

## **Σειρά Ασκήσεων 2/2 – Ηλεκτρομαγνητική Ακτινοβολία – Κυματοδηγοί – Επίπεδες Γραμμές Μεταφοράς – Προσαρμογή – Συντονιστές**

### **2.1. Μέτρηση διηλεκτρικής σταθεράς υλικού με κυματοδηγό**

**(α)** Ο κώδικας αυτού του ερωτήματος παρατίθεται στο αρχείο “code21a.m”.

Τα αποτελέσματα είναι:

$$\varepsilon_{r1} = 2.374844663452095$$

$$\varepsilon_{r2} = 4.178861708934304$$

**(β)** Ο κώδικας αυτού του ερωτήματος παρατίθεται στο αρχείο “code21b.m”.

Για να πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα μόνο από την μέτρηση Α, θα αξιοποιήσουμε δύο σχέσεις που έχουμε για το  $Z_{LSC}$  (φυλλάδιο 2ης άσκησης εργαστηρίου):

$$Z_{LSC} = jZ_0 \tan\left(\beta' d\right) = j \frac{\eta'}{\sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_g} d\right) = j \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tan\left(\frac{2\pi}{c} \frac{d}{\sqrt{\varepsilon_r f^2 - f_c^2}}\right) = j \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tan\left(\frac{2\pi \sqrt{\varepsilon_r f^2 - f_c^2}}{c} d\right)$$
$$Z_{LSC} = -jZ_0 \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_g} d_{min}\right)$$

Εξισώνοντας:

$$j \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tan\left(\frac{2\pi \sqrt{\varepsilon_r f^2 - f_c^2}}{c} d\right) = -jZ_0 \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_g} d_{min}\right) \Leftrightarrow \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tan\left(\frac{2\pi \sqrt{\varepsilon_r f^2 - f_c^2}}{c} d\right) = -Z_0 \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_g} d_{min}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tan\left(\frac{2\pi \sqrt{\varepsilon_r f^2 - f_c^2}}{c} d\right) + Z_0 \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_g} d_{min}\right) = 0$$

Χρησιμοποιώντας το Matlab, λύνουμε την υπερβατική εξίσωση ως προς  $\varepsilon_r$ .

Τα αποτελέσματα είναι:

$$\varepsilon_{r1} = 2.369172025383336$$

$$\varepsilon_{r2} = 4.180795603083631$$

### **2.2. Πεδίο στοιχειοκεραίας**

έποντες ~~απόβαση~~ ή ~~απόβαση~~ στην οποία ~~απόβαση~~ τονοθετήσια

σε οπίστριτο αέρα, για κάτια τους σε ανοίγοντα διατάξια τους. Το ~~κέντρο~~ κέντρο των διάταξεων είναι ο ουρανός του οπίστριτου αέρα. (αριθμοί: -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4)

Θεωρούσθε  $r_i \approx r$  για το μέτρο που  $r_i \approx r - \vec{d}_i \cdot \hat{r} =$

$$= r - d_i \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \quad \text{ηα μερικών ψάλτην.}$$

ηα οδα για πρώτη φορά  $\rightarrow I=1A$  γιατί:

$$\begin{aligned} E_i(v) &= j60 \frac{e^{-jkr}}{r_i} \cdot \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin\theta} = j60 \frac{e^{-jk(r-d_i \cos\varphi \sin\theta)}}{r} \cdot \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin\theta} \\ &= j60 \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot e^{jk d_i \cos\varphi \sin\theta} \cdot \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin\theta} = \\ &= j60 \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin\theta} \left( \cos(k d_i \cos\varphi \sin\theta) + j \sin(k d_i \cos\varphi \sin\theta) \right) \end{aligned}$$

$$d_{-4} = \frac{-7d}{2}, \quad d_{-3} = \frac{-5d}{2}, \quad d_{-2} = \frac{-3d}{2}, \quad d_{-1} = \frac{-d}{2}$$

$$d_4 = \frac{7d}{2}, \quad d_3 = \frac{5d}{2}, \quad d_2 = \frac{3d}{2}, \quad d_1 = \frac{d}{2}$$

$$\begin{aligned} E(v) &= E_{-4}(v) + E_{-3}(v) + E_{-2}(v) + E_{-1}(v) + E_1(v) + E_2(v) + E_3(v) + \\ &+ E_4(v) \end{aligned}$$

στο  $E_i(v)$  βλέπουμε ότι ο συντετοντις  $j60 \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin\theta}$  των περιθετικών γεγονότων ~~απόβαση~~  $V_i$ , από βγαίνει κοντά στην πρώτη πλευρά της απόβασης της πρώτης πλευράς

napivtovros. loxuru δη  $d_i = -d-i$  και  $\cos(x) = \cos(-x)$ , ουσας

~~πολλα πολλα πολλα πολλα πολλα~~

A oso  $\cos(kd_i \cos \varphi \sin \theta)$  da nupptei και ειas opos  
 $\cos(kd_i \cos \varphi \sin \theta) = \cos(-kd_i \cos \varphi \sin \theta) = \cos(kd_i \cos \varphi \sin \theta)$ .

Intadi arui ha 8 opous  $-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$  da exoufis  
 zous  $1, 2, 3, 4$  2 leopēs zor kafeta.

arufirws ha zo nupizw loxuru  $\sin(-x) = -\sin(x)$  και apa  
 ol ~~πολλα~~ opoi eredōmifur ~~πολλα~~ fukur i alldoarupavra  
 και zedika exoufis hoto za sunphizora. Apa:

$$E(r) = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \frac{\cos(\frac{n}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \left( 2 \cos\left(k \frac{d}{2} \cos \varphi \sin \theta\right) + 2 \cos\left(k \frac{3d}{2} \cos \varphi \sin \theta\right) + \right. \\ \left. + 2 \cos\left(k \frac{5d}{2} \cos \varphi \sin \theta\right) + 2 \cos\left(k \frac{7d}{2} \cos \varphi \sin \theta\right) \right) = \\ = j120 \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \frac{\cos(\frac{n}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \left( \cos\left(k \frac{d}{2} \cos \varphi \sin \theta\right) + \cos\left(k \frac{3d}{2} \cos \varphi \sin \theta\right) + \cos\left(k \frac{5d}{2} \cos \varphi \sin \theta\right) + \right. \\ \left. + \cos\left(k \frac{7d}{2} \cos \varphi \sin \theta\right) \right)$$

Ha zo opisōvto fukurha arufobodias fikoufis  $\theta = 90^\circ$  και exoufis:

$$|E| = \left| \frac{j120}{r} \right| \left| \cos\left(k \frac{d}{2} \cos \varphi\right) + \cos\left(k \frac{3d}{2} \cos \varphi\right) + \cos\left(k \frac{5d}{2} \cos \varphi\right) + \cos\left(k \frac{7d}{2} \cos \varphi\right) \right| \\ \rightarrow E_0$$

Ha zo kerakopuro fikoufis  $\varphi = 0^\circ$  και exoufis:

$$|E| = \left| \frac{j120}{r} \right| \left| \frac{\cos(\frac{n}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \right| \cdot \left| \cos\left(k \frac{d}{2} \sin \theta\right) + \cos\left(k \frac{3d}{2} \sin \theta\right) + \cos\left(k \frac{5d}{2} \sin \theta\right) + \cos\left(k \frac{7d}{2} \sin \theta\right) \right| \\ \rightarrow E_0$$

μα περιβάλλοντας  $+I = 1A$  και  $-I = -1A$  έχουμε:

$$\text{Σύνολο γύρω από την} \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} -4 & -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ -I & +I & -I & +I & -I & +I & -I & +I \end{array} \right\} \text{γύρω από την}$$

έχουμε όμοια με την πρώτη γύρω:

$$E_i(v) = j60 I_i \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \left( \cos(kd_i \cos\psi \sin\theta) + j \sin(kd_i \cos\psi \sin\theta) \right)$$



$$= j60 \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \left( I_i \cos(kd_i \cos\psi \sin\theta) + j I_i \sin(kd_i \cos\psi \sin\theta) \right)$$

↳ ή αφορά  $I_i$

ίνας και την πρώτη, το ολικό  $E(v)$  σήμερα ανά την καρδιά (καρδιά) την ενημέρωση.

Να φανταστούμε ότι τονιστός ανά  $d_i = -d_{-i}$ , το οποίο και  $I_i = -I_{-i}$ .

ξινό,  $I_{-i} \cos(kd_{-i} \cos\psi \sin\theta) = -I_i \cos(-kd_i \cos\psi \sin\theta) = -I_i \cos(kd_i \cos\psi \sin\theta)$   
από το οποίο  $I_i \cos(...)$  επερχόμενης  $i$  απλυπολαρπούμενη και  
έχουμε τον ίδιο οποιος  $j I_i \sin(...)$ .

$$\text{Ισχύει } I_{-i} \sin(kd_{-i} \cos\psi \sin\theta) = -I_i \sin(-kd_i \cos\psi \sin\theta) = \cancel{I_i \sin(kd_i \cos\psi \sin\theta)}$$

$$= I_i \sin(kd_i \cos\psi \sin\theta)$$

ἀριθμούς των αποτελεσμάτων της εξουθενάσας οπούς  
;  $I_1 \sin(kd_1 \cos\varphi \sin\theta)$  για  $i > 0$ , 2 φορές των καθέτων. Οπότε:

$$E(v) = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \frac{\cos(\frac{n}{2} \cos\theta)}{\sin\theta} \left( j^2 I_1 \sin(kd_1 \cos\varphi \sin\theta) + j^2 I_2 \sin(kd_2 \cos\varphi \sin\theta) + \right. \\ \left. + j^2 I_3 \sin(kd_3 \cos\varphi \sin\theta) + j^2 I_4 \sin(kd_4 \cos\varphi \sin\theta) \right) =$$

$$= 260 \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \frac{\cos(\frac{n}{2} \cos\theta)}{\sin\theta} \left( -I_1 \sin(kd_1 \cos\varphi \sin\theta) - I_2 \sin(kd_2 \cos\varphi \sin\theta) - \right. \\ \left. - I_3 \sin(kd_3 \cos\varphi \sin\theta) - I_4 \sin(kd_4 \cos\varphi \sin\theta) \right) =$$

$$= \frac{120 e^{-jkr}}{r} \cdot \frac{\cos(\frac{n}{2} \cos\theta)}{\sin\theta} \left( -(-I) \sin(kd_1 \cos\varphi \sin\theta) - I \sin(kd_2 \cos\varphi \sin\theta) - \right. \\ \left. - (-I) \sin(kd_3 \cos\varphi \sin\theta) - I \sin(kd_4 \cos\varphi \sin\theta) \right) \stackrel{I=1A}{=} \\ = \frac{120 e^{-jkr}}{r} \cdot \frac{\cos(\frac{n}{2} \cos\theta)}{\sin\theta} \left( \sin\left(k \frac{d}{2} \cos\varphi \sin\theta\right) - \sin\left(k \frac{3d}{2} \cos\varphi \sin\theta\right) + \sin\left(k \frac{5d}{2} \cos\varphi \sin\theta\right) - \right. \\ \left. - \sin\left(k \frac{7d}{2} \cos\varphi \sin\theta\right) \right)$$

οπιζόντων διαγράφεται ακυρωθείσας  $\rightarrow \theta = 90^\circ$ :

$$|E| = \left| \frac{120}{r} \left| \sin\left(k \frac{d}{2} \cos\varphi\right) - \sin\left(k \frac{3d}{2} \cos\varphi\right) + \sin\left(k \frac{5d}{2} \cos\varphi\right) - \sin\left(k \frac{7d}{2} \cos\varphi\right) \right| \right| \\ \hookrightarrow E_0$$

κατακόρυφο διαγράφεται ακυρωθείσας  $\rightarrow \varphi = 0^\circ$ :

$$|E| = \left| \frac{120}{r} \left| \frac{\cos(\frac{n}{2} \cos\theta)}{\sin\theta} \right| \cdot \left| \sin\left(k \frac{d}{2} \sin\theta\right) - \sin\left(k \frac{3d}{2} \sin\theta\right) + \sin\left(k \frac{5d}{2} \sin\theta\right) - \sin\left(k \frac{7d}{2} \sin\theta\right) \right| \right| \\ \hookrightarrow E_0$$

ζεσον αριθμό τη 3D στρέμενη ακτινοβολίας:

αρκεί να λάβουμε το  $|E|$  χωρίς να θέσουμε κάποιο ψήφιο θ.

