

Marche aléatoire minimale et loi de Mittag-Leffler

Présentation TER

IMBERT Guilhelm, ROBERT Ambre et TRABADO Cédric.

Enseignant : BERCU Bernard

19 mai 2022

- 1 Introduction
- 2 Loi de Mittag-Leffler
- 3 Marche Aléatoire Minimale
- 4 Marche Aléatoire de l'éléphant avec stop
- 5 Conclusion

Introduction

Loi de Mittag-Leffler

- C'est une loi de probabilité à valeurs positives et paramétrée par un réel $\alpha \in [0; 1]$.

Introduction

Loi de Mittag-Leffler

- C'est une loi de probabilité à valeurs positives et paramétrée par un réel $\alpha \in [0; 1]$.
- Elle est définie à partir de la fonction de Mittag-Leffler, introduite au début du siècle dernier et nommée d'après le mathématicien suédois Gösta Mittag-Leffler.

Introduction

Loi de Mittag-Leffler

- C'est une loi de probabilité à valeurs positives et paramétrée par un réel $\alpha \in [0; 1]$.
- Elle est définie à partir de la fonction de Mittag-Leffler, introduite au début du siècle dernier et nommée d'après le mathématicien suédois Gösta Mittag-Leffler.
- Elle a été introduite plus tard et fait l'objet de recherches actuelles.

Introduction

Loi de Mittag-Leffler

- C'est une loi de probabilité à valeurs positives et paramétrée par un réel $\alpha \in [0; 1]$.
- Elle est définie à partir de la fonction de Mittag-Leffler, introduite au début du siècle dernier et nommée d'après le mathématicien suédois Gösta Mittag-Leffler.
- Elle a été introduite plus tard et fait l'objet de recherches actuelles.
- Elle est utile dans de nombreuses applications. Par exemple, en 2003, K.Jayakumar a utilisé la loi de Mittag-Leffler pour modéliser le débit fluvial d'une rivière en Inde. En mathématiques, on retrouve des distributions de Mittag-Leffler dans l'étude de problèmes de probabilités tel que l'expérience de l'urne de Pólya.

Introduction

Loi de Mittag-Leffler

- C'est une loi de probabilité à valeurs positives et paramétrée par un réel $\alpha \in [0; 1]$.
- Elle est définie à partir de la fonction de Mittag-Leffler, introduite au début du siècle dernier et nommée d'après le mathématicien suédois Gösta Mittag-Leffler.
- Elle a été introduite plus tard et fait l'objet de recherches actuelles.
- Elle est utile dans de nombreuses applications. Par exemple, en 2003, K.Jayakumar a utilisé la loi de Mittag-Leffler pour modéliser le débit fluvial d'une rivière en Inde. En mathématiques, on retrouve des distributions de Mittag-Leffler dans l'étude de problèmes de probabilités tel que l'expérience de l'urne de Pólya.

Nous verrons, dans la suite en quoi la loi de Mittag-Leffler entre en jeu dans l'étude de certaines marches aléatoires à longue mémoire.

Introduction

Marche aléatoire

Une marche aléatoire se définit comme un modèle mathématique dans lequel la dynamique d'un système se compose d'une succession de pas aléatoires.

Une marche aléatoire (S_n) est définie, pour tout $n \geq 1$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Introduction

Marche aléatoire

Une marche aléatoire se définit comme un modèle mathématique dans lequel la dynamique d'un système se compose d'une succession de pas aléatoires.

Une marche aléatoire (S_n) est définie, pour tout $n \geq 1$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Centre de masse

Le centre de masse d'une marche aléatoire à un instant n (ou pour n pas) se définit comme la moyenne empirique des n positions prises par la marche aléatoire.

Un centre de masse (G_n) d'une marche aléatoire (S_n) est défini, pour tout $n \geq 1$ par

$$G_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k.$$

Introduction

Marche aléatoire à longue mémoire

Ce sont des processus aléatoires qui apparaissent en mathématiques, en physique théorique, en informatique et en économétrie.

