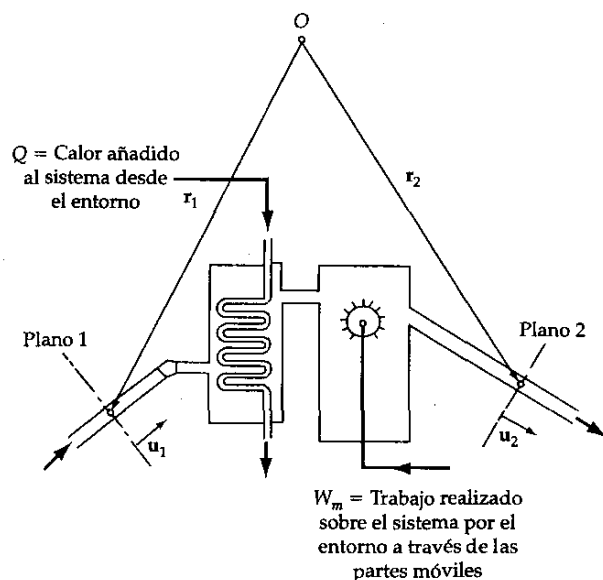


## Balances macroscópicos para sistemas con flujo isotérmico

- §7.1 Balance macroscópico de materia
- §7.2 Balance macroscópico de cantidad de movimiento
- §7.3 Balance macroscópico de cantidad de movimiento angular
- §7.4 Balance macroscópico de energía mecánica
- §7.5 Estimación de la pérdida viscosa
- §7.6 Uso de los balances macroscópicos para problemas de estado estacionario
- §7.7° Uso de los balances macroscópicos para problemas de estado no estacionario
- §7.8\* Deducción del balance macroscópico de energía mecánica

En las cuatro primeras secciones del capítulo 3 se presentaron las *ecuaciones de variación* para sistemas isotérmicos. Estas ecuaciones se obtuvieron al escribir leyes de conservación sobre un “sistema microscópico”; a saber, un pequeño elemento de volumen a través del cual circula el fluido. De esta forma se obtuvieron ecuaciones diferenciales parciales para las variaciones en materia, cantidad de movimiento, cantidad de movimiento angular y energía mecánica en el sistema. El sistema microscópico no tiene superficies sólidas que lo limiten, y las interacciones del fluido con superficies sólidas en sistemas de flujo específicos se explican mediante las condiciones límite que se establecen sobre las ecuaciones diferenciales.

En este capítulo escribimos leyes de conservación similares para “sistemas macroscópicos”; es decir, grandes piezas de equipo o partes de éste. En la figura 7.0-1 se



**Figura 7.0-1** Sistema macroscópico de flujo donde el fluido entra por el plano 1 y sale por el plano 2. Para mantener constante la temperatura del sistema puede ser necesario añadir calor a una velocidad  $Q$ . La velocidad a la que el entorno realiza trabajo *sobre* el sistema por medio de las superficies móviles es  $W_m$ . Los símbolos  $u_1$  y  $u_2$  denotan *vectores unitarios* en la dirección del flujo en los planos 1 y 2. Las cantidades  $r_1$  y  $r_2$  son vectores de posición que proporcionan la ubicación de los centros de los planos de entrada y salida respecto a algún origen de coordenadas designado.

muestra un sistema macroscópico de ejemplo. Los enunciados sobre balance para tal sistema se denominan *balances macroscópicos*; para sistemas en estado no estacionario, se trata de ecuaciones diferenciales ordinarias, y para sistemas en estado estacionario, son ecuaciones algebraicas. Los balances macroscópicos contienen términos que explican las interacciones del fluido con las superficies sólidas. El fluido puede ejercer fuerzas y momentos de torsión sobre las superficies del sistema, y el entorno puede realizar trabajo  $W_m$  sobre el fluido por medio de las superficies móviles.

Los balances macroscópicos pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de variación al integrar éstas sobre todo el volumen del sistema de flujo.<sup>1,2</sup>

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} (\text{ecuación de continuidad}) dV &= \text{balance macroscópico de materia} \\ \int_{V(t)} (\text{ecuación de movimiento}) dV &= \text{balance macroscópico de cantidad de movimiento} \\ \int_{V(t)} (\text{ecuación de cantidad de movimiento angular}) dV &= \text{balance macroscópico de cantidad de movimiento angular} \\ \int_{V(t)} (\text{ecuación de energía mecánica}) dV &= \text{balance macroscópico de energía mecánica} \end{aligned}$$

Los primeros tres de estos balances macroscópicos pueden obtenerse ya sea escribiendo directamente las leyes de conservación para el sistema macroscópico o efectuando las integraciones indicadas. Sin embargo, para obtener el balance macroscópico de energía mecánica, la ecuación de variación correspondiente debe integrarse sobre el sistema macroscópico.

En §§7.1 a 7.3 establecemos los balances macroscópicos de materia, cantidad de movimiento y cantidad de movimiento angular escribiendo las leyes de conservación. En §7.4 presentamos el balance macroscópico de energía mecánica y posponemos la deducción detallada hasta §7.8. En el balance macroscópico de energía mecánica hay un término denominado “pérdida por fricción”, y dedicamos §7.5 a métodos para estimar esta cantidad. Luego, en §7.6 y §7.7 mostramos cómo el conjunto de balances macroscópicos puede usarse para resolver problemas de flujo.

Los balances macroscópicos se han utilizado ampliamente en muchas ramas de la ingeniería. Proporcionan descripciones globales de grandes sistemas sin entrar mucho en los detalles de la dinámica de fluidos dentro de los sistemas. A menudo son útiles para efectuar una apreciación inicial de un problema de ingeniería y para hacer estimaciones de orden de magnitud de varias cantidades. Algunas veces se utilizan para deducir relaciones aproximadas, que entonces pueden modificarse con ayuda de datos experimentales para compensar términos que hayan sido omitidos o sobre los cuales se tiene información insuficiente.

Al usar los balances macroscópicos a menudo es necesario decidir qué términos pueden omitirse, o bien estimar algunos de ellos. Para realizar lo anterior se requiere: i) intuición, basada en la experiencia que se tenga con sistemas semejantes, ii) algunos datos experimentales sobre el sistema, iii) estudios de visualización de flujo, o iv) estimaciones de orden de magnitud. Esto será evidente cuando lleguemos a estudiar ejemplos específicos.

Los balances macroscópicos utilizan casi todos los tópicos que se han abordado hasta el momento; por consiguiente, el capítulo 7 constituye una buena oportunidad para revisar los capítulos precedentes.

<sup>1</sup> R.B. Bird, *Chem. Eng. Sci.*, 6, 123-131 (1957); *Chem. Eng. Educ.*, 27(2), 102-109 (primavera de 1993).

<sup>2</sup> J.C. Slattery y R.A. Gaggioli, *Chem. Eng. Sci.*, 17, 893-895 (1962).

## §7.1 BALANCE MACROSCÓPICO DE MATERIA

En el sistema que se muestra en la figura 7.0-1, el fluido entra al sistema en el plano 1 con sección transversal  $S_1$  y sale por el plano 2 con sección transversal  $S_2$ . La velocidad media es  $\langle v_1 \rangle$  en el plano de entrada y  $\langle v_2 \rangle$  en el plano de salida. En esta sección y en las siguientes presentamos dos suposiciones que no son muy restrictivas: i) en los planos 1 y 2 la velocidad con ajuste de tiempo es perpendicular a la sección transversal relevante, y ii) en los planos 1 y 2 la densidad y otras propiedades físicas son uniformes sobre la sección transversal.

Entonces, la ley de conservación de la materia para este sistema es

$$\frac{d}{dt} m_{\text{tot}} = \rho_1 \langle v_1 \rangle S_1 - \rho_2 \langle v_2 \rangle S_2 \quad (7.1-1)$$

velocidad de incremento de materia	velocidad de entrada de materia en el plano 1	velocidad de salida de materia en el plano 2
--	--	---

Aquí  $m_{\text{tot}} = \int \rho dV$  es la masa total de fluido contenido en el sistema entre los planos 1 y 2. Ahora introducimos el símbolo  $w = \rho \langle v \rangle S$  para la velocidad de flujo másico, y la notación  $\Delta w = w_2 - w_1$  (valor de salida menos valor de entrada). Así, el *balance macroscópico de materia en estado no estacionario* se convierte en

$$\boxed{\frac{d}{dt} m_{\text{tot}} = -\Delta w} \quad (7.1-2)$$

Si la masa total de fluido no cambia con el tiempo, entonces se obtiene el *balance macroscópico de materia en estado estacionario*

$$\Delta w = 0 \quad (7.1-3)$$

que es precisamente la afirmación de que la cantidad de materia que entra es igual a la cantidad de materia que sale.

En el balance macroscópico de materia se usa la expresión “estado estacionario” para indicar que la derivada respecto al tiempo del miembro izquierdo de la ecuación 7.1-2 es cero. Dentro del sistema, debido a la posibilidad de que haya partes móviles, inestabilidades de flujo y turbulencias, bien puede haber regiones de flujo no estacionario.

**EJEMPLO 7.1-1**

Vaciado de un tanque  
esférico

Un tanque esférico de radio  $R$  y su tubería de desagüe de longitud  $L$  y diámetro  $D$  están llenos de un aceite espeso. En el instante  $t = 0$  se abre la válvula en el fondo de la tubería de desagüe. ¿En cuánto tiempo se vaciará el tanque? En la parte superior del tanque esférico hay un respiradero. Ignorar la cantidad de aceite que se adhiere a la superficie interna del tanque y suponer que el flujo en la tubería de desagüe es laminar.

**SOLUCIÓN**

Etiquetamos tres planos como en la figura 7.1-1 y hacemos que  $h(t)$  sea el nivel instantáneo del líquido por arriba del plano 2. Luego, en cualquier instante  $t$  la masa total de líquido en la esfera es

$$m_{\text{tot}} = \pi R h^2 \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{h}{R} \right) \rho \quad (7.1-4)$$

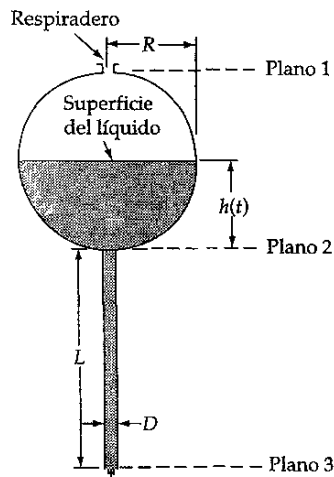


Figura 7.1-1 Tanque esférico con tubería de desagüe.

que puede obtenerse usando cálculo integral. Debido a que nada del líquido cruza el plano 1, sabemos que  $w_1 = 0$ . La velocidad de flujo másico de salida  $w_2$ , según se determina a partir de la ecuación de Hagen-Poiseuille, es

$$w_2 = \frac{\pi(\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3)D^4 \rho}{128\mu L} = \frac{\pi(\rho gh + \rho gL)D^4 \rho}{128\mu L} \quad (7.1-5)$$

La fórmula de Hagen-Poiseuille se dedujo para flujo en estado estacionario, pero aquí la usamos porque el volumen del líquido en el tanque cambia lentamente con el tiempo; éste es un ejemplo de aproximación "de estado casi estacionario". Cuando las expresiones para  $m_{\text{tot}}$  y  $w_2$  se sustituyen en la ecuación 7.1-2, se obtiene, luego de reordenar los términos,

$$-\frac{(2R-h)h}{h+L} \frac{dh}{dt} = \frac{\rho g D^4}{128\mu L} \quad (7.1-6)$$

Ahora abreviamos la constante en el miembro derecho de la ecuación como  $A$ . Es más fácil integrar la ecuación si se hace el cambio de variable  $H = h + L$ , de modo que

$$\frac{[H - (2R + L)](H - L)}{H} \frac{dH}{dt} = A \quad (7.1-7)$$

Luego integramos esta ecuación entre  $t = 0$  (cuando  $h = 2R$  o  $H = 2R + L$ ), y  $t = t_{\text{vaciado}}$  (cuando  $h = 0$  o  $H = L$ ). Así se obtiene para el tiempo de vaciado

$$t_{\text{vaciado}} = \frac{L^2}{A} \left[ 2 \frac{R}{L} \left( 1 + \frac{R}{L} \right) - \left( 1 + 2 \frac{R}{L} \right) \ln \left( 1 + 2 \frac{R}{L} \right) \right] \quad (7.1-8)$$

donde  $A$  está dada por el miembro derecho de la ecuación 7.1-6. Nótese que este resultado se obtuvo sin necesidad de hacer ningún análisis detallado del movimiento del fluido dentro de la esfera.

## §7.2 BALANCE MACROSCÓPICO DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Ahora aplicamos la ley de conservación de la cantidad de movimiento al sistema de la figura 7.0-1, usando las dos mismas suposiciones que se mencionaron en la sección precedente, más dos suposiciones adicionales: iii) las fuerzas asociadas con el tensor de esfuerzo  $\tau$  se desprecian en los planos 1 y 2, ya que por regla general son pequeñas en comparación con las fuerzas de presión en los planos de entrada y de salida, y iv) la presión no varía sobre la sección transversal en los planos de entrada y de salida.

