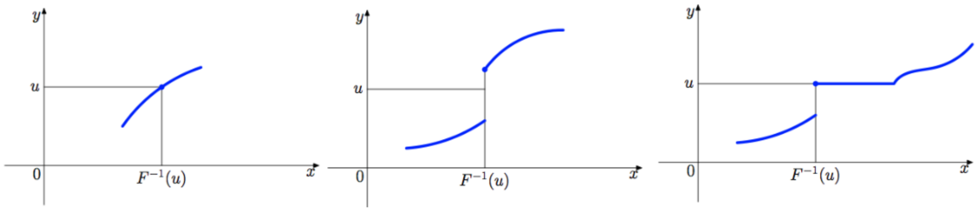
C'est évident si F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car elle réalise alors une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ et admet donc un inverse $F^1 :]0,1[\to \mathbb{R}$.

$Y := F^{-1}(U)$ a alors la même loi que X :

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x).$$

En général, F n'a pas d'inverse mais le résultat précédent reste vrai si on prend l'inverse généralisé (quantile) de F :

$$F^{-1}(u) := \min\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}$$



Loi exponentielle

$Y := -\frac{\log U}{\lambda}$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

En effet, $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ s'inverse en $F^{-1}(u) = -\frac{\log(1-u)}{\lambda}$ mais on observe que $1 - U$ a même loi que U.

Loi de Weibull

Utilisée en fiabilité et caractérisée par sa «fonction de survie» $G(x) = 1 - F(x) = \exp(-x^a), a > 0$ paramètre $, x \geq 0$.

On écrit que $X \sim Weib(a)$.

On observe que U et $1U$ ont même loi et on trouve facilement que $Y := (-\log U)^{1/a}$ suit la loi $Weib(a)$.

Loi de Cauchy $\mathscr{C}(a)$

C'est la loi de densité $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2+a^2}, a > 0$ paramètre $, x \in \mathbb{R}$.

$F(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x}{a}) + \frac{1}{2}$

Étant donné $u \in]0,1[$, on cherche x tel que $F(x) = u$:

$$F(x) = u \iff x = a\tan(\pi(u - 1/2)).$$

Donc $Y := a\tan(\pi(U - \frac{1}{2}))$ suit la loi de Cauchy de paramètre a.

Résumé (lois usuelles)

$U \sim \mathscr{U}([0,1])$, (U_i) suite de $v.a.i.i.d.$ suivant cette loi.

Autres exemples :

•Si X suit la loi de Laplace centrée réduite (loi «double exponentielle») :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \qquad F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{sign}(x)(1 - e^{-|x|})\right)$$

Loi	Méthode de simulation
Bernoulli $\mathscr{B}(p)$	$\mathbb{1}_{\{U\leq p\}}$
Binomiale $\mathscr{B}(n,p)$	$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\{U_i\leq p\}}$
Géométrique $\mathscr{G}$éo(p)	$1+E\big(\frac{\log(U)}{\log(1-p)}\big)$
Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$	$\inf\{n\in\mathbb{N}: U_1\times U_2\times\cdots\times U_{n+1}\leq e^{-\lambda}\}$
Uniforme $\mathscr{U}([a,b])$	$a+(b-a)U$
Exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$	$-\frac{1}{\lambda}\log(U)$
Cauchy $\mathscr{C}(a)$	$a\tan(\pi(U-\frac{1}{2}))$
Normale $\mathscr{N}(\mu,\sigma^2)$	$\mu+\sigma\sqrt{-2\log(U_1)}\cos(2\pi U_2)$

elle a la même loi que

$$Y=-\operatorname{sign}(U)\log(1-2|U|)\quad\text{où}\quad U\sim\mathscr{U}([-0.5,0.5]).$$

•Si X suit la loi de Gumbel (centrée réduite) :

$$f(x=e^{-(x+e^{-x})}),\qquad F(x)=e^{-e^{-x}}$$

elle a la même loi que

$$Y=-\log(-\log(U))\quad\text{où}\quad U\sim\mathscr{U}([0,1]).$$

Cette loi sert pour décrire le maximum d'une série de données (par ex. niveau d'une rivière).