ηα όλα τα πεδία ίσα με  $+I = 1A$  είχουμε:

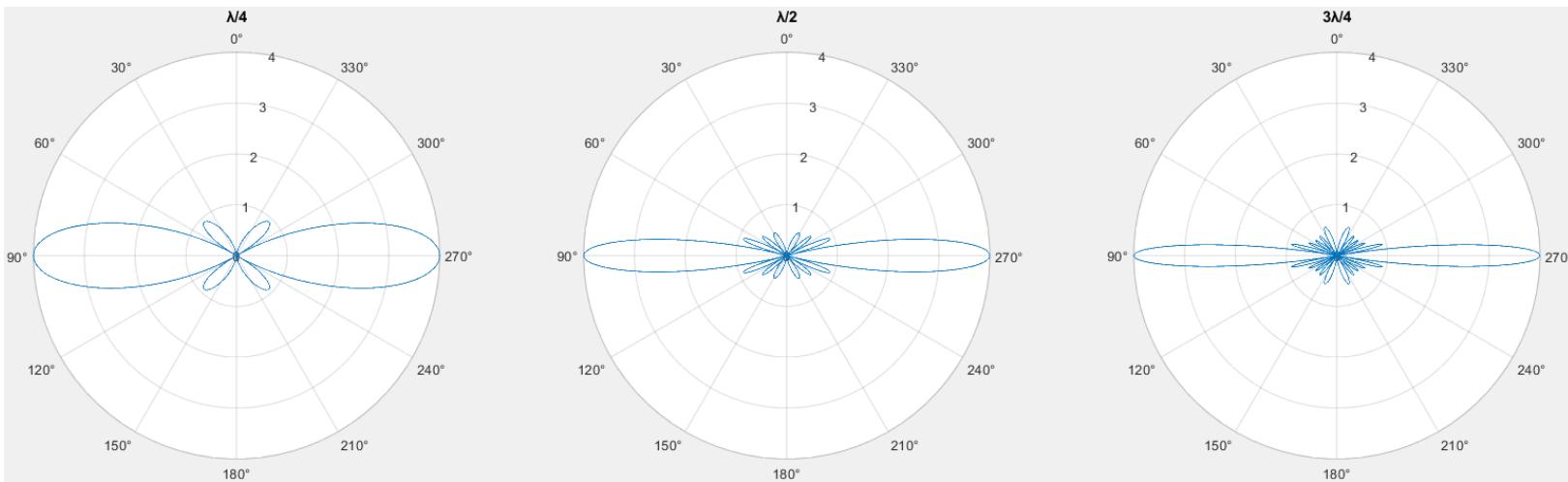
$$|E| = \frac{(120)}{r} \cdot \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \left[ \cos\left(k\frac{d}{2}\cos\varphi\sin\theta\right) + \cos\left(k\frac{3d}{2}\cos\varphi\sin\theta\right) + \cos\left(k\frac{5d}{2}\cos\varphi\sin\theta\right) + \cos\left(k\frac{7d}{2}\cos\varphi\sin\theta\right) \right]$$

ηα τα πεδία εναλλάξ:

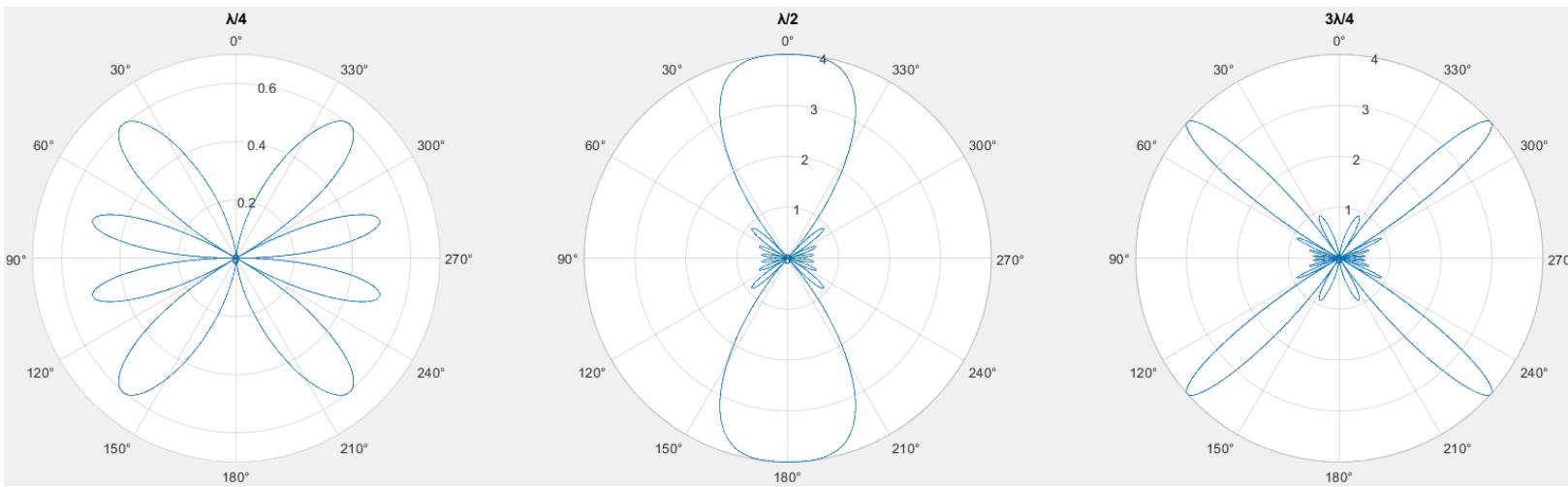
$$|E| = \frac{(120)}{r} \cdot \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \left[ \sin\left(k\frac{d}{2}\cos\varphi\sin\theta\right) - \sin\left(k\frac{3d}{2}\cos\varphi\sin\theta\right) + \sin\left(k\frac{5d}{2}\cos\varphi\sin\theta\right) - \sin\left(k\frac{7d}{2}\cos\varphi\sin\theta\right) \right]$$

(α) Ο κώδικας αυτού του ερωτήματος παρατίθεται στο αρχείο "code22a.m".

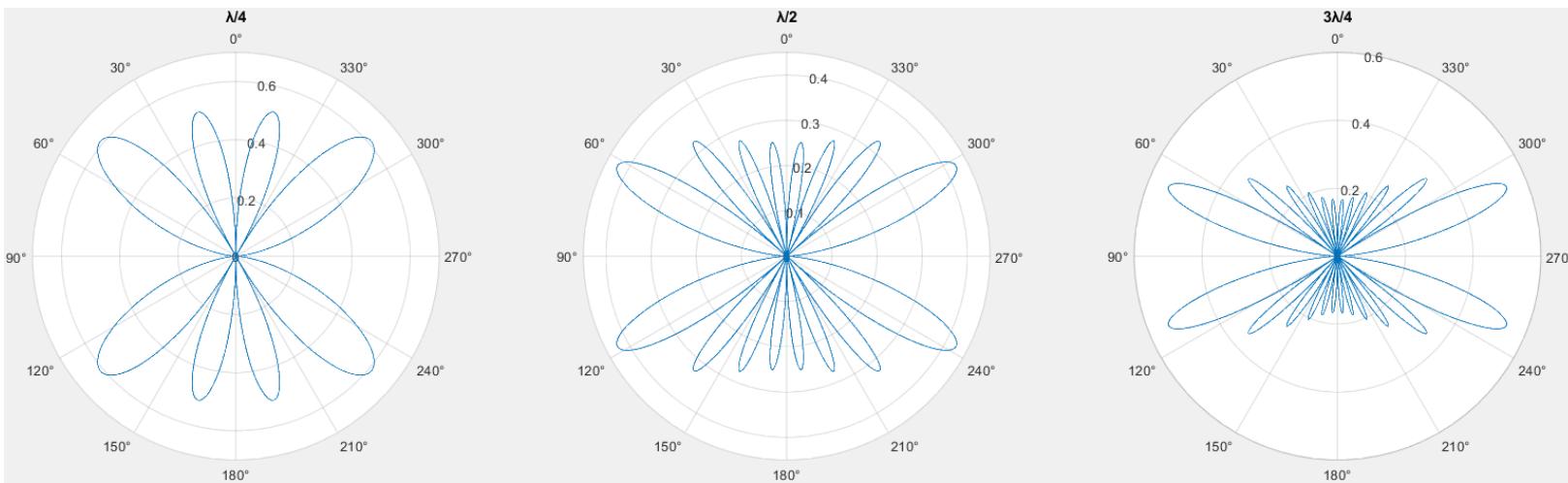
### Οριζόντια διαγράμματα ακτινοβολίας (όλα τα ρεύματα $+I = 1A$ )



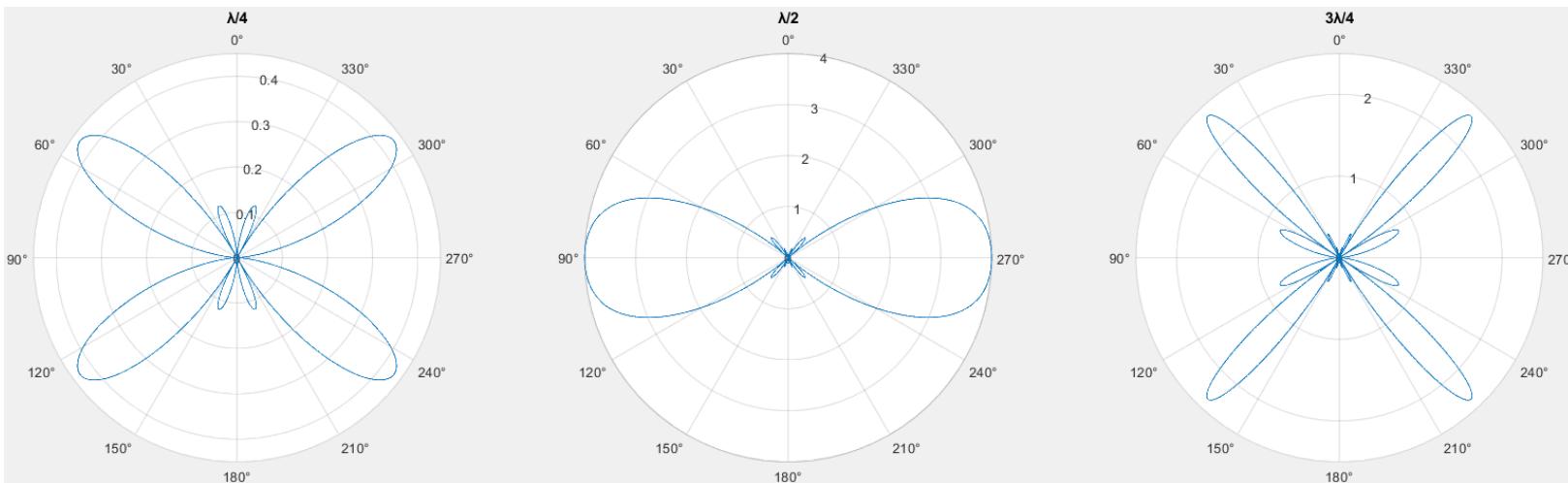
## Οριζόντια διαγράμματα ακτινοβολίας (ρεύματα εναλλάξ)