Debido a que la cantidad de movimiento es una cantidad vectorial, cada término en el balance debe ser un vector. Usamos los vectores unitarios  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  para representar la dirección del flujo en los planos 1 y 2. Así, la ley de conservación de la cantidad de movimiento queda como

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}_{\text{tot}} = \rho_1 \langle v_1^2 \rangle S_1 \mathbf{u}_1 - \rho_2 \langle v_2^2 \rangle S_2 \mathbf{u}_2 + p_1 S_1 \mathbf{u}_1 - p_2 S_2 \mathbf{u}_2 + \mathbf{F}_{s \rightarrow f} + m_{\text{tot}} \mathbf{g} \quad (7.2-1)$$

velocidad de incremento de cantidad de movimiento	velocidad de entrada de cantidad de movimiento en el plano 1	velocidad de salida de cantidad de movimiento en el plano 2	fuerza de presión sobre el fluido en el plano 1	fuerza de presión sobre el fluido en el plano 2	fuerza de la superficie sólida sobre el fluido	fuerza de gravedad sobre el fluido
--	--	---	---	---	--	---

Aquí  $\mathbf{P}_{\text{tot}} = \int \rho \mathbf{v} dV$  es la cantidad de movimiento total en el sistema. La ecuación establece que la cantidad de movimiento total dentro del sistema cambia debido a la convección de la cantidad de movimiento hacia adentro y hacia afuera del sistema, y debido a las diversas fuerzas que actúan sobre el sistema: las fuerzas de presión en los extremos del sistema, la fuerza de las superficies sólidas que actúa sobre el fluido en el sistema, y la fuerza de gravedad que actúa sobre el fluido dentro de las paredes del sistema. El subíndice "s→f" sirve como recordatorio de la dirección de la fuerza.

Al introducir los símbolos para la velocidad de flujo másico y el símbolo  $\Delta$ , finalmente se obtiene la siguiente expresión para el *balance macroscópico de cantidad de movimiento en estado no estacionario*

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}_{\text{tot}} = -\Delta \left( \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle} w + pS \right) \mathbf{u} + \mathbf{F}_{s \rightarrow f} + m_{\text{tot}} \mathbf{g} \quad (7.2-2)$$

Si la suma total de cantidad de movimiento en el sistema no cambia con el tiempo, entonces se obtiene el *balance macroscópico de cantidad de movimiento en estado estacionario*

$$\mathbf{F}_{f \rightarrow s} = -\Delta \left( \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle} w + pS \right) \mathbf{u} + m_{\text{tot}} \mathbf{g} \quad (7.2-3)$$

Nuevamente mencionamos que ésta es una ecuación vectorial. Es útil para calcular la fuerza del fluido sobre las superficies sólidas,  $\mathbf{F}_{f \rightarrow s}$ , como la fuerza sobre el codo de un tubo o el aspa de una turbina. En realidad, en la ecuación 6.1-3 ya hemos utilizado una versión simplificada de la ecuación anterior.

*Notas concernientes al flujo turbulento:* i) Para flujo turbulento se acostumbra reemplazar  $\langle v \rangle$  por  $\langle \bar{v} \rangle$  y  $\langle v^2 \rangle$  por  $\langle \bar{v}^2 \rangle$ ; en el segundo caso se desprecia el término  $\langle \bar{v}'^2 \rangle$ , que por regla general es pequeño respecto a  $\langle \bar{v}^2 \rangle$ . ii) Además, luego sustituimos  $\langle \bar{v}^2 \rangle / \langle \bar{v} \rangle$  por  $\langle \bar{v} \rangle$ . El error al hacer esto es bastante pequeño; para el perfil de velocidad

empírico de la ley de la potencia  $\frac{1}{7}$  proporcionado en la ecuación 5.1-4,  $\langle \bar{v}^2 \rangle / \langle \bar{v} \rangle = \frac{50}{49} \langle \bar{v} \rangle$ , de modo que el error es de aproximadamente 2%. iii) Cuando se hace esta suposición, para simplificar la notación suelen eliminarse los paréntesis angulares y las barras superiores. Es decir, se hace que  $\langle \bar{v}_1 \rangle = v_1$  y  $\langle \bar{v}_1^2 \rangle = v_1^2$ , con simplificaciones semejantes para las cantidades en el plano 2.

**EJEMPLO 7.2-1**

**Fuerza ejercida  
por un chorro  
(Parte a)**

Un chorro turbulento de agua sale de un tubo de radio  $R_1 = 2.5$  cm con una velocidad  $v_1 = 6$  m/s, como se muestra en la figura 7.2-1. El chorro choca contra un montaje de disco y varilla de masa  $m = 5.5$  kg, que es libre de moverse verticalmente. Se desprecia la fricción entre la varilla y el manguito. Encontrar la altura  $h$  a la que el disco "flotará" como resultado del chorro.<sup>1</sup> Suponer que el agua es incompresible.

**SOLUCIÓN**

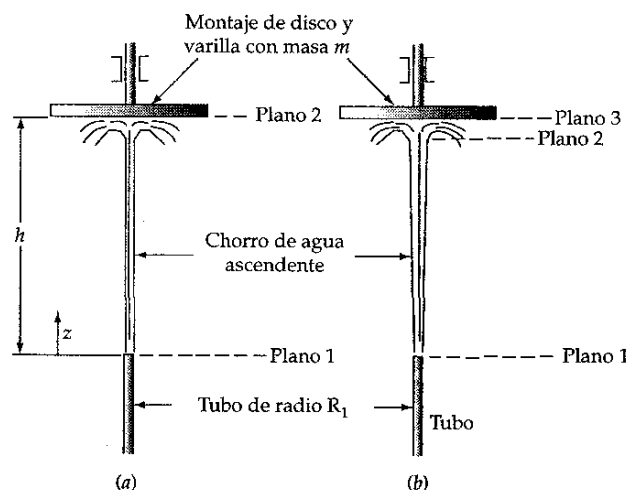
Para resolver este problema es necesario imaginar cómo se comporta el chorro. En la figura 7.2-1a se supone que el chorro tiene un radio constante,  $R_1$ , entre la salida del tubo y el disco, mientras que en la figura 7.2-1b se supone que el chorro se dispersa ligeramente. En este ejemplo hacemos la primera suposición, y en el ejemplo 7.4-1 explicaremos la dispersión del chorro.

Aplicamos la componente  $z$  del balance de cantidad de movimiento en estado estacionario entre los planos 1 y 2. Los términos de la presión pueden omitirse, ya que la presión es atmosférica en ambos planos. La componente  $z$  de la velocidad del fluido en el plano 2 es cero. Así, el balance de cantidad de movimiento se vuelve

$$mg = v_1(\rho v_1 \pi R_1^2) - (\pi R_1^2 h) \rho g \quad (7.2-4)$$

Al despejar  $h$ , en la ecuación anterior se obtiene (en unidades SI)

$$h = \frac{v_1^2}{g} - \frac{m}{\rho \pi R_1^2} = \frac{(6)^2}{(9.807)} - \frac{5.5}{\pi (0.025)^2 (1000)} = 0.87 \text{ m} \quad (7.2-5)$$



**Figura 7.2-1** Bocetos correspondientes a las dos soluciones del problema del chorro y disco. En *a* se supone que el chorro de agua tiene un radio uniforme  $R_1$ . En *b* se da una tolerancia para la dispersión del chorro del líquido.

<sup>1</sup> K. Federhofer, *Aufgaben aus der Hydromechanik*, Springer-Verlag, Viena (1954), pp. 36 y 172.

### §7.3 BALANCE MACROSCÓPICO DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

El desarrollo del balance macroscópico de cantidad de movimiento angular es comparable al del balance de cantidad de movimiento (lineal) de la sección precedente. Todo lo que debe hacerse es reemplazar "cantidad de movimiento" por "cantidad de movimiento angular" y "fuerza" por "momento de torsión".

Para describir la cantidad de movimiento angular y el momento de torsión es necesario elegir un origen de coordenadas respecto al cual se evalúan estas cantidades. El origen se designa por "O" en la figura 7.0-1, y las ubicaciones de los puntos medios de los planos 1 y 2 respecto a este origen están dadas por los vectores de posición  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ .

Nuevamente se hacen las suposiciones (i)-(iv) que se presentaron en §§7.1 y 7.2. Con estas suposiciones, la velocidad de entrada de cantidad de movimiento angular al plano 1, que es  $\int [\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}] (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) dS$  evaluada en ese plano, se vuelve  $\rho_1 \langle v_1^2 \rangle S_1 [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1]$ , con una expresión semejante para la velocidad a la que la cantidad de movimiento angular sale del sistema en 2.

Ahora es posible escribir el *balance macroscópico de cantidad de movimiento angular en estado no estacionario* como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L_{\text{tot}} = & \rho_1 \langle v_1^2 \rangle S_1 [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1] - \rho_2 \langle v_2^2 \rangle S_2 [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_2] \\ & + p_1 S_1 [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1] - p_2 S_2 [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_2] + T_{s \rightarrow f} + T_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (7.3-1)$$

velocidad de incremento de cantidad de movimiento angular	velocidad de entrada de cantidad de movimiento angular en el plano 1	velocidad de salida de cantidad de movimiento angular en el plano 2
momento de torsión debido a la presión sobre el fluido en el plano 1	momento de torsión debido a la presión sobre el fluido en el plano 2	momento de torsión de la superficie sólida sobre el fluido

Aquí  $L_{\text{tot}} = \int \rho [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] dV$  es la cantidad de movimiento angular total dentro del sistema, y  $T_{\text{ext}} = \int [\mathbf{r} \times \rho \mathbf{g}] dV$  es el momento de torsión sobre el fluido en el sistema que resulta de la fuerza de gravedad. Esta ecuación también puede escribirse como

$$\frac{d}{dt} L_{\text{tot}} = -\Delta \left( \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle} w + pS \right) [\mathbf{r} \times \mathbf{u}] + T_{s \rightarrow f} + T_{\text{ext}} \quad (7.3-2)$$

Finalmente, el *balance macroscópico de cantidad de movimiento angular en estado estacionario* es

$$T_{f \rightarrow s} = -\Delta \left( \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle} w + pS \right) [\mathbf{r} \times \mathbf{u}] + T_{\text{ext}} \quad (7.3-3)$$

que proporciona el momento de torsión ejercido por el fluido sobre las superficies sólidas.

**EJEMPLO 7.3-1****Momento de torsión en un recipiente mezclador**

Un recipiente mezclador, que se muestra en la figura 7.3-1, opera en estado estacionario. El fluido entra tangencialmente al plano 1 en flujo turbulento con una velocidad  $v_1$  y sale a través del tubo vertical con una velocidad  $v_2$ . Debido a que el tanque tiene desviadores, el fluido no presenta movimiento de remolino en el tubo vertical de salida. Encontrar el momento de torsión ejercido sobre el recipiente mezclador.

**SOLUCIÓN**

El origen del sistema de coordenadas se toma en el eje del tanque, en un plano que pasa por el eje del tubo de entrada y es paralelo a la parte superior del tanque. Así, el vector  $[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1]$  es un vector que apunta en la dirección  $z$  con magnitud  $R$ . Además  $[\mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_2] = 0$ , ya que los dos vectores son colineales. Para este problema, la ecuación 7.3-3 da

$$\mathbf{T}_{f \rightarrow s} = (\rho v_1^2 S_1 + p_1 S_1) R \delta_z \quad (7.3-4)$$

Así, el momento de torsión es justamente “fuerza  $\times$  brazo de palanca”, como sería de esperar. Si el momento de torsión es suficientemente grande, el equipo debe sujetarse de manera adecuada para que soporte el momento de torsión producido por el movimiento del fluido y la presión de entrada.

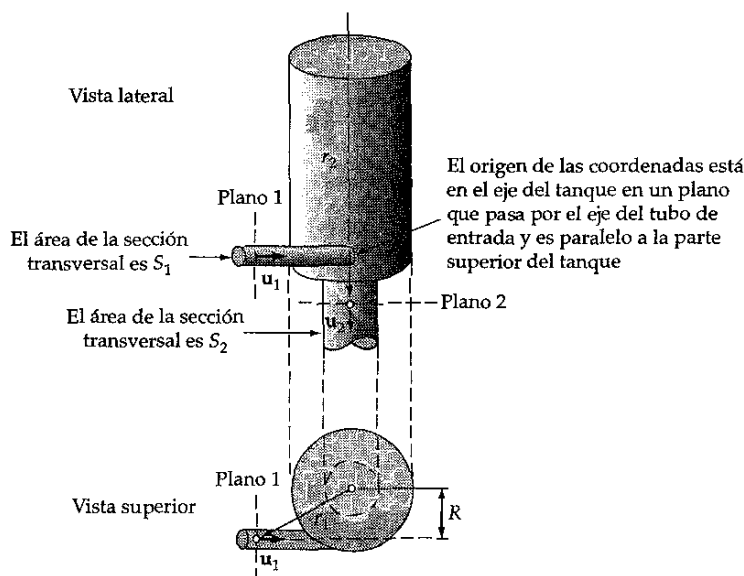


Figura 7.3-1 Momento de torsión sobre un tanque; se muestran las vistas lateral y superior.



## 7.4 BALANCE MACROSCÓPICO DE ENERGÍA MECÁNICA

Las ecuaciones 7.1-2, 7.2-2 y 7.3-2 se establecieron aplicando las leyes de conservación de la materia, la cantidad de movimiento (lineal) y la cantidad de movimiento angular sobre el sistema macroscópico de la figura 7.0-1. Los tres balances macroscópicos obtenidos de este modo corresponden a las ecuaciones de variación en las ecuaciones 3.1-4, 3.2-9 y 3.4-1 y, de hecho, son muy parecidos en estructura. Estos tres balances macroscópicos pueden también obtenerse integrando las tres ecuaciones de variación sobre el volumen del sistema de flujo.

