

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
КАФЕДРА «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

Отчёт
по лабораторной работе №1
по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил:
Попов Павел Сергеевич
группа:
5030102/00201

Преподаватель:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2023 г.

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Теория	2
3	Реализация	3
3.1	Описание алгоритма	3
4	Результат	3
4.1	Первый случай матрицы радиусов	3
4.2	Второй случай матрицы радиусов	3
4.3	Изменение матрицы	3
5	Вывод	4

1 Постановка задачи

Пусть дана вещественная матрица (1.1)

$$\text{mid}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

и неотрицательное число

$$\Delta \in [0, \min\{a_{ij}, i, j = \overline{1, 2}\}] \quad (1.2)$$

Рассмотрим две матрицы радиусов:

$$\text{rad}A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ rad}A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Построим интервальную матрицу следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} [a_{11} - \Delta \cdot \text{rad}A_i^{(1,1)}, a_{11} + \Delta \cdot \text{rad}A_i^{(1,1)}] & [a_{12} - \Delta \cdot \text{rad}A_i^{(1,2)}, a_{12} + \Delta \cdot \text{rad}A_i^{(1,2)}] \\ [a_{21} - \Delta \cdot \text{rad}A_i^{(2,1)}, a_{21} + \Delta \cdot \text{rad}A_i^{(2,1)}] & [a_{22} - \Delta \cdot \text{rad}A_i^{(2,2)}, a_{22} + \Delta \cdot \text{rad}A_i^{(2,2)}] \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

$i = \overline{1, 2}$.

Необходимо найти $\min\{\Delta | 0 \in \det A\}$.

В целях конкретизации и возможности проверки решения будем использовать следующую матрицу

$$\text{mid}A = \begin{pmatrix} 1.05 & 1 \\ 0.95 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

2 Теория

Укажем основные арифметические операции для интервалов:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] \quad (2.1)$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c] \quad (2.2)$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)] \quad (2.3)$$

$$\frac{[a, b]}{[c, d]} = \left[\min\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right), \max\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right) \right] \quad (2.4)$$

$$\text{mid}[a, b] = \frac{1}{2}(a + b) \quad (2.5)$$

$$\text{wid}[a, b] = (b - a) \quad (2.6)$$

$$\text{rad}[a, b] = \frac{1}{2}(b - a) \quad (2.7)$$

Пусть $\text{mid}A = \{a_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ – точечная вещественная матрица средин, $\text{rad}A = \{r_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ – точечная вещественная матрица радиусов. Операцией midrad назовем следующую функцию:

$$\text{midrad}(\text{mid}A, \text{rad}A) = \{[\text{mid}A_{ij} - \text{rad}A_{ij}], [\text{mid}A_{ij} + \text{rad}A_{ij}]\}_{i,j \in \mathbb{N}} \quad (2.8)$$

Результатом операции является интервальная матрица.

3 Реализация

Для решения данной задачи была написана программа на языке Python. Дополнительно был реализован класс Interval, описывающий интервальную арифметику для удобства написания кода.

3.1 Описание алгоритма

1. Проверим вхождение нуля в интервал $\det A$ при максимально допустимом значении.
2. Если $0 \notin \det A$, то данная задача не имеет решения. Иначе переходим к шагу 3.
3. Если $\det A$ является симметричным интервалом, то минимальное значение Δ равно 0, так как $0 = \text{mid}[a, b]$.
4. Рассмотрим весь допустимый интервал возможных значений Δ . Методом половинного деления будем сужать его до тех пор, пока не достигнем точности $\varepsilon = 10^{-14}$.

4 Результат

4.1 Первый случай матрицы радиусов

Действуя согласно описанному алгоритму, мы получаем начальное приближение $\Delta = 0.95$. Далее применяем операцию midrad к матрицам $\text{mid}A$ и $\text{rad}A_1$, получаем интервальную матрицу:

$$A_1 = \begin{pmatrix} [0.1, 2] & [0.05, 1.95] \\ [0, 1.9] & [0.05, 1.95] \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Проверим вхождение нуля в $\det A_1$:

$$\det A_1 = [-3.7, 3.9] \quad (4.2)$$

Отсюда видно, что $0 \in \det A_1$, а также $\text{mid}A_1 \neq 0$, значит, переходим к пункту 4 описанного алгоритма. В результате получаем $\min \Delta \approx 0.025$. В таком случае $\det A_1 = [2.220 \cdot 10^{-16}, 0.2]$. Левый конец $\det A_1$ с точностью до машинного эпсилон равен нулю.

4.2 Второй случай матрицы радиусов

Применим операцию midrad теперь к матрицам $\text{mid}A$ и $\text{rad}A_2$ и получим

$$A_2 = \begin{pmatrix} [0.1, 2] & 1 \\ [0, 1.9] & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Проверим вхождение нуля в $\det A_2$:

$$\det A_2 = [-1.8, 2] \quad (4.4)$$

Вновь видим, что $0 \in \det A_2$, а также $\text{mid}A_2 \neq 0$, значит, переходим к пункту 4 алгоритма. В результате получаем $\min \Delta \approx 0.05$. В таком случае $\det A_2 = [1.110 \cdot 10^{-16}, 0.2]$. Левый конец $\det A_2$ с точностью до машинного эпсилон равен нулю.

4.3 Изменение матрицы

С $\Delta = 0.025$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} [1.025, 1.075] & [0.975, 1.025] \\ [0.925, 0.975] & [0.975, 1.025] \end{pmatrix}$$

С $\Delta = 0.05$:

$$A_2 = \begin{pmatrix} [1, 1.1] & 1 \\ [0.9, 1] & 1 \end{pmatrix}$$

5 Вывод

В ходе работы мы выяснили, что матрицы A_1 и A_2 становятся неособенными, когда их радиусы достигают значений $\Delta_1 = 0.025$ и $\Delta_2 = 0.05$ соответственно. Заметим, что $\Delta_1 < \Delta_2$. Такой результат мы получаем, потому что матрица A_1 имеет больше интервальных элементов.