## Κατακόρυφα διαγράμματα ακτινοβολίας (όλα τα ρεύματα $+I = 1A$ )

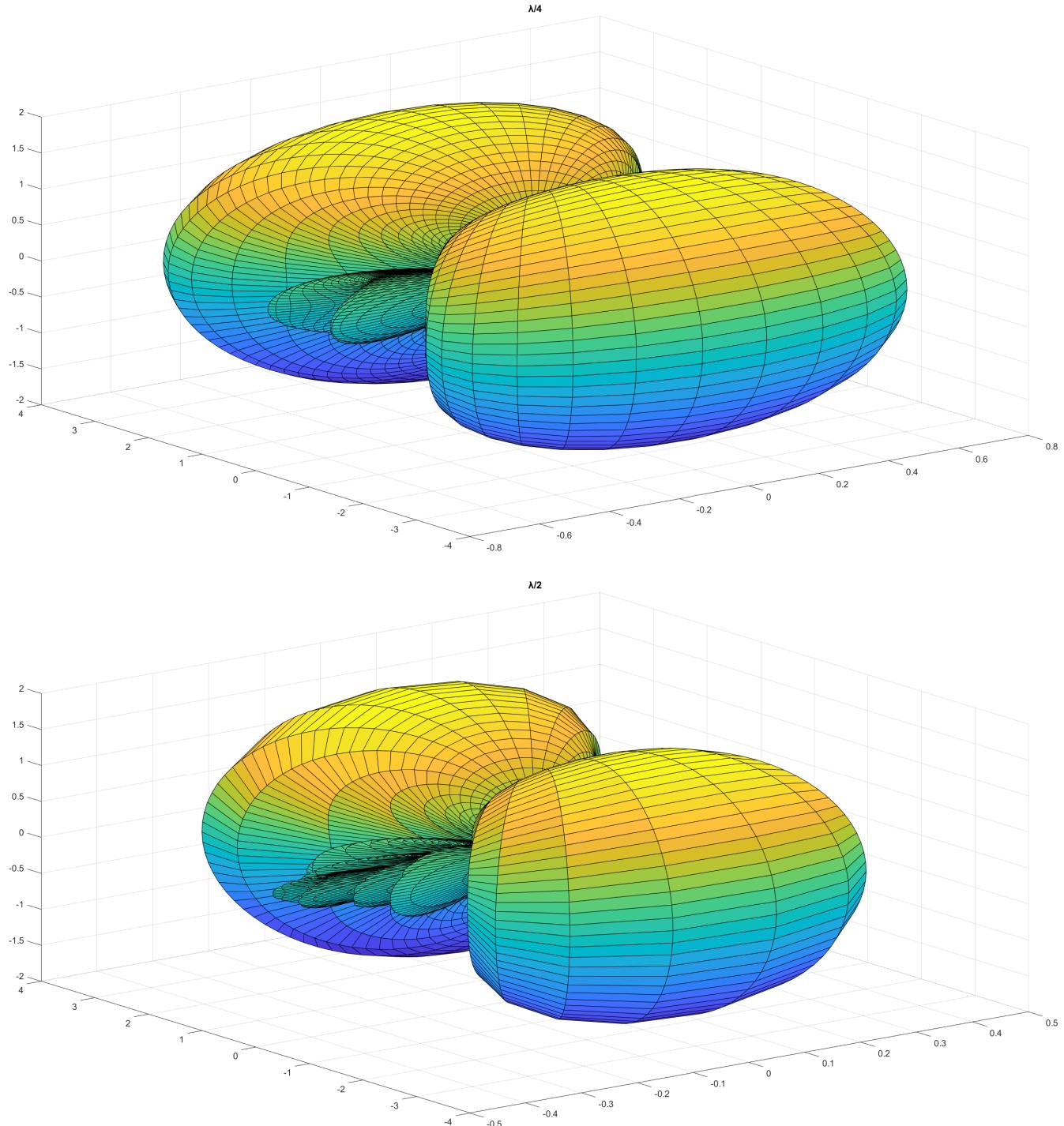


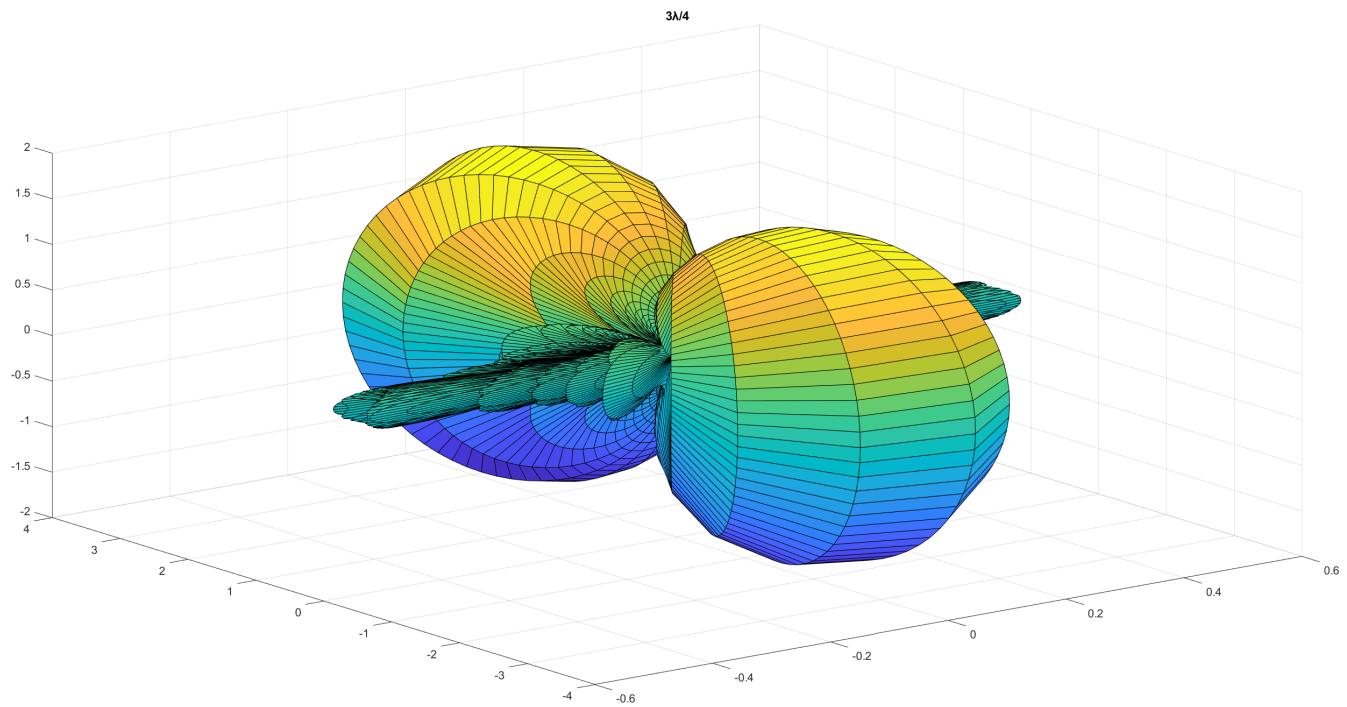
## Κατακόρυφα διαγράμματα ακτινοβολίας (ρεύματα εναλλάξ)



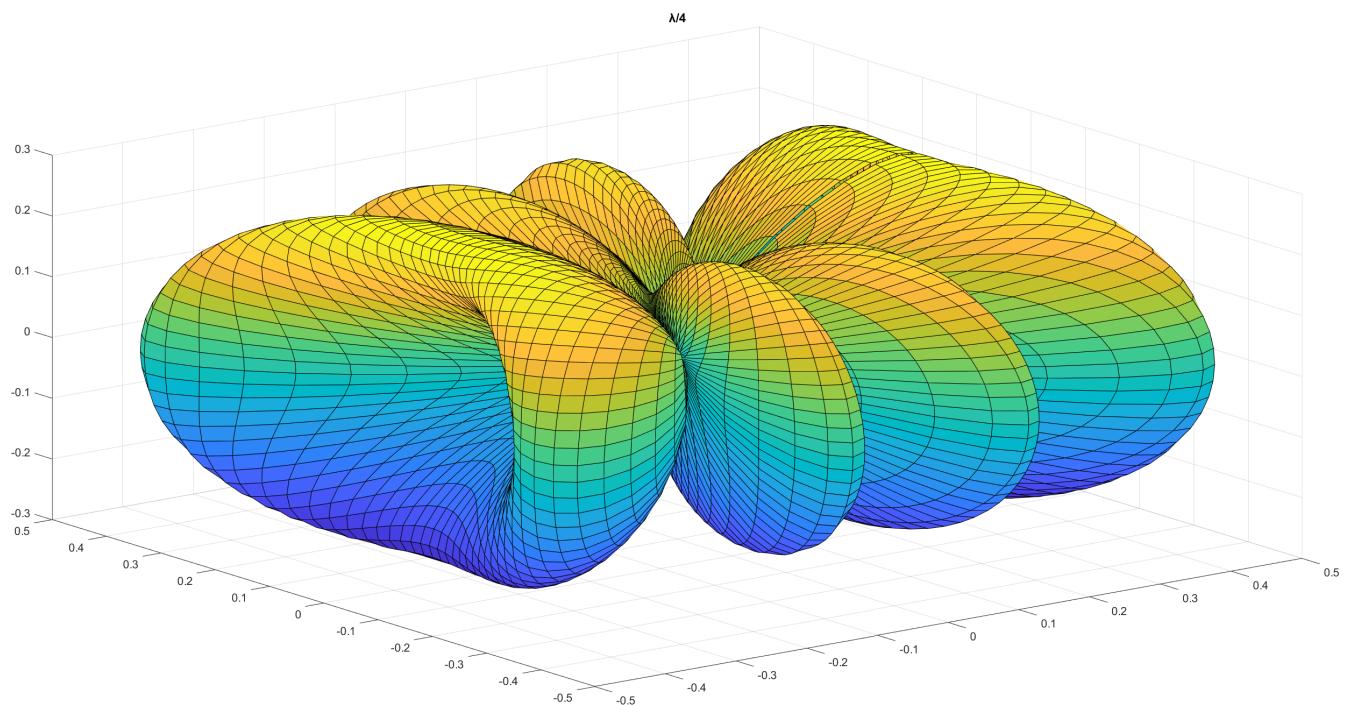
(β) Ο κώδικας αυτού του ερωτήματος παρατίθεται στο αρχείο “code22b.m”.

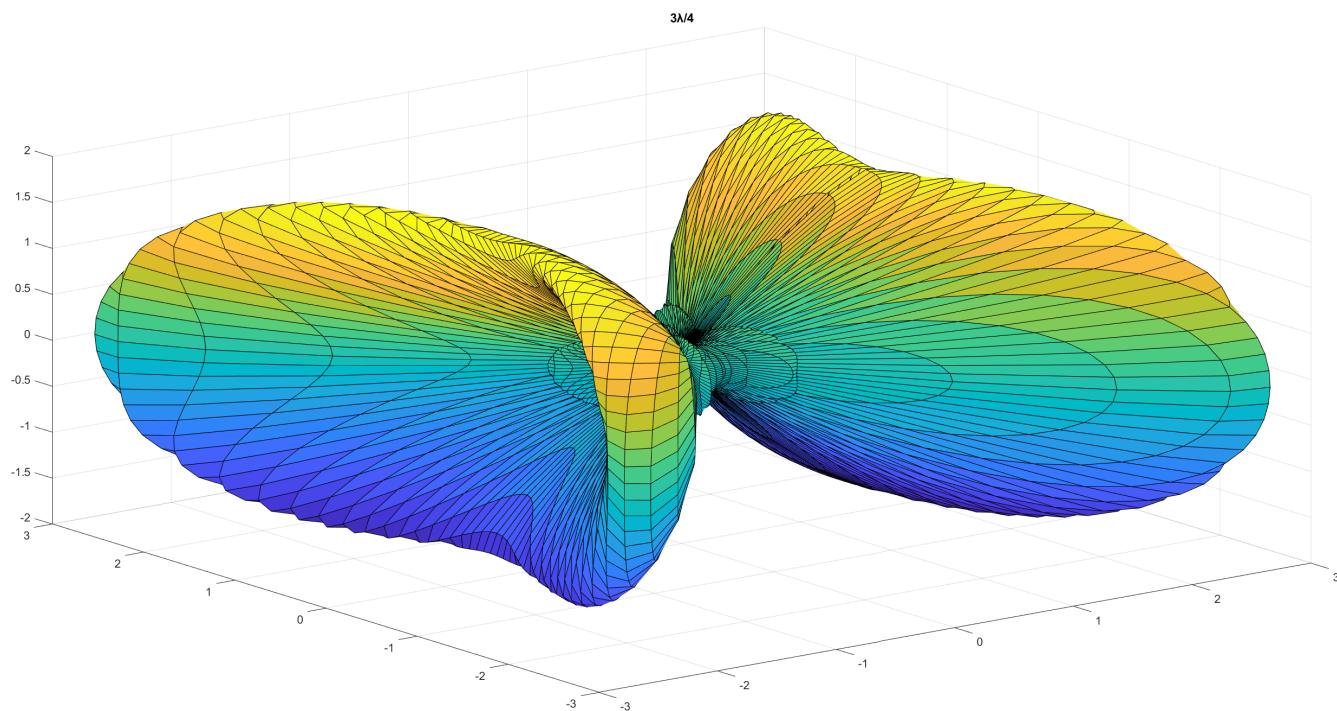
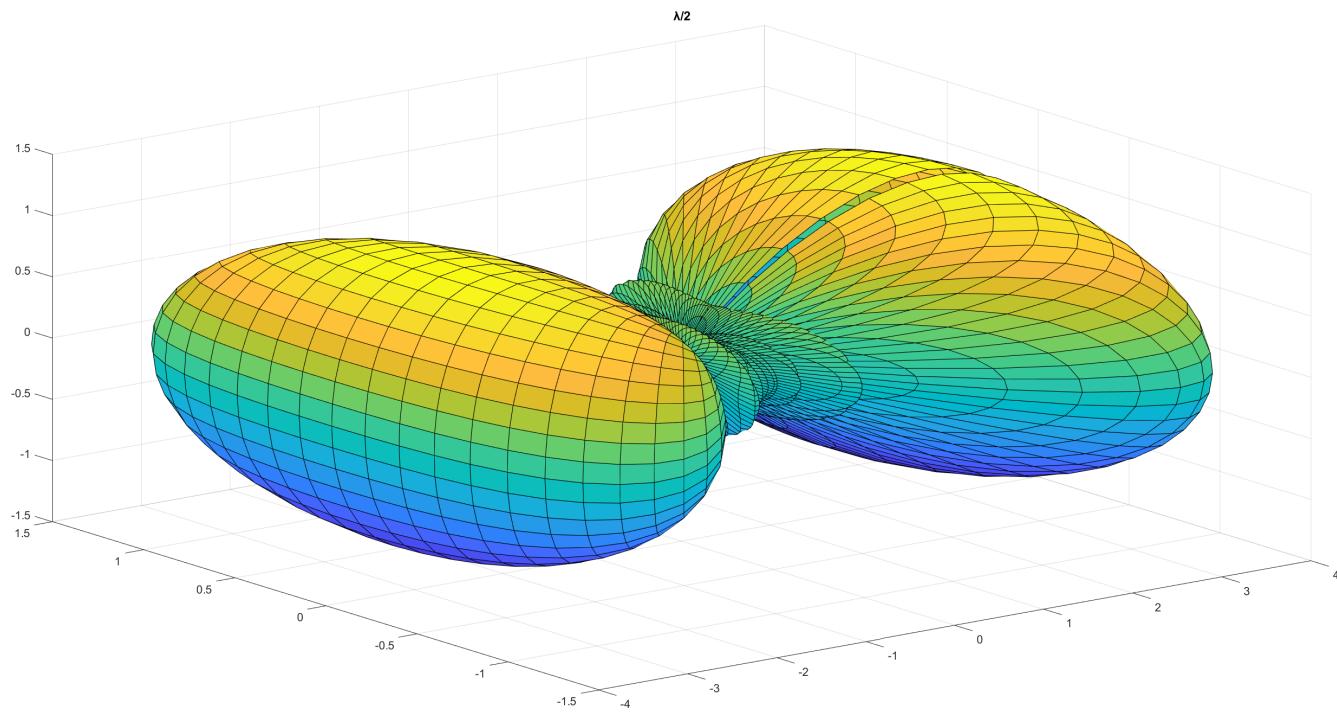
**Στερεά ακτινοβολίας (όλα τα ρεύματα +I = 1A)**





**Στερεά ακτινοβολίας (ρεύματα εναλλάξ)**





(γ) Ευρύπλευρη λειτουργία: Θέλουμε το μέγιστο της ακτινοβολίας να είναι προς τον άξονα γ ( $\phi=90^\circ$ ). Βλέποντας τα οριζόντια διαγράμματα ακτινοβολίας, ο συνδυασμός απόστασης και τροφοδοσίας που έχει τους “οξύτερους” λοβούς μεγίστων που κοιτούν προς αυτήν την κατεύθυνση (και άρα εκπέμπει το μεγαλύτερο μέρος της ακτινοβολίας προς τα εκεί) είναι  $d = 3\lambda/4$  και όλα τα ρεύματα  $+I = 1A$ .

