Fungsi Polinomial

Handy Frank Wily Ambarita

20 Nopember 2024

SMA Kr. Petra 2

Pengertian Polinomial

Polinomial adalah suatu ekspresi matematika yang terdiri atas bagian yang tidak diketahui (variabel) dan koefisiennya beserta operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, atau perpangkatan dengan bilangan bulat nonnegatif, dan memiliki suku yang terbatas.

$$\underbrace{8x}_{\text{suku ke-1}} \quad \overbrace{-5}^{\text{suku ke-2}}$$

Contoh

Ekspresi $8x - 5$ terdiri atas dua suku yaitu, $8x$ dan -5. Pada $8x$, bagian yang tidak diketahui dinyatakan dalam x; bilangan 8 adalah koefisiennya. Bilangan -5 disebut sebagai konstanta.

Pengertian Polinomial

Untuk menentukan apakah suatu ekspresi adalah polinomial, perhatikan karakter dari variabel yang ada di ekspresi itu.

Contoh
Tentukan apakah tiap ekspresi berikut adalah polinomial!

1. $-6x^2 + x + 1$
2. $\frac{x^4}{7} - 3x + 5$
3. $xy + xz - yz$

Bukan Polinomial

Perhatikan ekspresi-ekspresi berikut. Tentukan mana yang bukan polinomial!

Contoh

1. $x^2 + 4x - 4$
2. $x^{-3} + 4x$
3. $\sqrt{x} - 4x + 8$
4. $\frac{3}{x^2} + 6x - 6$
5. $\log x + x^2 - 7$
6. $\sin x + \cos x + 5$

Derajat Polinomial

1. Derajat dari sebuah suku (monomial) adalah jumlah dari pangkat yang ada pada **variabel** di sebuah suku.
2. Derajat polinomial adalah salah satu pembeda antara satu polinomial dengan polinomial lain.
3. Derajat polinomial adalah derajat terbesar dari semua suku yang ada di sebuah polinomial.

Derajat Polinomial

Contoh
Dapatkan derajat dari tiap polinomial berikut!

1. $x^2 + 10$
2. $xy^3 - 10^5x$
3. $(-3)^7x^4 - 6x^2 + 9$
4. $a + a^2 - a^5$
5. $x + y + z$
6. $5^4x + xy - 3y$
7. $x^4y^3 - 2x^5 + 8y^4$

Fungsi Polinomial

Fungsi polinomial adalah fungsi yang aturannya menggunakan ekspresi polinomial. Berikut adalah fungsi polinomial f dengan satu variabel (x).

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

dengan a_0 adalah konstanta dan $a_n \neq 0$.

Contoh
Dari fungsi $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - x + 10$ kita bisa dapatkan:

$$n = 5, a_5 = 4, a_4 = 0, a_3 = -3, a_2 = 0, a_1 = -1, a_0 = 10.$$

Nilai dari Fungsi Polinomial

Contoh

1. Diberikan $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Dapatkan nilai dari $f(1)$!
2. Diberikan $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 13x - 7$. Tentukan nilai dari $P(0) + P(2)$!

Terkadang istilah fungsi polinomial dan polinomial mengacu pada hal yang sama. Sebagai contoh fungsi $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 13x - 7$ kadang disebut fungsi polinomial P atau disebut polinomial saja.

Operasi Aljabar Polinomial

1. Penjumlahan atau pengurangan dua polinomial atau lebih bisa dilakukan pada suku-suku yang sejenis.
2. Perkalian di antara dua polinomial dilakukan dengan mengalikan masing-masing suku dengan semua suku dari polinomial yang lain.
3. Pembagian akan dibahas di topik yang lain.
4. Perpangkatan polinomial menggunakan konsep yang sama dengan perpangkatan pada bilangan real.

Contoh

Diberikan $P(x) = x^3 - 3x + 5$ dan $Q(x) = 4x^3 + 4x - 10$.

Dapatkan $P(x) + Q(x)$ dan $P(x) - Q(x)$.

Jawab:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (\underbrace{x^3 - 3x + 5}_{P(x)}) + (\underbrace{4x^3 + 4x - 10}_{Q(x)}) \\ &= (x^3 + 4x^3) + ((-3x) + 4x) + (5 + (-10)) \\ &= 5x^3 + x - 5 \end{aligned}$$

(lanjut ke operasi pengurangan.)