A continuación queremos establecer el balance macroscópico de energía mecánica, que corresponde a la ecuación de energía mecánica en la ecuación 3.3-2. No hay forma de hacer esto directamente como hicimos en las tres secciones precedentes, ya que no hay ley de conservación de la energía mecánica. En este caso *debemos* integrar la ecuación de variación de la energía mecánica sobre el volumen del sistema de flujo. El resultado, en el que se usaron las mismas suposiciones (i-iv) de antes, es el *balance macroscópico de energía mecánica en estado no estacionario* (también denominado *ecuación ingenieril de Bernoulli*). La ecuación se deduce en §7.8; aquí planteamos el resultado y analizamos su significado:

$$\frac{d}{dt}(K_{\text{tot}} + \Phi_{\text{tot}}) = \left(\frac{1}{2}\rho_1\langle v_1^3 \rangle + \rho_1\hat{\Phi}_1\langle v_1 \rangle\right)S_1 - \left(\frac{1}{2}\rho_2\langle v_2^3 \rangle + \rho_2\hat{\Phi}_2\langle v_2 \rangle\right)S_2$$

velocidad de incremento de las energías cinética y potencial en el sistema
velocidad a la que las energías cinética y potencial entran en el sistema en el plano 1
velocidad a la que las energías cinética y potencial salen del sistema en el plano 2

$$+ (p_1\langle v_1 \rangle S_1 - p_2\langle v_2 \rangle S_2) + W_m + \int_{V(t)} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV + \int_{V(t)} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) dV \quad (7.4-1)$$

velocidad neta a la que el entorno realiza trabajo sobre el fluido en los planos 1 y 2 por medio de la presión
velocidad a la que las superficies móviles realizan trabajo sobre el fluido
velocidad a la que aumenta o disminuye la energía mecánica debido al ensanchamiento o la compresión del fluido
velocidad a la que disminuye la energía mecánica debido a la disipación viscosa<sup>1</sup>

Aquí  $K_{\text{tot}} = \int \frac{1}{2}\rho v^2 dV$  y  $\Phi_{\text{tot}} = \int \rho\hat{\Phi} dV$  son las energías cinética y potencial totales dentro del sistema. Según la ecuación 7.4-1, la energía mecánica total (es decir, cinética más potencial) cambia debido a una diferencia entre las velocidades de adición y la eliminación de energía mecánica, debido al trabajo realizado sobre el fluido por el entorno y a los efectos de compresibilidad, así como a la disipación viscosa. Nótese que, en la entrada del sistema (plano 1), la fuerza  $p_1 S_1$  multiplicada por la velocidad  $\langle v_1 \rangle$  proporciona la velocidad a la que el entorno realiza trabajo sobre el fluido. Además,  $W_m$  es el trabajo realizado por el entorno sobre el fluido por medio de superficies móviles.

Ahora, el balance macroscópico de energía mecánica puede escribirse de manera más breve como

$$\frac{d}{dt}(K_{\text{tot}} + \Phi_{\text{tot}}) = -\Delta \left( \frac{1}{2} \frac{\langle v^3 \rangle}{\langle v \rangle} + \hat{\Phi} + \frac{p}{\rho} \right) w + W_m - E_c - E_v \quad (7.4-2)$$

donde los términos  $E_c$  y  $E_v$  se definen como sigue:

$$E_c = - \int_{V(t)} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV \quad \text{y} \quad E_v = - \int_{V(t)} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) dV \quad (7.4-3, 4)$$

<sup>1</sup> Esta interpretación del término es válida sólo para fluidos newtonianos; los líquidos poliméricos tienen elasticidad y para éstos no se aplica la interpretación que se proporciona aquí.

El término compresión  $E_c$  es positivo en compresión y negativo en ensanchamiento; es cero cuando se supone que el fluido es incompresible. El término  $E_v$  es el término de la disipación viscosa (o de pérdida por fricción), que siempre es positivo para líquidos newtonianos, como puede verse a partir de la ecuación 3.3-3. (Para fluidos poliméricos, que son viscoelásticos,  $E_v$  no necesariamente es positivo; estos fluidos se analizan en el siguiente capítulo.)

Si la energía cinética total más la energía potencial total en el sistema no cambia con el tiempo, se obtiene

$$\Delta \left( \frac{1}{2} \frac{\langle v^3 \rangle}{\langle v \rangle} + gh + \frac{p}{\rho} \right) w = W_m - E_c - E_v \quad (7.4-5)$$

que es el balance macroscópico de energía mecánica en estado estacionario. Aquí  $h$  es la altura por arriba de algún plano dado elegido arbitrariamente.

Luego, si se supone que es posible trazar una línea de flujo de corriente representativa que pase por el sistema, es posible combinar los términos  $\Delta(p/\rho)$  y  $E_c$  para obtener la siguiente relación aproximada (véase §7.8).

$$\Delta \left( \frac{p}{\rho} \right) w + E_c \approx w \int_1^2 \frac{1}{\rho} dp \quad (7.4-6)$$

Luego, al dividir la ecuación 7.4-5 entre  $w_1 = w_2 = w$ , se obtiene

$$\Delta \left( \frac{1}{2} \frac{\langle v^3 \rangle}{\langle v \rangle} \right) + g\Delta h + \int_1^2 \frac{1}{\rho} dp = \hat{W}_m - \hat{E}_v \quad (7.4-7)$$

Aquí  $\hat{W}_m = W_m/w$  y  $\hat{E}_v = E_v/w$ . La ecuación 7.4-7 es la versión que más se utiliza del balance de energía mecánica en estado estacionario. Para sistemas isotérmicos, el término de la integral puede calcularse en la medida en que se cuente con una expresión para la densidad como una función de la presión.

La ecuación 7.4-7 debe compararse ahora con la ecuación 3.5-12, que es la ecuación "clásica" de Bernoulli para un fluido no viscoso. Si, en el miembro derecho de la ecuación 3.5-12, simplemente se suma el trabajo  $\hat{W}_m$  realizado por el entorno y se resta el término de la disipación viscosa  $\hat{E}_v$ , y las velocidades vuelven a interpretarse como promedios idóneos sobre las secciones transversales, entonces se obtiene la ecuación 7.4-7. Esto constituye un "argumento de plausibilidad" para la ecuación 7.4-7 y sigue preservando la idea fundamental de que el balance macroscópico de energía mecánica se deduce a partir de la ecuación de movimiento (es decir, a partir de la ley de conservación de la cantidad de movimiento). Para quienes estén interesados en esta cuestión, en §7.8 se proporciona la deducción completa del balance macroscópico de energía mecánica.

*Notas para flujo turbulento:* i) Para flujos turbulentos se sustituye  $\langle v^3 \rangle$  por  $\langle \bar{v}^3 \rangle$ , y se ignora la contribución de las fluctuaciones turbulentas. ii) Es práctica común reemplazar el cociente  $\langle \bar{v}^3 \rangle / \langle \bar{v} \rangle$  por  $\langle \bar{v} \rangle^2$ . Para el perfil de velocidad empírico de la ley de la potencia  $\frac{1}{7}$  que se proporciona en la ecuación 5.1-4, puede demostrarse que  $\langle \bar{v}^3 \rangle / \langle \bar{v} \rangle = \frac{43200}{40817} \langle \bar{v} \rangle^2$ , de modo que el error equivale aproximadamente a 6%. iii) Además, se omiten los paréntesis angulares y las barras superiores para simplificar la notación en flujo turbulento.

**EJEMPLO 7.4-1**

Fuerza ejercida por  
chorro  
parte b)

Fuerza ejercida  
por un chorro  
(parte b).

Continuar el problema del ejemplo 7.2-1 explicando la dispersión del chorro a medida que se mueva hacia arriba.

**SOLUCIÓN**

Ahora dejamos que el diámetro del chorro aumente con el incremento de  $z$ , como se muestra en la figura 7.2-1(b). Es conveniente trabajar con tres planos y hacer balances entre pares de planos. Se considera que la separación entre los planos 2 y 3 es muy pequeña.

Al hacer un balance de materia entre los planos 1 y 2 se obtiene

$$w_1 = w_2 \quad (7.4-8)$$

Luego aplicamos el balance de energía mecánica de la ecuación 7.4-5 o la ecuación 7.4-7 entre los dos mismos planos. Las presiones en los planos 1 y 2, ambas, son atmosféricas, y las partes móviles no realizan trabajo  $W_m$ . Se supone que el término de la disipación viscosa  $E_v$  puede despreciarse. Si  $z$  se mide hacia arriba desde la salida del tubo, entonces  $g\Delta h = g(h_2 - h_1) \approx g(h - 0)$ , ya que los planos 2 y 3 están muy próximos entre sí. Por tanto, el balance de energía mecánica resulta en

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + gh = 0 \quad (7.4-9)$$

Ahora aplicamos el balance de cantidad de movimiento en la dirección  $z$  entre los planos 2 y 3. Debido a que la región es muy pequeña, despreciamos el último término en la ecuación 7.2-3. Ambos planos están a presión atmosférica, de modo que los términos de la presión no contribuyen. La velocidad del fluido es cero en el plano 3, de modo que en el balance de cantidad de movimiento sólo quedan dos términos

$$mg = v_2 w_2 \quad (7.4-10)$$

Con base en las tres ecuaciones de arriba se obtiene

$$\begin{aligned} h &= \frac{v_1^2}{2g} \left( 1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \right) && \text{a partir de la ecuación 7.4-9} \\ &= \frac{v_1^2}{2g} \left( 1 - \frac{(mg/w_2)^2}{v_1^2} \right) && \text{a partir de la ecuación 7.4-10} \\ &= \frac{v_1^2}{2g} \left( 1 - \left( \frac{mg}{v_1 w_1} \right)^2 \right) && \text{a partir de la ecuación 7.4-8} \end{aligned} \quad (7.4-11)$$

donde se conocen  $mg$  y  $v_1 w_1 = \pi R_1^2 \rho v_1^2$ . Cuando los valores numéricos se sustituyen en la ecuación 7.4-11, se obtiene  $h = 0.77$  m. Quizá este resultado es mejor que el valor de 0.87 m que se obtuvo en el ejemplo 7.2-1, ya que explica la dispersión del chorro. Sin embargo, no hemos considerado la adhesión del agua al disco, que proporciona al montaje del disco y la varilla una masa efectiva algo mayor. Además, se ha despreciado la resistencia a la fricción de la varilla en el mango. Es necesario correr un experimento para valorar la validez de la ecuación 7.4-10.

## §7.5 ESTIMACIÓN DE LA PÉRDIDA VISCOSA

Esta sección trata los métodos para estimar la pérdida viscosa (o pérdida por fricción),  $E_v$ , que aparece en el balance macroscópico de energía mecánica. La expresión general para  $E_v$  se proporciona en la ecuación 7.4-4. Para fluidos newtonianos incompresibles, la ecuación 3.3-3 puede usarse para volver a escribir  $E_v$  como

$$E_v = \int \mu \Phi_v dV \quad (7.5-1)$$

que muestra que es la integral de la velocidad local de disipación viscosa sobre el volumen de todo el sistema de flujo.

Ahora se desea estudiar  $E_v$  desde el punto de vista del análisis dimensional. La cantidad  $\Phi_v$  es una suma de cuadrados de gradientes de velocidad; por tanto, sus dimensiones son las de  $(v_0/l_0)^2$ , donde  $v_0$  y  $l_0$  son una velocidad y una longitud características, respectivamente. Por tanto, es posible escribir

$$E_v = (\rho v_0^3 l_0^2)(\mu/l_0 v_0 \rho) \int \check{\Phi}_v d\check{V} \quad (7.5-2)$$

donde  $\check{\Phi}_v = (l_0/v_0)^2 \Phi_v$  y  $d\check{V} = l_0^{-3} dV$  son cantidades adimensionales. Si se usan los argumentos dimensionales de §§3.7 y 6.2, observamos que la integral en la ecuación 7.5-2 depende sólo de los varios grupos adimensionales que hay en las ecuaciones de variación y de varios factores geométricos que entran en las condiciones límite. Por tanto, si el único grupo adimensional significativo es un número de Reynolds,  $Re = l_0 v_0 \rho / \mu$ , entonces la ecuación 7.5-2 debe tener la forma general

$$E_v = (\rho v_0^3 l_0^2) \times \left( \begin{array}{l} \text{una función adimensional de } Re \\ \text{y varias relaciones geométricas} \end{array} \right) \quad (7.5-3)$$

En *flujo en estado estacionario* es preferible trabajar con la cantidad  $\hat{E}_v = E_v/w$ , donde  $w = \rho \langle v \rangle S$  es la velocidad de flujo másico que pasa por *cualquier* sección transversal del sistema de flujo. Si se elige que la velocidad de referencia  $v_0$  sea  $\langle v \rangle$  y que la longitud de referencia  $l_0$  sea  $\sqrt{S}$ , entonces

$$\hat{E}_v = \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 e_v \quad (7.5-4)$$

donde  $e_v$ , el *factor de pérdidas por fricción*, es una función de un número de Reynolds y de relaciones geométricas adimensionales relevantes. El factor  $\frac{1}{2}$  se ha introducido de conformidad con la forma de otras ecuaciones relacionadas. Ahora queremos resumir lo que se sabe sobre el factor de pérdidas por fricción para las diversas partes de un sistema de tubería.

Para un conducto recto, el factor de pérdidas por fricción está estrechamente relacionado con el factor de fricción. Consideramos sólo el flujo estacionario de un fluido de densidad constante en un conducto recto de sección transversal  $S$  arbitraria pero constante, y longitud  $L$ . Si el fluido circula en la dirección  $z$  bajo el efecto de un gradiente de presión y de la gravedad, entonces las ecuaciones 7.2-2 y 7.4-7 se convierten en

$$\text{(cantidad de movimiento en la dirección } z) \quad F_{f \rightarrow s} = (p_1 - p_2)S + (\rho SL)g_z \quad (7.5-5)$$

$$\text{(energía mecánica)} \quad \hat{E}_v = \frac{1}{\rho} (p_1 - p_2) + Lg_z \quad (7.5-6)$$

Al multiplicar por  $\rho S$  la segunda de estas ecuaciones y restar se obtiene

$$\hat{E}_v = \frac{F_{f \rightarrow s}}{\rho S} \quad (7.5-7)$$

Si, además, el flujo es *turbulento*, entonces puede usarse la expresión para  $F_{f \rightarrow s}$  en términos del radio hidráulico medio  $R_h$  (véanse las ecuaciones 6.2-16 a 6.2-18) de modo que

$$\hat{E}_v = \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \frac{L}{R_h} f \quad (7.5-8)$$

donde  $f$  es el factor de fricción que se analizó en el capítulo 6. Debido a que esta ecuación es de la forma de la ecuación 7.5-4, para flujo turbulento en secciones de tubería recta con sección transversal uniforme, se obtiene una relación simple entre el factor de pérdidas por fricción y el factor de fricción

$$e_v = \frac{L}{R_h} f \quad (7.5-9)$$

Un tratamiento semejante para conductos de sección transversal variable puede encontrarse en el problema 7B.2.