Ακροπυροδοτική λειτουργία: Θέλουμε το μέγιστο της ακτινοβολίας να είναι προς τον άξονα x ( $\phi=0^\circ$ ). Βλέποντας τα οριζόντια διαγράμματα ακτινοβολίας, ο μοναδικός συνδυασμός απόστασης και τροφοδοσίας που έχει λοβούς μεγίστων να κοιτούν προς αυτήν την κατεύθυνση (και άρα εκπέμπει το μεγαλύτερο μέρος της ακτινοβολίας προς τα εκεί) είναι  $d = \lambda/2$  και τα ρεύματα εναλλάξ.

(δ) Ο κώδικας αυτού του ερωτήματος παρατίθεται στο αρχείο “code22d.m”.

Ξέρουμε ότι για την πυκνότητα ισχύος δίπολου στο μακρινό πεδίο ισχύει:

$$P_r = \frac{1}{2} \cdot \Re(E_\theta H_\phi^*) = \frac{|E|^2}{2\eta_0}$$

Για την κατευθυντικότητα D έχουμε:

$$D = \frac{4\pi P_{r,max}}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_r \sin(\theta) d\theta d\phi} \quad \text{όπου} \quad P_{r,max} = \frac{|E_{max}|^2}{2\eta_0}$$

Στην αρχική θεωρητική ανάλυση βρήκαμε ότι το  $|E|$  για όλα τα ρεύματα +I είναι:

$$|E| = E_0 \left| \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos(\theta))}{\sin(\theta)} \right| \cdot \left| \cos(k \frac{d}{2} \cos(\varphi) \sin(\theta)) + \cos(k \frac{3d}{2} \cos(\varphi) \sin(\theta)) + \cos(k \frac{5d}{2} \cos(\varphi) \sin(\theta)) + \cos(k \frac{7d}{2} \cos(\varphi) \sin(\theta)) \right|$$

Ενώ για εναλλάξ ρεύματα είναι:

$$|E| = E_0 \left| \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos(\theta))}{\sin(\theta)} \right| \cdot \left| \sin(k \frac{d}{2} \cos(\varphi) \sin(\theta)) - \sin(k \frac{3d}{2} \cos(\varphi) \sin(\theta)) + \sin(k \frac{5d}{2} \cos(\varphi) \sin(\theta)) - \sin(k \frac{7d}{2} \cos(\varphi) \sin(\theta)) \right|$$

Επομένως το  $|E_{max}| = \max(|E|)$  εμφανίζεται για τις μέγιστες τιμές των παραπάνω απολύτων. Και για τις δύο περιπτώσεις, το πρώτο απόλυτο έχει μέγιστη τιμή 1 και το δεύτερο μέγιστη τιμή 4.

Άρα τελικά και για τις δύο περιπτώσεις ισχύει:

$$|E_{max}| = 4E_0 \Leftrightarrow |E_{max}|^2 = 16E_0^2 \Leftrightarrow \frac{|E_{max}|^2}{2\eta_0} = \frac{16E_0^2}{2\eta_0} \Leftrightarrow P_{r,max} = \frac{8E_0^2}{\eta_0}$$

Οπότε η κατευθυντικότητα D δίνεται από τον τύπο:

$$D = \frac{4\pi P_{r,max}}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_r \sin(\theta) d\theta d\phi} = \frac{4\pi \frac{8E_0^2}{\eta_0}}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|E|^2}{2\eta_0} \sin(\theta) d\theta d\phi} = \frac{32\pi \frac{E_0^2}{\eta_0}}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{E_0^2 |E'|^2}{2\eta_0} \sin(\theta) d\theta d\phi} = \frac{32\pi \frac{E_0^2}{\eta_0}}{\frac{E_0^2}{2\eta_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |E'|^2 \sin(\theta) d\theta d\phi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \frac{64\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |E'|^2 \sin(\theta) d\theta d\phi}$$

όπου  $|E'|$  είναι το  $|E|$  χωρίς το  $E_0$ .

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση στον κώδικα με αριθμητικό τρόπο (διπλό άθροισμα Riemann αντί για διπλό ολοκλήρωμα) τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι:

$$D_1 = 24.696810366179303 \text{ (ευρύπλευρη λειτουργία: ρεύματα όλα } +I \text{ και } d = 3\lambda/4)$$

$$D_2 = 9.063764607100840 \text{ (ακροπυροδοτική λειτουργία: ρεύματα εναλλάξ και } d = \lambda/2)$$

Ενώ με τους θεωρητικούς (προσεγγιστικούς) τύπους για την κατευθυντικότητα παίρνουμε:

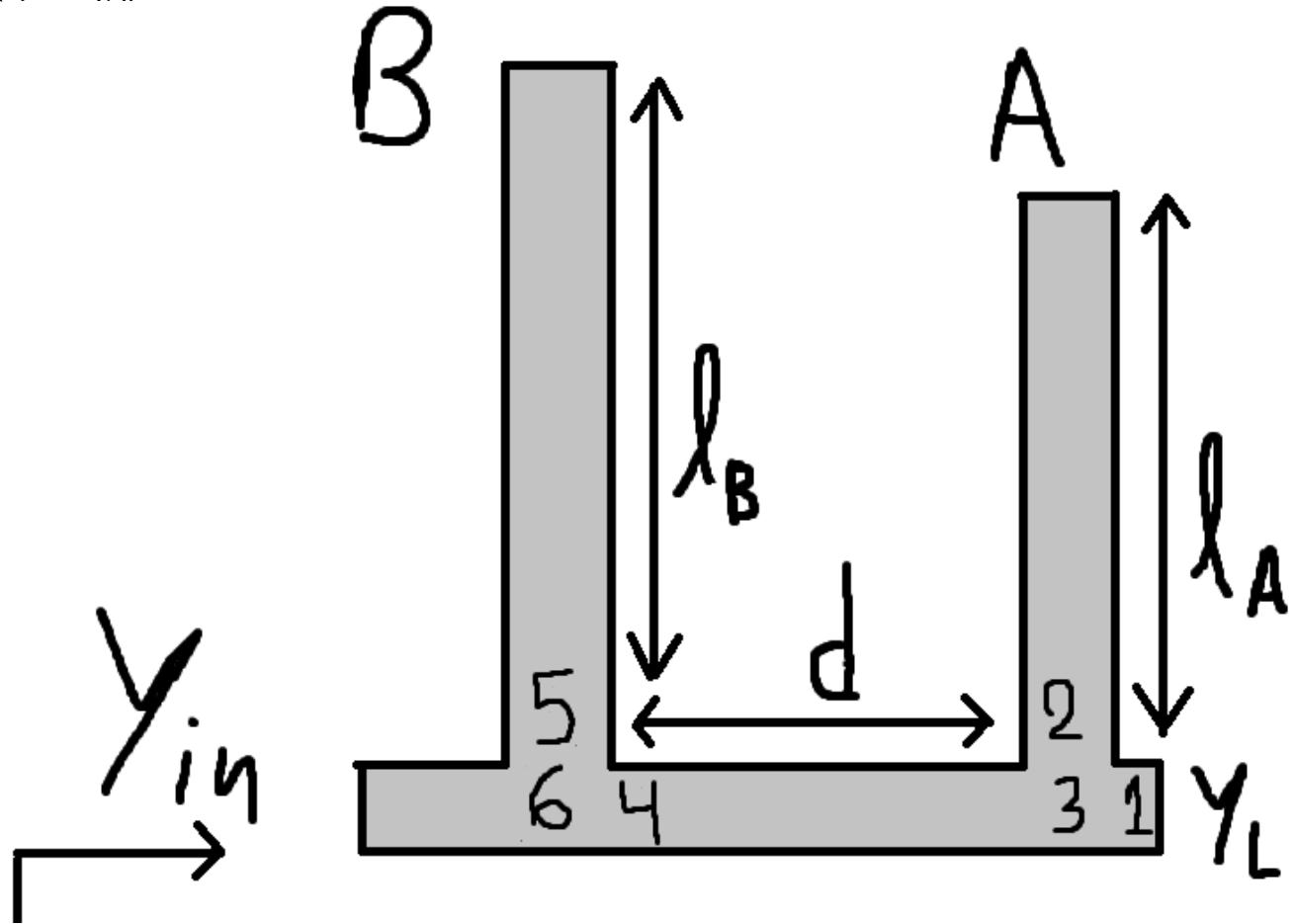
$$D_1 = \frac{2Nd}{\lambda} = \frac{2 \cdot 8 \frac{3\lambda}{4}}{\lambda} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 3\lambda}{4\lambda} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 3}{4} = \frac{16 \cdot 3}{4} = 4 \cdot 3 = 12$$

$$D_2 = \frac{4Nd}{\lambda} = \frac{4 \cdot 8 \frac{\lambda}{2}}{\lambda} = \frac{4 \cdot 8 \lambda}{2\lambda} = \frac{4 \cdot 8}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει αξιοσημείωτη απόκλιση. Ενδεχομένως να ήταν λιγότερο σημαντική για μεγαλύτερα N.

### 2.3. Διπλός παράλληλος κλαδωτής (αναλυτική λύση και εύρος ζώνης)

(α) Το σχήμα είναι:



Έστω ότι  $Y = \text{Re}(Y_L)$  και  $E = \text{Im}(Y_L)$ .

Έστω επίσης ότι 'Α' η επιδεκτικότητα του κλαδωτή Α και 'Β' η επιδεκτικότητα του κλαδωτή Β.

Τότε ισχύει ότι  $Y_2 = jA$  και  $Y_5 = jB$ .

Έχουμε:

$$Y_1 = Y_L = Y + jE$$

$$Y_2 = jA$$

$$Y_3 = Y_1 + Y_2 = Y + jE + jA = Y + j(E+A)$$

$$Y_5 = jB$$

$$Y_4 = Y_0 \frac{Y_3 + j \frac{Y_0 \tan Bd}{Y_0 + jY_3 \tan Bd}}{Y_0 + j(Y_3 + j(E+A)) \tan Bd} = Y_0 \frac{Y + j(E+A) + jC}{Y_0 + j(Y + j(E+A)) \tan Bd} =$$

$$= Y_0 \frac{Y + j(E+A+C)}{Y_0 + j(Y - (E+A)) \tan Bd} = Y_0 \frac{Y + j(E+A+C)}{Y_0 + j(Y \tan Bd - (E+A) \tan Bd)} =$$

$$= Y_0 \frac{Y + j(E+A+C)}{Y_0 + jD - E \tan Bd - A \tan Bd} = Y_0 \frac{Y + j(E+A+C)}{Y_0 + j(D + K - A \tan Bd)} =$$

$$= Y_0 \frac{Y + j(E+A+C)}{Y_0 + j(K - A \tan Bd) + jD} = Y_0 \frac{(Y + j(E+A+C))(K - A \tan Bd - jD)}{(K - A \tan Bd)^2 + D^2} =$$

$$= Y_0 \frac{Y(K - A \tan Bd) - jYD + j(E+A+C)(K - A \tan Bd) + D(E+A+C)}{(K - A \tan Bd)^2 + D^2} =$$

$$= \frac{YY_0(K - A \tan Bd) - jYY_0D + jY_0(E+A+C)(K - A \tan Bd) + DY_0(E+A+C)}{(K - A \tan Bd)^2 + D^2} =$$

$$= \frac{YY_0(K - A \tan Bd) + DY_0(E+A+C)}{(K - A \tan Bd)^2 + D^2} + j \frac{Y_0(E+A+C)(K - A \tan Bd) - YY_0D}{(K - A \tan Bd)^2 + D^2}$$

$$Y_6 = Y_4 + Y_5 = Y_4 + jB =$$

$$= \frac{YY_0(K - A\tan Bd) + DY_0(E + A + C)}{(K - A\tan(Bd))^2 + D^2} + j \left( \frac{Y_0(E + A + C)(K - A\tan Bd) - YY_0D}{(K - A\tan Bd)^2 + D^2} + B \right)$$

$Y_{in} = Y_6$ . Da lösbar  $Y_{in} = Y_0 \Rightarrow Y_6 = Y_0 \Rightarrow \operatorname{Re}(Y_6) = \operatorname{Re}(Y_0)$  kau

$\operatorname{Im}(Y_6) = \operatorname{Im}(Y_0) \Rightarrow \operatorname{Re}(Y_6) = Y_0$  kau  $\operatorname{Im}(Y_6) = 0$

Apa:

$$\operatorname{Re}(Y_6) = Y_0 \Rightarrow \frac{YY_0(K - A\tan Bd) + DY_0(E + A + C)}{(K - A\tan Bd)^2 + D^2} = Y_0 \Rightarrow (K - A\tan Bd)^2 + D^2 =$$

$$= Y(K - A\tan Bd) + D(E + A + C) \Rightarrow K^2 - 2KA\tan Bd + A^2\tan^2 Bd + D^2 =$$

$$= YK - YA\tan Bd + DE + DA + DC \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^2\tan^2 Bd - 2KA\tan Bd + YA\tan Bd - DA + K^2 + D^2 - YK - DE - DC = 0 \Leftrightarrow$$

$\overbrace{\quad\quad\quad}^a \qquad \overbrace{\quad\quad\quad}^M$

$$\Leftrightarrow aA^2 + A(Y\tan Bd - 2K\tan Bd - D) + M = 0 \Leftrightarrow aA^2 + bA + M = 0$$

$\overbrace{\quad\quad\quad}^b$

$$\Delta = b^2 - 4aM$$

$$A_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{cases} \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

H fórum píza naparéifina or fórum enifektoróna (avoi yzokúkluja),  
ewi u apruzim or apruzim (Bpxukukluja).

