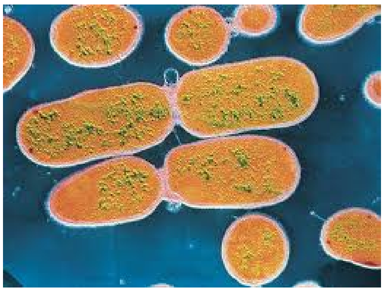
Rangkuman Matematika Peminatan Kelas 10 Semester 1 (2019/2020)

Wildan Bagus Wicaksono
X MIPA 8
@wildanwicaksono_27

Daftar Isi

1 Eksponensial

1.1 Sifat-sifat Eksponensial



Gambar 1.1: Bakteri

Perhatikan gambar di samping. Gambar di samping merupakan bakteri. Bakteri tersebut berkembang biak dengan membelah diri. Bakteri-bakteri tersebut membelah menjadi dua dalam periode tertentu. Misalkan terdapat 3 bakteri. Bakteri tersebut membelah menjadi dua setiap 10 menit. Berapa banyak bakteri setelah 1 jam (60 menit)? Perhatikan Tabel 1.1.

Menit ke-	**Periode ke-**	**Banyak Bakteri**
0	0	$3 = 3$
10	1	$2 \times 3 = 2 \times 3$
20	2	$2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$
30	3	$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

Tabel 1.1: Perkembangan bakteri

Dilihat dari pola perkembangan pada Tabel 1.1, banyak bakteri setelah 1 jam (60 menit) atau periode ke-6 yaitu

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^6 \times 3$$

1.1.1 Pangkat Bulat Positif

Jika $a \in$ bilangan real dan $n \in$ bilangan bulat positif, maka a^n (dibaca a pangkat n) didefinisikan sebagai perkalian berulang a sebanyak n kali (n faktor).

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \cdots \times a}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}}$$

Keterangan:

a^n = bilangan berpangkat
a = bilangan pokok
n = bilangan pangkat (eksponen)

Adapun contohnya adalah sebagai berikut,

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right)}_{\text{sebanyak 4 faktor}}$$

$$4^6 = \underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}_{\text{sebanyak 6 faktor}}$$

1.1.2 Pangkat 0

Jika $a \in$ bilangan real dan $a \neq 0$, berlaku $a^0 = 1$.

Adapun contohnya adalah sebagai berikut,

$$(-4)^0 = 1 \quad \text{dan} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$$

1.1.3 Pangkat Bulat Negatif

Jika $a \in$ bilangan real, $a \neq 0$ dan $n \in$ bilangan bulat positif, berlaku $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Adapun contohnya adalah sebagai berikut,

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{81}} = 81$$

$$4^{-6} = \frac{1}{4^6} = \frac{1}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4} = \frac{1}{4096}$$

1.1.4 Sifat-Sifat Bilangan Berpangkat

Jika $a, b, p, q \in$ bilangan real, berlaku sifat-sifat berikut.

(i). $a^p \times a^q = a^{p+q}$

(ii). $a^p : a^q = a^{p-q}$ dengan $a \neq 0$

(iii). $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$ dengan $a \neq 0$

(iv). $\left(a^p\right)^q = a^{p \times q}$

(v). $(ab)^p = a^p \times b^p$

(vi). $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$ dengan $b \neq 0$

(vii). $\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$ dengan $p \neq 0$

(viii). $\sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{p}{q}}$ dengan $p \neq 0$

Contoh 1.1. Tentukan hasil dari

(a). $2^2 \times 2^4 \times 2^1$

(b). $5^5 : 5^3$

(c). $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

(d). $\left(3^2\right)^5$

(a). Berdasarkan sifat (i), diperoleh

$$2^2 \times 2^4 \times 2^1 = 2^{2+4+1} = 2^7 = \boxed{128}$$

(b). Berdasarkan sifat (ii), diperoleh

$$5^5 : 5^3 = 5^{5-3} = 5^2 = \boxed{25}$$

(c). Berdasarkan sifat (vi), diperoleh

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \boxed{\frac{16}{81}}$$

(d). Berdasarkan sifat (iv), diperoleh

$$\left(3^2\right)^5 = 3^{2\times 5} = \boxed{3^{10}}$$

Contoh 1.2. Nyatakan dalam bentuk pangkat positif.

(a). 2^{-10},

(b). $5^{-3}a^2b^{-3}$

(c). $\frac{a^{-1}q^5}{4^{-2}r^{-3}}$

(a). Berdasarkan sifat (iii), diperoleh

$$2^{-10} = \boxed{\frac{1}{2^{10}}}$$

(b). Berdasarkan sifat (iii), diperoleh

$$5^{-3}a^2b^{-3} = \frac{1}{5^3} \times a^2 \times \frac{1}{b^3} = \boxed{\frac{a^2}{125b^3}}$$

(c). Berdasarkan sifat (iii), diperoleh

$$\frac{a^{-1}q^5}{4^{-2}r^{-3}} = \frac{\frac{1}{a} \times q^5}{\frac{1}{4^2} \times \frac{1}{r^3}} = \frac{\frac{q^5}{a}}{\frac{1}{16r^3}} = \boxed{\frac{16r^3q^5}{a}}$$

Contoh 1.3. Sederhanakan bentuk berikut dan tuliskan dalam bentuk pangkat positif.

(a). $\frac{a^3}{2b} \times \frac{b^4}{a^2} \times \frac{2^{-2}}{b}$

(b). $\frac{3sr^2 \times 4s^2r^3}{8s^3r^2}$

(a). Jadikan dalam satu kelompok.

$$\begin{aligned}
\frac{a^3}{2b} \times \frac{b^4}{a^2} \times \frac{2^{-2}}{b} &= \frac{a^3 \times b^4 \times 2^{-2}}{2b^1 \times a^2 \times b^1} \\
&= \frac{a^3}{a^2} \times \frac{b^4}{b^1 \times b^1} \times \frac{2^{-2}}{2^1} && \text{Sifat (i) dan (ii)} \\
&= a^{3-2} \times \frac{b^4}{b^{1+1}} \times 2^{-2-1} \\
&= a^1 \times b^{4-2} \times 2^{-3} \\
\frac{a^3}{2b} \times \frac{b^4}{a^2} \times \frac{2^{-2}}{b} &= \boxed{\frac{ab^2}{8}}
\end{aligned}$$

(b). Dengan cara yang sama,

$$\begin{aligned}
\frac{3sr^2 \times 4s^2r^3}{8s^3r^2} &= (3 \times 4) \times \frac{s \times s^2}{s^3} \times \frac{r^2 \times r^3}{r^2} && \text{Sifat (i) dan (ii)} \\
&= 12 \times s^{1+2-3} \times r^{2+3-2} \\
&= 12 \times s^0 \times r^3 && \text{Bilangan berpangkat nol bernilai 1} \\
&= 12 \times 1 \times r^3 \\
\frac{3sr^2 \times 4s^2r^3}{8s^3r^2} &= 12r^3
\end{aligned}$$

Contoh 1.4. Tentukan nilai perpangkatan berikut.

(a). $343^{\frac{2}{3}}$

(b). $16^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{3}}$

(c). $\frac{16^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{1}{3}}}{125^{\frac{2}{3}} - 81^{\frac{3}{4}}}$

(d). $10^3 \times 5^2 : 2^5$

(e). $\frac{69^{12} - 69^{11} - 136}{6^{11} - 2}$

(a). Perhatikan bahwa $343 = 7^3$.

$$\begin{aligned}
343^{\frac{2}{3}} &= \left(7^3\right)^{\frac{2}{3}} && \text{Sifat (iv)} \\
&= 7^{3 \times \frac{2}{3}} \\
&= 7^2 \\
343^{\frac{2}{3}} &= \boxed{49}
\end{aligned}$$

(b). Perhatikan bahwa $16 = 4^2$ dan $27 = 3^3$.

$$\begin{aligned}
16^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{3}} &= \left(4^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \color{red}{\text{Sifat (iv)}} \\
&= 4^{2\times\frac{1}{2}} - 3^{3\times\frac{1}{3}} \\
&= 4^1 - 3^1 \\
&= 4 - 3 \\
16^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{3}} &= \boxed{1}
\end{aligned}$$

(c). Perhatikan bahwa $16 = 4^2$; $27 = 3^3$; $125 = 5^3$; dan $81 = 3^4$.

$$\begin{aligned}
\frac{16^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{1}{3}}}{125^{\frac{2}{3}} - 81^{\frac{3}{4}}} &= \frac{\left(4^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(5^3\right)^{\frac{2}{3}} - \left(3^4\right)^{\frac{3}{4}}} \qquad \color{red}{\text{Sifat (iv)}} \\
&= \frac{4^{2\times\frac{1}{2}} + 3^{3\times\frac{1}{3}}}{5^{3\times\frac{2}{3}} - 3^{\frac{3}{4}}} \\
&= \frac{4+3}{25-27} \\
&= \frac{7}{-2} \\
\frac{16^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{1}{3}}}{125^{\frac{2}{3}} - 81^{\frac{3}{4}}} &= \boxed{-\frac{7}{2}}
\end{aligned}$$

(d). Perhatikan bahwa $10 = 2 \times 5$.

$$\begin{aligned}
10^3 \times 5^2 : 2^5 &= (2\times 5)^3 \times 5^2 : 2^5 \qquad \color{red}{\text{Sifat (v)}} \\
&= 2^3 \times 5^3 \times 5^2 : 2^5 \\
&= \left(2^3 : 2^5\right) \times \left(5^3 \times 5^2\right) \\
&= 2^{3-5} \times 5^{3+2} \\
&= 2^{-2} \times 5^5 \qquad \color{red}{\text{Sifat (iii)}} \\
&= \frac{1}{2^2} \times 5^5 \\
10^3 \times 5^2 : 2^5 &= \boxed{\frac{5^5}{2^2}}
\end{aligned}$$

(e). Berdasarkan sifat (i),

$$69^{12} = 69^{11+1} = 69^{11} \times 69^1 = 69^{11} \times 69$$

Maka kita peroleh

$$\begin{aligned}
\frac{69^{12} - 69^{11} - 136}{69^{11} - 2} &= \frac{69^{11} \times 69 - 69^{11} \times 1 - 136}{6^{11} - 2} \\
&= \frac{69^{11}(69-1) - 68 \times 2}{6^{11} - 2} \\
&= \frac{6^{11} \times 68 - 68 \times 2}{6^{11} - 2} \\
&= \frac{68\left(6^{11} - 2\right)}{6^{11} - 2} \\
\frac{69^{12} - 69^{11} - 136}{69^{11} - 2} &= \boxed{68}
\end{aligned}$$