La mayor parte de los sistemas de flujo contienen varios "obstáculos", como accesorios, variaciones repentinas de diámetro, válvulas o aparatos para medir el flujo. Estos obstáculos también contribuyen a la pérdida por fricción  $\hat{E}_v$ . Tales resistencias adicionales pueden escribirse en la forma de la ecuación 7.5-4, con  $e_v$  determinado por uno de dos métodos: *a*) solución simultánea de los balances macroscópicos o *b*) mediciones experimentales. En la tabla 7.5-1 se muestran algunos valores apro-

**Tabla 7.5-1** Breve resumen de los factores de pérdida por fricción para utilizar con la ecuación 7.5-10  
(Valores aproximados para flujo turbulento)<sup>a</sup>

Perturbaciones	$e_v$
Cambios repentinos en el área de la sección transversal <sup>b</sup>	
Entrada al tubo redondeada	0.05
Contracción repentina	$0.45(1 - \beta)$
Ensanchamiento repentino <sup>c</sup>	$\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)^2$
Orificio (de borde afilado)	$2.71(1 - \beta)(1 - \beta^2)\frac{1}{\beta^2}$
Accesorios y válvulas	
Codos de 90° (redondeados)	0.4-0.9
Codos de 90° (cuadrados)	1.3-1.9
Codos de 45°	0.3-0.4
Válvula esférica (abierta)	6-10
Válvula de compuerta (abierta)	0.2

<sup>a</sup> Tomados de H. Kramers, *Physische Transportverschijnselen*, Technische Hogeschool Delft, Holanda (1958), pp. 53-54.

<sup>b</sup> Aquí  $\beta = (\text{área de la sección transversal menor})/(\text{área de la sección transversal mayor})$ .

<sup>c</sup> Véase la deducción a partir de los balances macroscópicos en el ejemplo 7.6-1. Si  $\beta = 0$ , entonces  $\hat{E}_v = \frac{1}{2} \langle v \rangle^2$ , donde  $\langle v \rangle$  es la velocidad corriente arriba a partir del ensanchamiento.

ximados de  $e_v$  para la convención de que  $\langle v \rangle$  es la velocidad media *corriente abajo* desde la perturbación. Estos valores de  $e_v$  son para *flujo turbulento* en el que la dependencia respecto al número de Reynolds no es demasiado importante.

Ahora ya es posible volver a escribir la ecuación 7.4-7 en la forma *aproximada* que suele usarse para cálculos de *flujo turbulento* en un sistema compuesto por varios tipos de tubería y resistencias adicionales:

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + g(z_2 - z_1) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho} dp = \hat{W}_m - \sum_i \left( \frac{1}{2} v^2 \frac{L}{R_h} f \right)_i - \sum_i \left( \frac{1}{2} v^2 e_v \right)_i \quad (7.5-10)$$

operación suma sobre  
todas las secciones de  
tramos rectos

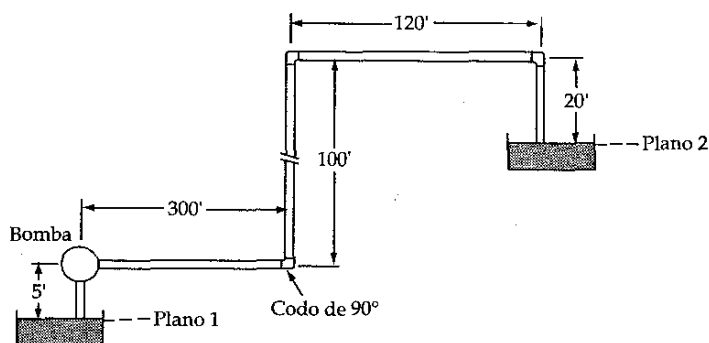
operación suma sobre  
todos los accesorios,  
válvulas, medidores, etc.

Aquí  $R_h$  es el radio hidráulico medio que se definió en la ecuación 6.2-16,  $f$  es el factor de fricción que se definió en la ecuación 6.1-4 y  $e_v$  es el factor de pérdidas por fricción que se proporciona en la tabla 7.5-1. Nótese que  $v_1$  y  $v_2$  en el primer término se refieren a las velocidades en los planos 1 y 2; la  $v$  en la primera operación suma es la velocidad media en el  $i$ -ésimo segmento de la tubería; y la  $v$  en la segunda operación suma, es la velocidad media *corriente abajo* a partir del  $i$ -ésimo accesorio, válvula u otro obstáculo.

### EJEMPLO 7.5-1

**Potencia necesaria  
para el flujo en una  
tubería**

¿Qué potencia es necesaria para bombear agua en estado estacionario en el sistema que se muestra en la figura 7.5-1? El agua a 68 °F ( $\rho = 62.4 \text{ lb}_m/\text{pies}^3$ ;  $\mu = 1.0 \text{ cp}$ ) debe suministrarse al tanque superior a razón de 12  $\text{pies}^3/\text{min}$ . Toda la tubería está constituida por tubos circulares lisos de 4 pulg de diámetro interior.



**Figura 7.5-1** Flujo en una tubería con pérdidas por fricción debido a los accesorios. Los planos 1 y 2 están justo abajo de la superficie del líquido.

**SOLUCIÓN**

La velocidad media en la tubería es

$$\langle v \rangle = \frac{w/\rho}{\pi R^2} = \frac{(12/60)}{\pi(1/6)^2} = 2.30 \text{ pies/s} \quad (7.5-11)$$

y el número de Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{D\langle v \rangle \rho}{\mu} = \frac{(1/3)(2.30)(62.4)}{(1.0)(6.72 \times 10^{-4})} = 7.11 \times 10^4 \quad (7.5-12)$$

Por tanto, el flujo es *turbulento*.

La contribución a  $\hat{E}_v$  de los distintos segmentos de la tubería es

$$\begin{aligned} \sum_i \left( \frac{1}{2} v^2 \frac{L}{R_h} f \right)_i &= \frac{2v^2 f}{D} \sum_i L_i \\ &= \frac{2(2.30)^2(0.0049)}{(1/3)} (5 + 300 + 100 + 120 + 20) \\ &= (0.156)(545) = 85 \text{ pies}^2/\text{s}^2 \end{aligned} \quad (7.5-13)$$

La contribución a  $\hat{E}_v$  de la contracción repentina, los tres codos de 90° y el ensanchamiento repentino (véase la tabla 7.5-1) es

$$\sum_i \left( \frac{1}{2} v^2 e_v \right)_i = \frac{1}{2} (2.30)^2 (0.45 + 3(\frac{1}{2}) + 1) = 8 \text{ pies}^2/\text{s}^2 \quad (7.5-14)$$

Así, por la ecuación 7.5-10 se obtiene

$$0 + (32.2)(105 - 20) + 0 = \hat{W}_m - 85 - 8 \quad (7.5-15)$$

Al despejar  $\hat{W}_m$  se obtiene

$$\hat{W}_m = 2740 + 85 + 8 \approx 2830 \text{ pies}^2/\text{s}^2 \quad (7.5-16)$$

Éste es el trabajo (por unidad de masa de fluido) realizado *sobre* el fluido *en* la bomba. Por tanto, la bomba realiza un trabajo de 2830 pies<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>, o 2830/32.2 = 88 pies lb<sub>f</sub>/lb<sub>m</sub> sobre el fluido que pasa por el sistema. Entonces, la velocidad de flujo másico es

$$w = (12/60)(62.4) = 12.5 \text{ lb}_m/\text{s} \quad (7.5-17)$$

Por consiguiente,

$$W_m = w\hat{W}_m = (12.5)(88) = 1100 \text{ pies lb}_f/\text{s} = 2 \text{ hp} = 1.5 \text{ kW} \quad (7.5-18)$$

que es la potencia entregada por la bomba.

---

**Tabla 7.6-1** Balances macroscópicos en estado estacionario para flujo turbulento en sistemas isotérmicos

Materia:	$\Sigma w_1 - \Sigma w_2 = 0$	(A)
Cantidad de movimiento:	$\Sigma(v_1 w_1 + p_1 S_1) \mathbf{u}_1 - \Sigma(v_2 w_2 + p_2 S_2) \mathbf{u}_2 + m_{\text{tot}} \mathbf{g} = \mathbf{F}_{f \rightarrow s}$	(B)
Cantidad de movimiento angular:	$\Sigma(v_1 w_1 + p_1 S_1) [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1] - \Sigma(v_2 w_2 + p_2 S_2) [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_2] + \mathbf{T}_{\text{ext}} = \mathbf{T}_{f \rightarrow s}$	(C)
Energía mecánica:	$\Sigma \left( \frac{1}{2} v_1^2 + g h_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) w_1 - \Sigma \left( \frac{1}{2} v_2^2 + g h_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) w_2 = -W_m + E_c + E_v$	(D)

Notas:

- a) En todas las fórmulas de la tabla se suponen perfiles de velocidad planos.  
 b)  $\Sigma w_1 = w_{1a} + w_{1b} + w_{1c} + \dots$ , donde  $w_{1a} = \rho_{1a} v_{1a} S_{1a}$ , etc.  
 c)  $h_1$  y  $h_2$  son alturas por arriba de un plano dado arbitrario.  
 d) Todas las ecuaciones están escritas para flujo compresible; para flujo incompresible,  $E_c = 0$ .

## §7.6 USO DE LOS BALANCES MACROSCÓPICOS PARA PROBLEMAS DE ESTADO ESTACIONARIO

En §3.6 vimos cómo al simplificar las ecuaciones de variación se establecen las ecuaciones diferenciales que permiten calcular los perfiles de velocidad y presión para sistemas de flujo isotérmicos. En esta sección mostramos cómo usar el conjunto de balances macroscópicos en estado estacionario a fin de obtener las ecuaciones algebraicas para describir sistemas grandes.

Para cada problema empezamos con los cuatro balances macroscópicos. Al mantener el rastro de los términos eliminados o aproximados, automáticamente se tiene una lista completa de las suposiciones inherentes en el resultado final. Todos los ejemplos que se proporcionan aquí son para flujo isotérmico incompresible. La suposición de incompresibilidad significa que la velocidad del fluido debe ser menor que la velocidad del sonido en el fluido y que los cambios de presión deben ser tan pequeños que sea posible despreciar los cambios de densidad resultantes.

Los balances macroscópicos en estado estacionario pueden generalizarse sin problema para sistemas con múltiples corrientes de entrada (denominadas 1a, 1b, 1c, ...) y múltiples corrientes de salida (denominadas 2a, 2b, 2c, ...). Estos balances se resumen en la tabla 7.6-1 para flujo turbulento (donde se considera que los perfiles de velocidad son planos).

### EJEMPLO 7.6-1

*Aumento de presión y pérdida por fricción en un ensanchamiento brusco*

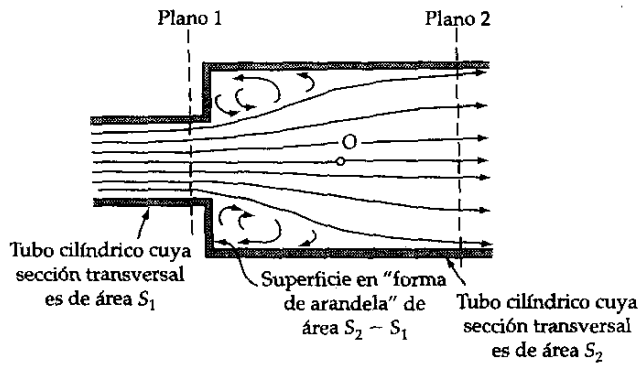
Un fluido incompresible circula desde un pequeño tubo circular hacia un gran tubo en flujo turbulento, como se muestra en la figura 7.6-1. Las áreas de las secciones transversales de los tubos son  $S_1$  y  $S_2$ . Obtener una expresión para el cambio de presión entre los planos 1 y 2 y para la pérdida por fricción asociada con el ensanchamiento brusco en la sección transversal. Sea  $\beta = S_1/S_2$ , que es menor que la unidad.

### SOLUCIÓN

a) *Balance de materia.* Para flujo estacionario, al hacer el balance de materia se obtiene

$$w_1 = w_2 \quad \text{o bien,} \quad \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 \quad (7.6-1)$$





**Figura 7.6-1** Flujo a través de un ensanchamiento repentino.

Para un fluido de densidad constante, lo anterior queda como

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{\beta} \quad (7.6-2)$$

**b) Balance de cantidad de movimiento.** La componente corriente abajo del balance de cantidad de movimiento es

$$F_{f \rightarrow s} = (v_1 w_1 - v_2 w_2) + (p_1 S_1 - p_2 S_2) \quad (7.6-3)$$

La fuerza  $F_{f \rightarrow s}$  consta de dos partes: la fuerza viscosa sobre las superficies cilíndrica y paralela a la dirección del flujo, y la fuerza de presión sobre la superficie en forma de arandela justo a la derecha del plano 1 y perpendicular al eje del flujo. Despreciamos la primera contribución (por intuición) y consideramos que la posterior es  $p_1(S_2 - S_1)$  al suponer que la presión sobre la superficie en forma de arandela es la misma que la del plano 1. Luego, usando la ecuación 7.6-1, se obtiene

$$-p_1(S_2 - S_1) = \rho v_2 S_2 (v_1 - v_2) + (p_1 S_1 - p_2 S_2) \quad (7.6-4)$$

Al despejar la diferencia de presión se obtiene

$$p_2 - p_1 = \rho v_2 (v_1 - v_2) \quad (7.6-5)$$

o bien, en términos de la velocidad corriente abajo,

$$p_2 - p_1 = \rho v_2^2 \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \quad (7.6-6)$$

Nótese que el balance de cantidad de movimiento pronostica (correctamente) un aumento en la presión.