Operasi Aljabar Polinomial

Untuk $P(x) - Q(x)$ berhati-hati dengan tanda minus. Perhatikan pengerjaan berikut!

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (\underbrace{x^3 - 3x + 5}_{P(x)}) - (\underbrace{4x^3 + 4x - 10}_{Q(x)}) && (1) \\ &= x^3 - 3x + 5 - 4x^3 - 4x + 10 && (2) \\ &= -3x^3 - 7x + 15. && (3) \end{aligned}$$

Perhatikan pengerjaan berikut dan temukan di mana letak kesalahannya!

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (\underbrace{x^3 - 3x + 5}_{P(x)}) - (\underbrace{4x^3 + 4x - 10}_{Q(x)}) && (4) \\ &= x^3 - 3x + 5 - 4x^3 + 4x - 10 && (5) \\ &= -3x^3 + x - 5. && (6) \end{aligned}$$

Kesamaan Dua Polinomial

Dua polinomial P dan Q dikatakan sama jika konstanta, variabel, koefisien dan derajat dari tiap variabel sama.

Contoh

$P(x) = 5x^2 - 3x - 1$ dan $Q(x) = 5x^2 - 3x - 1$ adalah dua polinomial yang sama. Sedangkan polinomial $R(x) = 5x^2 + 3x - 1$ berbeda dengan polinomial $P(x)$ dan $Q(x)$.

Untuk menyatakan dua polinomial yang sama kadang menggunakan simbol $' \equiv '$ (ekuivalen). Sehingga polinomial $P(x)$ dan $Q(x)$ berlaku $P(x) \equiv Q(x)$.

Contoh

Diberikan polinomial $G(x) = x^3 + sx^2 + 3$ dan $H(x) = rx^3 - x^2 - t$. Jika $G(x) \equiv H(x)$, dapatkan r, s, dan t!

Jawab:

Karena $G(x)$ dan $H(x)$ ekuivalen, maka

$$x^3 \equiv rx^3 \rightarrow r = 1$$
$$sx^2 \equiv -x^2 \rightarrow s = -1$$
$$3 \equiv -t \rightarrow t = -3.$$

Jadi, $r = 1, s = -1$, dan $t = -3$.

Contoh

Diberikan $P(x) = x^4 + Ax^3 - 4x^2 - 10x + 3$. Polinomial itu ekuivalen dengan $Q(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + Bx + 1)$. Dapatkan A dan B.

Pembagian Antarpolinomial

Perhatikan pembagian bersusun berikut!

$$
\begin{array}{rr}
 & 142 \\ \cline{2-2}
7 \big) & 1000 \\
 & \underline{7} \\
 & 30 \\
 & \underline{28} \\
 & 20 \\
 & \underline{14} \\
 & 6
\end{array}
$$

Terlihat operasi 1000 dibagi 7. Didapat **hasilnya** 142 dan **sisa** 6. Sehinga kita bisa tulis

$$1000 = 7 \times 142 + 6.$$

Pembagian Antarpolinomial

Pembagian antarpolinomial juga menggunakan konsep yang sama seperti pembagian pada dua bilangan bulat tadi. Untuk metode pembagian antarpolinomial, selain menggunakan metode pembagian bersusun kita juga menggunakan metode Horner.

Metode Pembagian Bersusun

Perhatikan pembagian $x^3 - 10x^2 + 17x + 28$ dengan $x + 1$ menggunakan metode bersusun berikut!

$$
\begin{array}{r}
x^2 - 11x + 28 \\
x+1 \overline{\big) \; x^3 - 10x^2 + 17x + 28} \\
\underline{-x^3 \quad -x^2 \qquad\qquad\quad} \\
-11x^2 + 17x \quad\;\; \\
\underline{11x^2 + 11x} \quad\;\; \\
28x + 28 \\
\underline{-28x - 28} \\
0
\end{array}
$$

Coba lakukan untuk pembagian $4x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ dengan $2x^2 + 3$.

Metode Pembagian Bersusun

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & & 2x & -\,1 \\ \cline{2-5}
2x^2+3 & 4x^3 & -\,2x^2 & +\,4x & -\,3 \\
 & -\,4x^3 & & -\,6x & \\ \cline{2-4}
 & & -\,2x^2 & -\,2x & -\,3 \\
 & & 2x^2 & & +\,3 \\ \cline{3-5}
 & & & -\,2x &
\end{array}
$$

Perhatikan bahwa proses pembagian berhenti karena derajat dari sisa ($2x$) lebih kecil dari derajat pembagi ($2x^2 + 3$).