~~λογισμού~~ ~~α > 0~~ ( $\Rightarrow \lambda_a > 0$ )  $\Leftrightarrow \frac{1}{2a} > 0$  ( $\Rightarrow \frac{\sqrt{D}}{2a} > 0$ ) ~~λογισμού~~

$$\log \text{su} \quad a > 0 \Leftrightarrow \lambda_a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{D}}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} > \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} > \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow A_1 > \frac{-b}{2a} \quad ①$$

$$\text{Όποιως} \quad \frac{-\sqrt{D}}{2a} < 0 \Leftrightarrow \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} < \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} < \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow A_2 < \frac{-b}{2a} \quad ②$$

Άντο  $①, ②$ :  $A_1 > A_2$  από τη διεύθυνση πίστας στην  $A_1$

(είναι σε εξουφες επειδή πίστες τούτες έχουν μερικές συγκεκριμένες στοιχεία)

Είναι σταθερή στην πραγματικότητα για την ανοιχτή περιοχή, ανάλογα με την προσαρμογή της πίστας.

Από για την ανοιχτή περιοχή την κλασική εξουφες:

$$Y_2(0) = jA_1 \Leftrightarrow \frac{1}{-jZ_0 \cot(B \cdot l_{Aoc})} = jA_1 \Leftrightarrow \frac{1}{Z_0 \cot(B \cdot l_{Aoc})} = jA_1$$

$$\Leftrightarrow Y_0 \tan(B \cdot l_{Aoc}) = A_1 \Leftrightarrow \tan(B \cdot l_{Aoc}) = \frac{A_1}{Y_0} \Leftrightarrow B \cdot l_{Aoc} = \arctan\left(\frac{A_1}{Y_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow l_{Aoc} = \frac{\arctan\left(\frac{A_1}{Y_0}\right)}{B} = \frac{\arctan\left(\frac{A_1}{Y_0}\right)}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\arctan\left(\frac{A_1}{Y_0}\right)}{\frac{2\pi}{\lambda}}$$

μα δημιουργίας κλαδών εξουθε:

$$Y_2(\omega) = jA_2 \Leftrightarrow \frac{1}{jZ_0 \tan(B \cdot l_{A2c})} = jA_2 \Leftrightarrow \frac{-j}{Z_0 \tan(B \cdot l_{A2c})} = jA_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -Y_0 \cot(B \cdot l_{A2c}) = A_2 \Leftrightarrow \cot(B \cdot l_{A2c}) = \frac{-A_2}{Y_0} \Leftrightarrow B \cdot l_{A2c} = \operatorname{arccot}\left(\frac{-A_2}{Y_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow l_{A2c} = \frac{\operatorname{arccot}\left(\frac{-A_2}{Y_0}\right)}{B} = \frac{\operatorname{arccot}\left(\frac{-A_2}{Y_0}\right)}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\operatorname{arccot}\left(\frac{-A_2}{Y_0}\right)}{\frac{2\pi}{\lambda}}$$

Όσον αρρόφει τον κλαδών Β:

$$\operatorname{Im}(Y_B) = 0 \Leftrightarrow \frac{Y_0(E+A+C)(K-A\tan Bd) - Y Y_0 D}{(K-A\tan Bd)^2 + D^2} + B = 0 \Leftrightarrow B =$$

~~$$B = -\frac{Y_0(E+A+C)(K-A\tan Bd) - Y Y_0 D}{(K-A\tan Bd)^2 + D^2}$$~~

Όποιες μα αντιχρονικής κλαδών εξουθε:

$$B_1 = -\frac{Y_0(E+A_1+C)(K-A_1\tan Bd) - Y Y_0 D}{(K-A_1\tan Bd)^2 + D^2}$$

$$Y_5(\omega) = jB_1 \Leftrightarrow \frac{1}{-jZ_0 \cot(B \cdot l_{B5c})} = jB_1 \Leftrightarrow \frac{j}{Z_0 \cot(B \cdot l_{B5c})} = jB_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y_0 \tan(B \cdot l_{B5c}) = B_1 \Leftrightarrow \tan(B \cdot l_{B5c}) = \frac{B_1}{Y_0} \Leftrightarrow B \cdot l_{B5c} = \operatorname{arctan}\left(\frac{B_1}{Y_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow l_{B5c} = \frac{\operatorname{arctan}\left(\frac{B_1}{Y_0}\right)}{B} = \frac{\operatorname{arctan}\left(\frac{B_1}{Y_0}\right)}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\operatorname{arctan}\left(\frac{B_1}{Y_0}\right)}{\frac{2\pi}{\lambda}}$$

και όταν ~~θραύσεις διαφορετικές~~ θραύσεις εκπομπές:

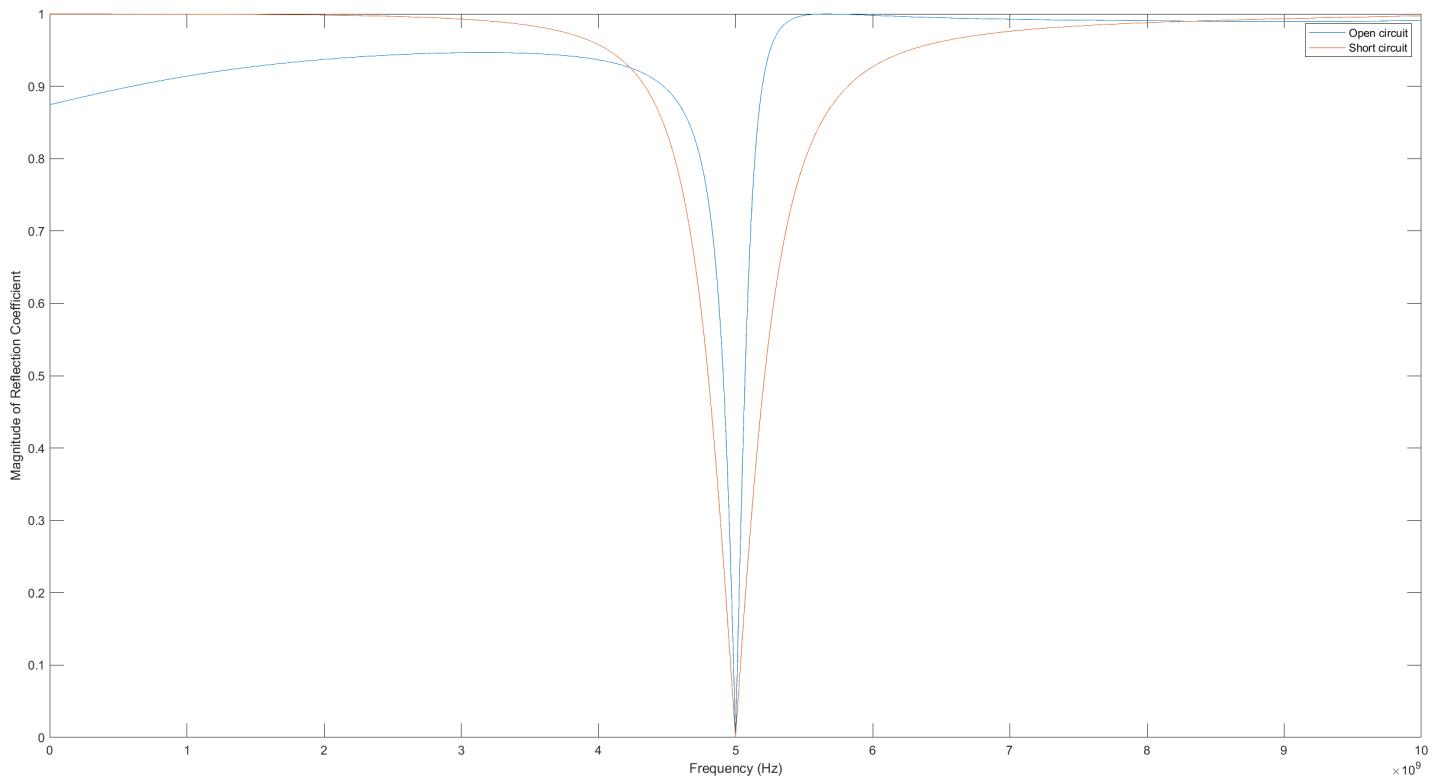
$$\beta_2 = -\frac{Y_0(E+A_2+C)(K-A_2 \tan(Bd)) - YY_0 D}{(K-A_2 \tan Bd)^2 + D^2}$$

$$Y_{5(sc)} = j \beta_2 \Leftrightarrow \frac{1}{j Z_0 \tan(B \cdot l_{BSC})} = j \beta_2 \Leftrightarrow \frac{-1}{Z_0 \tan(B \cdot l_{BSC})} = \beta_2$$

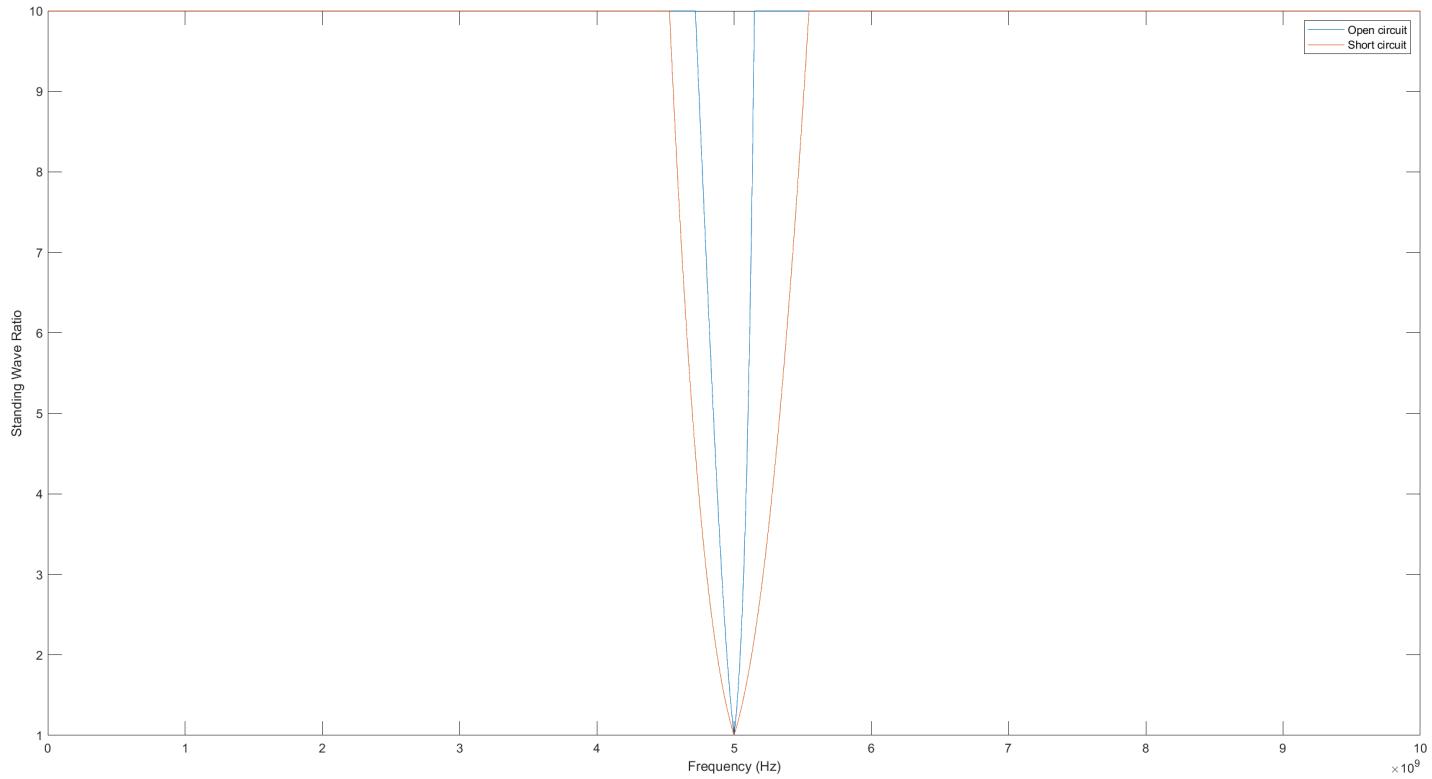
$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow -Y_0 \cot(B \cdot l_{BSC}) = \beta_2 \Leftrightarrow \cot(B \cdot l_{BSC}) = \frac{-\beta_2}{Y_0} \Leftrightarrow B \cdot l_{BSC} = \\ & = \arccot\left(\frac{-\beta_2}{Y_0}\right) \Leftrightarrow l_{BSC} = \frac{\arccot\left(\frac{-\beta_2}{Y_0}\right)}{B} = \frac{\arccot\left(\frac{-\beta_2}{Y_0}\right)}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \\ & = \frac{\arccot\left(\frac{-\beta_2}{Y_0}\right)}{\frac{2\pi}{\lambda}} \end{aligned}$$

(β) Ο κώδικας αυτού του ερωτήματος παρατίθεται στο αρχείο "code23b.m".