**c) Balance de cantidad de movimiento angular.** Este balance no es necesario. Si tomamos el origen de coordenadas sobre el eje del sistema en el centro de gravedad del fluido localizado entre los planos 1 y 2, entonces  $[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1]$  y  $[\mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_2]$  son, ambos, cero, y sobre el sistema de flujo no hay momentos de torsión.

**d) Balance de energía mecánica.** No hay pérdida por compresión ni se realiza trabajo a través de las partes móviles y tampoco hay cambio de elevación, de modo que

$$\hat{E}_v = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + \frac{1}{\rho}(p_1 - p_2) \quad (7.6-7)$$

Luego, al insertar la ecuación 7.6-6 para el aumento de presión se obtiene, después de reordenar los términos,

$$\hat{E}_v = \frac{1}{2}v_2^2\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)^2 \quad (7.6-8)$$

que es un elemento de la tabla 7.5-1.

En este ejemplo se ha mostrado cómo usar los balances macroscópicos para estimar el factor de pérdidas por fricción para una simple resistencia en un sistema de flujo. Debido a las suposiciones mencionadas después de la ecuación 7.6-3, los resultados en las ecuaciones 7.6-6 y 7.6-8 son aproximados. Si se requiere bastante precisión, es necesario introducir un factor de corrección basado en datos experimentales.

### EJEMPLO 7.6-2

#### Rendimiento de un eyector líquido- líquido

En la figura 7.6-2 se muestra el diagrama de un eyector líquido-líquido. Se desea analizar la mezcla de dos corrientes, ambas del mismo fluido, por medio de los balances macroscópicos. Las dos corrientes de fluido se fusionan en el plano 1. La corriente 1a tiene una velocidad  $v_0$  y el área de su sección transversal es  $\frac{1}{3}S_1$ , y la corriente 1b tiene una velocidad  $\frac{1}{2}v_0$  y el área de su sección transversal es  $\frac{2}{3}S_1$ . El plano 2 corriente abajo se elige a una distancia suficiente para que las dos corrientes ya se hayan mezclado y la velocidad es casi uniforme en  $v_2$ . El flujo es turbulento y se supone que los perfiles de velocidad en los planos 1 y 2 son planos. En el análisis siguiente se desprecia  $F_{f \rightarrow s}$ , ya que se percibe que es menos importante que los otros términos en el balance de cantidad de movimiento.

#### SOLUCIÓN

a) *Balance de materia.* En estado estacionario, la ecuación A de la tabla 7.6-1 proporciona

$$w_{1a} + w_{1b} = w_2 \quad (7.6-9)$$

o bien,

$$\rho v_0\left(\frac{1}{3}S_1\right) + \rho\left(\frac{1}{2}v_0\right)\left(\frac{2}{3}S_1\right) = \rho v_2 S_2 \quad (7.6-10)$$

Por tanto, ya que  $S_1 = S_2$ , esta ecuación da

$$v_2 = \frac{2}{3}v_0 \quad (7.6-11)$$

para la velocidad de la corriente de salida. También se observa, para uso posterior, que  $w_{1a} = w_{1b} = \frac{1}{2}w_2$ .

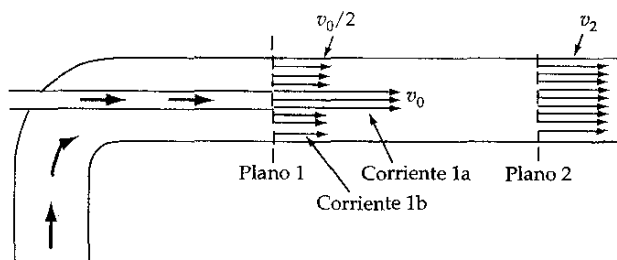


Figura 7.6-2 Flujo en una bomba eyectora líquido-líquido.

b) *Balance de cantidad de movimiento.* A partir de la ecuación B de la tabla 7.6-1, la componente del balance de cantidad de movimiento en la dirección de flujo es

$$(v_{1a}w_{1a} + v_{1b}w_{1b} + p_1S_1) - (v_2w_2 + p_2S_2) = 0 \quad (7.6-12)$$

o bien, usando la relación al final del inciso a),

$$\begin{aligned} (p_2 - p_1)S_2 &= (\tfrac{1}{2}(v_{1a} + v_{1b}) - v_2)w_2 \\ &= (\tfrac{1}{2}(v_0 + \tfrac{1}{2}v_0) - \tfrac{2}{3}v_0)(\rho(\tfrac{2}{3}v_0)S_2) \end{aligned} \quad (7.6-13)$$

a partir de lo cual

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{18}\rho v_0^2 \quad (7.6-14)$$

Ésta es la expresión para el aumento de presión que resulta de la mezcla de las dos corrientes.

c) *Balance de cantidad de movimiento angular.* Este balance no es necesario.

d) *Balance de energía mecánica.* La ecuación D de la tabla 7.6-1 da

$$(\tfrac{1}{2}v_{1a}^2w_{1a} + \tfrac{1}{2}v_{1b}^2w_{1b}) - \left(\tfrac{1}{2}v_2^2 + \frac{p_2 - p_1}{\rho}\right)w_2 = E_v \quad (7.6-15)$$

o bien, usando la relación al final del inciso a), se obtiene

$$(\tfrac{1}{2}v_0^2(\tfrac{1}{2}w_2) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}v_0)^2(\tfrac{1}{2}w_2)) - (\tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3}v_0)^2 + \tfrac{1}{18}v_0^2)w_2 = E_v \quad (7.6-16)$$

Por tanto,

$$\hat{E}_v = \frac{E_v}{w_2} = \frac{5}{144}v_0^2 \quad (7.6-17)$$

es la disipación de energía por unidad de masa. El análisis precedente proporciona resultados bastante aceptables para bombas eyectoras líquido-líquido. Sin embargo, en eyectores gas-gas la densidad varía de manera significativa y en el análisis es necesario incluir el balance macroscópico de la energía total, así como una ecuación de estado. Esto se aborda en el ejemplo 15.3-2.

### EJEMPLO 7.6-3

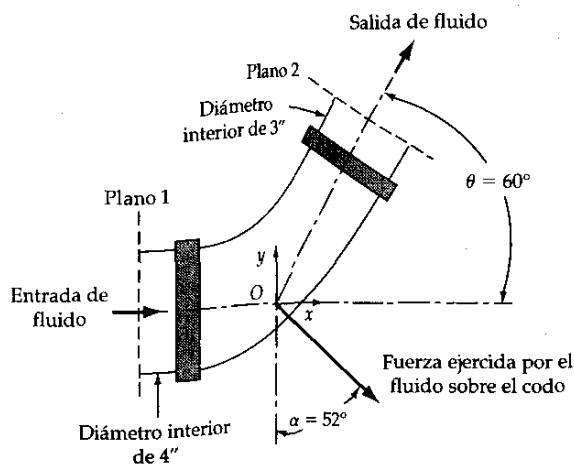
*Empuje sobre el codo de un tubo*

Por un codo de 60°, en el que hay una contracción de 4 a 3 pulg de diámetro interior, circula agua a 95°C a razón de 2.0 pies<sup>3</sup>/s (véase la figura 7.6-3). Calcular la fuerza ejercida sobre el codo si la presión en el extremo corriente abajo es de 1.1 atm. La densidad y la viscosidad del agua para las condiciones del sistema son 0.962 g/cm<sup>3</sup> y 0.299 cp, respectivamente.

### SOLUCIÓN

El número de Reynolds para el flujo en el tubo de 3 pulg es

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{D\langle v \rangle \rho}{\mu} = \frac{4w}{\pi D \mu} \\ &= \frac{4(2.0 \times (12 \times 2.54)^3)(0.962)}{\pi(3 \times 2.54)(0.00299)} = 3 \times 10^6 \end{aligned} \quad (7.6-18)$$



**Figura 7.6-3** Fuerza de reacción en un codo que se angosta en un tubo.

Para este número de Reynolds el flujo es altamente turbulento, de modo que es razonable la suposición de perfiles de velocidad planos.

a) **Balance de materia.** Para flujo en estado estacionario,  $w_1 = w_2$ . Si la densidad es constante en todo el sistema,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1} \equiv \beta \quad (7.6-19)$$

donde  $\beta$  es la razón de la sección transversal menor a la sección transversal mayor.

b) **Balance de energía mecánica.** Para flujo incompresible estacionario, la ecuación D de la tabla 7.6-1 se vuelve, para este problema,

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + g(h_2 - h_1) + \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + \hat{E}_v = 0 \quad (7.6-20)$$

Según la tabla 7.5-1 y la ecuación 7.5-4, podemos tomar la pérdida por fricción aproximadamente como  $\frac{2}{5}(\frac{1}{2}v_2^2) = \frac{1}{5}v_2^2$ . Al insertar esto en la ecuación 7.6-20 y usar el balance de materia, se obtiene

$$p_1 - p_2 = \rho v_2^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{5}) + \rho g(h_2 - h_1) \quad (7.6-21)$$

Ésta es la caída de presión a través del codo en términos de la velocidad conocida  $v_2$  y el factor geométrico  $\beta$  conocido.

c) **Balance de cantidad de movimiento.** Ahora es necesario considerar las componentes  $x$  y  $y$  del balance de cantidad de movimiento. Los vectores unitarios de entrada y de salida tienen componentes  $x$  y  $y$  dadas por  $u_{1x} = 1$ ,  $u_{1y} = 0$ ,  $u_{2x} = \cos \theta$  y  $u_{2y} = \sin \theta$ .

Así, la componente  $x$  del balance de cantidad de movimiento proporciona

$$F_x = (v_1 w_1 + p_1 S_1) - (v_2 w_2 + p_2 S_2) \cos \theta \quad (7.6-22)$$

donde  $F_x$  es la componente  $x$  de  $F_{f \rightarrow s}$ . Al introducir las expresiones específicas para  $w_1$  y  $w_2$  se obtiene

$$\begin{aligned} F_x &= v_1(\rho v_1 S_1) - v_2(\rho v_2 S_2) \cos \theta + p_1 S_1 - p_2 S_2 \cos \theta \\ &= \rho v_2^2 S_2 (\beta - \cos \theta) + (p_1 - p_2) S_1 + p_2 (S_1 - S_2 \cos \theta) \end{aligned} \quad (7.6-23)$$

Al sustituir aquí la expresión para  $p_1 - p_2$  de la ecuación 7.6-21 se obtiene

$$\begin{aligned} F_x &= \rho v_2^2 S_2 (\beta - \cos \theta) + \rho v_2^2 S_2 \beta^{-1} \left( \frac{7}{10} - \frac{1}{2} \beta^2 \right) \\ &\quad + \rho g (h_2 - h_1) S_2 \beta^{-1} + p_2 S_2 (\beta^{-1} - \cos \theta) \\ &= w^2 (\rho S_2)^{-1} \left( \frac{7}{10} \beta^{-1} - \cos \theta + \frac{1}{2} \beta \right) \\ &\quad + \rho g (h_2 - h_1) S_2 \beta^{-1} + p_2 S_2 (\beta^{-1} - \cos \theta) \end{aligned} \quad (7.6-24)$$

La componente  $y$  del balance de cantidad de movimiento es

$$F_y = -(v_2 w_2 + p_2 S_2) \sin \theta - m_{\text{tot}} g \quad (7.6-25)$$

o bien,

$$F_y = -w^2 (\rho S_2)^{-1} \sin \theta - p_2 S_2 \sin \theta - \pi R^2 L \rho g \quad (7.6-26)$$

donde  $R$  y  $L$  son el radio y la longitud de un cilindro aproximadamente equivalente.

Ahora se tienen las componentes de la fuerza de reacción en términos de cantidades conocidas. Los valores numéricos necesarios son

$$\begin{aligned} \rho &= 60 \text{ lb}_m/\text{pies}^3 & S_2 &= \frac{1}{64} \pi = 0.049 \text{ pies}^2 \\ w &= (2.0)(60) = 120 \text{ lb}_m/\text{s} & \beta &= S_2/S_1 = 3^2/4^2 = 0.562 \\ \cos \theta &= \frac{1}{2} & R &\approx \frac{1}{8} \text{ pie} \\ \sin \theta &= \frac{1}{2} \sqrt{3} & L &\approx \frac{5}{6} \text{ pie} \\ p_2 &= 16.2 \text{ lb}_f/\text{pulg}^2 & h_2 - h_1 &\approx \frac{1}{2} \text{ pie} \end{aligned}$$

Así, con esos valores se obtiene

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{(120)^2}{2(0.049)(32.2)} \left( \frac{7}{10} \frac{1}{0.562} - \frac{1}{2} + \frac{0.562}{2} \right) + (60) \left( \frac{1}{2} \right) (0.049) \left( \frac{1}{0.562} \right) \\ &\quad + (16.2)(0.049)(144) \left( \frac{1}{0.562} - \frac{1}{2} \right) \text{ lb}_f \\ &= (152)(1.24 - 0.50 + 0.28) + 2.6 + (144)(1.78 - 0.50) \\ &= 155 + 2.6 + 146 = 304 \text{ lb}_f = 1352 \text{ N} \end{aligned} \quad (7.6-27)$$

$$\begin{aligned} F_y &= -\frac{(120)^2}{2(0.049)(32.2)} \left( \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) - (16.2)(0.049)(144) \left( \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) - \pi \left( \frac{1}{8} \right)^2 \left( \frac{5}{6} \right) (60) \text{ lb}_f \\ &= -132 - 99 - 2.5 = -234 \text{ lb}_f = -1041 \text{ N} \end{aligned} \quad (7.6-28)$$

Por tanto, la magnitud de la fuerza es

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{304^2 + 234^2} = 384 \text{ lb}_f = 1708 \text{ N} \quad (7.6-29)$$

El ángulo que esta fuerza hace con la vertical es

$$\alpha = \arctan(F_x/F_y) = \arctan 1.30 = 52^\circ \quad (7.6-30)$$

Al mirar en retrospectiva el cálculo, se observa que todos los efectos que se incluyeron son importantes, con la posible excepción de los términos de la gravedad de  $2.6 \text{ lb}_f$  en  $F_x$  y  $2.5 \text{ lb}_f$  en  $F_y$ .