3.3 Illustration de la méthode d'inversion de la fonction de répartition

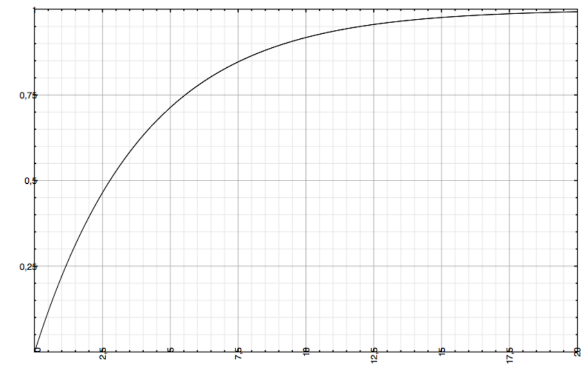


FIGURE 4 – Loi exponentielle :
$F(x)=(1-e^{-0.25x})\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$
$f(x)=0.25e^{-0.25x}$

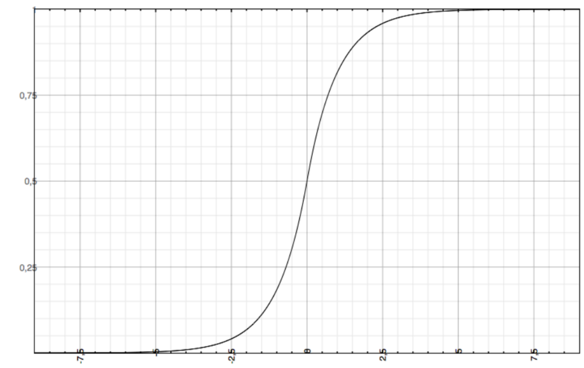


FIGURE 5 – Loi de Laplace :
$F(x)=0.5\big(1+\operatorname{sign}(x)(1-e^{-|x|})\big)$
$f(x)=0.5e^{-|x|}$

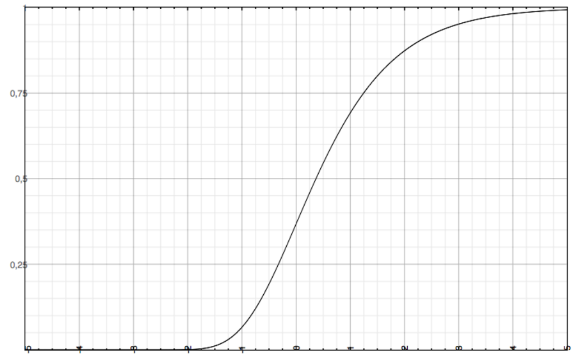


FIGURE 6 – Loi de Gumbel :
$F(x) = e^{-e^{-x}}$
$f(x) = e^{-(x+e^{-x})}$

4 Illustration de la méthode du rejet

— Un exemple avec une densité à support compact
— Un exemple avec une densité à support non compact

Loi de X de densité f à support non compact.
IDÉE :

— trouver a et g (densité) tels que $f(x) \leq ag(x)$
— g est la densité d'une *v.a.* qu'on sait simuler.

Exemple 4.1. *simuler une v.a.* $\sim \mathcal{N}(0,1)(f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2})$

$$f(x) \leq \underbrace{\sqrt{\frac{2e}{\pi}}}_{=a} \times \underbrace{\frac{1}{2} e^{-|x|}}_{=g(x)} \ (\forall x)$$

où $g(x)$ est la densité d'une v.a. suivant la loi de Laplace. (G est sa fonction de répartition.)

Algorithme :

1. $X = G^{-1}(U_1), Y = a \times g(X) \times U_2$
2. si $Y \leq f(X)$, X accepté, sinon rejeté

La *v.a.* $-sgn(U)\log(1-2|U|)$ où $U \sim \mathcal{U}([-0.5, 0.5])$ suit une loi de Laplace.

Conclusion

In this paper, ...