

Metodología aplicada: Un estudio de la variación de factores principales en un lanzador de liga

Applied methodology: A study of the variation of main factors in a rubber band launcher

Giacomo E. Ambrosino¹

¹Facultad de Ingeniería Eléctrica, Universidad Tecnológica de Panamá

*Autor de correspondencia: giacomo.echevers@utp.ac.pa

Resumen. Este trabajo documenta el efecto de la variación de factores principales que alteran al lanzamiento de un dispositivo resortera o lanzador de liga de látex. A forma de exploración dentro de los valiosos recursos de la metodología científica, el autor busca diseñar un experimento, con tratamientos simples de ejecutar, que dé cabida a la aplicación de análisis estadísticos creando el camino para una inferencia a partir de los datos registrados. Para esto, se diseñó un lanzador de liga simple denominado “Lanzelig” del cual es requerido determinar, desde una perspectiva metodológica, si estos factores controlables afectan el alcance del lanzamiento para asegurar una distancia recorrida específica de 250cm. Este estudio consideró los factores de estiramiento y tipo de liga como controlables, por lo que se diseñaron bloques de combinaciones aleatorios para 40 lanzamientos contemplando 2 tipos de liga y 4 factores de estiramiento distinto con 5 réplicas por cada combinación. La evaluación estadística de este estudio, la cual cuenta con análisis de varianza y pruebas t de Student, fue llevada a cabo a través del software estadístico InfoStat, cuyos resultados indicaron para ambos factores una alta probabilidad de impacto sobre el alcance del dispositivo y se logró determinar para cuales bloques de factores se cumple con la distancia esperada.

Palabras clave. Análisis de varianza, InfoStat, Metodología, Prueba t, Resortera

Abstract. This paper documents the effect of the main factors variation that alter the launch of a slingshot powered device that throws latex rubber bands. As an exploratory journey into the valuable resources that scientific methodology can offer, the author seeks to design an experiment, with simple executable treatments, that spans the application of statistical analysis creating the road for an inference based in registered data. To achieve this, a simple rubber band launcher, conceived under the name of “Lanzelig”, was designed, from which it was required to determine, from a methodological perspective, if these main factors influence the range of the launcher to ensure a specific reached distance of 250cm. This study considered as main controllable factors the type of rubber band and the stretch factor, from which it was required to design randomized block combinations scoping 40 launches taking in consideration 2 types of latex rubber bands and 4 different stretch factors with 5 replica per combination. The statistical evaluation of this study, which covers analysis of variance and t-Student tests, was executed using the statistical software InfoStat, showing evidence that indicated high influence probability for both factors over the range of the device and it was possible to determine which blocks of combinations complied with the expected distance.

Keywords. Analysis of variance, InfoStat, Methodology, Slingshot, t-Test.

1. Introducción

Los elásticos son ampliamente utilizados en la vida cotidiana del ser humano por poseer propiedades como estiramiento, expulsión, retracción y fácil producción, siendo todos sustanciales motivos para su recurrente presencia coloquial desde su primera patentización en 1845 [1]. Pese a

todo esto, usualmente la dinámica relacionada a su funcionamiento pasa desapercibida [2] y curiosamente puede llegar a extenderse en complejos modelos matemáticos que buscan la contemplar la mayor cantidad de factores involucrados en el lanzamiento o expulsión de proyectil con bandas elásticas [2, 3, 4], o más comúnmente conocidas como

ligas. Por lo tanto, para los intereses de este estudio es prudente presentar una revisión con la literatura disponible para determinar cuáles factores podrían considerarse como principales agentes variantes en un lanzamiento de liga.

1.1 Evaluación de factores principales

El objeto de estudio de esta investigación al tratarse de un material que se comporta similar a un resorte resulta esperado pensar a primera instancia que sus peculiaridades puedan ser modeladas por la ley de Hooke, no obstante, los elásticos, en este caso las ligas de látex no siguen la ley de Hooke de forma precisa o en su totalidad [5]. Esto se debe a las propiedades termodinámicas de las ligas de látex [6], los cambios de temperatura afectan a la elasticidad del látex, el calor causa que el elástico se contraiga, mientras que la ausencia de calor causa que el elástico se expanda [6]. De la misma forma al estirar una liga va a causar que esta libere calor y al soltarla absorberá calor dando la sensación de estar ligeramente más fría que la temperatura ambiente, cualidades que apuntan a la presencia del efecto Gough-Joule [7, 8]. Esto sugiere que los cambios de temperatura de las ligas podrían ser un factor considerable para los lanzamientos, lo cual fue estudiado por [8] bajo el concepto de la energía de Helmholtz usando la ecuación (1) para las ligas.