---

**EJEMPLO 7.6-4****Chorro que incide**

Un chorro rectangular de espesor  $b_1$  de un fluido incompresible sale de una ranura de ancho  $c$ , choca contra una lámina plana y se separa en dos corrientes de espesores  $b_{2a}$  y  $b_{2b}$ , como se muestra en la figura 7.6-4. La corriente turbulenta del chorro que brota, tiene una velocidad  $v_1$  y una velocidad de flujo másico  $w_1$ . Encontrar las velocidades y las velocidades de flujo másico en las dos corrientes sobre la lámina.<sup>1</sup>

**SOLUCIÓN**

Despreciamos la disipación viscosa y la gravedad, y suponemos que los perfiles de velocidad de las tres corrientes son planos y que sus presiones son esencialmente iguales. Entonces, al hacer los balances macroscópicos se obtiene

**Balance de materia**

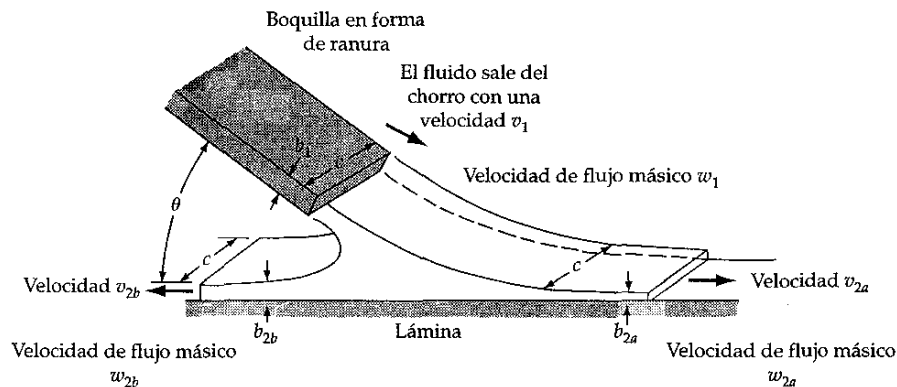
$$w_1 = w_{2a} + w_{2b} \quad (7.6-31)$$

**Balance de cantidad de movimiento** (en dirección paralela a la lámina)

$$v_1 w_1 \cos \theta = v_{2a} w_{2a} - v_{2b} w_{2b} \quad (7.6-32)$$

**Balance de energía mecánica**

$$\frac{1}{2} v_1^2 w_1 = \frac{1}{2} v_{2a}^2 w_{2a} + \frac{1}{2} v_{2b}^2 w_{2b} \quad (7.6-33)$$



**Figura 7.6-4** Chorro que incide contra una pared y se divide en dos corrientes. El punto  $O$ , que es el origen de coordenadas para el balance de cantidad de movimiento angular, se toma como la intersección de la línea central del chorro de entrada y un plano que está a una altura  $\frac{1}{2}b_1$ .

<sup>1</sup> Para soluciones alternativas de este problema, véase G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1967), pp. 392-394, y S. Whitaker, *Introduction to Fluid Dynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1968), p. 260. J.V. Foa, U.S. Patent 3,361,336 (2 de enero, 1968), proporciona una aplicación del problema del chorro *compresible* que incide. Ahí se utiliza el hecho de que si la boquilla en forma de ranura se mueve a la izquierda en la figura 7.6-4 (es decir, a la izquierda respecto a la lámina), entonces, para un fluido compresible, la corriente derecha será más fría que el chorro y la corriente izquierda será más caliente.

**Balance de cantidad de movimiento angular** (el origen de coordenadas se coloca en la línea central del chorro y a una altura de  $\frac{1}{2}b_1$ ; esto se hace así a fin de que en el chorro de entrada no haya cantidad de movimiento angular)

$$0 = (v_{2a}w_{2a}) \cdot \frac{1}{2}(b_1 - b_{2a}) - (v_{2b}w_{2b}) \cdot \frac{1}{2}(b_1 - b_{2b}) \quad (7.6-34)$$

La última ecuación puede volver a escribirse para eliminar las  $b$  a favor de las  $w$ . Debido a que  $w_1 = \rho v_1 b_1 c$  y  $w_{2a} = \rho v_{2a} b_{2a} c$ , podemos sustituir  $b_1 - b_{2a}$  por  $(w_1/\rho v_1 c) - (w_{2a}/\rho v_{2a} c)$  y reemplazar  $b_1 - b_{2b}$  de manera correspondiente. Así, el balance de cantidad de movimiento angular se convierte en

$$(v_{2a}w_{2a}) \left( \frac{w_1}{v_1} - \frac{w_{2a}}{v_{2a}} \right) = (v_{2b}w_{2b}) \left( \frac{w_1}{v_1} - \frac{w_{2b}}{v_{2b}} \right) \quad (7.6-35)$$

o bien,

$$w_{2a}^2 - w_{2b}^2 = \frac{w_1}{v_1} (v_{2a}w_{2a} - v_{2b}w_{2b}) \quad (7.6-36)$$

Ahora se tiene que las ecuaciones 7.6-31, 7.6-32, 7.6-33 y 7.6-36 son cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Una vez que se resuelven estas ecuaciones, se obtiene

$$v_{2a} = v_1 \quad w_{2a} = \frac{1}{2}w_1(1 + \cos \theta) \quad (7.6-37, 38)$$

$$v_{2b} = v_1 \quad w_{2b} = \frac{1}{2}w_1(1 - \cos \theta) \quad (7.6-39, 40)$$

Por tanto, las velocidades de las tres corrientes son iguales. El mismo resultado se obtiene al aplicar la ecuación clásica de Bernoulli para el flujo de un fluido no viscoso (véase el ejemplo 3.5-1).

### EJEMPLO 7.6-5

**Flujo isotérmico de un líquido a través de un orificio**

Un método común para determinar la velocidad de flujo másico a través de un tubo es medir la caída de presión a través de algún "obstáculo" en el tubo. Un ejemplo de esto es el orificio, que es una lámina delgada con una perforación en el centro. Hay tomas de presión en los planos 1 y 2, corriente arriba y corriente abajo de la lámina con el orificio. En la figura 7.6-5a se muestra el medidor de orificio, las tomas de presión y el comportamiento general de los perfiles de velocidad como se observan experimentalmente. Se supondrá que el perfil de velocidad en el plano 1 es plano. En la figura 7.6-5b se muestra un perfil de velocidad aproximado en el plano 2, que usaremos en la aplicación de los balances macroscópicos. La ecuación normal del medidor de orificio se obtiene al aplicar los balances macroscópicos de materia y de energía mecánica.

### SOLUCIÓN

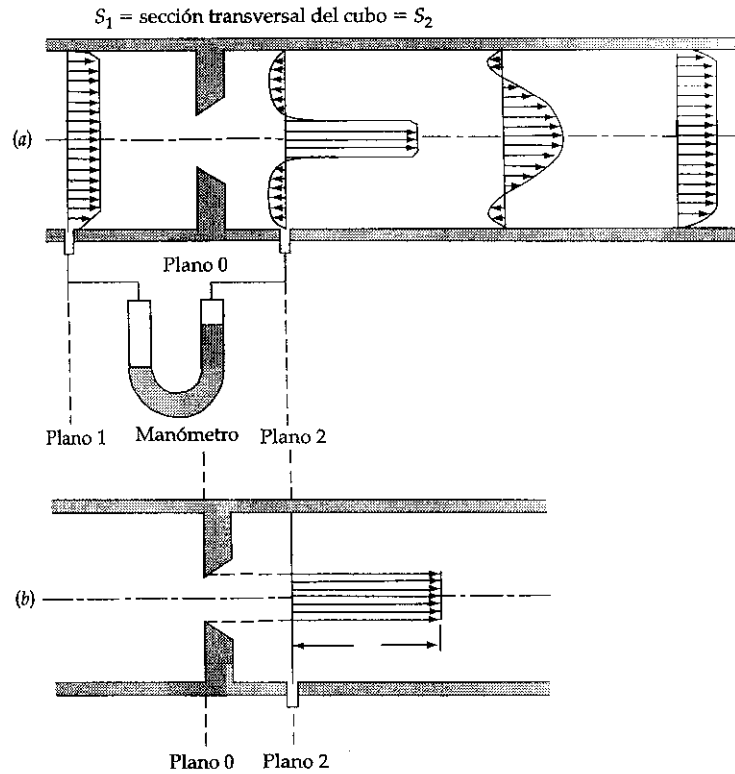
**a) Balance de materia.** Para un fluido de densidad constante con un sistema para el que  $S_1 = S_2 = S$ , el balance de materia en la ecuación 7.1-1 da

$$\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle \quad (7.6-41)$$

Con los perfiles de velocidad supuestos, lo anterior queda como

$$v_1 = \frac{S_0}{S} v_0 \quad (7.6-42)$$

y el caudal volumétrico es  $w = \rho v_1 S$ .



**Figura 7.6-5** a) Orificio de borde afilado, que muestra los perfiles de velocidad aproximados en varios planos cerca de la lámina con el orificio. El chorro de fluido que sale de la perforación es ligeramente menor que el orificio en sí. En flujo altamente turbulento, este chorro se reduce a una sección transversal mínima correspondiente al *chorro contraído*. El valor de este estrechamiento del chorro puede proporcionarse por el *coeficiente de contracción*,  $C_c = (S_{\text{chorro contraído}}/S_0)$ . Según la teoría de flujo no viscoso,  $C_c = \pi/(\pi + 2) = 0.611$  si  $S_0/S_1 = 0$  [H. Lamb, *Hydrodynamics*, Dover, Nueva York (1945), p. 99]. Nótese que cerca de la pared hay algo de flujo de retroceso. b) Para estimar  $\langle v_2^3 \rangle / \langle v_2 \rangle$  se usó el perfil de velocidad aproximado en el plano 2.

**b) Balance de energía mecánica.** Para un fluido de densidad constante en un sistema de flujo sin cambio de elevación ni partes móviles, la ecuación 7.4-5 da

$$\frac{1}{2} \frac{\langle v_2^3 \rangle}{\langle v_2 \rangle} - \frac{1}{2} \frac{\langle v_1^3 \rangle}{\langle v_1 \rangle} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \hat{E}_v = 0 \quad (7.6-43)$$

La pérdida viscosa  $\hat{E}_v$  se omite, incluso si ciertamente no es igual a cero. Con los perfiles de velocidad supuestos, entonces la ecuación 7.6-43 se convierte en

$$\frac{1}{2} (v_0^2 - v_1^2) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0 \quad (7.6-44)$$

Cuando las ecuaciones 7.6-42 y 7.6-44 se combinan para eliminar  $v_0$ , es posible despejar  $v_1$  para obtener

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} \frac{1}{(S/S_0)^2 - 1}} \quad (7.6-45)$$



Ahora es posible multiplicar por  $\rho S$  para obtener la velocidad de flujo másico. Luego, para explicar los errores que se introdujeron al despreciar  $\hat{E}_v$  y por las suposiciones concernientes a los perfiles de velocidad, se incluye un *coeficiente de descarga*,  $C_d$ , y se obtiene

$$w = C_d S_0 \sqrt{\frac{2\rho(p_1 - p_2)}{1 - (S_0/S)^2}} \quad (7.6-46)$$

Los coeficientes de descarga experimentales se han correlacionado como una función de  $S_0/S$  y el número de Reynolds.<sup>2</sup> Para números de Reynolds mayores que  $10^4$ ,  $C_d$  tiende aproximadamente a 0.61 para todos los valores prácticos de  $S_0/S$ .

Este ejemplo ha ilustrado el uso de los balances macroscópicos para obtener la forma general del resultado, que luego se modifica al introducir una función multiplicativa de grupos adimensionales para corregir errores introducidos por suposiciones no garantizadas. Esta combinación de balances macroscópicos y consideraciones dimensionales se usa a menudo y puede ser bastante útil.

## §7.7° USO DE LOS BALANCES MACROSCÓPICOS PARA PROBLEMAS DE ESTADO NO ESTACIONARIO

En la sección anterior se ilustró el uso de los balances macroscópicos para resolver problemas de estado estacionario. En esta sección nos dedicaremos a problemas de estado no estacionario. Proporcionamos dos ejemplos para ilustrar el uso de las ecuaciones de balance macroscópico dependientes del tiempo.

### EJEMPLO 7.7-1

Efectos de la  
aceleración en flujo no  
estacionario desde un  
tanque cilíndrico

Un cilindro abierto de altura  $H$  y radio  $R$  está inicialmente lleno de un líquido. En el instante  $t = 0$  se deja que el líquido se vacíe por gravedad a través de un pequeño orificio de radio  $R_0$  situado en el fondo del tanque (véase la figura 7.7-1).