Metode Pembagian Bersusun

Untuk sembarang polinomial $P(x)$ dan $Q(x) \neq 0$ berlaku $P(x) = Q(x)R(x) + S(x)$. Polinomial $Q(x)$ disebut pembagi, $R(x)$ disebut hasil dan $S(x)$ disebut sisa bagi. **Derajat sisa bagi** harus **lebih kecil** dari **derajat pembagi**.

Syarat pembagian berhenti:

1. Pembagian berhenti jika sisa dari pembagian memiliki derajat lebih kecil dibandingkan pembagi atau;
2. Pembagian berhenti jika sisa dari pembagian adalah nol.

Metode Horner

Perhatikan pembagian $x^3 - 10x^2 + 17x + 28$ dengan $x + 1$ menggunakan metode Horner berikut!

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -10 & 17 & 28 \\
-1 & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -10 & 17 & 28 \\
-1 & \downarrow & & & \\
\hline
 & 1 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -10 & 17 & 28 \\
-1 & & -1 & & \\
\hline
 & 1 & \nearrow{\scriptstyle \cdot(-1)} & &
\end{array}
$$

Metode Horner

(Lanjutan dari persoalan sebelumnya)

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -10 & 17 & 28 \\
-1 & & -1 & & \\
\hline
 & 1 & -11 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -10 & 17 & 28 \\
-1 & & -1 & 11 & -28 \\
\hline
 & 1 & -11 & 28 & \color{blue}{0}
\end{array}
$$

Didapat sisa pembagian adalah $\color{blue}{0}$ dan hasil pembagian $\frac{x^2-11x+28}{1}$.

Metode Horner

Tentukan hasil $3x^4 - 2x^2 + x - 3$ dibagi $3x + 1$ dengan metode Horner.

Metode Horner

Tentukan hasil $3x^4 - 2x^2 + x - 3$ dibagi $3x + 1$ dengan metode Horner.

Mari kita bahas!

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 3 & 0 & -2 & 1 & -3 \\
-\frac{1}{3} & & -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{9} & -\frac{14}{27} \\
\hline
 & 3 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{14}{9} & -\frac{95}{27}
\end{array}
$$

Diperoleh hasil bagi $\frac{3x^3 - x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{14}{9}}{3} = x^3 - \frac{x^2}{3} - \frac{5}{9}x + \frac{14}{27}$ dan sisa pembagian $-\frac{95}{27}$.

Theorem (Teorema Sisa)
Jika suatu suku banyak $P(x)$ dibagi dengan $x - k$, sisa pembagiannya adalah konstanta $S = P(k)$.

Bukti.
Silakan didiskusikan bersama. □

Teorema Sisa bisa dinyatakan dalam bentuk berikut.

Teorema Sisa

$$P(x) = (x - k)H(x) + S.$$

Theorem (Teorema Sisa II)
Jika suatu suku banyak $P(x)$ dibagi dengan $ax - k$, sisa pembagiannya adalah konstanta $S = P(\frac{k}{a})$.

Bukti.
Silakan dibuktikan sendiri. $\square$

Teorema Sisa II

$$\begin{aligned} P(x) &= (ax - k)H(x) + S && (7) \\ &= a\left(x - \frac{k}{a}\right)H(x) + S && (8) \\ &= \left(x - \frac{k}{a}\right)aH(x) + S && (9) \end{aligned}$$

Teorema Sisa

Perhatikan (9). Jika kita menggunakan metode Horner, hasil dari pembagian masih tersamarkan dengan bentuk $aH(x)$. Oleh karena itu ketika menggunakan metode Horner, hasil dari pembagian didapat dengan melakukan pembagian dengan koefisien ax.

$$\text{Hasil pembagian} = \frac{aH(x)}{a}.$$

Perhatian

- Derajat sisa pembagian lebih kecil dari derajat pembagi. Jika pembagi adalah derajat n, derajat sisa maksimal $n-1$.
- Jika polinomial $P(x)$ dibagi dengan $(ax-k)$,
  $P(x) = \underbrace{(ax-k)}_{\textbf{derajat 1}} H(x) + \underbrace{S}_{\textbf{derajat 0}}$ dengan $S \in \mathbb{R}$.
- Jika polinomial $P(x)$ dibagi dengan (ax^2+bx+c),
  $P(x) = \underbrace{(ax^2+bx+c)}_{\textbf{derajat 2}} H(x) + \underbrace{(px+q)}_{\textbf{derajat 1}}$.
- Derajat polinomial yang dibagi minimal sama dengan derajat polinomial pembagi.