Latihan 1

1. Tuliskan dalam bentuk perpangkatan dari operasi berikut.
   (a) $2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times 2^4$
   (b) $5^{10} : 5^8$
   (c) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$
   (d) $\left(4^2\right)^3$
   (e) $2^4 \times 2^9 : 2^7$
   (f) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \frac{2}{3}$
   (g) $5^6 \times 5^2 : \left(5^2\right)^3$
   (h) $\frac{3^2 \times 3^5 \times 3^{-6}}{3^2}$
2. Sederhanakan bentuk berikut dan tuliskan dalam bentuk pangkat positif.
   (a) $\frac{x^2}{y} \times \frac{zy^2}{x^3} : \frac{z}{y}$
   (b) $\frac{\left(xy^2z\right)^3}{x^2yz^4}$
   (c) $\left(\frac{3a^{-2}b^3c^4}{15a^3b^{-5}c^{-2}}\right)^{-2}$
   (d) $\frac{12x^4y^{-2}z}{3^{-1}yz^{-3}}$
   (e) $\left(\frac{2^4xy^{-5}}{3^5y^2}\right)^{-1}\left(\frac{2^2x^{-2}y^{-1}}{3x^{-1}y}\right)^2$
   (f) $\frac{ab^{-1} - a^{-1}b}{a^{-1} + b^{-1}}$
3. Tentukan nilai dari bentuk berikut.
   (a) $\frac{16^{\frac{1}{4}} - 1}{64^{\frac{1}{2}} - 49^{\frac{1}{2}}}$
   (b) $\frac{512^{\frac{2}{3}} + 27^{\frac{4}{3}}}{125^{\frac{1}{3}}}$
   (c) $\frac{2^2 \times 3^5}{18^2} + \frac{12^3 \times 3^{-2}}{2^4 \times 3}$
   (d) $\frac{3^{2019} - 3^{2018} + 2}{3^{2018} + 1}$
4. Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 6561 cm. Bola memantul kembali dengan ketinggian $\frac{2}{3}$ kali dari ketinggian sebelumnya. Tentukan ketinggian bola setelah
   (a) memantul sebanyak 2 kali,

(b) memantul sebanyak 5 kali,

(c) memantul sebanyak 9 kali,

(d) memantul sebanyak n kali.

1.2 Grafik Fungsi Eksponensial

Perhatikan pada Tabel 1.1*. Misalkan mula-mula terdapat bakteri sebanyak x, sedangkan bakteri setelah periode ke-n sebanyak $f(n)$. Hubungan antara n dengan $f(x)$ dapat dinyatakan dengan

$$f(n) = x \times 2^n$$

Fungsi ini dapat ditampilkan dalam bentuk grafik pada bidang koordinat kartesius. Bagaimana cara menggambar grafiknya? Seperti apa bentuk grafik fungsi eksponensial? Berikut penjelesannya.

1.2.1 Pengertian Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial merupakan fungsi yang memetakan setiap $x \in$ bilangan real ke $f(x) = a^x$, dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$.

1.2.2 Bentuk Umum Fungsi Eksponensial

Bentuk umum fungsi eksponensial yaitu $y = f(x) = ka^x$ atau $f : x \to ka^x$.

x disebut peubah (variabel) bebas dengan daerah asal (domain) $D_f = \{x \mid -\infty < x < \infty, x \in \mathbb{R}\}$.

a disebut bilangan pokok (basis) dengan syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$ ($0 < a < 1$ atau $a > 1$).

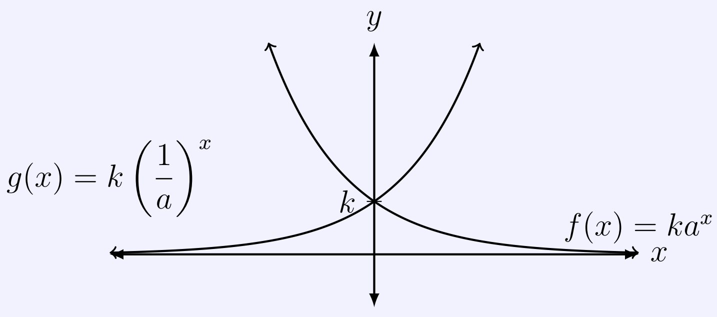
y disebut variabel tak bebas dengan daerah hasil (range) $R_f = \{y \mid 0 < y < \infty\}$.

k disebut konstanta.

$\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.

1.2.3 Grafik Fungsi Eksponensial

Perhatikan grafik fungsi eksponensial di bawah.



Gambar 1.2: Grafik $f(x) = ka^x$ dan $g(x) = k\left(\frac{1}{a}\right)^x$ dengan $a > 1$

Dari grafik tersebut, dapat diperoleh beberapa kesimpulan.

*Halaman 1

1. Grafik $f(x) = ka^x$ dan $g(x) = k\left(\frac{1}{a}\right)^x$ simetris terhadap sumbu-y.
2. Grafik $g(x)$ merupakan hasil pencerminan grafik $f(x)$ terhadap sumbu-y, begitu pula sebaliknya.
3. Grafik $f(x)$ dan $g(x)$ memotong sumbu-y di titik $(0, k)$.
4. Sumbu-x merupakan asimtot, yaitu garis yang didekati grafik fungsi, tetapi tidak sampai berpotongan dengan fungsi tersebut.
5. Grafik fungsi $f(x) = ka^x$ merupakan fungsi monoton naik karena untuk setiap $x_1 < x_2$ berlaku $f(x_1) < f(x_2)$.
6. Grafik fungsi $g(x) = k\left(\frac{1}{a}\right)^x$ merupakan fungsi monoton turun karena untuk setiap $x_1 < x_2$ maka $g(x_1) > g(x_2)$.

1.2.4 Menggambar Grafik Eksponensial

Langkah-langkah menggambar grafik fungsi eksponensial adalah sebagai berikut.

1. Buatlah tabel titik bantu berupa nilai-nilai x dan y, yaitu dengan memiliki beberapa nilai x sehingga nilai y mudah ditentukan.
2. Gambarlah titik-titik tersebut pada bidang koordinat.
3. Hubungkan titik-titik yang dilalui dengan kurva.

Perhatikan pada Tabel 1.1. Banyak bakteri mula-mula adalah 3 dan setiap bakteri membelah menjadi dua dalam setiap periode. Maka rumus fungsi eksponensialnya adalah

$$f(x) = 3 \times 2^x$$

Disini, kita dapatkan $k = 3$ dan $a = 2$. Karena $a > 1$, maka $f(x)$ merupakan fungsi monoton naik (lihat Gambar 1.2 grafik $f(x) = ka^x$). Untuk mencari titik potong $f(x)$ dengan sumbu-y, subtitusikan $x = 0$ (karena titik potong terhadap sumbu-y adalah $(0, y)$). Maka

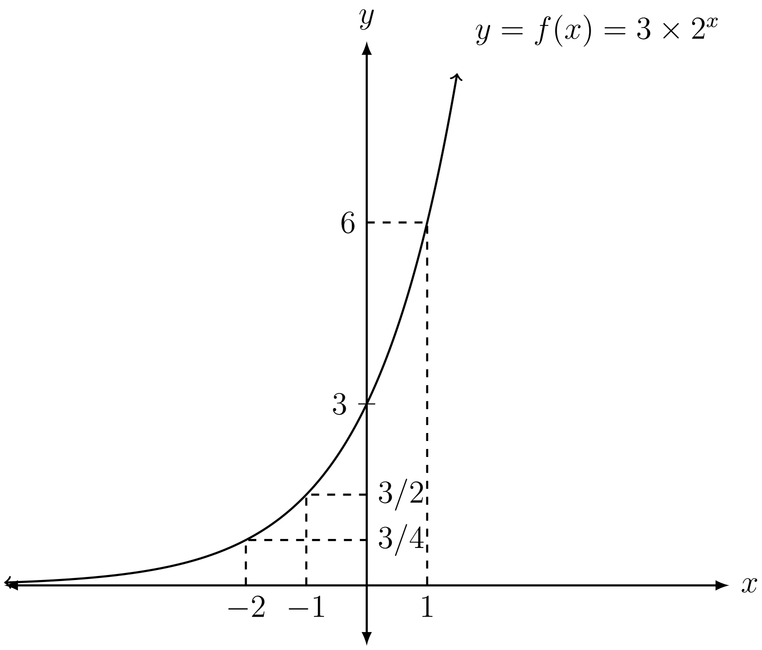
$$y = f(0) = 3 \times 2^0 = 3 \times 1 = 3$$

Demikian titik potongnya adalah $(0, 3)$.

x	-2	-1	0	1
$y = 3 \times 2^x$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	3	6
(x, y)	$\left(-2, \frac{3}{4}\right)$	$\left(-1, \frac{3}{2}\right)$	$(0, 3)$	$(1, 6)$

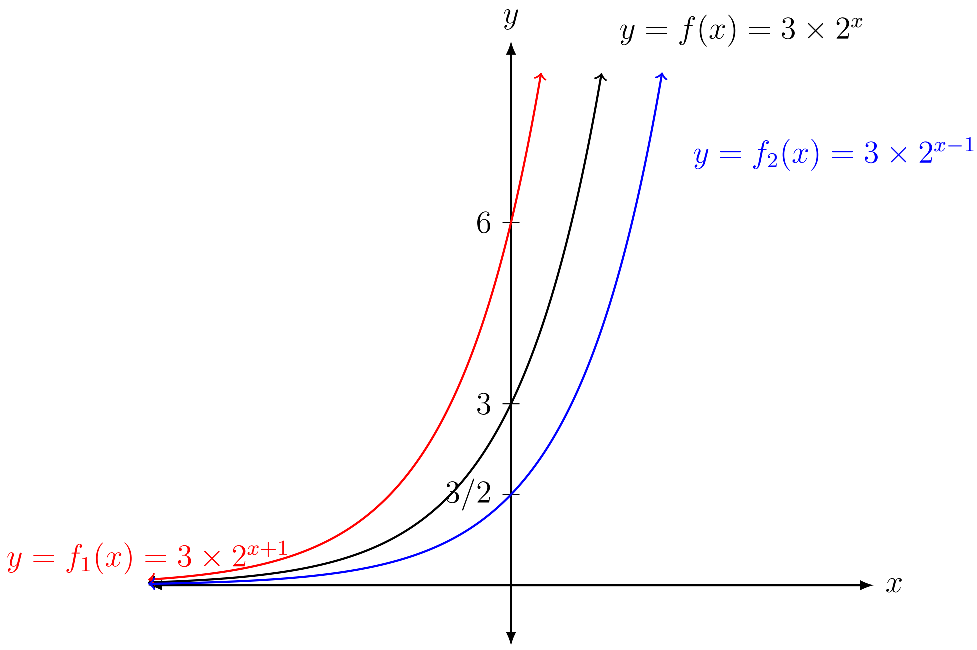
Tabel 1.2: Hubungan x dan $f(x)$

Setelah itu, buat titik-titik (x, y) pada bidang koordinat kartesius. Lalu, hubugnkan titik-titik tersebut membentuk kurva seperti pada Gambar 1.2.



