Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт

Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по курсовой работе:
Субдифференциальный метод Ньютона в арифметике Каухера
по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил:
Попов Павел Сергеевич
группа:
5030102/00201

Преподаватель:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2024 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Мы имеем уравнение, заданное в рекуррентном виде,

$$x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d}, \quad \boldsymbol{C} = (I \ominus \boldsymbol{A}^{\mathrm{c}})\,, \quad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{c}},$$

и мы можем записать равносильное ему в $\mathbb{KR}$:

$$\boldsymbol{C}x \ominus x + \boldsymbol{d} = 0.$$

Вместо задачи вычисления формальных решений интервальных уравнений т. е.

$$Cx \ominus x + d = 0 \quad \text{и} \quad Cx \ominus d = 0,$$

мы будем заниматься решением индуцированных уравнений в $\mathbb{R}^{2n}$: уравнения

$$\mathcal{F}(y) = 0,$$

такого что

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(y) &= \mathrm{sti}\left(\boldsymbol{C}\,\mathrm{sti}^{-1}(y) \ominus \mathrm{sti}^{-1}(y) + \boldsymbol{d}\right)\\ &= \mathrm{sti}\left(\boldsymbol{C}\,\mathrm{sti}^{-1}(y)\right) - y + \mathrm{sti}(\boldsymbol{d}),\end{aligned}$$

и уравнения

$$\mathcal{G}(y) = 0,$$

такого что

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(y) &= \mathrm{sti}\left(\boldsymbol{C}\,\mathrm{sti}^{-1}(y) \ominus \boldsymbol{d}\right)\\ &= \mathrm{sti}\left(\boldsymbol{C}\,\mathrm{sti}^{-1}(y)\right) - \mathrm{sti}(\boldsymbol{d}).\end{aligned}$$

Определение. Погружение sti : $\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, которое действует по правилу

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n) \mapsto (-\underline{\boldsymbol{x}}_1, -\underline{\boldsymbol{x}}_2, \dots, -\underline{\boldsymbol{x}}_n, \overline{\boldsymbol{x}}_1, \overline{\boldsymbol{x}}_2, \dots, \overline{\boldsymbol{x}}_n)\,,$$

т.е. такое, при котором взятые с противоположным знаком левые концы интервалов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ становятся первой, второй,.., n-ой компонентами точечного $2n$-вектора, а правые концы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ становятся $(n+1)$-ой, $\dots, 2n$-ой компонентами точечного $2n$ вектора соответственно, будем называть стандартным погружением интервалъного пространства $\mathbb{K}^n$ в $\mathbb{R}^{2n}$.

2 Описание алгоритмов

2.1 Алгоритм subdiff1

Используется для решения

$$\mathcal{F}(y) = 0,$$

Выбираем некоторое начальное приближение $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$.
Если $(k-1)$-е приближение $x^{(k-1)} \in \mathbb{R}^{2n}, k = 1, 2, \dots$, уже найдено, то вычисляем какой-нибудь субградиент $D^{(k-1)}$ отображения $\mathcal{F}$ в точке $x^{(k-1)}$ и полагаем

$$x^{(k)} \leftarrow x^{(k-1)} - \tau \left(D^{(k-1)}\right)^{-1} \mathcal{F}\left(x^{(k-1)}\right),$$

где $\tau \in [0, 1]$ - некоторая константа.

2.2 Алгоритм subdiff2

Используется для решения
$$\mathcal{G}(y) = 0,$$

Выбираем некоторое начальное приближение $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$.
Если $(k-1)$-е приближение $x^{(k-1)} \in \mathbb{R}^{2n}, k = 1, 2, \ldots$, уже найдено, то вычисляем какой-нибудь субградиент $D^{(k-1)}$ отображения $\mathcal{G}$ в точке $x^{(k-1)}$ и полагаем

$$x^{(k)} \leftarrow x^{(k-1)} - \tau \left(D^{(k-1)}\right)^{-1} \mathcal{G}\left(x^{(k-1)}\right),$$

где $\tau \in [0, 1]$ - некоторая константа.