Teorema Sisa

Dapatkan sisa dari $3x^4 - 2x^3 + x - 7$ dibagi $x - 2$.
Jawab:
Pembagi $x - 2$ adalah polinomial berderajat 1, maka sisa pembagian haruslah berderajat nol (konstanta). Berdasarkan teorema sisa didapat $k = 2$ dan $P(2) = 3(2)^4 - 2(2)^3 + 2 - 7 = 27$.
Sehingga, 27 adalah sisa dari $3x^4 - 2x^3 + x - 7$ dibagi $x - 2$.

Teorema Sisa

Dapatkan sisa pembagian $P(x) = x^5 - 2x^2 + 4x - 1$ dengan $x^2 - 4$ menggunakan teorema sisa.

Jawab

Dengan teorema sisa polinomial $P(x) = x^5 - 2x^2 + 4x - 1$ bisa ditulis menjadi

$$x^5 - 2x^2 + 4x - 1 = (x^2 - 4)H(x) + \underbrace{(px + q)}_{\textbf{sisa bagi}}. \tag{10}$$

Kemudian dengan menggunakan (10) kita dapatkan

$$\begin{aligned} 2^5 - 2(2)^2 + 4(2) - 1 &= (2^2 - 4)H(2) + (2p + q) \\ 31 &= 2p + q \qquad (11) \\ (-2)^5 - 2(-2)^2 + 4(-2) - 1 &= ((-2)^2 - 4)H(-2) + (-2p + q) \\ -49 &= -2p + q. \qquad (12) \end{aligned}$$

Ambil (11) dan (12),

$$\begin{aligned} 31 &= 2p + q \\ -49 &= -2p + q. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan eliminasi-substitusi didapat $p = 20$ dan $q = -9$. Sehingga, sisa bagi $P(x) = x^5 - 2x^2 + 4x - 1$ dengan $x^2 - 4$ adalah $20x + (-9)$.

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Dapatkan sisa dari $2x^3 + 5x^2 - 7x + 3$ dibagi $x - 2$.
2. Dapatkan sisa dari $3x^3 - 2x^2 + x + 4$ dibagi $2x - 2$.
3. Suku banyak $R(x) = 5x^3 - (5a - 3)x^2 + 3x + 2a$ dibagi dengan $5x - 2$ bersisa 8 dengan $a \in \mathbb{R}$. Dapatkan a.
4. Polinomial $P(x)$ bersisa 3 jika dibagi $x + 1$ dan bersisa 1 jika dibagi $x - 1$. Dapatkan sisa dari $P(x)$ dibagi $(x - 1)(x + 1)$.
5. Sisa pembagian $A(x - 2)^{2024} + (x - 1)^{2025} - (x - 2)^2$ oleh $x^2 - 3x + 2$ adalah $Bx - 1$. Dapatkan $5A + 3B$.

Ayo kita sederhanakan.

1. Jika polinomial $P(x)$ dibagi dengan $ax - k$, sisa bagi didapat dari $P(x) = p$ dengan $p \in \mathrm{R}$.
2. Jika polinomial $P(x)$ dibagi dengan $ax^2 + bx + c$, sisa bagi didapat dari $P(x) = px + q$.
3. Jika polinomial $P(x)$ dibagi dengan $ax^3 + bx^2 + cx + d$, sisa bagi didapat dari $P(x) = px^2 + qx + r$.

Teorema Sisa

Jika $P(x)$ dibagi dengan $x+2$, bersisa 4. Jika $P(x)$ dibagi dengan $9x-3$ bersisa 2. Dapatkan sisa dari $\frac{P(x)}{(x+2)(9x-3)}$.

Jawab:

Karena $P(x)$ dibagi $x+2$ bersisa 4, maka $P(-2)=4$ dan karena $P(x)$ dibagi $9x-3$ bersisa 2, maka $P\left(\frac{1}{3}\right)=2$. Lalu, $P(x)$ dibagi $\underbrace{(x+2)(9x-3)}_{\textbf{derajat 2}}$ maka sisa baginya didapat dari $P(x)=\underbrace{px+q}_{\textbf{derajat 1}}$.