$$dF = \tau dL - SdT \quad (1)$$

Donde dF es el cambio de energía de Helmholtz, τ es la tensión de elástico, dL el cambio de longitud de la liga, S es la entropía y dT el cambio de temperatura. Posteriormente, mediante la relación de Maxwell mostrada en la ecuación (2), los autores señalan que es posible determinar como la entropía cambia con la longitud a una temperatura fija por medio de la medición del cambio en la tensión por la temperatura a una longitud física.

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = \left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right)_L \quad (2)$$

Adicionalmente, exploran un poco más a fondo compartiendo la ecuación (3) que muestra que las medidas de la tensión revelan como la energía F varía por cambios de la longitud del elástico a temperatura constante.

$$\tau = \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_T \quad (3)$$

Dentro de los resultados del estudio llevado a cabo en [8] obtuvieron que, en efecto los cambios en la temperatura sí afectan con pendiente positiva a la tensión del elástico, sin

embargo, estas variaciones son muy pequeñas ($\sim 0.2N$) en comparación a la variación de la longitud. Por lo tanto, para este estudio se considerará la temperatura como un factor no principal y se asumirá constante a lo largo de la ejecución del experimento.

Por otra parte, estudios profundos de la dinámica del proceso del lanzamiento de una resorte fueron llevados a cabo por [2,4] de forma separada en donde consideran una amplia gama de factores para modelar la dinámica de este escenario flexible. Para ambos estudios una de las cualidades físicas de las ligas que apareció en ambos modelos fueron las dimensiones de las ligas, que a su vez estaban categorizadas por circunferencia, grosor, ancho, densidad y coeficiente de elasticidad. Los hallazgos previamente compartidos permitieron continuar este estudio definiendo como factores controlables principales: 1) La deformación o longitud de estiramiento de la liga y 2) Las dimensiones de la liga. Teniendo los factores controlables principales establecidos, esta investigación tiene como propósito determinar de forma metodológica si, en efecto, en una serie de lanzamientos combinando aleatoriamente bloques de estos factores, los mismos presentan una variación significativa en la dispersión de la distancia alcanzada. Adicionalmente, es parte de los objetivos determinar cuál bloque, en caso de existir, cumpliría con un promedio de alcance igual a 250cm.

2. Materiales y métodos

Partiendo de estos factores principales se comprende que para variar en los experimentos las dimensiones de la liga, simplemente se buscaría disponer de más de un tipo de liga, entendiéndose que la longitud, ancho y grosor sean diferentes; sin embargo, para variar la longitud resulta requerido contar con variaciones cuantizadas fáciles de ejecutar. Dentro de los objetivos de estudio en la investigación [9], el autor usa un parámetro para controlar la distancia de estiramiento denominado factor de estiramiento (SF), el cual no es más que una razón de distancias denotada por la ecuación (4).

$$SF = \frac{\ell_e}{\ell_0} \quad (4)$$

Donde ℓ_e es la distancia estirada y ℓ_0 es la distancia sin estirar de la liga, es decir su distancia en reposo. Por lo tanto, se buscó tener en consideración este parámetro SF para el diseño del lanzador.

2.1 Diseño del dispositivo lanzador

Para llevar a cabo esta investigación fue requerido diseñar un lanzador simple de ligas, el cual fue apodado bajo el nombre de “Lanzelig”, el mismo cuenta con una estructura base de madera con terminación en cuña para el reposo de la liga y un gancho de ropa fungiendo como gatillo para la liberación del proyectil (liga), apreciable en la figura 1.



Figura 1. Modelo 3D del diseño del lanzador simple de ligas “Lanzelig”.