L'une d'entre elles est la **marche aléatoire de l'éléphant**, introduite par Schütz et Trimper en 2004. C'est une marche aléatoire à temps discret qui a une mémoire complète de tout son passé.

La **marche aléatoire minimale** et la **marche aléatoire de l'éléphant avec stop** sont des variantes de la marche aléatoire de l'éléphant.

Objectifs

Objectif principal

Comprendre et illustrer par simulation le résultat suivant, trouvé en 2020 par Miyazaki et Takei [5] dans le cadre de la marche aléatoire minimale :
 Sous certaines conditions sur le paramètre de la marche, que nous détaillerons dans la suite, on a

$$\frac{S_n}{n^p} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} L$$

où L suit une loi de Mittag-Leffler de paramètre p .

Objectifs

Objectif principal

Comprendre et illustrer par simulation le résultat suivant, trouvé en 2020 par Miyazaki et Takei [5] dans le cadre de la marche aléatoire minimale :
Sous certaines conditions sur le paramètre de la marche, que nous détaillerons dans la suite, on a

$$\frac{S_n}{n^p} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} L$$

où L suit une loi de Mittag-Leffler de paramètre p .

À partir du résultat précédent

Nous avons montré que, sous les mêmes conditions, nous obtenons la convergence presque sûre

$$\frac{G_n}{n^p} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \frac{L}{1+p}$$

où L suit une loi de Mittag-Leffler de paramètre p .

Objectifs

- S'intéresser à la loi de Mittag-Leffler.
- Étudier le comportement asymptotique de la marche aléatoire minimale et de son centre de masse.
- Étudier le comportement asymptotique de la marche aléatoire de l'éléphant avec stop car nous y retrouvons également des variables aléatoires de loi de Mittag-Leffler.

- 1 Introduction
- 2 Loi de Mittag-Leffler**
- 3 Marche Aléatoire Minimale
- 4 Marche Aléatoire de l'éléphant avec stop
- 5 Conclusion

La fonction de Mittag-Leffler

Fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est définie, pour tout $x \in \mathbb{C}$ par

$$E_{\alpha}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1 + \alpha k)} \quad , \quad \alpha \geq 0.$$

La fonction de Mittag-Leffler

Fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est définie, pour tout $x \in \mathbb{C}$ par

$$E_{\alpha}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1 + \alpha k)} \quad , \quad \alpha \geq 0.$$

Remarque : On a quelques cas particuliers

$$E_0(-x) = \frac{1}{1+x}$$

$$E_2(x) = \cosh(\sqrt{x})$$

$$E_1(x) = e^x = \frac{1}{E_1(-x)}$$

$$E_2(-x^2) = \cos(x)$$

La loi de Mittag-Leffler

Variable de Mittag-Leffler

Une variable aléatoire X suit une loi de Mittag-Leffler de paramètre $\alpha \in [0; 1]$ si

$$\mathbb{E} [e^{\lambda X}] = E_{\alpha}(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(1 + k\alpha)}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

La loi de Mittag-Leffler

Variable de Mittag-Leffler

Une variable aléatoire X suit une loi de Mittag-Leffler de paramètre $\alpha \in [0; 1]$ si

$$\mathbb{E} [e^{\lambda X}] = E_{\alpha}(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(1 + k\alpha)}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Moments d'ordres

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, le k -ième moment de X est donné par

$$\mathbb{E} [X^k] = \frac{k!}{\Gamma(1 + k\alpha)}.$$

La loi de Mittag-Leffler

Densité de la loi de Mittag-Leffler

Pour $\alpha \in]0; 1[$ la fonction densité de X est donnée par

$$f_{\alpha}(x) = \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \Gamma(\alpha k + 1) \sin(\pi\alpha k) \frac{(-x)^{k-1}}{k!} \mathbf{1}_{x>0}. \quad [6]$$