Sehingga,

$$P(-2) = (-2)p + q = 4$$
$$P\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)p + q = 2$$

Dengan menggunakan eliminasi-substitusi didapat $p=-\frac{6}{7}$ dan $q=\frac{16}{7}$. Oleh karena itu sisa baginya adalah $-\frac{6}{7}x+\frac{16}{7}$.

Teorema Faktor

- Bilangan $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$
- Bilangan 1, 2, 3, 4, dan 24 habis membagi 24.
- Kelima bilangan tadi disebut sebagai faktor dari 24.
- Jika terdapat $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dan bersisa nol, pembagi dan hasil bagi disebut sebagai faktor dari $P(x)$.

Teorema Faktor

Misalkan polinomial $P(x)$ dibagi dengan polinomial $Q(x)$ dan sisa pembagiannya adalah nol, maka polinomial $Q(x)$ adalah faktor dari polinomial $P(x)$.

Contoh

Polinomial $x^2 - 3x + 2$ habis dibagi dengan $x - 1$, maka suku banyak $x - 1$ adalah faktor dari $x^2 - 3x + 2$. Coba temukan faktor lain dari $x^2 - 3x + 2$.

Teorema Faktor

- **Teorema Akar Rasional**
  Kemungkinan akar-akar rasional (solusi) suatu persamaan polinomial

  $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

  adalah $\frac{p}{q}$ dengan p adalah faktor-faktor dari a_0 dan q adalah faktor dari a_n.
- Dimungkinkan suatu persamaan polinomial tidak memiliki akar yang rasional.
- Contoh: $x^2 - 5 = 0$. Mau berapapun p dan q yang dipilih, tidak akan pernah menghasilkan akar yang rasional.
- Teori ini akan lebih bermanfaat jika dipadukan dengan metode Horner.

Teorema Faktor

Dapatkan faktor dari polinomial $x^4 - 15x^2 - 10x + 24$ dengan menggunakan Teorema Akar Rasional.

Jawab: Dari $x^4 - 15x^2 - 10x + 24$ diperoleh $n = 4, a_0 = 24$ dan $a_4 = 1$.

Nilai p didapat dari faktor $a_0 = 24 : \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$.

Nilai q didapat dari faktor $a_n = 1 : \pm1$

Kita coba untuk $p = 1$ dan $q = 1$.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -15 & -10 & 24 \\
1 & & 1 & 1 & -14 & -24 \\
\hline
 & 1 & 1 & -14 & -24 & 0
\end{array}.
$$

Ternyata $x = 1$ adalah akar rasional atau $x - 1$ adalah faktor dari $x^4 - 15x^2 - 10x + 24$.

Teorema Faktor

Diberikan persamaan polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_o = 0$. Solusi dari persamaan itu adalah

1. $x = 1$ jika jumlah semua koefisien dan konstanta yang ada adalah nol $(a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0 = 0)$.
2. $x = -1$ jika jumlah semua koefisien variabel pangkat genap sama dengan jumlah semua koefisien variabel pangkat ganjil.

Contoh:

1. Persamaan $-3x^5 - 2x^3 + x + 4 = 0$ memiliki salah satu solusi yaitu, $x = 1$ sebab $-3 + (-2) + 1 + 4 = 0$.
2. Persamaan $-x^4 + 8x^3 - 5x + 4 = 0$ memiliki solusi $x = -1$ sebab $\underbrace{-1}_{\text{dari } -x^4} + 4 = \underbrace{8}_{\text{dari } 8x^3} + \underbrace{(-5)}_{\text{dari } -5x}$.

Diskriminan

Persamaan $ax^2 + bx + c = 0$, dapat diselesaikan dengan metode diskriminan

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Nilai diskriminan ($D = b^2 - 4ac$) bisa menghasilkan tiga kemungkinan:

1. Jika $D < 0$, polinomial $ax^2 + bx + c$ tidak mempunyai solusi real.
2. Jika $D = 0$, polinomial $ax^2 + bx + c$ memiliki solusi kembar.
3. Jika $D > 0$, polinomial $ax^2 + bx + c$ memiliki solusi real yang berlainan.

Diskriminan

Dapatkan solusi dari $x^2 - 7x + 12 = 0$ dengan menggunakan metode diskriminan.