Para cumplir cómodamente con las variaciones en el experimento es requerido que este lanzador presentase la facilidad de implementar las variaciones del SF durante la ejecución de los lanzamientos, por lo que se diseñaron 4 agujeros equidistantemente separados por 2.5cm entre ellos a lo largo de la estructura de madera para colocar imanes de neodimio de 12 mm de diámetro y 1mm de grosor. El gatillo también contaría con un imán de neodimio acoplado con las mismas dimensiones que el resto, para así entonces desplazar la posición del gatillo a lo largo del lanzador y variar SF para las ligas en cada lanzamiento de una forma estable y reducir el error inducido en cada réplica del experimento. Un modelo 3D de este diseño para el experimento es apreciable en la figura 2.

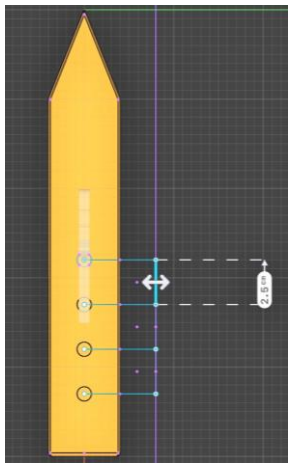


Figura 2. Modificaciones al lanzador para facilitar las variaciones de SF en los lanzamientos.

2.2 Tipos de liga

Con respecto a la variación de las dimensiones de los proyectiles, se consideraron dos tipos de liga de látex con

parámetros dimensionales bastante diferentes. Estos datos se comparten en la tabla 1.

Tabla 1. Parámetros dimensionales de las ligas

Tipo	c (cm)	ℓ (mm)	a (mm)	g (mm)
L ₁	15.5	78	1.5	1.4
L ₂	19.75	96	3.1	2.0

En la tabla 1, se tiene *c* como la circunferencia de la liga, *ℓ* como la longitud, *a* como ancho de la liga y *g* como el grosor. Mientras que en la tabla 2 se muestran los valores SF obtenidos de cada tipo de liga para cada una de las 4 distancias de estiramiento.

Tabla 2. Valores SF de los tipos de liga para cada distancia

Tipo	SF ₁	SF ₂	SF ₃	SF ₄
L ₁	1.4103	1.7308	1.9872	2.2436
L ₂	1.1458	1.4063	1.6146	1.8229

2.3 Diseño de experimento

Para ejecutar este experimento se fijó el “Lanzelig” a una estructura a 30 cm sobre el suelo en un pasillo cerrado en el cual se colocó para la medición de las distancias una cinta métrica de 3m junto a alfombras debajo del trayecto de los lanzamientos para reducir las ocurrencias de instancias en las cuales los proyectiles rebotasen ocasionando medidas no útiles en las réplicas. En la figura 3 se observa el escenario de medición del experimento.



Figura 3. Foto de mediciones llevadas a cabo en el experimento.

Puesto a que este estudio conlleva un diseño de experimento de 2 factores (SF con 4 niveles y Tipo de liga con

2 niveles) en conjunto con una toma de 5 réplicas por cada combinación de factores, se establecen entonces 40 lanzamientos sin contar aquellos lanzamientos que sean repetidos o cancelados por factores externos no controlables como lo son: rebotes del proyectil, lanzamientos fuera de la zona de medición o colisiones prematuras en lanzamiento.

Para poder llevar a cabo este diseño se identifica que cada unidad experimental es independiente y se asume normalidad bajo el teorema de límite central, lo cual permitiría aplicar el modelo estadístico denotado en la ecuación 5.

$$X_{ij} = \mu + \gamma_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (5)$$

De donde X_{ij} es el valor de la variable dependiente para los grupos ij , μ es el promedio de los lanzamientos del experimento, γ_i es el efecto del factor Tipo de liga, llámese factor A para los i niveles, β_j es el efecto del factor SF, llámese factor B para los j niveles, $\gamma\beta_{ij}$ es la interacción del efecto del factor A para los i niveles y el factor B para los j niveles, finalmente ε_{ij} sería el error inducido por variables externas sobre el objeto de estudio para los grupos ij . Para este modelo se asume que ε_{ij} es normal e independientemente distribuido con media 0 y una varianza σ_e^2 [10].

3. Resultados y discusión

La distancia recorrida en cada uno de los 40 lanzamientos del experimento se registró en la tabla 3. De esta tabla cabe destacar que los lanzamientos que sobrepasaron los 3m máximos de la herramienta de medición de distancia sobre la pista de lanzamiento se anotaron con la denominación “MAX” indicando que poseen un alcance más alto de lo que se pudo medir en el experimento.