La loi de Mittag-Leffler

Densité de la loi de Mittag-Leffler

Pour $\alpha \in]0; 1[$ la fonction densité de X est donnée par

$$f_{\alpha}(x) = \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \Gamma(\alpha k + 1) \sin(\pi\alpha k) \frac{(-x)^{k-1}}{k!} \mathbf{1}_{x>0}. \quad [6]$$

Cas particulier :

$$f_{1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \mathbf{1}_{x>0} \Rightarrow X \sim |Z| \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0, 2)$$

Simulation d'une loi de Mittag-Leffler

cas $\alpha \in \mathbb{Q} \cap]0; 1[$

Soit m et n des entiers non nuls tels que $m < n$, nous avons que si

$$X = \frac{n}{m^{m/n}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \mathcal{B}_{(\frac{i}{n}, i(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}))} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\prod_{j=m}^{n-1} \mathcal{G}_{(\frac{j}{n}, 1)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad [3]$$

alors X suit une Mittag-Leffler de paramètre $\alpha = m/n$.

Simulation d'une loi de Mittag-Leffler

cas $\alpha \in \mathbb{Q} \cap]0; 1[$

Soit m et n des entiers non nuls tels que $m < n$, nous avons que si

$$X = \frac{n}{m^{m/n}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \mathcal{B}_{(\frac{i}{n}, i(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}))} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\prod_{j=m}^{n-1} \mathcal{G}_{(\frac{j}{n}, 1)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad [3]$$

alors X suit une Mittag-Leffler de paramètre $\alpha = m/n$.

Estimation de la densité de la loi de Mittag-Leffler de paramètre 3/4

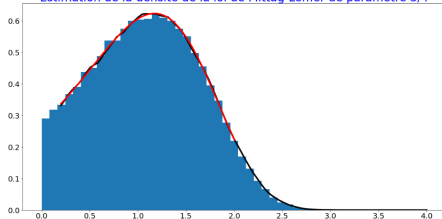


Figure – Simulation de la loi de Mittag-Leffler de paramètre $\alpha = 3/4$.

Estimation de la densité de la loi de Mittag-Leffler de paramètre 17/19

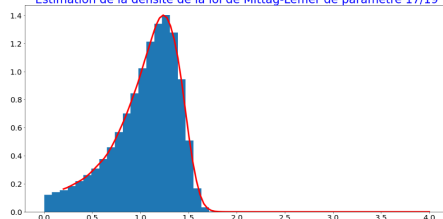


Figure – Simulation de la loi de Mittag-Leffler de paramètre $\alpha = 17/19$.

Simulation d'une loi de Mittag-Leffler

Évolution de la densité d'une Mittag-Leffler

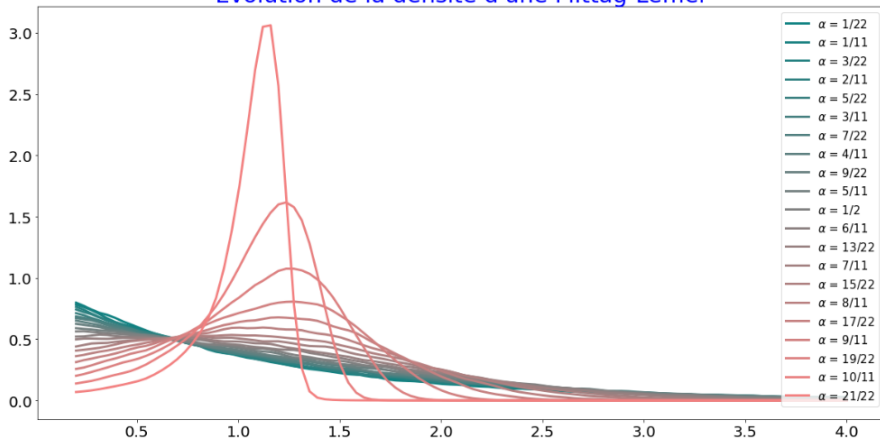


Figure – Évolution de la densité d'une loi de Mittag-Leffler en fonction du paramètre α .