**Μέτρο συντελεστή ανάκλασης σε καθαρό αριθμό, συχνότητες 0 – 10 GHz**

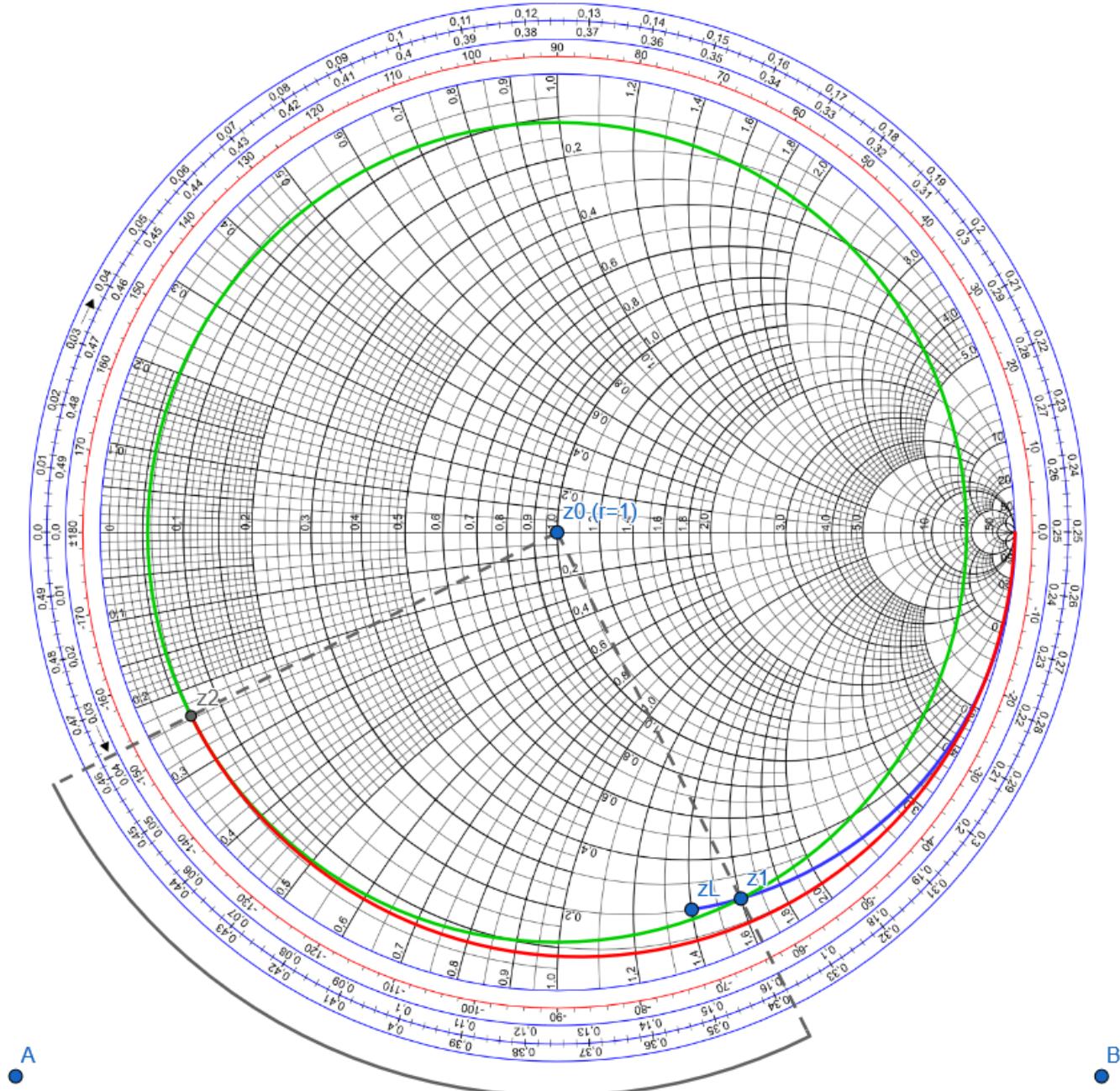


### Γράφημα SWR



Παρατηρούμε ότι το εύρος ζώνης καλής προσαρμογής (δηλαδή η περιοχή συχνοτήτων για την οποία ισχύει  $SWR \leq 2$ ) είναι μεγαλύτερο στην περίπτωση των βραχυκυκλωμένων κλαδωτών.

(γ)



Ξεκινάμε από το φορτίο (σημείο  $z_L = Z_L / Z_0 = 0.2 - j1.4$ ) και πηγαίνουμε προς την είσοδο, προσπαθώντας να επιτύχουμε προσαρμογή, δηλαδή να φτάσουμε στο σημείο  $z_0 = Z_0 / Z_0 = 1$ .

Συναντάμε τον πρώτο πυκνωτή σε σειρά, ο οποίος προσδίδει αρνητική αντίδραση. Μετατοπιζόμαστε έτσι σε κάποιο σημείο της μπλε καμπύλης, π.χ.  $z_1$ .

Στη συνέχεια η γραμμή μεταφοράς  $\lambda/8$  μας πηγαίνει στο σημείο  $z_2$ , κινούμενοι ωρολογιακά πάνω στον πράσινο κύκλο σταθερού SWR, κατά 0.125 στην κλίμακα μηκών κύματος.

Από το  $z_2$  στο οποίο βρισκόμαστε, πρέπει να φτάσουμε στο  $z_0$ . Όμως το μόνο στοιχείο που απομένει πλέον είναι ο δεύτερος πυκνωτής σε σειρά, ο οποίος προσδίδοντας αρνητική αντίδραση μπορεί να μας μετακινήσει μόνο σε κάποιο σημείο της κόκκινης καμπύλης.

Άρα δεν μπορούμε να φτάσουμε στο  $z_0$ .

Αυτό συμβαίνει ανεξάρτητα από την αντίδραση του πρώτου πυκνωτή, αφού για το  $z_1$  ισχύει αναγκαστικά  $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_L)$ , ενώ η γραμμή μεταφοράς  $\lambda/8$  δεν επαρκεί ούτε καν για να μας μεταφέρει από το αρχικό  $z_L$  (χωρίς την επιπρόσθετη αρνητική αντίδραση του πρώτου πυκνωτή) σε κάποιο σημείο θετικής αντίδρασης (ώστε μετά με την αρνητική αντίδραση του δεύτερου πυκνωτή να καταλήγαμε σε  $r=1$ ).

Πράγματι, ακόμα και αν ίσχυε  $\text{Im}(z_1) \approx \text{Im}(z_L)$  (πυκνωτής πολύ μικρής αντίδρασης), η γραμμή μεταφοράς  $\lambda/8$  θα κατάφερνε να μας πάει μονάχα σε σημείο για το οποίο η κλίμακα μηκών κύματος θα έδειχνε  $0.348 + 0.125 = 0.473$ .

Συνεχίζουμε δηλαδή να είμαστε στο κάτω ημικύλιο του διαγράμματος Smith, όπου έχουμε αρνητική αντίδραση. Η προσθήκη επιπλέον αρνητικής αντίδρασης με τον δεύτερο πυκνωτή δεν μπορεί να μας οδηγήσει στο  $r=1$ .

Επομένως εάν οι δύο κλαδωτές αντικατασταθούν με δύο πυκνωτές σε σειρά, δεν είναι δυνατή η προσαρμογή, ανεξαρτήτως των χωρητικοτήτων τους.

## 2.4. Παραλλαγές κυλινδρικού αντηχείου

(α) Το πεδίο σε κυλινδρικό αντηχείο που λειτουργεί σε ρυθμό  $\text{TM}_{nml}$  δίνεται από τους τύπους:

$$E_\rho = \frac{-\beta}{k_c} A J_n'(k_c \rho) \cos(n\varphi) \sin(\beta z)$$

$$E_\varphi = \frac{\beta n}{k_c^2 \rho} A J_n(k_c \rho) \sin(n\varphi) \sin(\beta z)$$

$$E_z = A J_n(k_c \rho) \cos(n\varphi) \cos(\beta z)$$

$$H_\rho = \frac{-j\omega \epsilon n}{k_c^2 \rho} A J_n(k_c \rho) \sin(n\varphi) \cos(\beta z)$$

$$H_\varphi = \frac{-j\omega \epsilon}{k_c} A J_n'(k_c \rho) \cos(n\varphi) \cos(\beta z)$$

$$\text{όπου } k_c = \frac{p_{nm}}{\alpha} \text{ και } \beta = \frac{l\pi}{d}$$

Επομένως για ρυθμό  $\text{TM}_{010}$  ( $n=0, m=1, l=0$ ) έχουμε  $\beta=0$  και άρα  $E_\rho, E_\varphi = 0$ . Επιπλέον επειδή  $n = 0$ , ισχύει και  $H_\rho = 0$ . Μένουν μόνο οι συνιστώσες  $E_z$  και  $H_\varphi$ , οι οποίες είναι:

$$E_z = A J_0\left(\frac{p_{01}}{\alpha} \rho\right) \cos(0) \cos(0) = A J_0\left(\frac{2.405 \rho}{\alpha}\right)$$

$$H_\varphi = \frac{-j\omega \epsilon_0}{p_{01}} A J_0'\left(\frac{p_{01}}{\alpha} \rho\right) \cos(0) \cos(0) = \frac{-j\omega \epsilon_0 \alpha}{2.405} A J_0'\left(\frac{2.405 \rho}{\alpha}\right)$$

Συμπεραίνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο δεν έχει ακτινική ή αζιμουθιακή συνιστώσα, αλλά μόνο κατά την διεύθυνση z.

Το μαγνητικό πεδίο δεν έχει ακτινική συνιστώσα, αλλά μόνο αζιμουθιακή.

Παρατηρούμε επίσης ότι για σταθερό  $\rho$ , το  $E_z$  (και  $H_\phi$ ) παραμένει αμετάβλητο σε όλο το μήκος του αντηχείου. Επιπρόσθετα, λόγω του προσανατολισμού των  $E_z$  και  $H_\phi$ , το διάνυσμα Poynting δείχνει αποκλειστικά κατά την ακτινική διεύθυνση.

Συνεπώς το κυματικό φαινόμενο εμφανίζεται μόνο ακτινικά, κατά  $\rho$ . Δηλαδή στην διατομή του αντηχείου και όχι προς την διεύθυνση του μήκους του.

Όσον αφορά το πώς μεταβάλλονται οι εντάσεις για τις διάφορες τιμές του  $\rho$ , έχουμε:

- Για το  $E_z$ :

$$0 < \rho < \alpha \Leftrightarrow 0 < \frac{\rho}{\alpha} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{2.405 \rho}{\alpha} < 2.405$$

Η συνάρτηση Bessel  $J_0(x)$  στο διάστημα  $[0, 2.405]$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχώς θετική (μηδενίζεται για πρώτη φορά για  $x = p_{01} = 2.405$ ), επομένως το μέτρο  $|J_0(x)|$  είναι επίσης φθίνουσα συνάρτηση σε αυτό το διάστημα.

Άρα εφόσον  $E_z = AJ_0\left(\frac{2.405 \rho}{\alpha}\right)$ , το μέτρο του  $E_z$  είναι μέγιστο για  $\rho = 0$  και φθίνει συνεχώς όσο το  $\rho$  πλησιάζει το  $\alpha$ , φτάνοντας το 0 όταν  $\rho = \alpha$ .

- Για το  $H_\phi$ :

Χωρίζουμε την ανάλυση σε 2 διαστήματα τιμών του  $\rho$ .

Διάστημα 1:

$$0 < \rho < \frac{2 \alpha}{2.405} \Leftrightarrow 0 < \frac{\rho}{\alpha} < \frac{2}{2.405} \Leftrightarrow 0 < \frac{2.405 \rho}{\alpha} < 2$$

Η συνάρτηση Bessel  $J_0'(x)$  στο διάστημα  $[0, 2]$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχώς αρνητική (όντας 0 για  $x=0$ ), επομένως το μέτρο  $|J_0(x)|$  είναι αύξουσα συνάρτηση σε αυτό το διάστημα.

Άρα εφόσον  $H_\phi = \frac{-j \omega \epsilon_0 \alpha}{2.405} A J_0'\left(\frac{2.405 \rho}{\alpha}\right)$ , το μέτρο του  $H_\phi$  είναι 0 για  $\rho = 0$  και αυξάνεται συνεχώς όσο το  $\rho$  πλησιάζει το  $2\alpha / 2.405$ , φτάνοντας το μέγιστό του όταν  $\rho = 2\alpha / 2.405$ .