Jawab:

Dari bentuk $x^2 - 7x + 12 = 0$ didapat $a = 1, b = -7$, dan $c = 12$.

Menggunakan metode diskriminan didapat

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)} \\
&= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} \\
&= \frac{7 \pm 1}{2}
\end{aligned}
$$

$x_1 = 4$ dan $x_2 = 3$.

Jadi, solusi persamaan adalah $x_1 = 4$ dan $x_2 = 3$.

Dari apa yang kita kerjakan di salindia sebelumnya kita mendapat $x_1 = 4$ dan $x_2 = 3$. Sehingga bisa diperoleh

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3).$$

Jadi, kita bisa menggunakan metode diskriminan untuk mencari faktor dari polinomial derajat dua.

Diskriminan

- Nilai diskriminan dapat digunakan untuk menentukan apakah suatu polinomial dapat difaktorkan atau tidak.
- Polinomial $x^2 - 7x + 12 = 0$ memiliki nilai diskriminan 1.
- Ekspresi $x^2 + x + 3$ memiliki nilai diskriminan $D = 1^2 - 4(1)(3) = -11$. Sehingga tidak bisa difaktorkan lagi.
- Tunjukkan bahwa bentuk $x^2 + 3$ tidak bisa difaktorkan lagi.

1. Dapatkan faktor dari $2x^2 - 3x - 2$!
2. Tentukan nilai a dan b agar $P(x) = ax^3 - 5x^2 - 22x + b$ mempunyai faktor $x^2 - 4x - 5$.
3. Tentukan faktor-faktor linier dari $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x - 9$!
4. Evaluasi apakah $x^2 - 3x + 5$ dapat difaktorkan.

Teorema Faktor

Dapatkan solusi dari persamaan $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$.

Pecahan Parsial

Misalkan $P(x) = x - 6$ dan $Q(x) = x^2 - 5x + 6$. Jika $P(x)$ dibagi $Q(x)$ jelas hasilnya nol dan sisanya adalah $P(x)$. Apakah ada hal lain yang bisa kita lakukan untuk pembagian itu? Perhatikan ilustrasi berikut!

$$\frac{x-6}{x^2-5x+6} = \frac{4}{x-2} + \frac{-3}{x-3} \tag{13}$$

Dari (13) kita bisa lihat bahwa $\frac{x-6}{x^2-5x+6}$ dapat dinyatakan dalam jumlahan dua pecahan. Pengubahan bentuk itu penting terutama pada penyelesaian soal integral.

Pecahan Parsial

faktor di pembagi	suku pada pecahan parsial
$px + q$	$\frac{A}{px+q}$
$(px + q)^k$	$\frac{A_1}{px+q} + \frac{A_2}{(px+q)^2} + ... + \frac{A_k}{(px+q)^k}$
$px^2 + qx + r$	$\frac{Ax+B}{px^2+qx+r}$
$(px^2 + qx + r)^k$	$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r} + \frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2} + ... + \frac{A_kx+B_k}{(px^2+qx+r)^k}$

Contoh:

1. $\frac{x-3}{x^2-4} = \frac{x-3}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$
2. $\frac{7x-6}{(x^2-4)^2} = \frac{7x-6}{(x+2)^2(x-2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2}$.

Pecahan Parsial

Diberikan $\frac{2x^2-1}{(3x+1)(x-1)^2}$. Nyatakan dalam bentuk pecahan parsial.

$$
\begin{aligned}
\frac{2x^2-1}{(3x+1)(x-1)^2} &\equiv \frac{A}{3x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\
&\equiv \frac{A(x-1)^2 + B(x-1)(3x+1) + C(3x+1)}{(3x+1)(x-1)^2} \\
&\equiv \frac{A(x^2-2x+1) + B(3x^2-2x-1) + C(3x+1)}{(3x+1)(x-1)^2} \\
&\equiv \frac{Ax^2 - 2Ax + A + 3Bx^2 - 2Bx - B + 3Cx + C}{(3x+1)(x-1)^2} \\
&\equiv \frac{Ax^2 + 3Bx^2 - 2Ax - 2Bx + 3Cx + A - B + C}{(3x+1)(x-1)^2} \\
&\equiv \frac{(A+3B)x^2 + (-2A-2B+3C)x + (A-B+C)}{(3x+1)(x-1)^2}
\end{aligned}
$$

$$\frac{2x^2-1}{(3x+1)(x-1)^2} \equiv \frac{(A+3B)x^2+(-2A-2B+3C)x+(A-B+C)}{(3x+1)(x-1)^2}$$