Tabla 3. Resultados de los lanzamientos

Tipo	SF ₁	SF ₂	SF ₃	SF ₄
L ₁	221	300	MAX	MAX
L ₁	223	300	MAX	MAX
L ₁	226	295	MAX	MAX
L ₁	251.6	300	MAX	MAX
L ₁	277	300	MAX	MAX
L ₂	88.5	258.8	MAX	MAX
L ₂	94	269	MAX	MAX
L ₂	88	218	MAX	MAX
L ₂	101	261	MAX	MAX
L ₂	87.9	276	MAX	MAX

De la tabla 3 se observa que para los factores de estiramiento SF₃ y SF₄ las distancias alcanzadas por los

proyectiles sobrepasaron el valor máximo medible, por lo tanto, se determina que estos niveles de este factor no aportan información pertinente para los objetivos de este estudio por lo que se procedió a descartar estas 2 columnas del set de data para el análisis estadístico.

Para determinar si los factores A y B realmente afectan a los lanzamientos se establece la hipótesis nula de que los promedios no deberían cambiar para el tratamiento sobre las distintas combinaciones. Este principio se ejemplifica en la ecuación (6), en donde si la hipótesis nula H_0 se llega a rechazar, se estaría implicando que se acepta H_A , es decir que el tratamiento sí cambia en función a los factores para algún $i \neq j$.

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_A &= \mu_B \\ H_A : \mu_i &\neq \mu_j \end{aligned} \quad (5)$$

Para poder rechazar H_0 resultaría necesario ejecutar un análisis de varianza (ANOVA) del cual primeramente se observaría el valor de R^2 y luego se evaluarían los valores P comparándolos con un nivel de significancia $\alpha=0.05$. El análisis de ANOVA bilateral se ejecutó en el software estadístico InfoStat, obteniendo los resultados mostrados en las tablas 4 y 5.

Tabla 4. Parámetros de ANOVA

X_{ij}	N	R ²	Adj R ²	CV
Distancia	20	0.85	0.84	14.85

De la tabla 4 se observa un valor R^2 de 0.85 y un valor ajustado de R^2 de 0.84, los cuales son valores altos para tener cierta confianza sobre la validez del modelo estadístico asumido en (5).

Tabla 5. Resultados de ANOVA

X_{ij}	SS	df	F	P
Modelo	107955.7	2	49.79	<0.0001
Factor A	45258.1	1	41.75	<0.0001
Factor B	62697.6	1	57.83	<0.0001
Error	18429.88	17		

En la tabla 5 se registraron valores P, para ambos factores, muy por debajo del nivel de significancia por lo tanto se rechaza la hipótesis nula y se acepta H_A infiriendo que los promedios para el tratamiento no son iguales, entonces los factores A y B en efecto alteran la distancia alcanzada.

Adicionalmente su busca saber si existe un bloque cuyos lanzamientos sean de 250cm, para esto se busca realizar una

prueba t de Student bilateral de una muestra categorizada por Tipo de liga y SF para las hipótesis de la ecuación (6).

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &= 250\text{cm} \\ H_1 : \mu &\neq 250\text{cm} \end{aligned} \quad (6)$$

Luego de ejecutar esta prueba en InfoStat, se registraron los resultados en la tabla 6 de donde claramente se observa la hipótesis nula H_0 se rechaza para los bloques $L_1:SF_2$ y $L_2:SF_1$ puesto a que ambos presentan valores P muy por debajo de un nivel de significancia de 0.05. Contrariamente, se acepta la hipótesis nula para los bloques $L_1:SF_1$ y $L_2:SF_2$, lo cual indica que estos dos bloques cumplen con una media de 250cm para la distancia alcanzada con un nivel de significancia estadística del 95%.