- 1 Introduction
- 2 Loi de Mittag-Leffler
- 3 Marche Aléatoire Minimale**
- 4 Marche Aléatoire de l'éléphant avec stop
- 5 Conclusion

Présentation de la marche

À l'instant 0

Le marcheur est localisé à l'origine, $S_0 = X_0 = 0$.

Présentation de la marche

À l'instant 0

Le marcheur est localisé à l'origine, $S_0 = X_0 = 0$.

À l'instant 1

$S_1 = X_1 \sim \mathcal{B}(s)$ avec $s \in [0, 1]$.

Présentation de la marche

À l'instant 0

Le marcheur est localisé à l'origine, $S_0 = X_0 = 0$.

À l'instant 1

$S_1 = X_1 \sim \mathcal{B}(s)$ avec $s \in [0, 1]$.

À l'instant n

Soit $p \in [0, 1]$ et $q \in [0, 1]$, soit $k < n$ choisi uniformément parmi les instants précédents.

$$X_n = \begin{cases} \mathcal{B}(p) & \text{si } X_k = 1 \\ \mathcal{B}(q) & \text{si } X_k = 0 \end{cases}$$

Ainsi la position du marcheur est donnée par : $S_n = S_{n-1} + X_n$.

Paramètre de la marche

Le paramètre fondamental associé à cette marche est

$$a = p - q.$$

La marche aléatoire minimale est dite diffusive si $a < 1/2$, critique si $a = 1/2$ et superdiffusive si $a > 1/2$.

Paramètre de la marche

Le paramètre fondamental associé à cette marche est

$$a = p - q.$$

La marche aléatoire minimale est dite diffusive si $a < 1/2$, critique si $a = 1/2$ et superdiffusive si $a > 1/2$.

Simulations

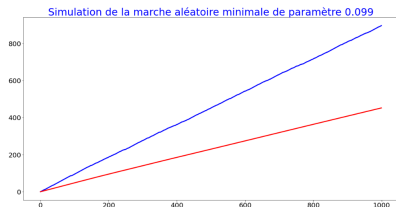


Figure – Simulation de la marche aléatoire minimale et de son centre de masse dans le cas diffusif pour $p = 0.9$ et $q = 0.801$.

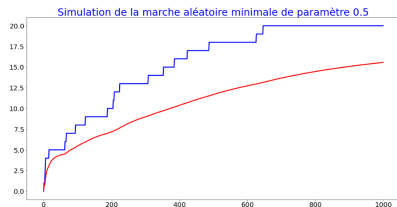


Figure – Simulation de la marche aléatoire minimale et de son centre de masse dans le cas critique pour $p = 0.5$ et $q = 0$.

Cas diffusif ($a < 1/2$)

Convergence presque sûre

On a

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \frac{q}{1-a} \quad [2]$$

si $q \in [0; 1[$ et avec $a = p - q$.

Cas diffusif ($a < 1/2$)

Convergence presque sûre

On a

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \frac{q}{1-a} \quad [2]$$

si $q \in [0; 1[$ et avec $a = p - q$.

Simulations

Convergence p.s. de S_n/n dans le cas diffusif (pour $p=0.8$ et $q=0.4$)

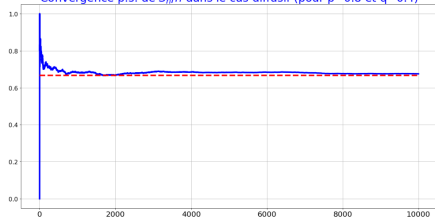


Figure – Simulation de

$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \frac{q}{1-a} = \frac{2}{3}$ dans le cas diffusif où $a = 0.4$.

Convergence p.s. de S_n/n dans le cas critique (pour $p=0.6$ et $q=0.1$)

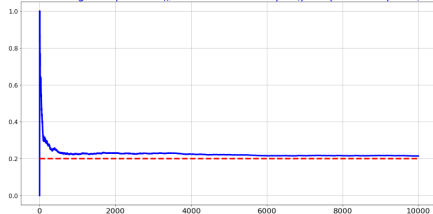


Figure – Simulation de

$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \frac{q}{1-a} = 0.2$ dans le cas critique où $a = 0.5$.