Gambar 1.3: Grafik $y = f(x) = 3 \times 2^x$

Tinjau Gambar 1.3. Bagaimana kalau grafik tersebut digeser ke kanan, ke kiri, ke atas, atau ke bawah? Perhatikan Gambar 1.4 berikut.



Gambar 1.4: Pergeseran ke kanan atau ke kiri dari grafik $y = f(x) = 3 \times 2^x$

Grafik $f_1(x)$ merupakan hasil penggeseran 1 satuan ke kiri dan grafik $f_2(x)$ merupakan hasil penggeseran 1 satuan ke kanan. Jika kita perumum, misalkan fungsi eksponensial $f(x) = ka^x$.

Diberikan $f(x) = ka^x$.

(a). Jika grafik $f(x)$ digeser c satuan ke kiri menghasilkan $g(x)$, maka

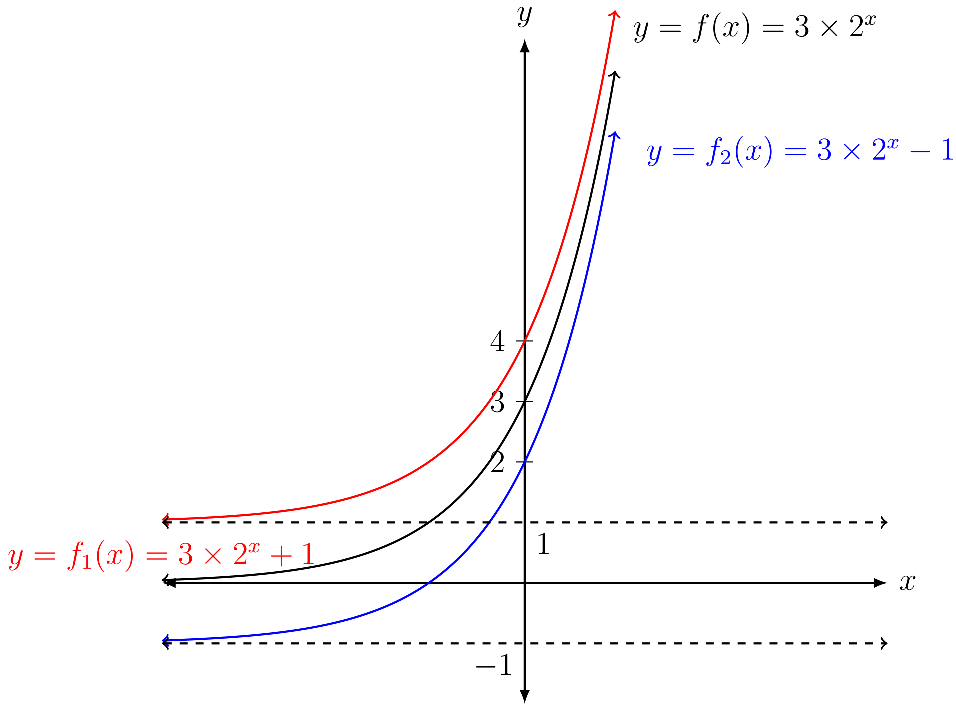
$$g(x) = ka^{x+c}$$

(b). Jika grafik $f(x)$ digeser c satuan ke kanan menghasilkan $g(x)$, maka

$$g(x) = ka^{x-c}$$

Bagaimana kalau grafik $f(x)$ tersebut digeser ke atas atau ke bawah? Perhatikan Gambar 1.5 berikut.

Grafik $f_1(x)$ merupakan hasil pergeseran $f(x)$ ke atas sejauh 1 satuan dan grafik $f_2(x)$ merupakan hasil pergeseran $f(x)$ ke bawah sejauh 1 satuan. Asimtot dari $f(x)$ adalah sumbu-x atau garis $y = 0$, asimtot dari $f_1(x)$ adalah garis $y = 1$, dan asimtot dari $f_2(x)$ garis $y = -1$. Jika kita perumum, misalkan fungsi eksponensial $f(x) = ka^x$.



Gambar 1.5: Pergeseran grafik ke atas atau ke bawah dari grafik $y = f(x) = 3 \times 2^x$

Diberikan $f(x) = ka^x$.

(a). Jika grafik $f(x)$ digeser c satuan ke atas menghasilkan $g(x)$, maka

$$g(x) = ka^x + c$$

Grafik $g(x)$ memiliki asimtot garis $y = c$.

(b). Jika grafik $f(x)$ digeser c satuan ke bawah menghasilkan $g(x)$, maka

$$g(x) = ka^x - c$$

Grafik $g(x)$ memiliki asimtot garis $y = -c$.

Contoh 1.5. Tentukan titik potong grafik $f(x) = 6^{x+1} + 6^{1-x}$ terhadap sumbu-y.

Titik potong terhadap sumbu-y berbentuk $(0, y)$. Demikian haruslah $x = 0$. Maka

$$y = f(0) = 6^{0+1} + 6^{1-0} = 6^1 + 6^1 = 12$$

Jadi, titik potong terhadap sumbu-y adalah $\boxed{(0, 12)}$.

Contoh 1.6. Grafik fungsi $f(x) = k \times 2^x$ melalui titik $(2,4)$.

(a). Tentukan nilai k.

(b). Gambarkan grafik $f(x)$.

(c). Jika grafik $f(x)$ digeser sejauh 2 satuan ke atas dan digeser ke kanan sejauh 3 satuan menghasilkan $g(x)$, tentukan rumus $g(x)$.

(d). Gambarkan grafik $g(x)$.

(e). Deskripsikan grafik dari $g(x)$.

(a). Karena $y = f(x)$ melalui titik $(2,4)$, haruslah $4 = f(2)$. Maka

$$4 = k \times 2^2 = k \times 4 = 4k$$

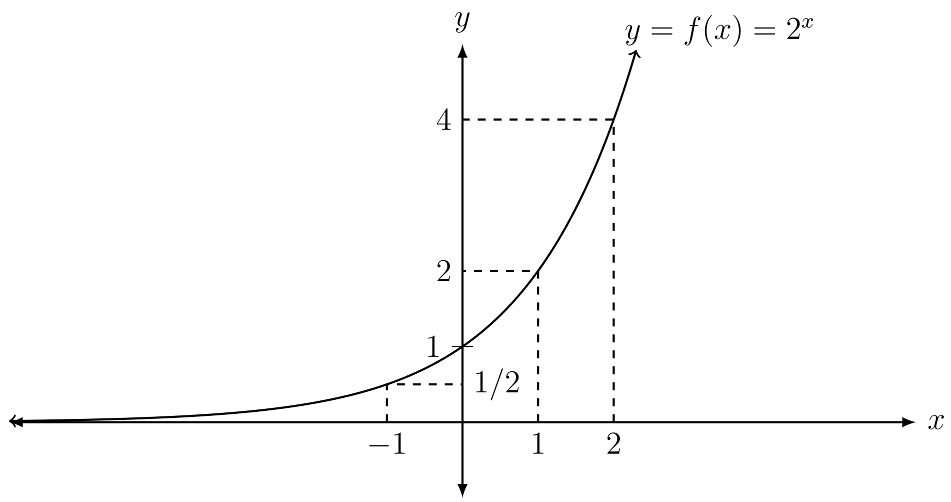
yang berarti $k = \frac{4}{4} = 1$. Jadi, nilai k adalah $\boxed{1}$.

(b). Kita peroleh bahwa $f(x) = 2^x$.

x	-1	0	1	2
$y = 2^x$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
(x,y)	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,4)$

Tabel 1.3: Hubungan nilai x dan y pada $f(x) = 2^x$

Buat titik-titik (x,y) pada bidang koordinat kartesius, lalu hubungkan titik tersebut mermbentuk kurva. Karena $a > 1$, maka $f(x)$ monoton naik. Bentuk grafiknya seperti pada Gambar 1.3.