Didapat SPLTV

$$A+3B=2$$
$$-2A-2B+3C=0 \text{ (kenapa?)}$$
$$A-B+C=-1$$

$A=-\frac{7}{16}$, $B=\frac{13}{16}$, dan $C=\frac{1}{4}$. Sehingga,

$$\frac{2x^2-1}{(3x+1)(x-1)^2} \equiv \frac{-\frac{7}{16}}{3x+1}+\frac{\frac{13}{16}}{x-1}+\frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2}$$
$$\equiv -\frac{7}{48x+16}+\frac{13}{16x-16}+\frac{1}{4(x-1)^2} \quad \square$$

Pecahan Parsial

Nyatakan pecahan berikut dalam bentuk pecahan parsial.

1. $\frac{x+3}{x^2+5x+6}$
2. $\frac{x+2}{x^2(x-3)}$
3. $\frac{x^3-1}{(x+1)(x-4)}$
4. $\frac{x^3-7}{x^2+x-2}$

Teorema Vieta

Persamaan suku banyak berderajat n
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ mempunyai akar-akar:$x_1, x_2, ..., x_n$, maka:

1. $x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
2. $(x_1x_2+x_1x_3+...+x_1x_n)+(x_2x_3+x_2x_4+...+x_2x_n)+...+x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
3. $x_1x_2...x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

Secara umum rumus Vieta bisa dirangkum menjadi:

$$\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n} \left(\prod_{j=1}^{k} x_{i_j}\right) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Teorema Vieta

Apa penjelasan lain dari rumus Vieta?

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \left(\prod_{j=1}^{k} x_{i_j} \right) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Rumus ini menyatakan jumlahan kombinasi perkalian akar-akar persamaan yang berbeda—bentuk $x_1 x_1$ atau $x_2 x_2$ dan sejenis tidak dihitung.

Teorema Vieta

Diberikan persamaan $x^3 - 6x^2 - 9x + 14 = 0$. Persamaan itu memiliki akar-akar persamaan $x_1, x_2,$ dan x_3. Dapatkan:

1. $x_1 + x_2 + x_3$
2. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
3. $x_1x_2x_3$.

Jawab:
Karena polinomialnya berderajat 3, maka $n = 3$. Sehingga,

1. $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_{3-1}}{a_3} = -\frac{-6}{1} = 6$
2. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_{3-2}}{a_3} = \frac{-9}{1} = -9$
3. $x_1x_2x_3 = (-1)^3 \frac{a_0}{a_3} = -\frac{14}{1} = -14$

Jadi, $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -9$ dan $x_1x_2x_3 = -14$.

Teorema Vieta

1. Diberikan persamaan $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$. Dapatkan:
    1.1 $x_1 + x_2 + x_3$.
    1.2 $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
    1.3 $x_1x_2x_3$.
2. Persamaan $x^3 - 3x^2 - x + a = 0$ mempunyai dua akar yang saling berlawanan. Dapatkan hasil kali ketiga akar persamaan tersebut.
3. Salah satu solusi dari $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$ adalah 2. Dapatkan jumlah akar yang lain dari persamaan itu!
4. Akar-akar dari persamaan suku banyak $3z^3 - 2z^2 + z - 1 = 0$ adalah z_1, z_2, dan z_3. Fungsi suku banyak dengan akar $3z_1 - 1, 3z_2 - 1$, dan $3z_3 - 1$ adalah...
5. Persamaan $3x^3 - 16x^2 + rx - 6 = 0$ mempunyai sepasang akar yang saling berkebalikan. Tentukan nilai r.

Penerapan Polinomial pada Persoalan Sehari-hari

Jumlah seluruh pertandingan dalam sebuah liga sepak bola yang menggunakan sistem *home-away* dapat dinyatakan dalam

$$S(x) = x^2 - x \tag{14}$$

dengan S adalah jumlah seluruh pertandingan dan x adalah jumlah tim dalam sebuah liga sepak bola yang bertanding.
Misalkan jumlah tim yang berkompetisi di sebuah liga adalah 15, maka jumlah seluruh pertandingan adalah $S(15) = 15^2 - 15 = 210$.