- Encontrar el tiempo de vaciado usando el balance de materia en estado no estacionario y suponiendo que la ecuación de Torricelli (véase el problema 3B.14) describe la relación entre la velocidad de vaciado y la altura instantánea del líquido.
- Encontrar el tiempo de vaciado usando los balances de materia y de energía mecánica en estado no estacionario.

### SOLUCIÓN

a) Aplicamos la ecuación 7.1-2 al sistema de la figura 7.7-1, considerando que el plano 1 está en la parte superior del tanque (de modo que  $w_1 = 0$ ). Si la altura instantánea del líquido es  $h(t)$ , entonces

$$\frac{d}{dt}(\pi R^2 h \rho) = -\rho v_2 (\pi R_0^2) \quad (7.7-1)$$

<sup>2</sup> G.L. Tuve y R.E. Sprenkle, *Instruments*, 6, 202-205, 225, 232-234 (1935); véase también R.H. Perry y C.H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook*, McGraw-Hill, Nueva York, 5a. edición (1973), figura 5-18; *Fluid Meters: Their Theory and Applications*, 6a. edición, American Society of Mechanical Engineers, Nueva York (1971), pp. 58-65; *Measurement of Fluid Flow Using Small Bore Precision Orifice Meters*, American Society of Mechanical Engineers, MFC-14-M, Nueva York (1995).

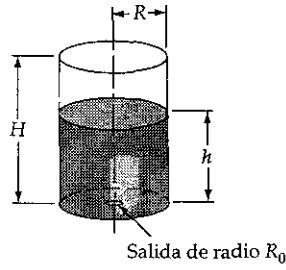


Figura 7.7-1 Vaciado de un tanque cilíndrico.

Aquí se ha supuesto que el perfil de velocidad en el plano 2 es plano. Según la ecuación de Torricelli  $v_2 = \sqrt{2gh}$ , de modo que la ecuación 7.7-1 se convierte en

$$\frac{dh}{dt} = -\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \sqrt{2gh} \quad (7.7-2)$$

Cuando lo anterior se integra desde  $t = 0$  hasta  $t = t_{\text{vaciado}}$  se obtiene

$$t_{\text{vaciado}} = \sqrt{\frac{2NH}{g}} \quad (7.7-3)$$

donde  $N = (R/R_0)^4 \gg 1$ . Ésta es efectivamente una solución de estado casi estacionario, ya que se ha utilizado el balance de materia en estado no estacionario junto con la ecuación de Torricelli, que se dedujo para flujo en estado estacionario.

b) Ahora se usan la ecuación 7.7-1 y el balance de energía mecánica en la ecuación 7.4-2. En éste, los términos  $W_m$  y  $E_c$  son también cero, y se supone que  $E_v$  es muy pequeño y despreciable, ya que los gradientes de velocidad en el sistema también lo serán. Tomamos el plano dado para la energía potencial como si estuviese en el fondo del tanque, de modo que  $\Phi_2 = gz_2 = 0$ ; en el plano 1 no entra líquido, y por consiguiente el término de la energía potencial no se necesita ahí. Debido a que la parte superior del tanque se encuentra abierta a la atmósfera y a que el tanque se vacía hacia ésta, las contribuciones de presión se cancelan entre sí.

Para obtener la energía cinética total en el sistema en cualquier instante  $t$ , es necesario conocer la velocidad de todo elemento del fluido en el tanque. En cualquier punto en el tanque, se supone que el fluido se está moviendo hacia abajo a la misma velocidad; a saber,  $v_2(R_0/R)^2$ , de modo que la energía cinética por unidad de volumen es en todas partes  $\frac{1}{2}\rho v_2^2(R_0/R)^4$ .

Para obtener la energía potencial total en el sistema en cualquier instante  $t$ , es necesario integrar desde 0 hasta  $h$  la energía potencial por unidad de volumen  $\rho gz$  sobre el volumen del fluido. Así se obtiene  $\pi R^2 \rho g(\frac{1}{2}h^2)$ .

Por consiguiente, el balance de energía mecánica en la ecuación 7.4-2 se convierte en

$$\frac{d}{dt} [(\pi R^2 h)(\frac{1}{2}\rho v_2^2)(R_0/R)^4 + \pi R^2 \rho g(\frac{1}{2}h^2)] = -\frac{1}{2}v_2^2(\rho v_2 \pi R_0^2) \quad (7.7-4)$$

A partir del balance de materia en estado no estacionario,  $v_2 = -(R/R_0)^2(dh/dt)$ . Cuando esto se inserta en la ecuación 7.7-4, se obtiene (luego de dividir entre  $dh/dt$ )

$$2h \frac{d^2h}{dt^2} - (N-1) \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + 2gh = 0 \quad (7.7-5)$$

Esto debe resolverse con las dos condiciones iniciales:

$$\text{C.I. 1:} \quad \text{en } t = 0, \quad h = H \quad (7.7-6)$$

$$\text{C.I. 2:} \quad \text{en } t = 0, \quad \frac{dh}{dt} = \sqrt{2gH} (R_0 / R)^2 \quad (7.7-7)$$

La segunda de estas expresiones es la ecuación de Torricelli en el instante de tiempo inicial.

La ecuación diferencial de segundo orden para  $h$  puede convertirse en una ecuación de primer orden para la función  $u(h)$  haciendo el cambio de variable  $(dh/dt)^2 = u$ . Así se obtiene

$$h \frac{du}{dh} - (N-1)u + 2gh = 0 \quad (7.7-8)$$

Puede comprobarse que la solución de esta ecuación de primer orden es<sup>1</sup>

$$u = Ch^{N-1} + 2gh/(N-2) \quad (7.7-9)$$

Entonces, la segunda condición inicial da  $C = -4g/[N(N-2)H^{N-2}]$  para la constante de integración; debido a que  $N \gg 1$ , no es necesario preocuparse por el caso especial cuando  $N = 2$ . A continuación es posible extraer la raíz cuadrada de la ecuación 7.7-9 e introducir una altura adimensional  $\eta = h/H$  del líquido; así se obtiene

$$\frac{d\eta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{(N-2)H}} \sqrt{\eta - \frac{2}{N}\eta^{N-1}} \quad (7.7-10)$$

donde el signo menos debe elegirse con base en consideraciones físicas. Esta ecuación diferencial de primer orden de variables separables se puede integrar desde  $t = 0$  hasta  $t = t_{\text{vaciado}}$  para llegar a

$$t_{\text{vaciado}} = \sqrt{\frac{(N-2)H}{2g}} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{\eta - (2/N)\eta^{N-1}}} \equiv \sqrt{\frac{2NH}{g}} \phi(N) \quad (7.7-11)$$

La función  $\phi(N)$  proporciona la desviación respecto a la solución de estado casi estacionario que se obtuvo en la ecuación 7.7-3. Esta función puede evaluarse como sigue:

$$\begin{aligned} \phi(N) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{N-2}{N}} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{\eta - (2/N)\eta^{N-1}}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{N-2}{N}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left(1 - \frac{2}{N}\eta^{N-2}\right)^{-1/2} d\eta \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{N-2}{N}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{N}\eta^{N-2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{2}{N}\eta^{N-2}\right)^2 + \dots\right) d\eta \end{aligned} \quad (7.7-12)$$

<sup>1</sup> Véase E. Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, Chelsea Publishing Company, Nueva York (1948), p. 311, #1.94; G.M. Murphy, *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*, Van Nostrand, Princeton, N.J. (1960), p. 236, #157.

Ahora es posible efectuar las integraciones. Cuando el resultado se expande en potencias inversas de  $N$ , se encuentra que

$$\phi(N) = 1 - \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^3}\right) \quad (7.7-13)$$

Debido a que  $N = (R/R_0)^4$  es un número muy grande, resulta evidente que el factor  $\phi(N)$  difiere sólo muy ligeramente de la unidad.

Se sugiere volver ahora a la ecuación 7.7-4 y omitir el término que describe el cambio con el tiempo de la energía cinética total. Si se hace esto, se obtiene exactamente la expresión para el tiempo de vaciado en la ecuación 7.7-3 (o la ecuación 7.7-11, con  $\phi(N) = 1$ ). Por consiguiente, podemos concluir que en este tipo de problema, el cambio de la energía cinética con el tiempo puede despreciarse con toda seguridad.

### EJEMPLO 7.7-2

#### Oscilaciones en un manómetro<sup>2</sup>

El líquido contenido en un manómetro de tubo en U, inicialmente en reposo, se pone en movimiento repentinamente al aplicar una diferencia de presión  $p_a - p_b$ . Determinar la ecuación diferencial para el movimiento del fluido en el manómetro, suponiendo flujo incompresible y temperatura constante. Obtener una expresión para el radio del tubo al que ocurre amortiguamiento crítico. Despreciar el movimiento del gas que está arriba del líquido en el manómetro. En la figura 7.7-2 se resume la notación.

#### SOLUCIÓN

Designamos el líquido manométrico como el sistema al que se aplicarán los balances macroscópicos. En ese caso no hay planos 1 y 2 de entrada y salida del líquido. Las superficies libres del líquido son capaces de realizar trabajo  $W_m$  sobre el entorno, y así desempeñar el papel de las partes mecánicas móviles de §7.4. Aplicamos el balance de energía mecánica de la ecuación 7.4-2, con  $E_c$  igual a cero (porque el líquido en el manómetro se considera incompresible). Debido a la elección del sistema, ambas  $w_1$  y  $w_2$  son cero, de modo que los únicos términos en el miembro derecho son  $W_m$  y  $-E_v$ .

A fin de evaluar  $dK_{\text{tot}}/dt$  y  $E_v$  es necesario hacer algún tipo de suposición sobre el perfil de velocidad. Aquí consideramos que el perfil de velocidad es parabólico:

$$v(r, t) = 2\langle v \rangle \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (7.7-14)$$

donde  $\langle v \rangle = dh/dt$  es una función del tiempo, definida como positiva cuando el flujo es de izquierda a derecha.

Entonces, el término de la energía cinética puede evaluarse como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{dK_{\text{tot}}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) r \, dr \, d\theta \, dl \\ &= 2\pi L \left( \frac{1}{2} \rho \right) \frac{d}{dt} \int_0^R v^2 r \, dr \\ &= 2\pi L R^2 \left( \frac{1}{2} \rho \right) \frac{d}{dt} \int_0^1 (2\langle v \rangle (1 - \xi^2))^2 \xi \, d\xi \\ &= \frac{4}{3} \rho L S \langle v \rangle \frac{d}{dt} \langle v \rangle \end{aligned} \quad (7.7-15)$$

<sup>2</sup> Para un resumen del trabajo experimental y teórico sobre oscilaciones en un manómetro, véase J.C. Biery, *AIChE Journal*, 9, 606-614 (1963); 10, 551-557 (1964); 15, 631-634 (1969). Los datos experimentales de Biery muestran que la suposición hecha en la ecuación 7.7-14 no es muy buena.

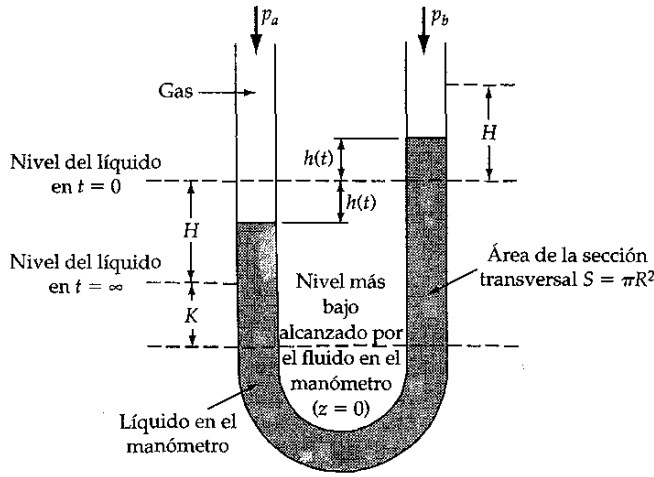


Figura 7.7-2 Oscilaciones amortiguadas del fluido en un manómetro.

Aquí  $l$  es una coordenada que varía a lo largo del eje del tubo del manómetro, y  $L$  es la distancia a lo largo de este eje desde una interfase del manómetro hasta la otra; es decir, la longitud total del fluido en el manómetro. La coordenada adimensional  $\xi$  es  $r/R$ , y  $S$  es el área de la sección transversal del tubo.

El cambio de energía potencial con el tiempo está dado por

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{\text{tot}}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R (\rho g z) r dr d\theta dl \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \left( \text{integral sobre la} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \text{porción abajo de } z = 0, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \text{que es constante} \right) + \rho g S \int_0^{K+H-h} z dz + \rho g S \int_0^{K+H-h} z dz \right] \\ &= 2\rho g S h \frac{dh}{dt} \end{aligned} \quad (7.7-16)$$

El término de pérdida viscosa también puede evaluarse como sigue:

$$\begin{aligned} E_v &= - \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) r dr d\theta dl \\ &= 2\pi L \mu \int_0^R \left( \frac{dv}{dr} \right)^2 r dr \\ &= 8\pi L \mu \langle v \rangle^2 \int_0^1 (-2\xi)^2 \xi d\xi \\ &= 8LS \mu \langle v \rangle^2 / R^2 \end{aligned} \quad (7.7-17)$$

Además, el trabajo neto realizado por el entorno sobre el sistema es

$$W_m = (p_a - p_b) S \langle v \rangle \quad (7.7-18)$$

Luego, al sustituir los términos anteriores en el balance de energía mecánica y hacer  $\langle v \rangle = dh/dt$  se obtiene la ecuación diferencial para  $h(t)$  como

$$\frac{d^2 h}{dt^2} + \left( \frac{6\mu}{\rho R^2} \right) \frac{dh}{dt} + \left( \frac{3g}{2L} \right) h = \frac{3}{4} \left( \frac{p_a - p_b}{\rho L} \right) \quad (7.7-19)$$

que debe resolverse con las condiciones iniciales de que  $h = 0$  y  $dh/dt = 0$  en  $t = 0$ . Esta ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden puede hacerse homogénea introduciendo una nueva variable  $k$  definida por

$$k = 2h - \frac{p_a - p_b}{\rho g} \quad (7.7-20)$$

Entonces la ecuación para el movimiento del líquido en el manómetro es

$$\frac{d^2k}{dt^2} + \left(\frac{6\mu}{\rho R^2}\right) \frac{dk}{dt} + \left(\frac{3g}{2L}\right)k = 0 \quad (7.7-21)$$

Esta ecuación también se presenta en la descripción del movimiento de una masa conectada a un resorte y un amortiguador, y de la corriente que pasa en un circuito RLC (véase la ecuación C.1-7).