Gambar 1.6: Grafik $y = f(x) = 2^x$

(c). Karena $f(x)$ digeser 2 satuan ke atas, maka menghasilkan

$$f_1(x) = 2^x + 2$$

Karena $f_1(x)$ digeser ke kanan sejauh 3 satuan, maka menghasilkan

$$g(x) = 2^{x-3} + 2$$

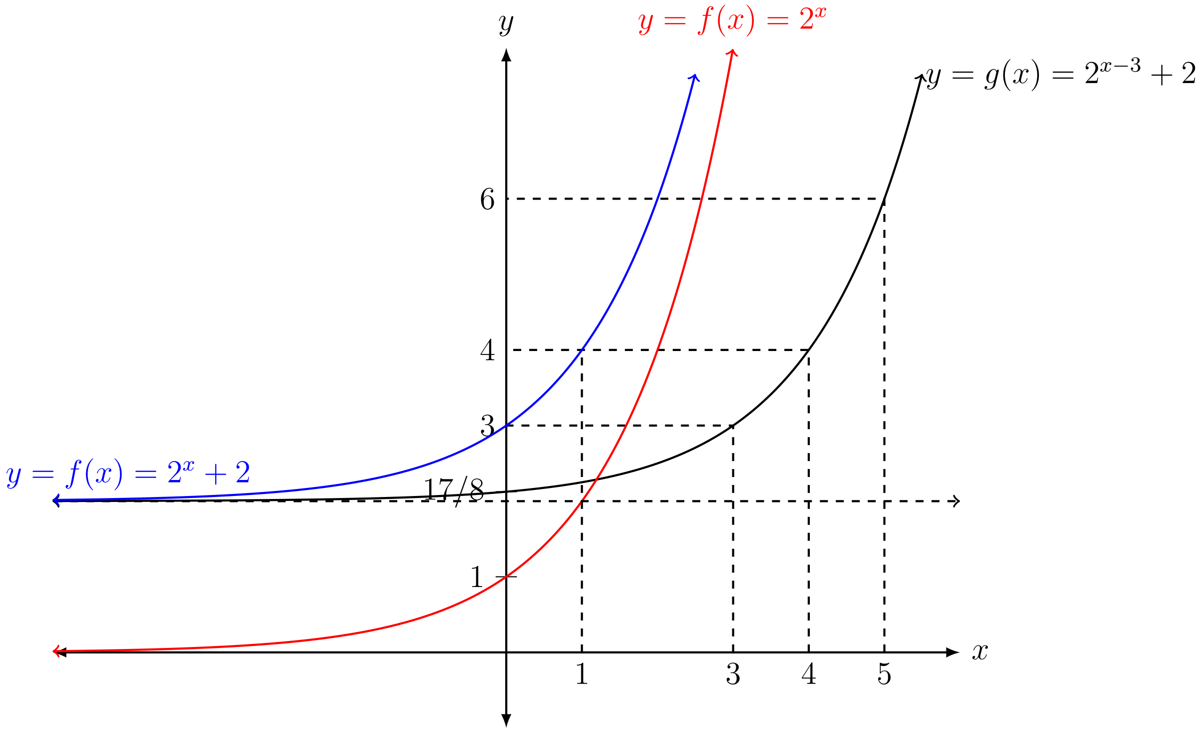
Jadi, rumus $g(x)$ adalah $\boxed{g(x) = 2^{x-3} + 2}$.

(d). Kita dapat menggesernya langsung. Untuk lebih pastinya, kita dapat mensubtitusikannya seperti pada Tabel 1.3.

x	0	3	4	5
$y = 2^{x-3} + 2$	$\frac{17}{8}$	3	4	6
(x, y)	$\left(0, \frac{17}{8}\right)$	$(3, 3)$	$(4, 4)$	$(5, 6)$

Tabel 1.4: Hubungan nilai x dan y pada $g(x) = 2^{x-3} + 2$

Buat titik-titik (x, y) pada bidang koordinat kartesius dan hubungan membentuk kurva. Karena $a > 1$, maka $g(x)$ monoton naik.



Gambar 1.7: Grafik $y = g(x) = 2^{x-3} + 2$

Deskripsi dari grafik $g(x)$:

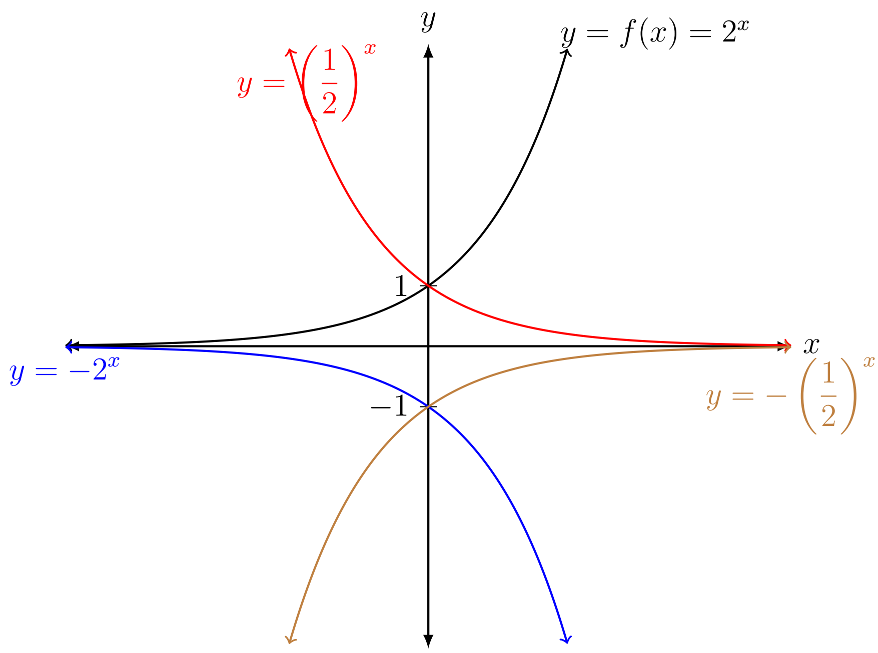
(i) Grafik $g(x)$ merupakan fungsi monoton naik.

(ii) Grafik $g(x)$ memotong sumbu-y di titik $\left(0, \frac{17}{8}\right)$.

(iii) Grafik $g(x)$ memiliki asimtot garis $y = 2$.

(iv) Grafik $g(x)$ merupakan hasil pergeseran 2 satuan ke atas dan 3 satuan ke kanan dari grafik $f(x)$.

Pada bagian awal, telah dijelaskan bahwa $f(x) = ka^x$ merupakan hasil pencerminan sumbu-y dari grafik $g(x) = k\left(\frac{1}{a}\right)^x$. Lalu, bagaimana dengan terhadap sumbu-x? Perhatikan Gambar 1.6*. Perhatikan Gambar 1.8 berikut. Kita cerminkan $f(x) = 2^x$ terhadap sumbu-x dan sumbu-y.



Gambar 1.8: Pencerminan grafik $y = f(x) = 2^x$ terhadap sumbu-x dan sumbu-y

Diberikan $f(x) = ka^x + c$ dimana c adalah kostanta.

(a). Jika $f(x)$ dicerminkan terhadap sumbu-y, maka akan menghasilkan

$$g(x) = k\left(\frac{1}{a}\right)^x + c$$

(b). Jika $f(x)$ dicerminkan terhadap sumbu-x, maka akan menghasilkan

$$g(x) = -ka^x + c$$

(c). Jika $k > 0$, maka $f(x)$ terletak diatas sumbu-x.

(d). Jika $k < 0$, maka $f(x)$ terletak dibawah sumbu-x.

Contoh 1.7. Diberikan $f(x) = 2^x + 1$.

(a). Tentukan rumus $g(x)$ dimana $g(x)$ merupakan hasil pencerminan $f(x)$ terhadap sumbu-x.

(b). Tentukan rumus $h(x)$ dimana $h(x)$ merupakan hasil pencerminan $f(x)$ terhadap sumbu-y.

(c). Tentukan rumus $j(x)$ dimana $j(x)$ merupakan hasil pencerminan $f(x)$ terhadap sumbu-

*Halaman 11

x lalu dicerminkan lagi terhadap sumbu-y.

(a). Hasil pencerminan $f(x) = 2^x + 1$ terhadap sumbu-x adalah

$$\boxed{g(x) = -2^x + 1}$$

(b). Hasil pencerminan $f(x) = 2^x + 1$ terhadap sumbu-y adalah

$$\boxed{h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1}$$

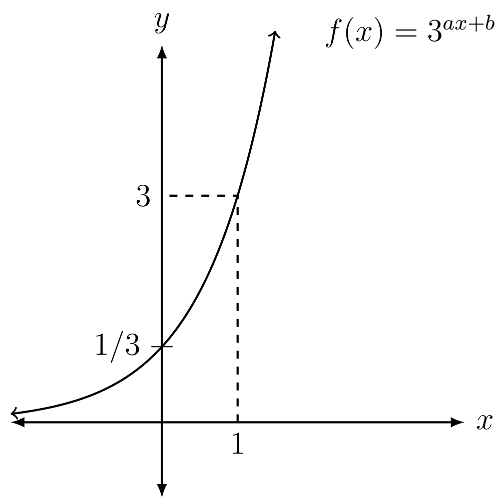
(c). Jika $f(x)$ dicerminkan terhadap sumbu-x, diperoleh

$$f_1(x) = -2^x + 1$$

Lalu $f_1(x)$ dicerminkan terhadap sumbu-y, diperoleh

$$\boxed{j(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1}$$

Contoh 1.8. Tentukan persamaan grafik eksponensial pada gambar di bawah.



Pada grafik tersebut, terlihat bahwa grafik $f(x) = 3^{ax+b}$ melalui titik $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ dan $(1, 3)$.

- Karena melalui $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, maka $f(0) = \frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{3} = 3^{a\times 0+b} = 3^b$$

Padahal $\frac{1}{3} = 3^{-1}$. Maka

$$3^{-1} = 3^b \Longleftrightarrow b = -1$$

- Karena melalui $(1,3)$, maka $f(1) = 3$.

$$3 = 3^{a\times 1+b} = 3^{a+b}$$

  Padahal $3 = 3^1$. Maka

$$3^1 = 3^{a+b} \iff a+b = 1$$

Kita peroleh $b = -1$ dan $a + b = 1$. Maka

$$\begin{aligned} a + (-1) &= 1 \\ a - 1 &= 1 \\ a &= 1 + 1 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Kita peroleh $f(x) = 3^{2x-1}$. Jadi, persamaan grafik eksponensial yang memenuhi adalah $\boxed{y = 3^{2x-1}}$.

Latihan 2

1. Deskripsikan (simpulkan) grafik dari $y = 3^x$ dan $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

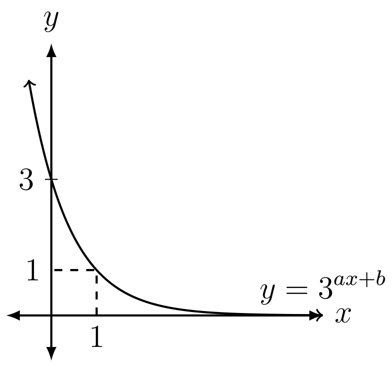
2. Gambarkan grafik $f(x)$ dimana
   (a) $f(x) = 3^x$
   (b) $f(x) = 2^{x+1}$
   (c) $f(x) = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x$
   (d) $f(x) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$

3. Diberikan grafik $f(x) = 2^x$.
   (a) Jika grafik $f(x)$ digeser ke kiri sejauh 2 satuan menghasilkan $a(x)$, tentukan rumus $a(x)$.
   (b) Jika grafik $f(x)$ digeser ke kanan sejauh 3 satuan dan ke bawah sejauh 2 satuan menghasilkan $b(x)$, tentukan rumus $b(x)$.
   (c) Jika grafik $f(x)$ dicerminkan terhadap sumbu-x menghasilkan $c(x)$, tentukan rumus $c(x)$.
   (d) Jika grafik $f(x)$ dicerminkan terhadap sumbu-y, lalu digeser ke kanan sejauh 2 satuan, lalu dicerminkan terhadap sumbu-x menghasilkan $d(x)$, tentukan rumus $d(x)$.
   (e) Gambarkan grafik $d(x)$.

