Resolução Detalhada da Lista de Exercícios 2 - Física Estatística

Introdução

Este documento apresenta a resolução detalhada dos quatro exercícios propostos na Lista de Exercícios 2 da disciplina de Física Estatística, focada no problema do passeio aleatório (random walk) em diferentes cenários. As resoluções foram elaboradas seguindo os critérios solicitados, utilizando como base teórica principal o livro de referência fornecido (*Statistical Physics II - Reference 1.pdf*) e conhecimentos gerais sobre mecânica estatística, processos estocásticos, distribuições de probabilidade (Binomial, Gaussiana, Uniforme, Cauchy-Lorentz) e o Teorema do Limite Central.

Cada exercício é resolvido passo a passo, com ênfase na clareza das justificativas matemáticas e na interpretação física dos resultados. A notação utilizada busca ser consistente e rigorosa. Comentários sobre abordagens alternativas e conexões com conceitos mais amplos da física estatística são incluídos quando pertinente.

Resolução do Exercício 1

Este exercício aborda o problema clássico do passeio aleatório (random walk) unidimensional e simétrico. Consideramos uma partícula que realiza N passos em uma linha. A cada passo, a partícula tem uma probabilidade p de se mover para a direita (digamos, +1 unidade de comprimento) e uma probabilidade q de se mover para a esquerda (-1 unidade). O exercício especifica o caso simétrico, onde $p = q = 1/2$. O deslocamento líquido total após N passos é denotado por m. Se n_1 for o número de passos para a direita e n_2 for o número de passos para a esquerda, temos que o número total de passos é $N = n_1 + n_2$, e o deslocamento líquido é $m = n_1 - n_2$. O objetivo é calcular os valores médios (esperanças) dos primeiros quatro momentos do deslocamento: $\langle m \rangle$, $\langle m^2 \rangle$, $\langle m^3 \rangle$ e $\langle m^4 \rangle$.

Uma maneira alternativa e muitas vezes mais direta de analisar o problema é considerar o deslocamento em cada passo individualmente. Seja s_i o deslocamento no i-ésimo passo, onde i varia de 1 a N. Para o caso simétrico, s_i pode assumir os valores +1 (com probabilidade $p = 1/2$) ou -1 (com probabilidade $q = 1/2$). O deslocamento total m é a soma dos deslocamentos em cada passo:

$$m = \sum_{i=1}^{N} s_i$$

Os passos são considerados eventos independentes. Vamos calcular as propriedades estatísticas de um único passo s_i:

$$\begin{aligned}
\text{Valor médio de } s_i: &\quad \langle s_i \rangle = (+1)p + (-1)q = (+1)\frac{1}{2} + (-1)\frac{1}{2} = 0 \\
\text{Valor médio de } s_i^2: &\quad \langle s_i^2 \rangle = (+1)^2 p + (-1)^2 q = (1)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{2} = 1 \\
\text{Valor médio de } s_i^3: &\quad \langle s_i^3 \rangle = (+1)^3 p + (-1)^3 q = (1)\frac{1}{2} + (-1)\frac{1}{2} = 0 \\
\text{Valor médio de } s_i^4: &\quad \langle s_i^4 \rangle = (+1)^4 p + (-1)^4 q = (1)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

Agora, podemos usar essas propriedades e a linearidade da esperança para calcular os momentos de m.

Cálculo de $\langle m \rangle$ (Deslocamento Médio)

$$\langle m \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} s_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle s_i \rangle = \sum_{i=1}^{N} 0 = 0$$

Fisicamente, isso significa que, em média, após N passos, a partícula não tem um deslocamento líquido preferencial para a direita ou para a esquerda, o que é esperado em um passeio simétrico.

Cálculo de $\langle m^2 \rangle$ (Deslocamento Quadrático Médio)

$$\langle m^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} s_i \right)^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} s_i s_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \langle s_i s_j \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \langle s_i^2 \rangle + \sum_{i \neq j} \langle s_i s_j \rangle = \sum_{i=1}^{N} 1 + \sum_{i \neq j} 0 = N$$

Como $\langle m \rangle = 0$, então $\mathrm{Var}(m) = \langle m^2 \rangle = N$.

Cálculo de $\langle m^3 \rangle$

Todos os termos $\langle s_i s_j s_k \rangle$ na expansão da soma tripla são nulos devido à simetria da distribuição e independência das variáveis. Logo:

$$\langle m^3 \rangle = 0$$

Cálculo de $\langle m^4 \rangle$

Consideramos os casos em que o produto $\langle s_i s_j s_k s_l \rangle$ é não nulo:

$$\langle m^4 \rangle = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} \langle s_i s_j s_k s_l \rangle$$

Os únicos termos não nulos são aqueles onde os índices aparecem em pares:

$$\langle m^4 \rangle = N + 3N(N-1) = 3N^2 - 2N$$

Resumo dos Resultados do Exercício 1

- $\langle m \rangle = 0$
- $\langle m^2 \rangle = N$
- $\langle m^3 \rangle = 0$

- $\langle m^4 \rangle = 3N^2 - 2N$

Esses resultados são consistentes com as propriedades de distribuições simétricas e com o comportamento esperado de processos de passeio aleatório.