Cas diffusif ($a < 1/2$)

Normalité asymptotique

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{q}{1-a} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{q(1-p)}{(1-a)^2(1-2a)} \right). \quad [4]$$

Cas diffusif ($a < 1/2$)

Normalité asymptotique

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{q}{1-a} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{q(1-p)}{(1-a)^2(1-2a)} \right). \quad [4]$$

Simulations

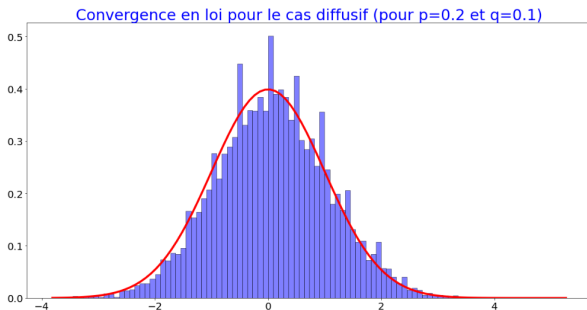


Figure – Simulation de la normalité asymptotique dans le cas diffusif où $a = 0.1$.

Cas diffusif ($a < 1/2$)

Convergence presque sûre pour le centre de masse

On a

$$\frac{G_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \frac{q}{2(1-a)}. \quad [2]$$

Cas diffusif ($a < 1/2$)

Convergence presque sûre pour le centre de masse

On a

$$\frac{G_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \frac{q}{2(1-a)}. \quad [2]$$

Simulations

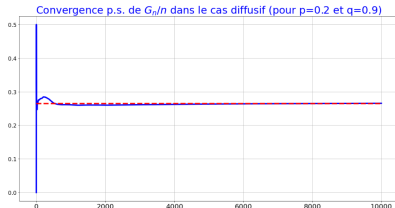


Figure – Simulation de la convergence presque sûre pour le centre de masse dans le cas diffusif où $a = -0.7$.



Figure – Simulation de la convergence presque sûre du centre de masse vers $q = 0.3$ dans le cas critique.

Cas diffusif ($a < 1/2$)

Normalité asymptotique pour le centre de masse

On a

$$\sqrt{n} \left(\frac{G_n}{n} - \frac{q}{2(1-a)} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{2\sigma^2}{3(1-2a)(2-a)} \right) \quad [2]$$

avec $\sigma^2 = \frac{q(1-p)}{(1-a)^2}$.

Cas diffusif ($a < 1/2$)

Normalité asymptotique pour le centre de masse

On a

$$\sqrt{n} \left(\frac{G_n}{n} - \frac{q}{2(1-a)} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{2\sigma^2}{3(1-2a)(2-a)} \right) \quad [2]$$

avec $\sigma^2 = \frac{q(1-p)}{(1-a)^2}$.

Simulations

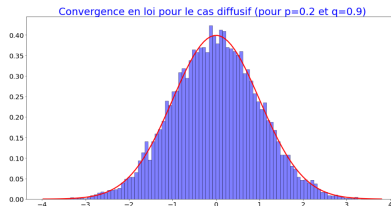


Figure – Simulation de la normalité asymptotique pour le centre de masse dans le cas diffusif où $a = -0.7$.

Cas critique ($a = 1/2$)

Normalité asymptotique

On a

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} \times \frac{1}{\sqrt{\log(n)}} - \frac{2q}{\sqrt{\log(n)}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 4q(1-p)). \quad [4]$$

Cas critique ($a = 1/2$)

Normalité asymptotique

On a

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} \times \frac{1}{\sqrt{\log(n)}} - \frac{2q}{\sqrt{\log(n)}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 4q(1-p)). \quad [4]$$

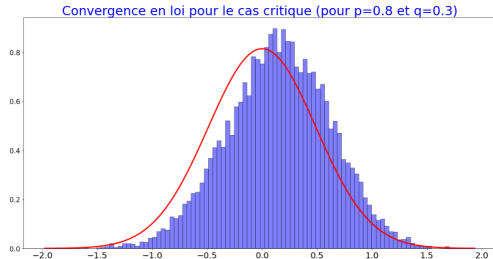


Figure – Simulation de la normalité asymptotique dans le cas critique où $a = 0.5$.