4. Tentukan rumus $f(x)$ jika
   (a) Digeser ke kanan 2 satuan menghasilkan $g(x) = 4^x$.
   (b) Digeser ke atas 4 satuan ke bawah menghasilkan $g(x) = 4 \times 3^x - 1$.
   (c) Dicerminkan terhadap sumbu-x menghasilkan $g(x) = -\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} + 5$.

(d) Dicerminkan terhadap sumbu-x, lalu dicerminkan terhadap sumbu-y, lalu digeser ke atas sejauh 1 satuan menghasilkan $g(x) = -5^x + 1$.

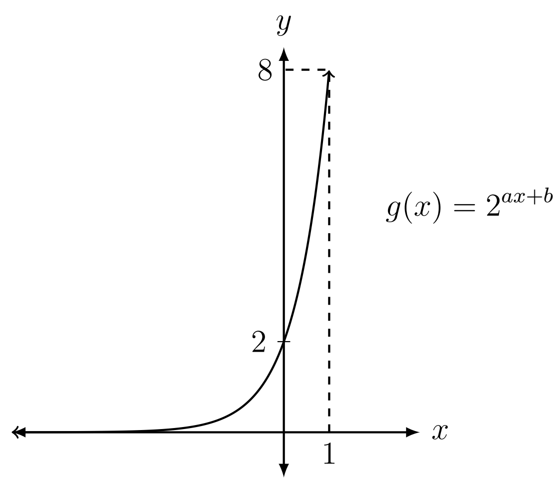
5. Tentukan persamaan grafik eksponensial berikut.



Gambar 1.9: *Solve for a and b*

6. Perhatikan Gambar 1.10.

   Diberikan grafik eksponensial $f(x)$. Grafik $f(x)$ digeser ke kanan sejauh 2 satuan lalu dicerminkan terhadap sumbu-y. Tentukan rumus $f(x)$ jika grafik $g(x)$ seperti pada Gambar 1.10.



Gambar 1.10: Grafik $g(x)$

1.3 Persamaan Eksponensial

Persamaan eksponensial adalah persamaan bentuk eksponensial yang memuat variabel. Variabel tersebut dapat terletak pada eksponen atau bilangan pokoknya. Persamaan eksponensial mempunyao beberapa bentuk persamaan dan penyelesaian. Berikut bentuk-bentuk persamaan eksponensial.

(i). Jika $a^{f(x)} = a^m$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ maka $f(x) = m$.

(ii). Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ maka $f(x) = g(x)$.

(iii). Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ dengan $a, b > 0$ dan $a \neq b \neq 1$, maka $f(x) = 0$.

(iv). Jika $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ dengan $a, b > 0$ dan $a \neq b \neq 1$, maka $f(x) = g(x) = 0$.

(v). Jika $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$, penyelesaiannya sebagai berikut.

(a) $f(x) = g(x)$

(b) $h(x) = 1$

(c) $h(x) = 0$, dengan syarat $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya positif.

(d) $h(x) = -1$ dengan syarat $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya genap atau keduanya ganjil.

(vi). $f(x)^{h(x)} = g(x)^{h(x)}$, penyelesaiannya sebagai berikut.

(a) $f(x) = g(x)$

(b) $f(x) = -g(x)$ dengan syarat $h(x)$ genap.

(c) $h(x) = 0$ dengan syarat $f(x) \neq 0$ dan $g(x) \neq 0$.

(vii). Dengan $a > 0, a \neq 1, A \neq 0$, dan $A, B, C \in \mathbb{R}$:

$$A\left(a^{f(x)}\right)^2 + B\left(a^{f(x)}\right) + C = 0$$

Untuk menyelesaikan bentuk persamaan ini digunakan pemisalan $y = a^{f(x)}$ sehingga diperoleh

$$Ay^2 + By + C = 0$$

Setelah nilai y diperoleh, subtitusikan kembali pada pemisalan $y = a^{f(x)}$ sehingga diperoleh nilai x.

Trik 1. Jika $a > 1$, tanda pertidaksamaan **tidak berubah**. Sebagai contoh, jika $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, maka tandanya tidak berubah, yaitu menjadi $f(x) > g(x)$.
Jika $0 < a < 1$, tanda pertidaksamaan **berubah menjadi kebalikannya**. Sebagai contoh, jika $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, maka tandanya berubah menjadi $f(x) > g(x)$.

Contoh 1.9. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan berikut ini.

(a). $3^{x-7} = \dfrac{1}{27}$

(b). $2^{x^2+3x+4} = 4^{-x-1}$

(c). $3^{x^2-5x-4} = 5^{x^2-5x-4}$

(d). $2^{x^2-2x-3} = 3^{x^2+4x+3}$

(a). Perhatikan bahwa $\dfrac{1}{27} = 3^{-3}$. Maka

$$\begin{aligned} 3^{x-7} &= 3^{-3} \qquad \text{Sifat (i)} \\ \Leftrightarrow x - 7 &= -3 \\ x &= -3 + 7 \\ x &= \boxed{4} \end{aligned}$$

(b). Perhatikan bahwa $4 = 2^2$. Maka

$$\begin{aligned}
2^{x^2+3x+4} &= 4^{-x-1} \\
&= \left(2^2\right)^{-x-1} \\
2^{x^2+3x+4} &= 2^{-2x-2} \qquad \text{Sifat (ii)} \\
\Leftrightarrow x^2+3x+4 &= -2x-2 \\
x^2+3x+4+2x+2 &= 0 \\
x^2+5x+6 &= 0 \\
(x+2)(x+3) &= 0 \\
x &= -2 \quad \text{atau} \quad x = -3
\end{aligned}$$

Jadi, nilai x yang memenuhi adalah $\boxed{x = -2 \text{ atau } x = -3}$.

(c). Karena $3^{x^2-5x-4} = 5^{x^2-5x-4}$, berdasarkan sifat (iii), maka

$$\begin{aligned}
x^2-5x-4 &= 0 \\
(x-1)(x-4) &= 0 \\
x &= 1 \quad \text{atau} \quad x = 4
\end{aligned}$$

Jadi, nilai x yang memenuhi adalah $\boxed{x = 1 \text{ atau } x = 4}$.

(d). Karena $2^{x^2-2x-3} = 3^{x^2+4x+3}$, menurut sifat (iv), maka $x^2-2x-3 = x^2+4x+3 = 0$.

$$\begin{aligned}
x^2-2x-3 &= 0 \\
(x-3)(x+1) &= 0 \\
x &= 3 \quad \text{atau} \quad x = -1 \\
x^2+4x+3 &= 0 \\
(x+1)(x+3) &= 0 \\
x &= -1 \quad \text{atau} \quad x = -3
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $x = -1$ yang memenuhi bahwa $x^2-2x-3 = x^2+4x+3 = 0$. Jadi, nilai x yang memenuhi adalah $\boxed{x = -1}$.

Contoh 1.10. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan eksponensial berikut.

(a). $(x+1)^{2x-1} = (x+1)^{x+3}$

(b). $(x-1)^{x+1} = (2x-3)^{x+1}$

(a). Bentuk $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$.

Diperoleh $h(x) = x+1$, $f(x) = 2x-1$, dan $g(x) = x+3$. Penyelesaiannya sebagai berikut.

- Untuk $f(x) = g(x)$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
2x-1 &= x+3 \\
2x-x &= 3+1 \\
x &= 4
\end{aligned}$$

- Untuk $h(x) = 1$,

$$\begin{aligned} h(x) &= 1 \\ x + 1 &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

- Untuk $h(x) = 0$,

$$\begin{aligned} x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Cek bahwa $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya harus positif.

$$f(-1) = 2x - 1 = 2(-1) - 1 = -2 - 1 = -3 \quad \text{(Tidak memenuhi)}$$

Jadi, untuk $x = -1$ bukan solusi.

- Untuk $h(x) = -1$,

$$\begin{aligned} h(x) &= -1 \\ x + 1 &= -1 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Cek bahwa $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya harus genap atau keduanya harus ganjil.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2) - 1 = -4 - 1 = -5 \\ g(-2) &= (-2) + 3 = -1 \end{aligned}$$

Karena $f(-2)$ dan $g(-2)$ keduanya bilangan ganjil, maka $x = -2$ merupakan solusi.

Jadi, himpunan penyelesaiainnya adalah $\boxed{\{-2, 0, 4\}}$.

(b). Bentuk $f(x)^{h(x)} = g(x)^{h(x)}$.

Diperoleh $f(x) = x - 1$, $g(x) = 2x - 3$, dan $h(x) = x + 1$.

- Untuk $f(x) = g(x)$,

$$\begin{aligned} x - 1 &= 2x - 3 \\ -1 + 3 &= 2x - x \\ 2 &= x \end{aligned}$$

- Untuk $f(x) = -g(x)$,

$$\begin{aligned} x - 1 &= -(2x - 3) \\ x - 1 &= -2x + 3 \\ x + 2x &= 3 + 1 \\ 3x &= 4 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Cek bahwa $h(x)$ haruslah genap.

$$h\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

Karena $h\left(\frac{4}{3}\right)$ tidak genap, maka $x = \frac{4}{3}$ bukan solusi.

- Untuk $h(x) = 0$,

$$\begin{aligned} x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Cek bahwa haruslah $f(x) \neq 0$ dan $g(x) \neq 0$.

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 - 1 = -2 \\ g(-1) &= 2x - 3 = 2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5 \end{aligned}$$

Karena $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya tidak sama dengan 0, maka $x = -1$ merupakan solusi.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\boxed{\{-1, 2\}}$.

