교과서 내용	거꾸로 푸는 문제, 역문제
주제	

1. 교과서 내 내용

함수 f: X -> Y에 대해, y = f(x), x = f-1(y)를 만족하는 함수 f-1: Y->X를 f의 역함수라 한다.
역문제는 '결과로부터 원인을 추정하는 문제'로, '원인'에서 '결과'를 도출하는 정문제와는 반대 방향의 접근이다. 본 탐구는 '결과'가 주어진 교과서 곱셈표 퍼즐의 '원인'을 찾는 것에서 시작했다. 이 문제의 핵심은 '1 이상 10 이하의 자연수'라는 제약 조건이다. 이 조건은 무한히 많을 수 있는 해의 후보를 유한하게 좁혀주는 결정적인 역할을 한다. 예를 들어, x*a=15, x*d=21에서 x는 15와 21의 공약수인 1 또는 3이다. 하지만 x=1일 경우 a=15가 되어 '10 이하' 제약 조건을 위배하므로, x=3임을 유일하게 확정할 수 있었다. 이러한 논리적 추론 과정을 모든 데이터에 체계적으로 적용하여 8개의 미지수를 모두 확정했다. 나아가 완성된 16개 칸의 값이 모두 고유함을 확인했다. 이는 f가 '일대일 대응'임을 의미하며, 역함수가 존재한다는 뜻이다.

2. 교과서 외 내용

교과서의 '잘 설정된 문제'와 달리, 현실의 역문제는 '잘못 설정된 문제'가 대부분이다. 가장 큰 이유는 '불안정성'이다. 이는 데이터에 포함된 작은 '노이즈(오차)'가, 원인을 거꾸로 추정하는 과정에서 증폭되는 현상을 말한다. (예: x*a=15가 15.1로 관측되면, 해가 x=3, a=5 근처가 아닌 x=50.3, a=0.3처럼 완전히 틀어짐) 이를 해결하는 기법이 '정칙화'이다. 이는 '불안정'한 문제에 교과서의 '제약 조건'처럼 "해는 아마도 이러할 것이다"라는 추가적인 수학적 '가정'을 더해 해를 안정시키는 방법이다. CT 영상 재구성이 대표적인 예다. 노이즈가 낀 X선 데이터(결과)만으로는 해가 불안정하지만, "인체 내부는 대부분 부드럽게 연결되어 있다"는 '정칙화' 가정을 더함으로써 선명한 최선의 해를 추정해내는 것이다.
정문제: 원인으로부터 결과를 계산하는 문제 ex) 1000원에서 10% 할인을 받았을 때 가격은?
역문제: 결과로부터 원인을 추정하는 문제 ex) 10% 할인을 받은 가격이 900원일 때 원래 가격은?
특징: 잘못 설정된 문제(ill-posed) =>

1. 해가 존재하지 않을 수 있음
2. 해가 유일하게 존재하지 않을 수 있음
3. 측정값의 작은 오차로 인해 결과가 급변할 수 있음

활용 분야: 영상의학(MRI, CT), 인공지능, 비파괴 검사, 물리학 등
CT 촬영: X선을 여러 각도에서 특정 부위에 투과시키고 그 부위에 대한 X선의 흡수 차이를 관측한다. 이 관측값으로부터 인체 구조를 추정하는 역문제를 해결하여 의료 영상을 얻고 병변을 진단할 수 있다.
인공지능: 문제에 대한 정답을 학습시켜 인공지능 모델이 문제 풀이 방법을 알아낼 수 있게 한다. 입력이 A, 출력이 B라 한다면, f(A) = B가 되는 f를 찾아낸다.
역문제의 해결 방법:
예시: 물체의 질량과 물체가 받은 힘이 주

어졌을 때 중력가속도 계산

1. 연립 일차방정식:
   문제점: 측정 과정에서 오차가 생기면 방정식의 해가 존재하지 않을 수 있음, 문제를 간단한 방정식의 형태로 표현하지 못할 수 있음
2. 경사하강법:
   해를 임의로 가정하고, 그 해에 변화를 주어 관측치와의 오차를 최소화 하는 과정을 반복한다.
   손실함수가 $L(x) = (f(x)-y)^2$이면, $L(x)$가 최소가 되도록 다음과 같은 과정을 반복한다. $U[0]$을 임의로 선택하고, $U[k+1] = U[k] - a*L(U[k])$를 반복해 $L(U[k])$가 최소가 되는 $U[k]$를 구한다.
3. 인공 신경망:
   관측치를 인공 신경망에 학습시켜 역함수를 구할 수 있음

3. 느낀점

교과서 속 '역문제'라는 주제에서 출발하여, 수학이 현실의 복잡한 문제를 어떻게 해결하는지 깊이 탐구하는 계기가 되었다. 단순한 곱셈 퍼즐은 '제약 조건'을 통해 논리적으로 유일한 해를 찾을 수 있었지만, CT 스캔이나 지진파 분석 같은 실제 역문제는 '노이즈'로 인한 '불안정성'이라는 더 큰 장벽이 있음을 알게 되었다.
역문제의 해결책을 조사하며 역행렬, 적분 등 다양한 수학적 개념이 사용됨을 확인했다. 특히 '최선의 해'를 찾아가는 '경사하강법'의 원리가, 물리학에서 공이 중력에 이끌려 가장 낮은 지점으로 '낙하'하는 운동과 매우 유사하다고 느꼈다.
이 아이디어에 착안하여, 향후 물리학의 '관성'이나 '마찰력' 같은 개념을 도입하여 기본 경사하강법을 확장하고 최적화하는 방안을 구체적으로 탐구해 보고자 한다.

역문제에 대해 조사하며 역행렬, 적분과 같은 다양한 수학적 개념들이 역문제의 해결 방법에 적용된다는 것을 알 수 있었다. 특히, 경사하강법을 통한 역문제의 해결이 물리학에서의 낙하 운동과 비슷하다고 느꼈다. 관성, 마찰력과 같은 물리학적 개념을 이용해 경사하강법을 확장하여 탐구해 보고 싶다.