Cas critique ($a = 1/2$)

Normalité asymptotique pour le centre de masse

On a

$$\sqrt{\frac{n}{\log(n)}} \left(\frac{G_n}{n} - q \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{16q(1-p)}{9} \right). \quad [2]$$

Cas critique ($a = 1/2$)

Normalité asymptotique pour le centre de masse

On a

$$\sqrt{\frac{n}{\log(n)}} \left(\frac{G_n}{n} - q \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{16q(1-p)}{9} \right). \quad [2]$$

Simulations

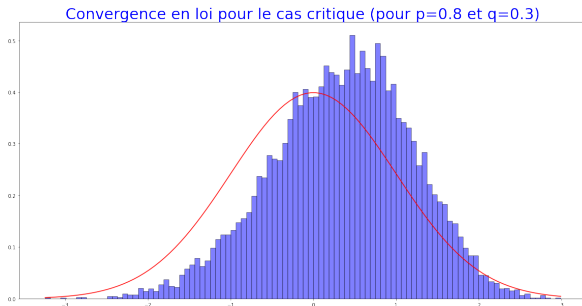


Figure – Simulation de la normalité asymptotique du centre de masse dans le cas critique.

Cas super-diffusif ($a > 1/2$)

Convergence presque sûre

Si $q = 0$ et $p > 1/2$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^p} = L \quad \text{p.s} \quad [5]$$

où L est une variable aléatoire qui suit une loi de Mittag-Leffler de paramètre p .

Cas super-diffusif ($a > 1/2$)

Simulations

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^p} = L \quad \text{p.s.}$$

Convergence en loi pour L

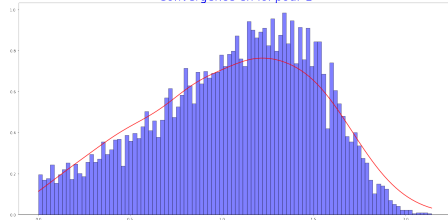


Figure – Simulation de la convergence en loi de L vers une loi de Mittag-Leffler de paramètre $p = 5/6$.

Convergence en loi pour L

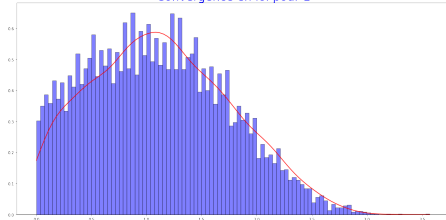


Figure – Simulation de la convergence en loi de L vers une loi de Mittag-Leffler de paramètre $p = 0.7$.

Cas super-diffusif ($a > 1/2$)

À l'aide du résultat énoncé précédemment nous avons trouvé le résultat suivant pour le centre de masse.

Convergence presque sûre

Si $q = 0$ et $p > 1/2$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G_n}{n^p} = \frac{L}{1+p} \quad \text{p.s.}$$

où L suit une loi de Mittag-Leffler de paramètre p .

Cas super-diffusif ($a > 1/2$)

Simulations

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G_n}{n^p} = \frac{L}{1+p} \quad \text{p.s.}$$

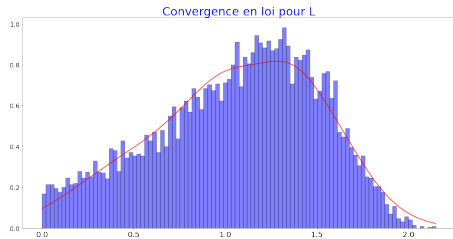


Figure – Simulation de la convergence en loi de L vers une loi de Mittag-Leffler de paramètre $p = 5/6$.