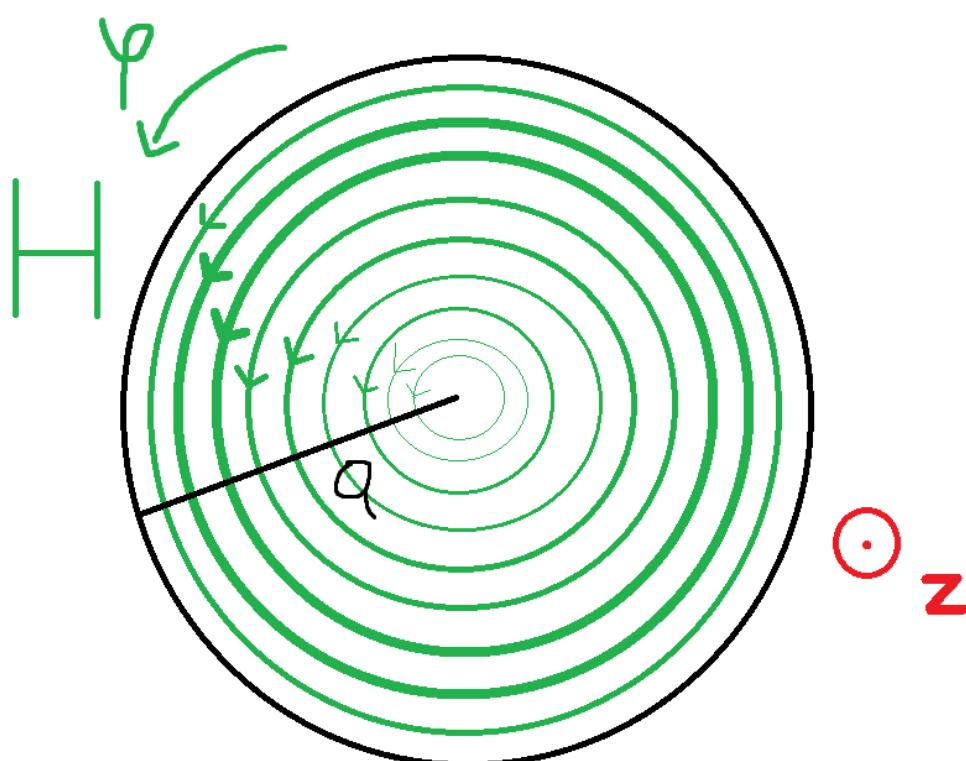
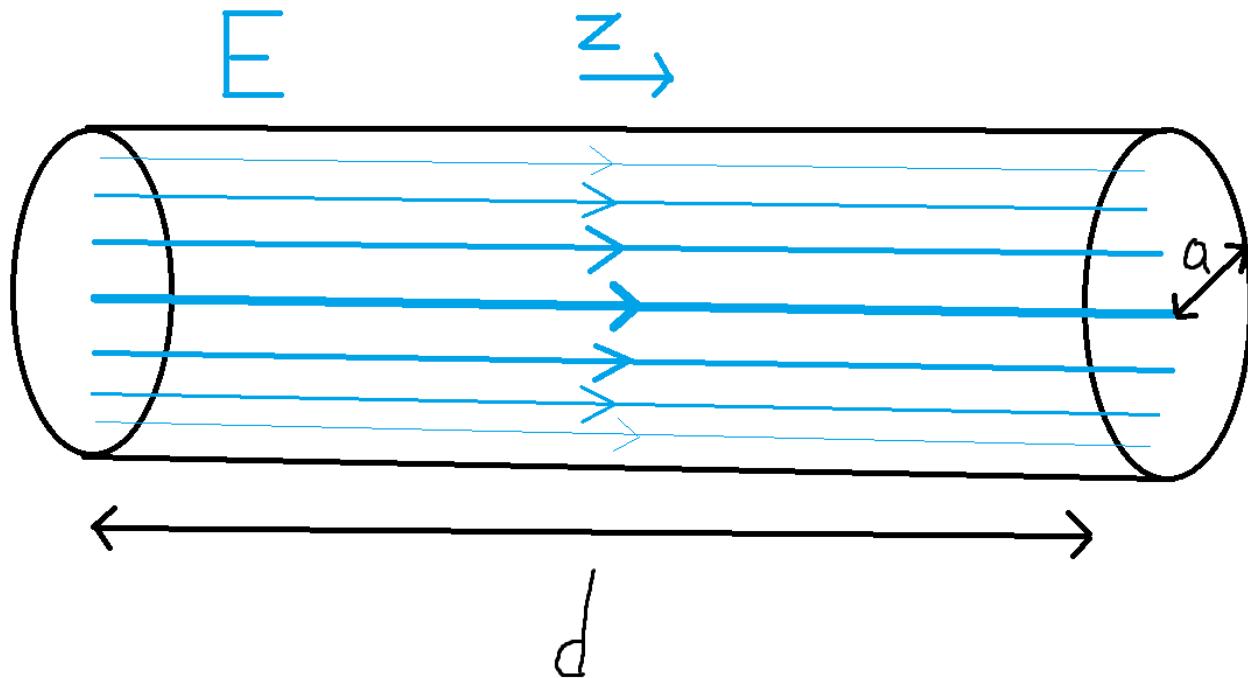
Διάστημα 2:

$$\frac{2 \alpha}{2.405} < \rho < \alpha \Leftrightarrow \frac{2}{2.405} < \frac{\rho}{\alpha} < 1 \Leftrightarrow 2 < \frac{2.405 \rho}{\alpha} < 2.405$$

Η συνάρτηση Bessel  $J_0'(x)$  στο διάστημα [2, 2.405] είναι γνησίως αύξουσα και συνεχώς αρνητική, επομένως το μέτρο  $|J_0(x)|$  είναι φθίνουσα συνάρτηση σε αυτό το διάστημα.

Άρα εφόσον  $H_\varphi = \frac{-j\omega\epsilon_0\alpha}{2.405} A J_0'(\frac{2.405\rho}{\alpha})$ , το μέτρο του  $H_\varphi$  για τιμές  $\rho > 2\alpha / 2.405$  μειώνεται όσο το  $\rho$  πλησιάζει το  $\alpha$ , χωρίς να φτάνει κοντά στον μηδενισμό.

Ακολουθούν ποιοτικά σχήματα των γραμμών του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου:



(β) Με χαρακτηριστικά  $\epsilon_r$  και τανδ, το υλικό θα έχει ενεργό (σχετική) διηλεκτρική σταθερά  $\epsilon_{r,eff}$  ίση με:

$$\epsilon_{r,eff} = \epsilon_r (1 - j \tan(\delta))$$

Θεωρούμε παρόμοια μορφή πεδίων εντός της πλάκας:

$$E_z' = A' J_0 \left( \frac{2.405 \rho}{\alpha} \right)$$

$$H_\phi' = \frac{-j \omega \epsilon' \alpha}{2.405} A' J_0' \left( \frac{2.405 \rho}{\alpha} \right) = \frac{-j \omega \epsilon_0 \epsilon_{r,eff} \alpha}{2.405} A' J_0' \left( \frac{2.405 \rho}{\alpha} \right)$$

Τόσο το διηλεκτρικό όσο και ο αέρας παρουσιάζουν σημαντική αντίσταση, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν επιφανειακά ρεύματα στην επιφάνεια επαφής. Έτσι, η ένταση του μαγνητικού πεδίου παραμένει ίδια και έχουμε:

$$H_\phi' = H_\phi \Leftrightarrow \frac{-j \omega \epsilon_0 \epsilon_{r,eff} \alpha}{2.405} A' J_0' \left( \frac{2.405 \rho}{\alpha} \right) = \frac{-j \omega \epsilon_0 \alpha}{2.405} A J_0' \left( \frac{2.405 \rho}{\alpha} \right) \Leftrightarrow \epsilon_{r,eff} A' = A \Leftrightarrow A' = \frac{A}{\epsilon_{r,eff}} = \frac{A}{\epsilon_r (1 - j \tan(\delta))}$$

Οπότε για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην πλάκα ισχύει:

$$E_z' = \frac{A}{\epsilon_r (1 - j \tan(\delta))} J_0 \left( \frac{2.405 \rho}{\alpha} \right)$$

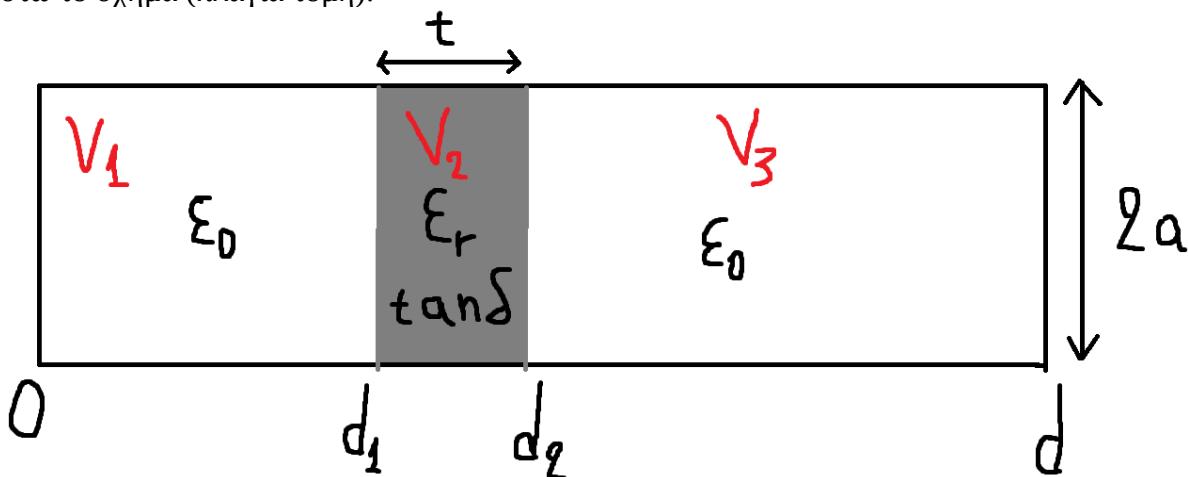
Τελικά:

$$E_z' = \frac{A}{\epsilon_r (1 - j \tan(\delta))} J_0 \left( \frac{2.405 \rho}{\alpha} \right)$$

$$H_\phi' = \frac{-j \omega \epsilon_0 \alpha}{2.405} A J_0' \left( \frac{2.405 \rho}{\alpha} \right)$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι με την εισαγωγή της διηλεκτρικής πλάκας η μορφή του πεδίου (τόσο του ηλεκτρικού όσο και του μαγνητικού) δεν μεταβάλλεται στον κενό χώρο του αντηχείου, μεταβάλλεται όμως η σχέση των τιμών του ηλεκτρικού πεδίου εντός και εκτός της διηλεκτρικής πλάκας.

(γ) Έστω το σχήμα (πλάγια τομή):



Η μέση αποθηκευμένη ενέργεια δίνεται από το ολοκλήρωμα του ηλεκτρικού πεδίου στον όγκο του αντηχείου:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{4} \iiint_V \varepsilon |E|^2 dV = \frac{1}{4} \iiint_{V_1} \varepsilon_0 |E_z|^2 dV + \frac{1}{4} \iiint_{V_2} \varepsilon_0 \varepsilon_r |E_z|^2 dV + \frac{1}{4} \iiint_{V_3} \varepsilon_0 |E_z|^2 dV \Rightarrow \\ &\Rightarrow W_e = \frac{\varepsilon_0}{4} \int_0^{d_1} \iint_S |E_z|^2 \rho d\rho d\varphi dz + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{4} \int_{d_1}^{d_2} \iint_S |E_z|^2 \rho d\rho d\varphi dz + \frac{\varepsilon_0}{4} \int_{d_2}^d \iint_S |E_z|^2 \rho d\rho d\varphi dz \Rightarrow \\ &\Rightarrow W_e = \frac{\varepsilon_0}{4} \int_0^{d_1} \iint_S A^2 J_0^2 \left( \frac{2.405 \rho}{\alpha} \right) \rho d\rho d\varphi dz + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{4} \int_{d_1}^{d_2} \iint_S \frac{A^2}{\varepsilon_r^2 (1 + \tan^2(\delta))} J_0^2 \left( \frac{2.405 \rho}{\alpha} \right) \rho d\rho d\varphi dz + \frac{\varepsilon_0}{4} \int_{d_2}^d \iint_S A^2 J_0^2 \left( \frac{2.405 \rho}{\alpha} \right) \rho d\rho d\varphi dz \Rightarrow \\ &\Rightarrow W_e = \int_0^{d_1} \iint_S \frac{\varepsilon_0}{4} A^2 J_0^2 \left( \frac{2.405 \rho}{\alpha} \right) \rho d\rho d\varphi dz + \frac{1}{\varepsilon_r (1 + \tan^2(\delta))} \int_{d_1}^{d_2} \iint_S \frac{\varepsilon_0}{4} A^2 J_0^2 \left( \frac{2.405 \rho}{\alpha} \right) \rho d\rho d\varphi dz + \int_{d_2}^d \iint_S \frac{\varepsilon_0}{4} A^2 J_0^2 \left( \frac{2.405 \rho}{\alpha} \right) \rho d\rho d\varphi dz \end{aligned}$$

Θέτουμε  $\iint_S \frac{\varepsilon_0}{4} A^2 J_0^2 \left( \frac{2.405 \rho}{\alpha} \right) \rho d\rho d\varphi = K$  και παρατηρώντας ότι  $d_2 = d_1 + t$  έχουμε:

$$\begin{aligned} W_e &= \int_0^{d_1} K dz + \frac{1}{\varepsilon_r (1 + \tan^2(\delta))} \int_{d_1}^{d_1+t} K dz + \int_{d_1+t}^d K dz = K d_1 + \frac{1}{\varepsilon_r (1 + \tan^2(\delta))} K t + K(d - d_1 - t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow W_e = K d_1 + \frac{1}{\varepsilon_r (1 + \tan^2(\delta))} K t + K d - K d_1 - K t = \frac{1}{\varepsilon_r (1 + \tan^2(\delta))} K t + K d - K t = \frac{K t}{\varepsilon_r (1 + \tan^2(\delta))} + K(d - t) \end{aligned}$$