Contoh 1.11. Tentukan himpunan penyelesaian dari

(a). $3^{2x} - 4 \times 3^x + 3 = 0$

(b). $3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 = 0$

(c). $25^x - 6 \times 5^x + 5 = 0$

(a). Perhatikan bahwa $3^{2x} = \left(3^x\right)^2$. Maka

$$3^{2x} - 4 \times 3^x + 3 = \left(3^x\right)^2 - 4 \times 3^x + 3 = 0$$

Misalkan $y = 3^x$. Diperoleh

$$\begin{aligned} y^2 - 4y + 3 &= 0 \\ (y - 1)(y - 3) &= 0 \\ y = 1 \text{ atau } \quad y &= 3 \end{aligned}$$

Subtitusikan kembali.

- Untuk $y = 1$, maka $3^x = 1$ yang berarti $3^x = 3^0 \iff x = 0$.
- Untuk $y = 3$, maka $3^x = 3$ yang berarti $3^x = 3^1 \iff x = 1$.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\boxed{\{0, 1\}}$.

(b). Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 9^{x+1} &= 9^x \times 9^1 = 9 \times 9^x = 9 \times \left(3^x\right)^2 \\ 3^{x+2} &= 3^x \times 3^2 = 9 \times 3^x \end{aligned}$$

Demikian kita peroleh

$$3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 = 9 \times 3^x + 9 \times \left(3^x\right)^2 - 810 = 0$$

Misalkan $3^x = y$. Diperoleh

$$\begin{aligned} 9y + 9y^2 - 810 &= 0 \qquad \text{Bagi kedua ruas dengan 9} \\ y + y^2 - 90 &= 0 \\ y^2 + y - 90 &= 0 \\ (y+10)(y-9) &= 0 \\ y = -10 \text{ atau } \quad y &= 9 \end{aligned}$$

Tinjau bahwa $y = 3^x > 0$. Maka untuk $y = -10$ tidak mungkin.

Untuk $y = 9$, maka $3^x = 9$ yang berarti $3^x = 3^2 \iff x = 2$.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\boxed{\{2\}}$.

(c). Perhatikan bahwa $25^x = \left(5^2\right)^x = \left(5^x\right)^2$. Maka

$$25^x - 6 \times 5^x + 5 = \left(5^x\right)^2 - 6 \times 5^x + 5 = 0$$

Misalkan $y = 5^x$. Diperoleh

$$\begin{aligned} y^2 - 6y + 5 &= 0 \\ (y-1)(y-5) &= 0 \\ y = 1 \text{ atau } \quad y &= 5 \end{aligned}$$

Subtitusikan kembali.

- Untuk $y = 1$, maka $5^x = 1$ yang berarti $5^x = 5^0 \iff x = 0$.
- Untuk $y = 3$, maka $5^x = 5$ yang berarti $5^x = 5^1 \iff x = 1$.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\boxed{\{0, 1\}}$.

Latihan 3

1. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan berikut.
   (a) $2^{2x+1} = 128$
   (b) $8^{x-1} = \frac{1}{2}$
   (c) $2^{x^2+4x+4} = 16$
   (d) $3^{x^2-2x-1} = \frac{1}{9}$
   (e) $4^{x^2+6x+8} = 7^{x^2+6x+8}$
   (f) $2^{x^2+3x+2} = 5^{x^2-3x-4}$
   (g) $2019^{x^2+2x+1} = 1$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari
   (a) $(x-2)^{x+2} = (x-2)^{x+1}$
   (b) $(x+1)^{x^2-2x} = (x+1)^{x+4}$
   (c) $\left(x^2 - 2x - 3\right)^x = \dfrac{1}{\left(x^2 - 2x - 3\right)^{x-2}}$
   (d) $(2x-1)^{x+1} = (x+2)^{x+1}$
   (e) $(x-1)^{x^2-4} = (2x+1)^{x^2-4}$

3.

1.4 Pertidaksamaan Eksponensial

1. Untuk $a > 1$.
   (i). Jika $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ maka $f(x) > g(x)$.
   (ii). Jika $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$, maka $f(x) \geq g(x)$.
   (iii). Jika $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, maka $f(x) < g(x)$.
   (iv). Jika $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$, maka $f(x) \leq g(x)$.
2. Untuk $0 < a < 1$.
   (i). Jika $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ maka $f(x) < g(x)$.
   (ii). Jika $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$, maka $f(x) \leq g(x)$.
   (iii). Jika $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, maka $f(x) > g(x)$.
   (iv). Jika $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$, maka $f(x) \geq g(x)$.

Trik 2. Misalkan terdapat bilangan real a dan b dengan $a > b$.

(a). Jika $(x-a)(x-b) > 0$, maka $x > a$ atau $x < b$.

(b). Jika $(x-a)(x-b) \geq 0$, maka $x \geq a$ atau $x \leq b$.

(c). Jika $(x-a)(x-b) < 0$, maka $b < x < a$.

(d). Jika $(x-a)(x-b) \leq 0$, maka $b \leq x \leq a$.

Contoh 1.12. Tentukan himpunan penyelesaian dari

(a). $2^{x+1} < \dfrac{1}{4}$

(b). $9^{x-2} \geq \dfrac{1}{27}$

(c). $\dfrac{1}{5^x} \leq \dfrac{1}{25}$

(a). Perhatikan bahwa $\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2^2} = 2^{-2}$. Diperoleh

$$\begin{aligned} 2^{x+1} &< 2^{-2} && \color{red}{a = 2 > 1 \Longrightarrow \text{Sifat } 1(\text{iii})} \\ \Leftrightarrow x + 1 &< -2 \\ x &< -3 \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x < -3, x \in \mathbb{R}\}$.

(b). Perhatikan bahwa $\frac{1}{27} = 3^{-3}$ dan $9^{x-2} = \left(3^2\right)^{x-2} = 3^{2x-4}$. Diperoleh

$$\begin{aligned} 9^{x-2} &\geq \frac{1}{27} \\ 3^{2x-4} &\geq 3^{-3} && a = 3 > 1 \Longrightarrow \text{Sifat 1(ii)} \\ \Leftrightarrow 2x - 4 &\geq -3 \\ 2x &\geq -3 + 4 \\ 2x &\geq 1 \\ x &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\boxed{\left\{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}\right\}}$.

(c). Perhatikan bahwa $\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2}$. Diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{5^x} &\leq \frac{1}{5^2} && a = \frac{1}{5} < 1 \Longrightarrow \text{Sifat 2(iv)} \\ \Leftrightarrow x &\geq 2 \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\boxed{\{x \mid x \geq 2, x \in \mathbb{R}\}}$.

Contoh 1.13. Tentukan himpunan penyelesaian dari

(a). $2^{2x} - 6 \times 2^x + 8 \leq 0$

(b). $3^{2x} - 4 \times 3^x + 3 > 0$

(c). $36^x - 42 \times 6^x + 216 \geq 0$

(d). $4^x - \times 2^{x+1} - 8 < 0$

(e). $16^x + 4^x - 2 \geq 0$

(a). Perhatikan bahwa $2^{2x} = \left(2^x\right)^2$. Misalkan $y = 2^x$. Maka

$$\begin{aligned} y^2 - 6y + 8 &\leq 0 \\ (y-2)(y-4) &\leq 0 \\ 2 \leq y &\leq 4 && y = 2^x \\ 2^1 \leq 2^x &\leq 2^2 \\ 1 \leq x &\leq 2 \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\boxed{\{x \mid 1 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{R}\}}$.

(b). Perhatikan bahwa $3^{2x} = \left(3^x\right)^2$. Misalkan $y = 3^x$. Maka

$$\begin{aligned} y^2 - 4y + 3 &> 0 \\ (y-1)(y-3) &> 0 \\ y < 1 \text{ atau } y &> 3 && y = 3^x \\ 3^x < 1 \text{ atau } 3^x &> 3 \\ 3^x < 3^0 \text{ atau } 3^x &> 3^1 \\ x < 0 \text{ atau } x &> 1 \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\boxed{\{x \mid x < 0 \text{ atau } x > 1, x \in \mathbb{R}\}}$.

(c). Perhatikan bahwa $36^x = \left(6^2\right)^x = \left(6^x\right)^2$. Misalkan $y = 6^x$. Maka

$$\begin{aligned} y^2 - 42y + 216 &\geq 0 \\ (y-6)(y-36) &\geq 0 \\ y < 6 \text{ atau } y &> 36 \qquad \color{red}{y = 6^x} \\ 6^x < 6^1 \text{ atau } 6^x &> 6^2 \\ x < 1 \text{ atau } x &> 2 \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\boxed{\{x \mid x < 1 \text{ atau } x > 2, x \in \mathbb{R}\}}$.

(d). Perhatikan bahwa $4^x = \left(2^2\right)^x = \left(2^x\right)^2$ dan $2^{x+1} = 2 \times 2^x$. Misalkan $y = 2^x$. Maka

$$\begin{aligned} y^2 - 2y - 8 &< 0 \\ (y-4)(y+2) &< 0 \\ -2 < y &< 4 \qquad \color{red}{y = 2^x} \\ -2 < 2^x &< 4 \end{aligned}$$

Ingat bahwa bentuk pangkat dari suatu bilangan positif selalu bernilai positif. Maka $2^x > 0$. Maka kita tinggal perlu meninjau bahwa $2^x < 4$.

$$2^x < 2^2 \iff x < 2$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\boxed{\{x \mid x < 2, x \in \mathbb{R}\}}$.

(e). Perhatikan bahwa $16^x = \left(4^2\right)^x = \left(4^x\right)^2$. Misalkan $y = 4^x$. Maka

$$\begin{aligned} y^2 + y - 2 &\geq 0 \\ (y+2)(y-1) &\geq 0 \\ y < -2 \text{ atau } \quad y &> 1 \qquad \color{red}{y = 4^x} \\ 4^x < -2 \text{ atau } \quad 4^x &> 1 \end{aligned}$$

Karena bentuk pangkat dari suatu bilangan positif selalu bernilai positif, maka tidak mungkin $4^x < -2$. Maka kita tinggal meninjau $4^x > 1$. Karena $1 = 4^0$,

$$4^x > 4^0 \iff x > 0$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\boxed{\{x \mid x > 0, x \in \mathbb{R}\}}$.