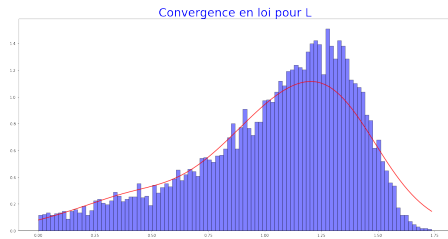


Figure – Simulation de la convergence en loi de L vers une loi de Mittag-Leffler de paramètre $p = 8/9$.

- 1 Introduction
- 2 Loi de Mittag-Leffler
- 3 Marche Aléatoire Minimale
- 4 Marche Aléatoire de l'éléphant avec stop**
- 5 Conclusion

Présentation de la marche

À l'instant 0

L'éléphant est localisé à l'origine, $S_0 = X_0 = 0$.

Présentation de la marche

À l'instant 0

L'éléphant est localisé à l'origine, $S_0 = X_0 = 0$.

À l'instant 1

$S_1 = X_1 \sim \mathcal{R}(s)$ avec $s \in [0, 1]$.

Présentation de la marche

À l'instant 0

L'éléphant est localisé à l'origine, $S_0 = X_0 = 0$.

À l'instant 1

$S_1 = X_1 \sim \mathcal{R}(s)$ avec $s \in [0, 1]$.

À l'instant n

Soit $0 < p, q, r < 1$ tels que $p + q + r = 1$ et soit $k < n$ choisi uniformément parmi les instants précédents.

$$X_n = \begin{cases} +X_k & \text{avec probabilité } p \\ -X_k & \text{avec probabilité } q \\ 0 & \text{avec probabilité } r \end{cases}$$

Ainsi la position de l'éléphant est donnée par : $S_n = S_{n-1} + X_n$.

Présentation de la marche

Paramètre de la marche

Le paramètre fondamental de cette marche est donné par :

$$a = \frac{p}{1-r}.$$

Présentation de la marche

Paramètre de la marche

Le paramètre fondamental de cette marche est donné par :

$$a = \frac{p}{1-r}.$$

La marche aléatoire de l'éléphant avec stop est dite :

- Diffusive si $a < 3/4$
- Critique si $a = 3/4$
- Super-diffusive si $a > 3/4$

30 / 37

Convergence presque sûre

Un premier résultat

Pour tout $p, q, r \in [0, 1]$

$$\frac{1}{n^{1-r}} \Sigma_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \Sigma \quad [1]$$

avec Σ une variable aléatoire qui suit une loi de Mittag-Leffler de paramètre $1 - r$ et Σ_n le nombre de déplacements de l'éléphant jusqu'à l'instant n ,

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^n X_k^2.$$

Convergence presque sûre

Simulations

$$\frac{1}{n^{1-r}} \Sigma_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \Sigma$$

Convergence en loi de Σ (pour $p=0.6$ et $q=0.15$ et $r=0.25$)

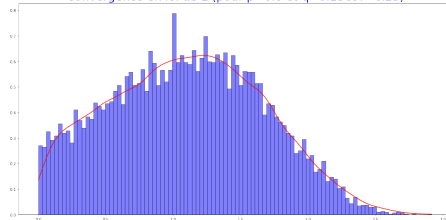


Figure – Simulation de la convergence en loi de Σ vers une loi de Mittag-Leffler de paramètre $1 - r = 3/4$.

Convergence en loi de Σ (pour $p=0.1$ et $q=0.4$)

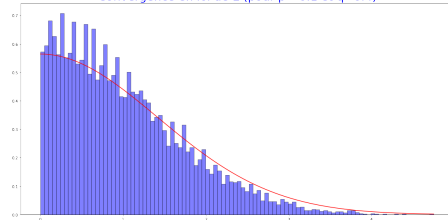


Figure – Simulation de la convergence en loi de Σ vers une loi de Mittag-Leffler de paramètre $1 - r = 1/2$.

Cas super-diffusif

Convergence presque sûre

On a

$$\frac{S_n}{n^{2p+r-1}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} L \quad [1]$$

où L est une variable aléatoire inconnue.