Tabla 6. Resultados de prueba t de Student

A	B	n	μ	σ	Li	Ls	P
L ₁	SF ₁	5	239.72	24.23	209.63	269.81	0.3966
L ₁	SF ₂	5	299	2.24	296.22	301.78	<0.0001
L ₂	SF ₁	5	91.88	5.7	84.8	98.96	<0.0001
L ₂	SF ₂	5	256.56	22.61	228.49	284.63	0.5518

4. Conclusiones y recomendaciones

Previo al análisis estadístico, resulta posible realizar observaciones en base a los datos del experimento registrados en la tabla 3, de donde se obtiene que los bloques $L_1:SF_1$ y $L_2:SF_2$ son los más cercanos a presentar un valor esperado de 250cm, sin embargo al contar con un análisis estadístico que permita sacar a flote aún más detalles que a simple vista no resulta tan obvio, brinda una significancia más elevada a cualquier objeto de estudio, que en este caso resulta ser un simple lanzamiento de ligas.

Teniendo en cuenta el enfoque de esta investigación de aplicar técnicas de análisis estadísticos propios de metodología de la investigación con el software InfoStat sobre un experimento simple para determinar ciertas hipótesis de interés, se puede resaltar lo siguiente:

- Cualquier escenario por más simple que parezca puede tornarse complejo en función a qué tan profunda se hagan las observaciones.
- Los factores controlables de Tipo de Liga (o dimensiones de liga) y SF resultan impactar en la dispersión de la distancia alcanzada para lanzamientos de ligas de látex con cierta significancia estadística.
- Los lanzamientos de liga de las combinaciones de tipo de liga L1 y SF1 junto a la combinación L2 y SF2 pueden considerarse de tener un rango de alcance que en promedio resulte en 250cm, de nuevo bajo una significancia estadística.

- Entre las combinaciones mencionadas en el punto anterior, el bloque $L_2:SF_2$ cuenta con el valor P más alto de los dos, por lo que se entiende que esta combinación se asemeja más a tener un promedio de distancia de 250cm que el bloque $L_1:SF_1$.

Por otro lado, se reconoce que este experimento cuenta con una cantidad pequeña de grados de libertad, por lo cual los modelos estadísticos sugeridos en este documento podrían encajar mucho mejor al escenario en cuestión si aplicase un diseño de experimento con más grados de libertad.

Adicionalmente se recomienda en caso de replicar un experimento similar, considerar herramientas de medición cuya capacidad máxima sea mayor o igual al rango máximo posible del alcance de los lanzamientos, en conjunto con llevar a cabo el experimento sobre una superficie que dificulte el rebote de las ligas al colisionar con el suelo.

REFERENCIAS

- [1] S. Perry, "Improvements in Springs to be applied to Girths, Belts, and Bandages, and Improvements in the Manufacture of Elastic Bands" British Patent No. 13880, Mar 17, 1845.
- [2] A. T. Oratis and J. C. Bird, "Shooting rubber bands: Two self-similar retractions for a stretched elastic wedge," *Physical Review Letters*, vol. 122, no. 1, 2019.
- [3] R. Vermorel, N. Vandenberghe, and E. Villermaux, "Rubber band Recoil," *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 463, no. 2079, pp. 641–658, 2006.
- [4] Li, X.; Sun, B.; Zhang, Y.; Dai, Y. Dynamics of Rubber Band Stretch Ejection. Preprints 2021, 2021030294 (doi: 10.20944/preprints202103.0294.v1).
- [5] P. Howie (2019, 11, 5). Why doesn't rubber follow Hooke's law? [Online]. Available: <https://www.linkedin.com/pulse/why-doesnt-rubber-follow-hookes-law-philip-howie/>
- [6] J. B. Brown, "Thermodynamics of a rubber band," *American Journal of Physics*, vol. 31, no. 5, pp. 397–397, 1963.
- [7] C. Truesdell, W. Noll, and S. S. Antman, *The non-linear field theories of Mechanics*. Berlin: Springer, 2011, pp360.
- [8] D. Roundy and M. Rogers, "Exploring the thermodynamics of a rubber band," *American Journal of Physics*, vol. 81, no. 1, pp. 20–23, 2013.
- [9] B. Yeats, "Physical modeling of real-world slingshots for accurate speed predictions," *arXiv.org*, 31-Mar-2016. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/1604.00049>. [Accessed: 04-Mar-2022].
- [10] "Two-factor analysis of variance: Examples," Two-factor ANOVA example. [Online]. Available: <https://stattrek.com/anova/full-factorial/two-factor-example.aspx>. [Accessed: 04-Mar-2022].