MAKALAH MATEMATIKA ELEKTRO

METODE ELIMINASI GAUSS
DAN
METODE CRAMER

OLEH

LOLA YORITA ASTRI (05/184102/ET/04461)
BAMBINA (05/184103/ET/04462)
HENDRA USYIARDI (05/184104/ET/04463)
ARVI IRAWATI (05/184106/ET/04465)
NOVETRA SENJA TIRAMA (05/184110/ET/04469)

FAKULTAS TEKNIK
JURUSAN TEKNIK ELEKTRO
UNIVERSITAS GADJAH MADA

2005

ELIMINASI GAUSS

Eliminasi gauss digunakan untuk mencari akar sistem persamaan linier.

$$\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \end{array}$$

Contoh: Ditinjau dari sistem persamaan:

$$\begin{array}{l} 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 9 \\ x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 1 \\ -3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 6 \end{array}$$

Persamaan diatas dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut:

$$[B]\{x\} = \{u\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 9 & -6 \\ -3 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

Untuk menjelaskan eliminasi gauss,maka dibentuk suatu matriks sebagai berikut:

$$[B|u|I] = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 2 & -7 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & -6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Kita kalikan baris 1 dengan ½,tambahkan (-1 x baris 1 yang baru) kepada baris 2,dan tambahkan (3x baris 1 yang baru)kepada baris 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 25/2 & 8 & -7/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -5/2 & 11 & 39/2 & 3/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Operasi diatas sama dengan pembentukan/pengubahan sistem persamaan asli menjadi

$$x_1 - \frac{7}{2}x_2 + 2x_3 = \frac{9}{2}$$
$$\frac{25}{2}x_2 - 8x_3 = -\frac{7}{2}$$
$$-\frac{5}{2}x_2 + 11x_3 = \frac{39}{2}$$

Perhatikan operasi diatas jika ditulis dalam bentuk matriks adalah

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 2 & -7 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & -6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Selanjutnya dilakukan operasi sebagai berikut: kalikan baris 2 dengan 2/25 dan tambahkan (5/2 x baris 2 yang baru) kepada baris 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -16/25 & -7/25 & -1/25 & 2/25 & 0 \\ 0 & 0 & 47/5 & 94/25 & 7/5 & 1/5 & 1 \end{array}\right]$$

Operasi terakhir mengubah persamaan menjadi

$$x_1 - \frac{7}{2}x_2 + 2x_3 = \frac{9}{2}$$

$$x_2 - \frac{16}{25}x_3 = -\frac{7}{25}$$

$$\frac{47}{5}x_3 = \frac{94}{25}$$

Kalikan baris 3 dengan 5/47. Tambahkan ke baris 2: (16/25 x baris 3 yang baru). Tambahkan ke baris 1: (-2 x baris 3 yang baru).

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -7/2 & 0 & 1/2 & 19/24 & -2/47 & -10/47 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 13/235 & 22/235 & 16/235 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7/47 & 1/47 & 5/47 \end{array}\right]$$

Akhirnya tambahkan ke baris 1: (7/2 x baris 2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 93/235 & 67/235 & 6/235 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 13/235 & 22/235 & 16/235 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7/47 & 1/47 & 5/47 \end{array}\right]$$

Jadi sistem persamaan menjadi $x_1= 4, x_2= 1, x_3 =2$ dan inverse matriks [B] adalah

$$\begin{bmatrix} 93/235 & 67/235 & 6/235 \\ 13/235 & 22/235 & 16/235 \\ 7/47 & 1/47 & 5/47 \end{bmatrix}$$

Dari pengamatan: $\det B = \left(\frac{1}{2} x \frac{2}{25} x \frac{5}{47}\right)^{-1} = 235$

Jadi kalau di *'resume'*

$$\left[B|u|I\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 2 & -7 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & -6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 93/235 & 67/235 & 6/235 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 13/235 & 22/235 & 16/235 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7/47 & 1/47 & 5/47 \end{array}\right]$$

$$\left[I|x|B^{-1}\right]$$

METODE CRAMER

Metode Cramer didasarkan atas perhitungan determinan matriks. Suatu sistem persamaan linier berbentuk $A\bar{x} = \bar{b}$ dengan A adalah matriks bujur sangkar dapat dikerjakan dengan metode Cramer jika hasil perhitungan menunjukkan bahwa $\det(A) \neq 0$. Penyelesaian yang didapatkan dengan metode ini adalah penyelesaian tunggal.

Diketahui suatu sistem persamaan linier berbentuk $A\bar{x} = \bar{b}$ dengan A adalah matriks bujur sangkar berukuran nxn dan $\det(A) \neq 0$ sedangkan nilai $\bar{x}$ dan $\bar{b}$ adalah

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \ \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

maka penyelesaian untuk x adalah

$$\bar{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \bar{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, \bar{x}_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

A_i adalah matriks A yang kolom ke-i nya diganti dengan vektor $\bar{b}$.

Contoh :

Diketahui sistem persamaan linier berbentuk $A\bar{x} = \bar{b}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a. Periksa apakah metode cramer dapat digunakan?

b. Jika bisa, tentukan penyelesaian untuk $\bar{x}$?

Jawab:

a. $$Det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-6-20)-(-15-10) = -1$$

Karena det(A) = -1 maka metode Cramer dapat digunakan.

b. $$Det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-3+20)-(15+5) = -3$$

$$Det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (6+5)-(-3+10) = 4$$

$$Det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (2+10-4)-(5+8-2) = -3$$

Jadi nilai untuk x, y, z adalah

$$\overline{x} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-3}{-1} = 3, \overline{y} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{4}{-1} = 4, dan\ \overline{z} = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-3}{-1} = 3$$