Cas super-diffusif

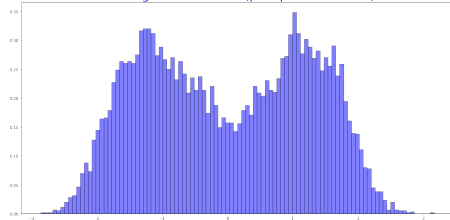
Convergence presque sûre

On a

$$\frac{S_n}{n^{2p+r-1}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} L \quad [1]$$

où L est une variable aléatoire inconnue.

Convergence en loi de L (pour $p = 0.78$ et 0.02)



Convergence en loi de L (pour $p = 0.7$ et 0.1)

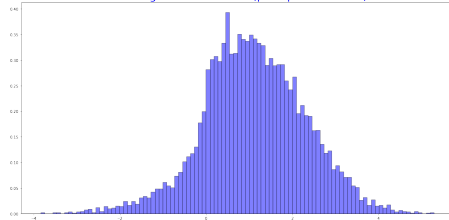


Figure - Convergence en loi de L

L et Mittag-Leffler

Rappel

Les moments d'ordre d'une Mittag-Leffler sont donnés par

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{k!}{\Gamma(1 + k\alpha)} = \frac{(k-1)!}{\alpha\Gamma(k\alpha)}$$

$$\mathbb{E}[L] = \frac{2s-1}{(2p+r-1)\Gamma(2p+r-1)} = (2s-1)\mathbb{E}[X]$$

$$\mathbb{E}[L^2] = \frac{1}{(4p+3(r-1))\Gamma(2(2p+r-1))} = \frac{\alpha}{\beta}\mathbb{E}[X^2]$$

$$\mathbb{E}[L^3] = \frac{2p(2s-1)}{(2p+r-1)(4p+3(r-1))\Gamma(3(2p+r-1))} = \frac{\lambda}{2\beta}\mathbb{E}[X^3]$$







$$\mathbb{E}[L^4] = \frac{6(8p^2 - 4p(1-r) - (1-r)^2)}{(8p+5(r-1))(4p+3(r-1))^2\Gamma(4(2p+r-1))} = \frac{6\mu\beta^2}{\nu\alpha}\mathbb{E}[X^4]$$

- 1 Introduction
- 2 Loi de Mittag-Leffler
- 3 Marche Aléatoire Minimale
- 4 Marche Aléatoire de l'éléphant avec stop
- 5 Conclusion**

Conclusion

- Simulation de variables aléatoires de Mittag-Leffler pour un paramètre α rationnel
- Étude des comportements asymptotiques de la marche aléatoire minimale
- Simulation du résultat de Miyazaki et Takei
- Étude des comportements asymptotiques de la marche de l'éléphant avec stop
- Remarque de la corrélation entre la variable aléatoire inconnue du cas super-diffusif et une Mittag-Leffler

Références

-  B. BERCU – « On the elephant random walk with stops playing hide and seek with the mittag-leffler distribution », *arXiv preprint arXiv :2203.04196* (2022).
-  B. BERCU & V. H. V. GUEVARA – « New insights on the minimal random walk », *arXiv preprint arXiv :2112.09321* (2021).
-  L. CHAUMONT & M. YOR – *Exercises in probability : a guided tour from measure theory to random processes, via conditioning*, no. 35, Cambridge University Press, 2012.
-  C. F. COLETTI, R. J. GAVA & L. R. DE LIMA – « Limit theorems for a minimal random walk model », *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* **2019** (2019), no. 8, p. 083206.
-  T. MIYAZAKI & M. TAKEI – « Limit theorems for the ‘laziest’ minimal random walk model of elephant type », *Journal of Statistical Physics* **181** (2020), no. 2, p. 587–602.
-  H. POLLARD – « The completely monotonic character of the mittag-leffler function $e_{-a}(\{-x\})$ », *Bulletin of the American Mathematical Society* **54** (1948), no. 12, p. 1115–1116.