2 Logaritma

Dalam fungsi logaritma, kita perlu mencari pangkat suatu bilangan pokok untuk memperoleh suatu nilai. Fungsi logaritma sendiri merupakan invers dari fungsi eksponen.

Jika terdapat bilangan real a, b, x dengan $x > 0, a \neq 1$ yang memenuhi $x = a^b$ maka

$$b = {}^a\log x$$

Keterangan:
x = peubah (variabel) bebas atau numerus
a = bilangan pokok atau basis logaritma
b = peubah (variabel) tak bebas

2.1 Sifat-Sifat Logaritma

Misalkan a, b, x, dan y adalah bilangan positif, $m, n \in \mathbb{R}$, dan $a, b \neq 1$, maka:

(i). ${}^a\log 1 = 0$

(ii). ${}^a\log a = 1$

(iii). ${}^a\log xy = {}^a\log x + {}^a\log y$

(iv). ${}^a\log \dfrac{x}{y} = {}^a\log x - {}^a\log y$

(v). ${}^a\log x^n = n \times {}^a\log x$

(vi). ${}^a\log x = \dfrac{{}^b\log x}{{}^b\log x}$

(vii). ${}^a\log x = \dfrac{1}{{}^x\log a}$ dengan $x \neq 1$

(viii). $a^{{}^a\log x} = x$

(ix). ${}^{a^n}\log x = \dfrac{1}{n} \times {}^a\log x$

(x). ${}^{a^n}\log x^m = \dfrac{m}{n} \times {}^{a}\log x$

(xi). $\log x = {}^{10}\log x$

Contoh 2.1. Tentukan nilai logaritma berikut.

(a). ${}^{3}\log 27$

(b). ${}^{\frac{1}{2}}\log 4$

(c). ${}^{3}\log \sqrt{27}$

(d). ${}^{32}\log 64$

(e). $\log 125 + \log 8$

(f). $\log 2 + \log 6 + \log 125 - \log 3 - \log 5$

(a). Tinjau $27 = 3^3$. Maka

$$\begin{aligned} {}^{3}\log 27 &= {}^{3}\log 3^3 && \text{Sifat (v)} \\ &= 3 \times {}^{3}\log 3 && \text{Sifat (ii)} \\ &= 3 \times 1 \\ {}^{3}\log 27 &= \boxed{3} \end{aligned}$$

(b). Tinjau $\dfrac{1}{2} = 2^{-1}$ dan $4 = 2^2$. Maka

$$\begin{aligned} {}^{\frac{1}{2}}\log 4 &= {}^{2^{-1}}\log 2^2 && \text{Sifat (x)} \\ &= \frac{2}{-1} \times {}^{2}\log 2 && \text{Sifat (ii)} \\ &= (-2) \times 1 \\ {}^{\frac{1}{2}}\log 4 &= \boxed{-2} \end{aligned}$$

(c). Tinjau

$$\sqrt{27} = 27^{\frac{1}{2}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$$

Maka

$$\begin{aligned} {}^{3}\log \sqrt{27} &= {}^{3}\log 3^{\frac{3}{2}} && \text{Sifat (v)} \\ &= \frac{3}{2} \times {}^{3}\log 3 && \text{Sifat (ii)} \\ {}^{3}\log \sqrt{27} &= \boxed{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(d). Tinjau $64 = 32 \times 2$. Maka

$$\begin{aligned}
{}^{32}\log 64 &= {}^{32}\log(32 \times 2) && \text{Sifat (iii)}\\
&= {}^{32}\log 32 + {}^{32}\log 2 && \text{Sifat (ii)}\\
&= 1 + {}^{2^5}\log 2 && \text{Sifat (ix)}\\
&= 1 + \frac{1}{5} \times {}^{2}\log 2 && \text{Sifat (ii)}\\
&= 1 + \frac{1}{5}\\
{}^{32}\log 64 &= \boxed{\frac{6}{5}}
\end{aligned}$$

Atau kita dapat menggunakan sifat (vi) dengan $b = 2$.

$$\begin{aligned}
{}^{32}\log 64 &= \frac{{}^{2}\log 64}{{}^{2}\log 32}\\
&= \frac{{}^{2}\log 2^6}{{}^{2}\log 2^5} && \text{Sifat (v)}\\
&= \frac{6 \times {}^{2}\log 2}{5 \times {}^{2}\log 2} && \text{Sifat (ii)}\\
{}^{32}\log 64 &= \boxed{\frac{6}{5}}
\end{aligned}$$

(e). Dengan sifat (iii), maka

$$\begin{aligned}
\log 125 + \log 8 &= \log(125 \times 8) && \text{Sifat (xi)}\\
&= {}^{10}\log 1000\\
&= {}^{10}\log 10^3 && \text{Sifat (v)}\\
\log 125 + \log 8 &= \boxed{3}
\end{aligned}$$

(f). Dengan sifat (iii) dan sifat (iv), maka

$$\begin{aligned}
\log 2 + \log 6 + \log 125 - \log 3 - \log 5 &= \log \frac{2 \times 6 \times 125}{3 \times 5} && \text{Sifat (xi)}\\
&= {}^{10}\log 100\\
&= {}^{10}\log 10^2 && \text{Sifat (v)}\\
\log 2 + \log 6 + \log 125 - \log 3 - \log 5 &= \boxed{2}
\end{aligned}$$

Contoh 2.2. Tentukan nilai dari

$$^{2}\log 3 \times {}^{3}\log 4 \times {}^{4}\log 5 \times {}^{5}\log 6 \times {}^{6}\log 7 \times {}^{7}\log 8$$

Dengan menggunakan sifat (vi) dengan $b = 10$,

$$\begin{aligned}
{}^{2}\log 3 \times {}^{3}\log 4 \times {}^{4}\log 5 \times {}^{5}\log 6 \times {}^{6}\log 7 \times {}^{7}\log 8 &= \frac{\log 2}{\log 3} \times \frac{\log 3}{\log 4} \times \frac{\log 4}{\log 5} \times \frac{\log 5}{\log 6} \times \frac{\log 6}{\log 7} \times \frac{\log 7}{\log 8} \\
&= \frac{\log 2}{\log 8} \qquad \text{Sifat (vi)} \\
&= {}^{8}\log 2 \\
&= {}^{2^3}\log 2 \qquad \text{Sifat (ix)} \\
{}^{2}\log 3 \times {}^{3}\log 4 \times {}^{4}\log 5 \times {}^{5}\log 6 \times {}^{6}\log 7 \times {}^{7}\log 8 &= \boxed{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Contoh 2.3. Jika ${}^{2}\log 3 = m$ dan ${}^{3}\log 5 = n$, tentukan ${}^{4}\log 5$.

Dengan sifat (vi) dengan $b = 3$, maka

$$\begin{aligned}
{}^{4}\log \log 5 &= \frac{{}^{3}\log 5}{{}^{3}\log 4} \\
&= \frac{n}{{}^{3}\log 2^2} \qquad \text{Sifat (v)} \\
&= \frac{n}{2 \times {}^{3}\log 2} \qquad \text{Sifat (vii)} \\
&= \frac{n}{2 \times \frac{1}{{}^{2}\log 3}} \\
&= \frac{n}{2 \times \frac{1}{m}} \\
{}^{4}\log 5 &= \boxed{\frac{mn}{2}}
\end{aligned}$$

Contoh 2.4. Jika ${}^{2}\log p + {}^{4}\log q = \frac{1}{4}$, tentukan nilai $p^2 q$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
{}^{2}\log p &= \frac{2}{2} \times {}^{2}\log p \\
&= {}^{2^2}\log p^2 \\
{}^{2}\log p &= {}^{4}\log p^2
\end{aligned}$$

Demikian kita peroleh

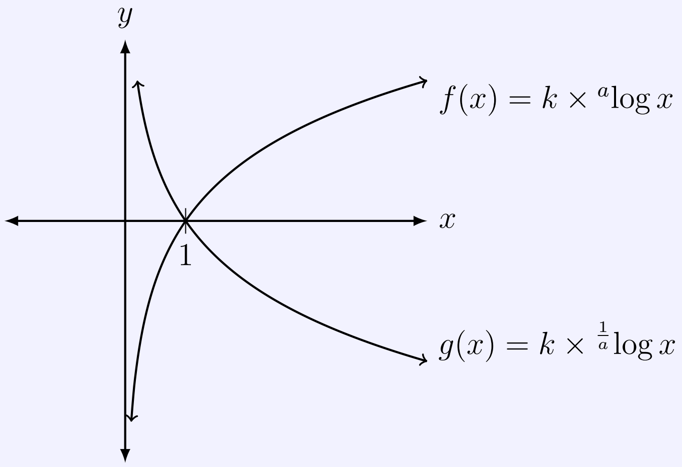
$$\begin{aligned}
{}^{2}\log p + {}^{4}\log q &= \frac{1}{4} \\
{}^{4}\log p^2 {}^{4}\log q &= \frac{1}{4} \qquad \text{Sifat (iii)} \\
{}^{4}\log p^2 q &= \frac{1}{4} \\
p^2 q &= 4^{\frac{1}{4}} \\
&= \left(2^2\right)^{\frac{1}{4}} \\
&= 2^{\frac{1}{2}} \\
p^2 q &= \boxed{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Contoh 2.5. Jika $x > y > 1$ dan $x^2 + 4y^2 = 12xy$, tentukan nilai $\log \frac{(x+2y)^2}{(x-2y)^2}$.

$$\begin{aligned}
\log \frac{(x+2y)^2}{(x-2y)^2} &= \log \frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2-4xy+4y^2} \qquad {\color{red}x^2+4y^2=12xy} \\
&= \log \frac{12xy+4xy}{12xy-4xy} \\
&= \log \frac{16xy}{8xy} \\
\log \frac{(x+2y)^2}{(x-2y)^2} &= \boxed{\log 2}
\end{aligned}$$

2.2 Grafik Fungsi Logaritma

2.2.1 Grafik Fungsi Logaritma



Gambar 2.1: Grafik $f(x) = k \times {}^a\log x$ dan $g(x) = k \times {}^{\frac{1}{a}}\log x$ dengan $a > 1$

Dari grafik tersebut, dapat diambil beberapa kesimpulan.