Penerapan Polinomial pada Persoalan Sehari-hari

1. Dengan menggunakan rumus (14) coba hitung berapa tim yang dibutuhkan jika jumlah seluruh pertandingannya adalah 306 pertandingan.
2. Jika diketahui tinggi suatu tabung adalah 2 dm lebih dari diameter alasnya dan volumenya 784π dm^3. Tentukan panjang jari-jari alas tabung itu.
3. Sebuah produsen makanan ringan akan membuat kemasan berbentuk balok untuk makanan A. Lebar kemasan tersebut adalah 2 cm kurang dari panjangnya dan tinggi kemasan 5 cm lebih dari panjangnya.
   3.1 Misalkan panjang kemasan itu adalah x, dapatkan persamaan polinomial untuk volume kemasan itu. Nyatakan dalam polinomial $V(x)$.
   3.2 Dapatkan kemungkinan ukuran panjang, lebar, dan tinggi dari kemasan jika volume yang diminta adalah 24 cm^3.

Teorema Vieta

1. Diketahui suku banyak $f(x) = ax(x-4)(x+1)$. Suku banyak itu melewati titik $(5, 15)$. Dapatkan nilai a.
2. Diberikan persamaan $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$. Dapatkan $x_1 + x_2 + x_3$ dan $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.
3. Diberikan persamaan $x^4 - 4ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a-7b+c)x + 60 = 0$. Akar-akarnya $x_1 = 1, x_2 = 2$, dan $x_3 - x_4 = 1$. Dapatkan nilai dari a, b, c, dan x_4.

Pertanyaan Refleksi

Perhatian:

- Ada 10 soal/pertanyaan di salindia (*slide*) selanjutnya.
- Pilih 3 soal **selain** #1, #3, dan #4 untuk dikumpulkan.
- Kumpulkan di kertas folio bergaris pada hari Kamis, 29 Agustus di istirahat pertama.
- Kerjakan sendiri. Jika ada yang kurang jelas, baru berdiskusi dengan yang lain.
- Silakan cari jawaban dari berbagai sumber tetapi tulis dengan bahasa Anda sendiri.

Pertanyaan Refleksi

1. Apa yang dimaksud dengan polinomial? Jelaskan dalam minimal 3 kalimat.
2. Diberikan ekspresi $\sin^2 x + \sin x + 3$. Ada yang mengatakan ekspresi itu adalah polinomial. Jelaskan bagaimana menyatakan ekspresi itu sebagai polinomial dan bagaimana menyatakan ekspresi itu sebagai bukan polinomial!
3. Jelaskan secara sederhana cara untuk menjumlahkan atau mengurangi dua polinomial atau lebih! Beri setidaknya satu contoh.
4. Jelaskan secara sederhana cara untuk mengalikan dua polinomial! Beri setidaknya satu contoh.

Pertanyaan Refleksi

5. Diberikan pernyataan
   "14 dibagi 5 menghasilkan 2 dan berisa 4". Pernyataan itu ditulis menjadi "$\frac{14}{5} = 2 + 4$". Jelaskan kekeliruan dan perbaikannya pada "$\frac{14}{5} = 2 + 4$" agar menjadi benar.
6. Jelaskan secara sederhana pembagian antarpolinomial—bagaimana bisa bekerja atau bagaimana proses pembagian berakhir. Beri setidaknya satu contoh.
7. Jelaskan kapan kita menggunakan pembagian bersusun atau metode Horner dan teorema Sisa untuk mencari sisa pembagian antarpolinomial. Berikan sebuah contoh.

Pertanyaan Refleksi

8. Diberikan dua polinomial $P(x)$ dan $Q(x)$. Bagaimana menunjukkan bahwa polinomial $P(x)$ adalah faktor dari polinomial $Q(x)$? Berikan sebuah contoh.
9. Pada proses mengubah sebuah pecahan polinomial menjadi pecahan parsial. Apa saja yang harus diperhatikan? Jelaskan dengan memberi setidaknya sebuah contoh.
10. Diberikan sebuah persamaaan polinomial derajat 4 dalam variabel x. Kemungkinan penyelesaiannya adalah sebanyak 4, yaitu $x_1, x_2, x_3,$ dan x_4. Bagaimana mendapatkan nilai dari $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1$ tanpa harus mencari tahu nilai dari $x_1, x_2, x_3,$ dan x_4? Berikan sebuah contoh.