Λόγω τέλειας αγωγιμότητας των τοιχωμάτων, απώλειες έχουμε μόνο στο διηλεκτρικό. Διηλεκτρικό με  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r (1 - j \tan(\delta))$  αντιστοιχεί σε αγωγιμότητα για το μέσο ίση με  $\sigma = \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \tan(\delta)$  και οπότε για τις απώλειες θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P_d &= P_d = \frac{1}{2} \sigma \iiint_{V_2} |E|^2 dV = \frac{1}{2} \sigma \int_{d_1}^{d_1+t} \iint_S |E_z|^2 \rho d\rho d\varphi dz \Rightarrow \\ &\Rightarrow P_d = \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \tan(\delta) \int_{d_1}^{d_1+t} \iint_S \frac{A^2}{\varepsilon_r^2 (1 + \tan^2(\delta))} J_0^2 \left( \frac{2.405 \rho}{\alpha} \right) \rho d\rho d\varphi dz \Rightarrow \\ &\Rightarrow P_d = \frac{2 \omega \tan(\delta)}{\varepsilon_r (1 + \tan^2(\delta))} \int_{d_1}^{d_1+t} \iint_S \frac{\varepsilon_0}{4} A^2 J_0^2 \left( \frac{2.405 \rho}{\alpha} \right) \rho d\rho d\varphi dz = \frac{2 \omega \tan(\delta)}{\varepsilon_r (1 + \tan^2(\delta))} \int_{d_1}^{d_1+t} K dz = \frac{2 \omega \tan(\delta)}{\varepsilon_r (1 + \tan^2(\delta))} K t \end{aligned}$$

Στον συντονισμό ισχύει  $W_m = W_e$  και τελικά έχουμε για το Q:

$$\begin{aligned} Q &= \omega \frac{W_e + W_m}{P_d} = \omega \frac{2 W_e}{P_d} = \omega \frac{2 \frac{K t}{\varepsilon_r (1 + \tan^2(\delta))} + 2 K(d - t)}{\frac{2 \omega \tan(\delta)}{\varepsilon_r (1 + \tan^2(\delta))} K t} = \omega \frac{2 K t + 2 K(d - t) \varepsilon_r (1 + \tan^2(\delta))}{2 \omega \tan(\delta) K t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow Q = \frac{t + (d - t) \varepsilon_r (1 + \tan^2(\delta))}{\tan(\delta) t} = \frac{1 + (\frac{d}{t} - 1) \varepsilon_r (1 + \tan^2(\delta))}{\tan(\delta)} \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση φαίνεται να επαληθεύεται από την θεωρία, αφού στην περίπτωση που το υλικό γεμίζει πλήρως το αντηχείο ( $t = d$ ) παίρνουμε  $Q = 1 / \tan \delta$ , ο οποίος είναι και ο θεωρητικός τύπος για αυτήν την περίπτωση.

(δ) Είναι πλέον συντονιστής βραχυκυλωμένου ομοαξονικού καλωδίου (TEM).

Έχουμε ότι  $Z_{in} = j Z_0 \tan(\beta d)$ , με την συνθήκη συντονισμού να είναι:

$$\Im(Z_{in})=0 \Leftrightarrow Z_0 \tan(\beta d)=0 \Leftrightarrow \tan(\beta d)=0 \Leftrightarrow \beta d=v\pi \Leftrightarrow d=\frac{v\pi}{\beta}=\frac{v\pi}{2\pi}=\frac{v\pi\lambda}{2\pi}=\frac{v\lambda}{2}$$

Η χαμηλότερη συχνότητα συντονισμού του είναι για  $v=1$ ,  $d = \lambda/2$ .

Έχουμε:

$$d=\frac{\lambda}{2}=\frac{c}{2f_{r,min}} \Rightarrow \frac{c}{f_{r,min}}=2d \Leftrightarrow f_{r,min}=\frac{c}{2d}$$

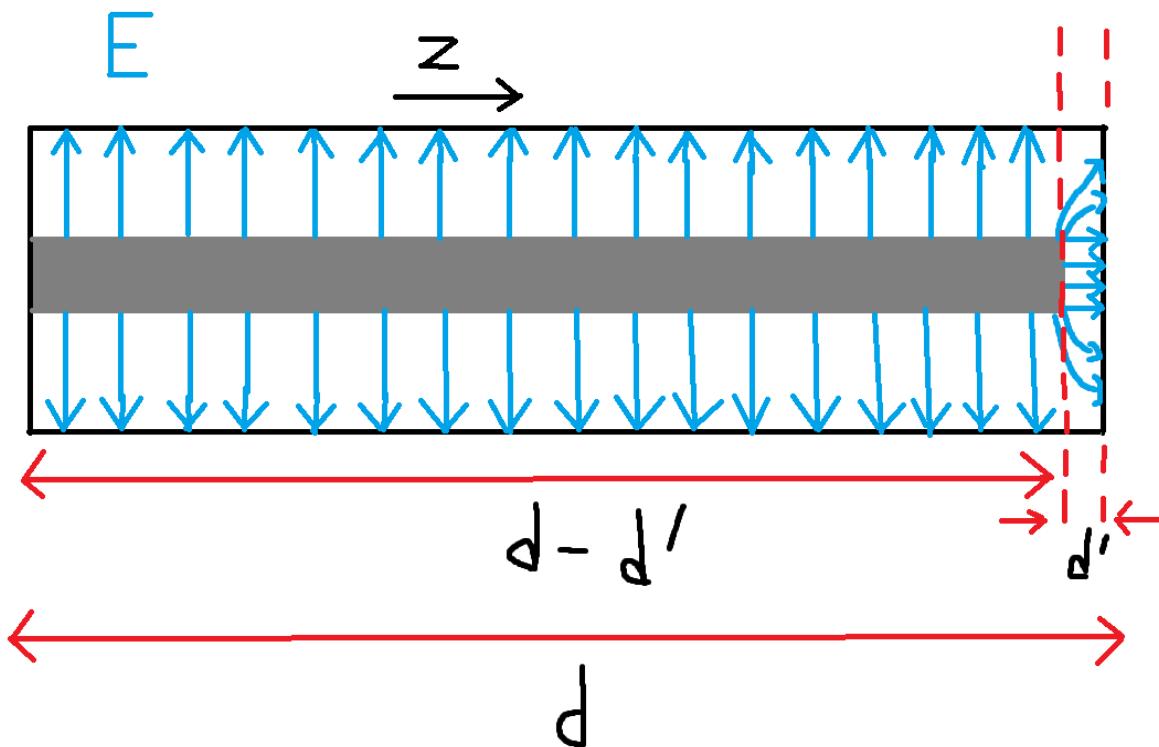
(ε) Το αντηχείο έχει πλέον ένα μέρος όπου υπάρχει μεταλλικός αγωγός και ένα μέρος όπου υπάρχει μικρό διάκενο μήκους  $d'$ .

Στο μέρος με τον μεταλλικό αγωγό έχουμε όπως και στο προηγούμενο ερώτημα ομοαξονικό καλώδιο και άρα μετάδοση ρυθμού TEM.

Επειδή το διάκενο  $d'$  είναι πολύ μικρό (και άρα και μικρό σε σχέση με το μήκος κύματος  $\lambda$ ), θεωρούμε ότι δεν μπορεί σε αυτό να αναπτυχθεί κυματικό φαινόμενο.

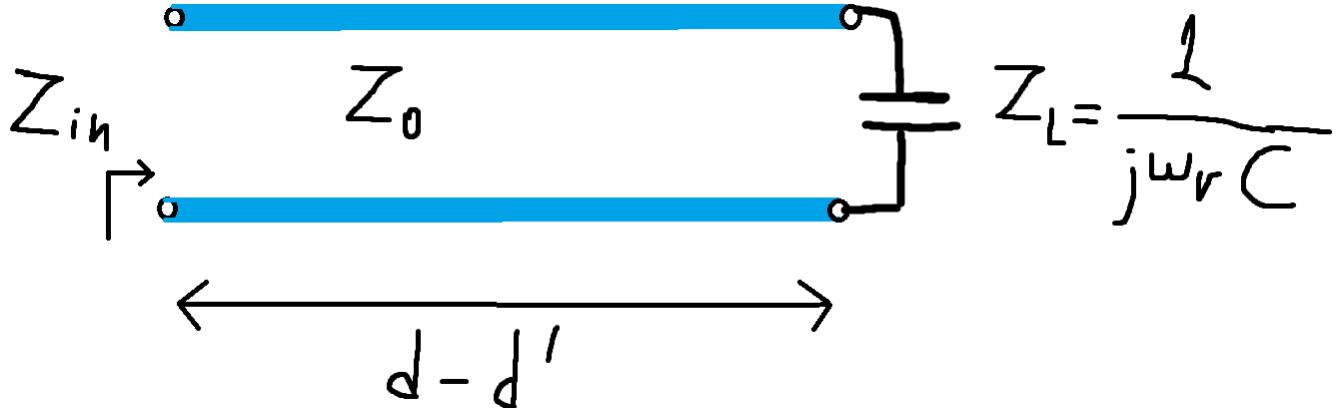
Στην άκρη του μεταλλικού αγωγού (η οποία “βλέπει” στο διάκενο), οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου θα πρέπει να είναι κάθετες στην τέλεια αγώγιμη βάση του αντηχείου.

Η πλάγια τομή του αντηχείου θα είναι στο περίπου:



Μπορούμε λοιπόν προσεγγιστικά να θεωρήσουμε ότι το πεδίο στο διάκενο είναι ομοιόμορφο και έχει παράλληλες δυναμικές γραμμές κατά την διεύθυνση  $z$ , που ξεκινούν από το τέλος του τέλειου αγωγού και καταλήγουν κάθετα στην τέλεια αγώγιμη βάση του αντηχείου.

Η διάταξη αυτή έχει πρακτικά την συμπεριφορά πυκνωτή, και άρα το κυκλωματικό ισοδύναμο θα είναι:



Έχουμε:

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_0 \frac{Z_L + j Z_0 \tan(\beta(d-d'))}{Z_0 + j Z_L \tan(\beta(d-d'))} = Z_0 \frac{\frac{1}{j\omega_r C} + j Z_0 \tan(\beta(d-d'))}{Z_0 + j \frac{1}{j\omega_r C} \tan(\beta(d-d'))} = Z_0 \frac{\frac{1}{j\omega_r C} + j Z_0 \tan(\beta(d-d'))}{Z_0 + \frac{1}{\omega_r C} \tan(\beta(d-d'))} \Rightarrow \\ &\Rightarrow Z_{in} = Z_0 \frac{\frac{-j}{\omega_r C} + j Z_0 \tan(\beta(d-d'))}{Z_0 + \frac{1}{\omega_r C} \tan(\beta(d-d'))} \end{aligned}$$

Η συνθήκη συντονισμού είναι:

$$\begin{aligned} \Im(Z_{in}) = 0 &\Leftrightarrow Z_0 \frac{\frac{-1}{\omega_r C} + Z_0 \tan(\beta(d-d'))}{Z_0 + \frac{1}{\omega_r C} \tan(\beta(d-d'))} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\omega_r C} + Z_0 \tan(\beta(d-d')) = 0 \Leftrightarrow Z_0 \tan(\beta(d-d')) = \frac{1}{\omega_r C} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \omega_r \tan\left(\frac{\omega_r}{c}(d-d')\right) = \frac{1}{Z_0 C} \end{aligned}$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς  $\omega_r$ , μπορούμε στη συνέχεια να βρούμε την συχνότητα συντονισμού  $f_r$  χρησιμοποιώντας την απλή σχέση:

$$\omega_r = 2\pi f_r \Leftrightarrow f_r = \frac{\omega_r}{2\pi}$$

Σχετικά με τις παραμέτρους  $Z_0$  και  $C$ :

Για το  $Z_0$  ξέρουμε από τους τύπους τέλεια αγώγιμου ομοαξονικού καλωδίου ότι ισχύει:

$Z_0 = 60 \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)$ , όπου  $2\alpha$  η εξωτερική διάμετρος (διάμετρος κυλίνδρου) και  $2\alpha'$  η εσωτερική διάμετρος (διάμετρος μεταλλικής ράβδου), όπως μας δίνονται από την εκφώνηση.

Για την χωρητικότητα  $C$  έχουμε τον τύπο:

$C = \frac{\varepsilon A}{l}$ , όπου  $\varepsilon$  η διηλεκτρική σταθερά του υλικού μεταξύ των πλακών,  $l$  η απόσταση μεταξύ των πλακών, και  $A$  η επιφανειακή επικάλυψη των δύο πλακών.

Με τα δικά μας δεδομένα ο τύπος γίνεται:

$$C = \frac{\varepsilon A}{l} = \frac{\varepsilon_0 \pi \alpha'^2}{d'}$$

Και άρα έχουμε όλα τα δεδομένα που χρειάζονται για να βρούμε την  $f_r$ .

Ονοματεπώνυμο: Χούκλης Αθανάσιος

AEM: 10396