2.3 Алгоритм подсчёта субдифференциалов

Обозначая через e_i вектор, имеющий i-ой компонентой 1 , а остальные нули, и привлекая известный результат о субдифференциале суммы, найдём

$$\begin{aligned}
\partial \mathcal{F}_i(x) &= \partial \left(\left(\operatorname{sti}\left(\boldsymbol{C} \operatorname{sti}^{-1}(x)\right)\right)_i - x_i + (\operatorname{sti}(\boldsymbol{d}))_i \right) \\
&= \partial \left(-\sum_{j=1}^{n} \underline{c_{ij}\left[-x_j, x_{j+n}\right]} - x_i + (\operatorname{sti}(\boldsymbol{d}))_i \right) \\
&= -\partial \sum_{j=1}^{n} \underline{c_{ij}\left[-x_j, x_{j+n}\right]} - e_i \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \partial \left(\underline{c_{ij}\left[-x_j, x_{j+n}\right]} \right) - e_i
\end{aligned}$$

для $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, и
$$\begin{aligned}
\partial \mathcal{F}_i(x) &= \partial \left(\left(\operatorname{sti}\left(\boldsymbol{C} \operatorname{sti}^{-1}(x)\right)\right)_i - x_i + (\operatorname{sti}(\boldsymbol{d}))_i \right) \\
&= \partial \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{c_{ij}\left[-x_j, x_{j+n}\right]} - x_i + (\operatorname{sti}(\boldsymbol{d}))_i \right) \\
&= \partial \sum_{j=1}^{n} \overline{\boldsymbol{c}_{ij}\left[-x_j, x_{j+n}\right]} - e_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \partial \left(\overline{\boldsymbol{c}_{ij}\left[-x_j, x_{j+n}\right]} \right) - e_i
\end{aligned}$$

для $i \in \{n+1, \ldots, 2n\}$.

3 Тестовый пример

Найдем решение системы интервальных линейных уравнений вида $x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d}$, где

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

с помощью субдифференциального метода Ньютона.
При значении $\tau = 1$ алгоритм SubDiff2 находит всего за 2 итерации точное формальное решение - правильный интервальный вектор

$$\begin{pmatrix} [-0.333\ldots, 0.333\ldots] \\ [-0.333\ldots, 0.333\ldots] \end{pmatrix},$$

Для интервальной линейной 7×7-системы

$$\begin{pmatrix} [4,6] & [-9,0] & [0,12] & [2,3] & [5,9] & [-23,-9] & [15,23] \\ [0,1] & [6,10] & [-1,1] & [-1,3] & [-5,1] & [1,15] & [-3,-1] \\ [0,3] & [-20,-9] & [12,77] & [-6,30] & [0,3] & [-18,1] & [0,1] \\ [-4,1] & [-1,1] & [-3,1] & [3,5] & [5,9] & [1,2] & [1,4] \\ [0,3] & [0,6] & [0,20] & [-1,5] & [8,14] & [-6,1] & [10,17] \\ [-7,-2] & [1,2] & [7,14] & [-3,1] & [0,2] & [3,5] & [-2,1] \\ [-1,5] & [-3,2] & [0,8] & [1,11] & [-5,10] & [2,7] & [6,82] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-10,95] \\ [35,14] \\ [-6,2] \\ [30,7] \\ [4,95] \\ [-6,46] \\ [-2,65] \end{pmatrix}$$

алгоритм SubDiff2 успешно вычисляет формальное решение

$$\begin{pmatrix} [-1.22474317578, 0.50542987670] \\ [18.26444337096, -9.51750410300] \\ [-0.02818650587, 1.16075521933] \\ [16.40769576636, -14.45553419850] \\ [-1.34356527337, 3.98821848038] \\ [-3.52893852104, 4.54345836822] \\ [5.43086236811, -0.67400838683] \end{pmatrix}$$

за 9 итераций при значении релаксационного параметра $\tau = 1$.

4 Вывод

- Реализован субдифференциальный метод Ньютона на языке Python
- Сходимость субдифференциального метода Ньютона для матриц $2x2$ занимает 2 итерации, матрицы $7x7$ - 9 итераций

5 Литература

- А.Н. Баженов, А.А. Карпова. Интервальный анализ для исследователей.
- С.П. Шарый. Конечномерный интервальный анализ.