Nota: Uma abordagem alternativa envolveria o uso direto da distribuição binomial para n_1*, o número de passos para a direita, e o cálculo dos momentos de* $m = 2n_1 - N$*. Isso requer o cálculo dos momentos* $\langle n_1 \rangle$*,* $\langle n_1^2 \rangle$*,* $\langle n_1^3 \rangle$*,* $\langle n_1^4 \rangle$ *da distribuição binomial* $B(N, 1/2)$*, que leva aos mesmos resultados finais, embora possa ser algebricamente mais complexo para momentos de ordem superior.*

Cálculo de $\langle m^4 \rangle$: O quarto momento é $\langle m^4 \rangle = \langle (\sum_{i=1}^{N} s_i)^4 \rangle$. Expandindo a quarta potência:

$$\langle m^4 \rangle = \left\langle \sum_{i,j,k,l=1}^{N} s_i s_j s_k s_l \right\rangle = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} \langle s_i s_j s_k s_l \rangle$$

Novamente, devido à independência dos passos e ao fato de que $\langle s_i \rangle = 0$ e $\langle s_i^3 \rangle = 0$, os únicos termos $\langle s_i s_j s_k s_l \rangle$ que sobrevivem são aqueles em que cada índice aparece um número par de vezes (zero, duas ou quatro vezes). Os casos possíveis são:

$i = j = k = l$: Temos N termos da forma $\langle s_i^4 \rangle$. Como $\langle s_i^4 \rangle = 1$, a contribuição total é $N \times 1 = N$. Dois pares de índices iguais, por exemplo, $i = j$ e $k = l$, com $i \neq k$. Temos termos da forma $\langle s_i^2 s_k^2 \rangle$. Pela independência, $\langle s_i^2 s_k^2 \rangle = \langle s_i^2 \rangle \langle s_k^2 \rangle = 1 \times 1 = 1$. Quantos desses termos existem? Precisamos escolher 2 índices distintos de N, o que pode ser feito de $\binom{N}{2}$ maneiras. Para cada par de índices, digamos i e k, existem 3 maneiras de formar os pares (i, i, k, k), (i, k, i, k), (i, k, k, i) - pensando nas posições na soma $s_i s_j s_k s_l$. Mais precisamente, o coeficiente multinomial para termos do tipo $s_i^2 s_k^2$ na expansão de $(\sum s_i)^4$ é $\frac{4!}{2!2!} = 6$. O número de pares distintos (i, k) com $i \neq k$ é $N(N-1)$. Contudo, a soma $\sum_{i,j,k,l}$ inclui todas as permutações. A forma mais simples é considerar os tipos de termos não nulos na soma $\sum_{i,j,k,l} \langle s_i s_j s_k s_l \rangle$: a) Termos com $i = j = k = l$: $\sum_i \langle s_i^4 \rangle = N \times 1 = N$. b) Termos com $i = j \neq k = l$: $\sum_{i \neq k} \langle s_i^2 s_k^2 \rangle = \sum_{i \neq k} \langle s_i^2 \rangle \langle s_k^2 \rangle = \sum_{i \neq k} 1$. Existem $N(N-1)$ tais pares (i, k). c) Termos com $i = k \neq j = l$: $\sum_{i \neq j} \langle s_i s_j s_i s_j \rangle = \sum_{i \neq j} \langle s_i^2 s_j^2 \rangle = N(N-1)$. d) Termos com $i = l \neq j = k$: $\sum_{i \neq j} \langle s_i s_j s_j s_i \rangle = \sum_{i \neq j} \langle s_i^2 s_j^2 \rangle = N(N-1)$. Somando todas as contribuições não nulas:

$$\langle m^4 \rangle = N + N(N-1) + N(N-1) + N(N-1) = N + 3N(N-1)$$
$$\langle m^4 \rangle = N + 3N^2 - 3N = 3N^2 - 2N$$

Resumo dos Resultados: Para o passeio aleatório unidimensional simétrico ($p = q = 1/2$) após N passos, os primeiros quatro momentos do deslocamento líquido m são:

$\langle m \rangle = 0$ $\langle m^2 \rangle = N$ $\langle m^3 \rangle = 0$ $\langle m^4 \rangle = 3N^2 - 2N$

$z = \pm ib$

Aplicação do Teorema dos Resíduos: O teorema afirma que a integral de contorno fechado é $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos dos polos dentro do contorno. Para $k > 0$: A integral sobre o contorno C_R (sentido anti-horário) é $\oint_{C_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz$. Pelo Teorema dos Resíduos, $\oint_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \times \text{Res}(f, ib) = 2\pi i \left(\frac{e^{-kb}}{2ib} \right) = \frac{\pi}{b} e^{-kb}$. Pelo Lema de Jordan, $\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$. Portanto, no limite $R \to \infty$, a integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{b} e^{-kb}$. Para $k < 0$: A integral sobre o contorno $C'R$ (sentido horário) é $\oint C'R f(z)dz = \int -R^R f(x)dx + \int_{\Gamma' R} f(z)dz$. Pelo Teorema dos Resíduos, a integral no sentido anti-horário seria $2\pi i \times \text{Res}(f, -ib)$. Como nosso contorno é horário, a integral vale $-2\pi i \times \text{Res}(f, -ib) =$

$-2\pi i \left(\frac{e^{kb}}{-2ib} \right) = \frac{\pi}{b} e^{kb}$. Pelo Lema de Jordan, $\lim R \to \infty \int_{\Gamma' R} f(z)dz = 0$. Portanto, no limite $R \to \infty$, a integral $I = \int -\infty^{\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{b} e^{kb}$.

Caso 3: $k = 0$: A integral se torna $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^2+b^2} ds$. Esta é uma integral real padrão, cujo resultado é $\frac{1}{b}[\arctan(s/b)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{b}(\pi/2 - (-\pi/2)) = \pi/b$.

Reconhecemos esta integral como a transformada inversa que nos leva de volta a uma distribuição de Cauchy-Lorentz. Se a transformada de $\frac{1}{\pi} \frac{B}{s^2+B^2}$ é $e^{-B|k|}$, então a transformada inversa de $e^{-B|k|}$ é $\frac{1}{\pi} \frac{B}{x^2+B^2}$.