Ahora intentamos una solución de la forma  $k = e^{mt}$ . Al sustituir esta función de ensayo en la ecuación 7.7-21 se observa que hay dos valores admisibles para  $m$ :

$$m_{\pm} = \frac{1}{2}[-(6\mu/\rho R^2) \pm \sqrt{(6\mu/\rho R^2)^2 - (3g/L)}] \quad (7.7-22)$$

y la solución es

$$k = C_+ e^{m_+ t} + C_- e^{m_- t} \quad \text{cuando } m_+ \neq m_- \quad (7.7-23)$$

$$k = C_1 e^{mt} + C_2 t e^{mt} \quad \text{cuando } m_+ = m_- = m \quad (7.7-24)$$

donde las constantes se determinan a partir de las condiciones iniciales.

El tipo de movimiento que exhibe el líquido en el manómetro depende del valor del discriminante en la ecuación 7.7-22:

- a) Si  $(6\mu/\rho R^2)^2 > (3g/L)$ , el sistema está *sobreamortiguado*, y el líquido se mueve lentamente hacia su posición final.
- b) Si  $(6\mu/\rho R^2)^2 < (3g/L)$ , el sistema está *subamortiguado*, y el líquido oscila alrededor de su posición final con una amplitud cada vez menor.
- c) Si  $(6\mu/\rho R^2)^2 = (3g/L)$ , el sistema está *críticamente amortiguado*, y el líquido se mueve hacia su posición final en la forma monótona más rápida.

Así, el radio del tubo para el caso de amortiguamiento crítico es

$$R_{cr} = \left(\frac{6\mu^2 L}{\rho^2 g}\right)^{1/4} \quad (7.7-25)$$

Si el radio  $R$  del tubo es mayor que  $R_{cr}$ , ocurre un movimiento oscilatorio.

## §7.8• DEDUCCIÓN DEL BALANCE MACROSCÓPICO DE ENERGÍA MECÁNICA<sup>1</sup>

En la ecuación 7.4-2 se presentó sin demostración el balance macroscópico de energía mecánica. En esta sección demostramos cómo se obtiene la ecuación al integrar

<sup>1</sup> R.B. Bird, *Korean J. Chem. Eng.*, 15, 105-123 (1998), §3.

la ecuación de variación para energía mecánica (ecuación 3.3-2) sobre todo el volumen del sistema de flujo de la figura 7.0-1. Empezamos por hacer la integración formal:

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\tfrac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{\Phi}) dV = & - \int_{V(t)} (\nabla \cdot (\tfrac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{\Phi}) \mathbf{v}) dV - \int_{V(t)} (\nabla \cdot p \mathbf{v}) dV - \int_{V(t)} (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) dV \\ & + \int_{V(t)} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV + \int_{V(t)} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) dV \end{aligned} \quad (7.8-1)$$

Luego aplicamos la fórmula tridimensional de Leibniz (ecuación A.5-5) al miembro izquierdo y el teorema de divergencia de Gauss (ecuación A.5-2) a los términos 1, 2 y 3 del miembro derecho.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} (\tfrac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{\Phi}) dV = & - \int_{S(t)} (\mathbf{n} \cdot (\tfrac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{\Phi})(\mathbf{v} - \mathbf{v}_S)) dS - \int_{S(t)} (\mathbf{n} \cdot p \mathbf{v}) dS \\ & - \int_{S(t)} (\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) dS + \int_{V(t)} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV + \int_{V(t)} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) dV \end{aligned} \quad (7.8-2)$$

El término que contiene a  $\mathbf{v}_S$ , la velocidad de la superficie del sistema, surge por la aplicación de la fórmula de Leibniz. La superficie  $S(t)$  consta de cuatro partes:

- la superficie fija  $S_f$  (donde ambas  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v}_S$  son cero),
- las superficies móviles  $S_m$  (donde  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_S$  son ambas diferentes de cero),
- la sección transversal del puerto de entrada  $S_1$  (donde  $\mathbf{v}_S = 0$ ),
- la sección transversal del puerto de salida  $S_2$  (donde  $\mathbf{v}_S = 0$ ).

Por ahora, cada una de las integrales de superficie se separará en cuatro partes correspondientes a estas cuatro superficies.

Ahora interpretamos los términos en la ecuación 7.8-2 y, en el proceso, introducimos varias suposiciones, mismas que ya se han mencionado en §§7.1 a 7.4, pero ahora se aclararán las razones por las que se establecieron.

El término en el miembro izquierdo puede interpretarse como la razón de cambio respecto al tiempo de las energías cinética y potencial totales ( $K_{\text{tot}} + \Phi_{\text{tot}}$ ) dentro del "volumen de control", cuya forma y volumen cambian con el tiempo.

A continuación analizamos uno por uno los cinco términos del miembro derecho:

El *término 1* (incluyendo el signo menos) contribuye sólo en los puertos de entrada y de salida y proporciona las velocidades de aporte y emisión de las energías cinética y potencial:

$$\text{Término 1} = (\tfrac{1}{2} \rho_1 \langle v_1^3 \rangle S_1 + \rho_1 \hat{\Phi}_1 \langle v_1 \rangle S_1) - (\tfrac{1}{2} \rho_2 \langle v_2^3 \rangle S_2 + \rho_2 \hat{\Phi}_2 \langle v_2 \rangle S_2) \quad (7.8-3)$$

Los paréntesis angulares indican un promedio sobre la sección transversal. Para obtener este resultado debe asumirse que la densidad del fluido y la energía potencial por unidad de masa son constantes sobre la sección transversal, y que el fluido circula en dirección paralela a las paredes del tubo en los puertos de entrada y de salida. El primer término en la ecuación 7.8-3 es positivo, ya que en el plano 1,  $(-\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_1 v_1)) = v_1$ , y el segundo término es negativo, ya que en el plano 2,  $(-\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) = (-\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_2 v_2)) = -v_2$ .

El término 2 (incluyendo el signo menos) no contribuye a  $S_f$  porque  $\mathbf{v}$  es cero ahí. Sobre cada elemento de superficie  $dS$  de  $S_m$ , hay una fuerza  $-npdS$  que actúa sobre una superficie que se mueve a una velocidad  $\mathbf{v}$ , y el producto punto de estas cantidades proporciona la velocidad a la que el entorno realiza trabajo sobre el fluido a través del elemento de superficie móvil  $dS$ . Usamos el símbolo  $W_m^{(p)}$  para indicar la suma de todos estos términos de superficie. Además, las integrales sobre las superficies estacionarias  $S_1$  y  $S_2$  proporcionan el trabajo necesario para empujar el fluido hacia el sistema en el plano 1 menos el trabajo necesario para empujar el fluido fuera del sistema en el plano 2. En consecuencia, finalmente el término 2 da

$$\text{Término 2} = p_1 \langle v_1 \rangle S_1 - p_2 \langle v_2 \rangle S_2 + W_m^{(p)} \quad (7.8-4)$$

Aquí hemos supuesto que la presión no varía sobre la sección transversal en los puertos de entrada y de salida.

El término 3 (incluyendo el signo menos) no contribuye a  $S_f$  porque  $\mathbf{v}$  es cero ahí. La integral sobre  $S_m$  puede interpretarse como la velocidad a la que el entorno realiza trabajo sobre el fluido por medio de las fuerzas viscosas, y esta integral se designa por  $W_m^{(\tau)}$ . En los puertos de entrada y de salida se acostumbra despreciar los términos de trabajo asociados con las fuerzas viscosas, ya que por regla general son bastante pequeños en comparación con las contribuciones de la presión. Por consiguiente, se obtiene

$$\text{Término 3} = W_m^{(\tau)} \quad (7.8-5)$$

Ahora introducimos el símbolo  $W_m = W_m^{(p)} + W_m^{(\tau)}$  para representar la velocidad total a la que el entorno realiza trabajo sobre el fluido dentro del sistema por medio de las superficies móviles.

Los términos 4 y 5 ya no pueden simplificarse más; por tanto, se define

$$\text{Término 4} = + \int_{V(t)} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV = -E_c \quad (7.8-6)$$

$$\text{Término 5} = + \int_{V(t)} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) dV = -E_v \quad (7.8-7)$$

Para fluidos newtonianos, la pérdida viscosa  $E_v$  es la velocidad a la que la energía mecánica se degrada *irreversiblemente* en energía térmica debido a la viscosidad del fluido y siempre es una cantidad positiva (véase la ecuación 3.3-3). En §7.5 ya hemos analizado métodos para estimar  $E_v$ . (Para fluidos viscoelásticos, que analizaremos en el capítulo 8,  $E_v$  debe interpretarse en forma diferente y puede incluso ser negativa.) El término de compresión  $E_c$  es la velocidad a la que la energía mecánica cambia *reversiblemente* en energía térmica debido a la compresibilidad del fluido; puede ser positivo o negativo. Si el fluido se considera como incompresible, entonces  $E_c$  es cero.

Una vez que todas las contribuciones se insertan en la ecuación 7.8-2, finalmente se obtiene al balance macroscópico de energía mecánica:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (K_{\text{tot}} + \Phi_{\text{tot}}) = & (\frac{1}{2} \rho_1 \langle v_1^3 \rangle S_1 + \rho_1 \hat{\Phi}_1 \langle v_1 \rangle S_1 + p_1 \langle v_1 \rangle S_1) - (\frac{1}{2} \rho_2 \langle v_2^3 \rangle S_2 \\ & + \rho_2 \hat{\Phi}_2 \langle v_2 \rangle S_2 + p_2 \langle v_2 \rangle S_2) + W_m - E_c - E_v \end{aligned} \quad (7.8-8)$$



Si ahora introducimos los símbolos  $w_1 = \rho_1 \langle v_1 \rangle S_1$  y  $w_2 = \rho_2 \langle v_2 \rangle S_2$  para las velocidades de flujo másico de entrada y de salida, entonces la ecuación 7.8-8 puede volver a escribirse en la forma de la ecuación 7.4-2. En este desarrollo se han hecho varias suposiciones, pero normalmente no son serias. Si la situación lo garantiza, es posible volver atrás e incluir los efectos que se despreciaron.

Debe observarse que la deducción anterior del balance de energía mecánica no requiere que el sistema sea isotérmico. Por consiguiente, los resultados en las ecuaciones 7.4-2 y 7.8-8 son válidos para sistemas no isotérmicos.

Para obtener el balance de energía mecánica en la forma de la ecuación 7.4-7 es necesario desarrollar una expresión *aproximada* para  $E_c$ . Imaginamos que hay una línea de flujo de corriente representativa que atraviesa el sistema, e introducimos una coordenada  $s$  a lo largo de dicha línea. Suponemos que la presión, la densidad y la velocidad no varían sobre la sección transversal. Además imaginamos que en cada posición a lo largo de la línea de flujo de corriente hay una sección transversal  $S(s)$  perpendicular a la coordenada  $s$ , de modo que podemos escribir  $dV = S(s)ds$ . Si en el sistema hay partes móviles y si la geometría del sistema es compleja, tal vez no sea posible hacer lo anterior.

Comenzamos por usar el dato de que  $(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = 0$  en estado estacionario, de modo que

$$E_c = - \int_V p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV = + \int_V \frac{p}{\rho} (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho) dV \quad (7.8-9)$$

Luego usamos la suposición de que la presión y la densidad son constantes sobre la sección transversal para escribir aproximadamente

$$E_c \approx \int_1^2 \frac{p}{\rho} \left( v \frac{d\rho}{ds} \right) S(s) ds \quad (7.8-10)$$

Incluso si  $\rho$ ,  $v$  y  $S$  son funciones de la coordenada  $s$  de la línea de flujo de corriente, su producto,  $w = \rho v S$ , es una constante para operación en estado estacionario y por tanto puede sacarse de la integral. Así se obtiene

$$E_c \approx w \int_1^2 \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} ds = -w \int_1^2 p \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\rho} \right) ds \quad (7.8-11)$$

Luego es posible realizar una integración por partes:

$$E_c \approx -w \left[ \frac{p}{\rho} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds = -w \Delta \left( \frac{p}{\rho} \right) + w \int_1^2 \frac{1}{\rho} dp \quad (7.8-12)$$

Al escribir este resultado en la ecuación 7.4-5 se obtiene la relación aproximada de la ecuación 7.4-7. Debido a la naturaleza cuestionable de las suposiciones que se hicieron (la existencia de una línea de flujo de corriente representativa y el carácter constante de  $p$  y  $\rho$  sobre una sección transversal) parece preferible usar la ecuación 7.4-5 en vez de la ecuación 7.4-7. También, la ecuación 7.4-5 puede generalizarse fácilmente a sistemas con múltiples puertos de entrada y de salida, mientras que esto no es posible con la ecuación 7.4-7; la generalización está dada en la ecuación D de la tabla 7.6-1.