

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
КАФЕДРА «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

**Отчёт**  
**по лабораторной работе №1**  
**по дисциплине**  
**«Интервальный анализ»**

Выполнил:  
Попов Павел Сергеевич  
группа:  
5030102/00201

Проверил:  
к.ф.-м.н., доцент  
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург  
2023 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Теория</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Реализация</b>	<b>3</b>
3.1	Описание алгоритма . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Результат</b>	<b>3</b>
4.1	Первый случай матрицы радиусов . . . . .	3
4.2	Второй случай матрицы радиусов . . . . .	3
<b>5</b>	<b>Вывод</b>	<b>3</b>

# 1 Постановка задачи

Пусть дана вещественная матрица (1.1)

$$\text{mid}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

и неотрицательное число

$$\Delta \in [0, \min\{a_{ij}, i, j = \overline{1, 2}\}] \quad (1.2)$$

Рассмотрим две матрицы радиусов:

$$\text{rad}A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ rad}A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Построим интервальную матрицу следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} [a_{11} - \Delta \cdot \text{rad}A_i^{(1,1)}, a_{11} + \Delta \cdot \text{rad}A_i^{(1,1)}] & [a_{12} - \Delta \cdot \text{rad}A_i^{(1,2)}, a_{12} + \Delta \cdot \text{rad}A_i^{(1,2)}] \\ [a_{21} - \Delta \cdot \text{rad}A_i^{(2,1)}, a_{21} + \Delta \cdot \text{rad}A_i^{(2,1)}] & [a_{22} - \Delta \cdot \text{rad}A_i^{(2,2)}, a_{22} + \Delta \cdot \text{rad}A_i^{(2,2)}] \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

$i = \overline{1, 2}$ .

Необходимо найти  $\min\{\Delta | 0 \in \det A\}$ .

В целях конкретизации и возможности проверки решения будем использовать следующую матрицу

$$\text{mid}A = \begin{pmatrix} 1.05 & 1 \\ 0.95 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

# 2 Теория

Укажем основные арифметические операции для интервалов:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] \quad (2.1)$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c] \quad (2.2)$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)] \quad (2.3)$$

$$\frac{[a, b]}{[c, d]} = \left[ \min\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right), \max\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right) \right] \quad (2.4)$$

$$\text{mid}[a, b] = \frac{1}{2}(a + b) \quad (2.5)$$

$$\text{wid}[a, b] = (b - a) \quad (2.6)$$

$$\text{rad}[a, b] = \frac{1}{2}(b - a) \quad (2.7)$$

Пусть  $\text{mid}A = \{a_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$  – точечная вещественная матрица средин,  $\text{rad}A = \{r_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$  – точечная вещественная матрица радиусов. Операцией  $\text{midrad}$  назовем следующую функцию:

$$\text{midrad}(\text{mid}A, \text{rad}A) = \{[\text{mid}A_{ij} - \text{rad}A_{ij}], [\text{mid}A_{ij} + \text{rad}A_{ij}]\}_{i,j \in \mathbb{N}} \quad (2.8)$$

Результатом операции является интервальная матрица.

## 3 Реализация

Для решения данной задачи была написана программа на языке Python. Дополнительно был реализован класс `Interval`, описывающий интервальную арифметику для удобства написания кода.

### 3.1 Описание алгоритма

1. Проверим вхождение нуля в интервал  $\det A$  при максимально допустимом значении.
2. Если  $0 \notin \det A$ , то данная задача не имеет решения. Иначе переходим к шагу 3.
3. Если  $\det A$  является симметричным интервалом, то минимальное значение  $\Delta$  равно 0, так как  $0 = \text{mid}[a, b]$ .
4. Рассмотрим весь допустимый интервал возможных значений  $\Delta$ . Методом половинного деления будем сужать его до тех пор, пока не достигнем точности  $\varepsilon = 10^{-14}$ .

## 4 Результат

### 4.1 Первый случай матрицы радиусов

Действуя согласно описанному алгоритму, мы получаем начальное приближение  $\Delta = 0.95$ . Далее применяем операцию `midrad` к матрицам `midA` и `radA1`, получаем интервальную матрицу:

$$A_1 = \begin{pmatrix} [0.1, 2] & [0.05, 1.95] \\ [0, 1.9] & [0.05, 1.95] \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Проверим вхождение нуля в  $\det A_1$ :

$$\det A_1 = [-3.7, 3.9] \quad (4.2)$$

Отсюда видно, что  $0 \in \det A_1$ , а также  $\text{mid}A_1 \neq 0$ , значит, переходим к пункту 4 описанного алгоритма. В результате получаем  $\min \Delta \approx 0.025$ . В таком случае  $\det A_1 = [2.220 \cdot 10^{-16}, 0.2]$ . Левый конец  $\det A_1$  с точностью до машинного эпсилон равен нулю.

### 4.2 Второй случай матрицы радиусов

Применим операцию `midrad` теперь к матрицам `midA` и `radA2` и получим

$$A_2 = \begin{pmatrix} [0.1, 2] & 1 \\ [0, 1.9] & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Проверим вхождение нуля в  $\det A_2$ :

$$\det A_2 = [-1.8, 2] \quad (4.4)$$

Вновь видим, что  $0 \in \det A_2$ , а также  $\text{mid}A_2 \neq 0$ , значит, переходим к пункту 4 алгоритма. В результате получаем  $\min \Delta \approx 0.05$ . В таком случае  $\det A_2 = [1.110 \cdot 10^{-16}, 0.2]$ . Левый конец  $\det A_2$  с точностью до машинного эпсилон равен нулю.

## 5 Вывод

В ходе работы мы выяснили, что матрицы  $A_1$  и  $A_2$  становятся неособенными, когда их радиусы достигают значений  $\Delta_1 = 0.025$  и  $\Delta_2 = 0.05$  соответственно. Заметим, что  $\Delta_1 < \Delta_2$ . Такой результат мы получаем, потому что матрица  $A_1$  имеет больше интервальных элементов.