1. Grafik $f(x) = k \times {}^a\log x$ dan $g(x) = k \times {}^a\log x$ simetris terhadap sumbu-x.
2. Grafik $f(x)$ merupakan hasil pencerminan grafik $g(x)$ terhadap sumbu-x, atau sebaliknya.
3. Grafik $f(x)$ dan $g(x)$ memotong sumbu-x di titik $(0, 1)$.
4. Grafik $f(x)$ dan $g(x)$ memiliki asimtot sumbu-y atau garis $x = 0$.
5. Fungsi $f(x)$ merupakan fungsi monoton naik karena untuk setiap $x_1 < x_2$ berlaku $f(x_1) < f(x_2)$.
6. Fungsi $g(x)$ merupakan fungsi monoton turun karena untuk setiap $x_1 < x_2$ berlaku $f(x_1) > f(x_2)$.

2.2.2 Bentuk Umum Fungsi Logaritma

Bentuk umum fungsi logaritma yaitu $y = f(x) = k \times {}^{a}\log x$ atau $f : x \to k \times {}^{a}\log x$.
x disebut peubah (variabel) bebas dengan daerah asal (domain) $D_f = \{x \mid 0 < x < \infty, x \neq 1, x \in \mathbb{R}\}$.
a disebut bilangan pokok (basis) dengan syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$ ($0 < a < 1$ atau $a > 1$).
y disebut variabel tak bebas dengan daerah hasil (range) $R_f = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$.
k disebut konstanta.

2.2.3 Menggambar Grafik Fungsi Logaritma

Langkah-langkah menggambar grafik fungsi eksponensial adalah sebagai berikut.

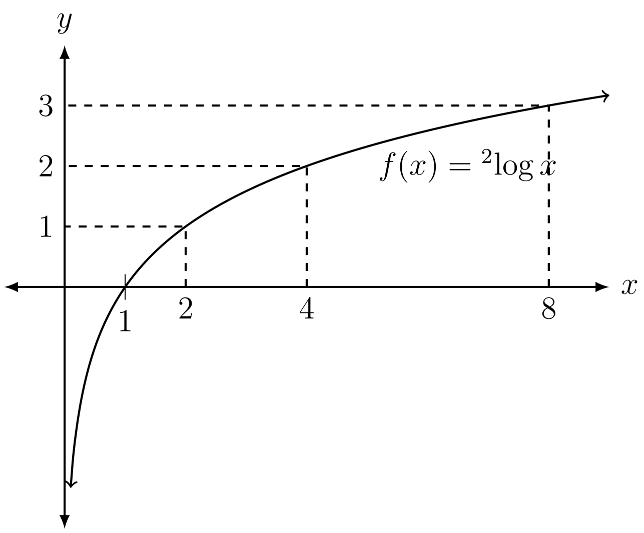
1. Buatlah tabel titik bantu berupa nilai-nilai x dan y yaitu dengan memilih beberapa nilai x sehingga nilai y mudah ditentukan.
2. Gambarlah titik-titik tersebut pada bidang koordinat.
3. Hubungkan titik-titik yang dilalui dengan kurva.

Bagaimana kalau grafik $f(x)$ digeser ke kanan, ke kiri, ke atas, atau ke bawah? Berikut penjelasannya.
Misalkan grafik $f(x) = {}^{2}\log x$.

x	1	2	4	8
$y = {}^{2}\log x$	0	1	2	3
(x, y)	$(1, 0)$	$(2, 1)$	$(4, 2)$	$(8, 3)$

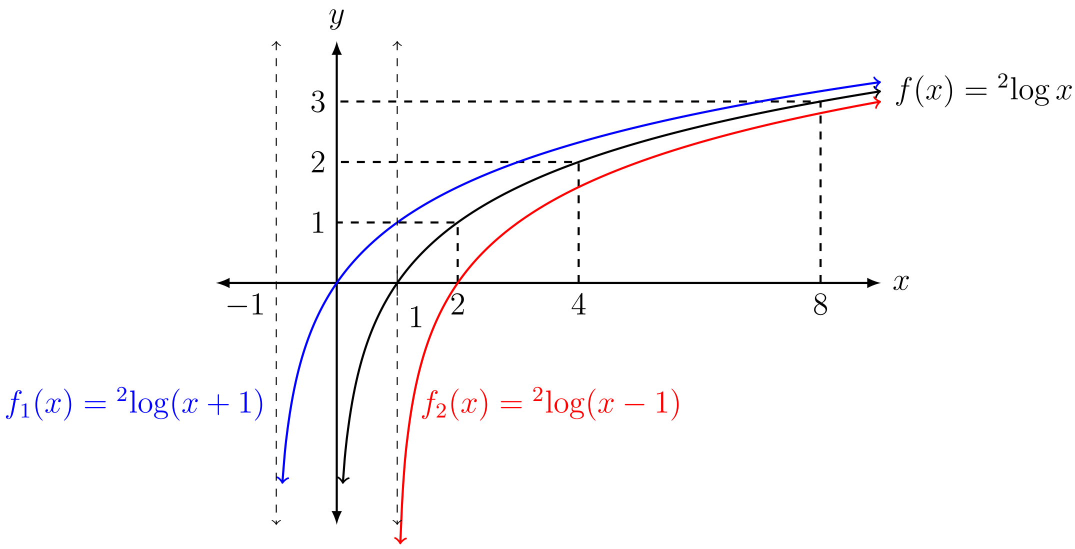
Tabel 2.1: Hubungan nilai x dan y pada $f(x) = {}^{2}\log x$

Buat titik-titik pada bidang koordinat. Karena $a > 1$, maka $f(x)$ merupakan fungsi monoton naik.



Gambar 2.2: Grafik $f(x) = {}^{2}\log x$

Grafik pada Gambar 2.2 kita geser ke kanan sejauh 1 satuan atau ke kiri sejauh satuan. Lihat Gambar 2.3. Pada Gambar 2.3, grafik $f_1(x)$ hasil pergeseran grafik $f(x)$ ke kiri 1 satuan dan grafik $f_2(x)$ merupakan hasil pergeseran grafik $f(x)$ ke kanan 1 satuan.



Gambar 2.3: Pergeseran grafik $f(x) = {}^2\log x$ ke kanan atau ke kiri

Diberikan $f(x) = {}^a\log x$ dengan $a, x > 0$ dan $a \neq 1$.

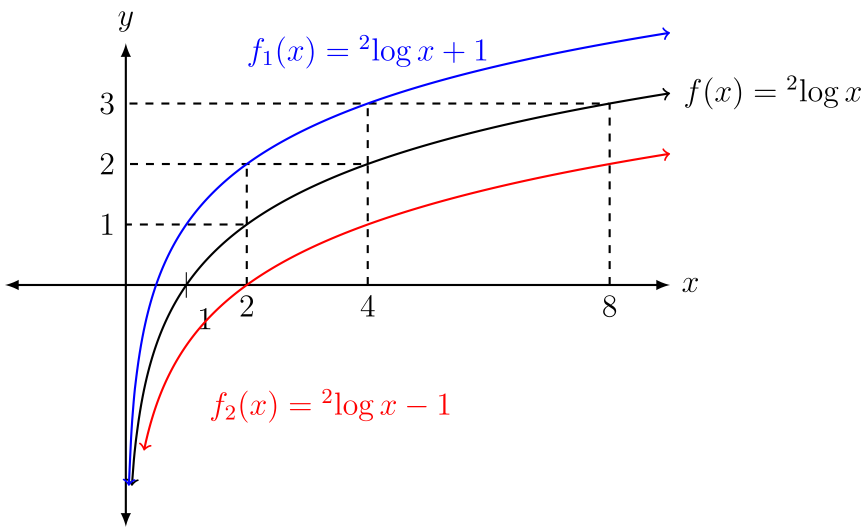
(a). Jika $f(x)$ digeser ke kanan sejauh c satuan menghasilkan $g(x)$, maka

$$g(x) = {}^a\log(x-c)$$

(b). Jika $f(x)$ digeser ke kiri sejauh c satuan menghasilkan $g(x)$, maka

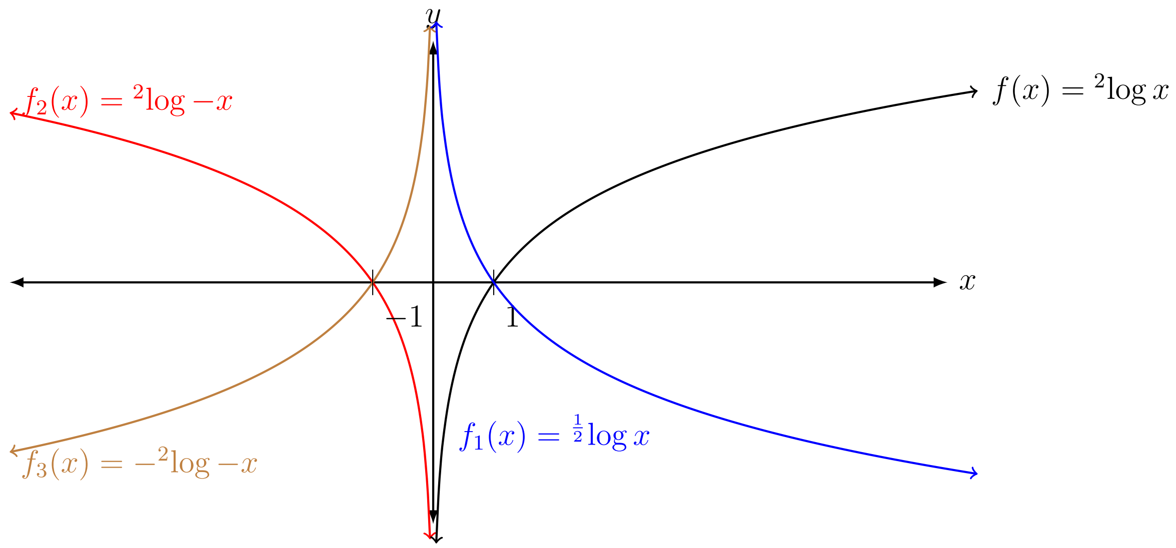
$$g(x) = {}^a\log(x+c)$$

Bagaimana kalau $f(x)$ digeser ke atas atau ke bawah? Perhatikan Gambar 2.4. Kita geser grafik $f(x)$ ke atas sejauh 1 satuan menghasilkan $f_1(x)$ dan digeser ke bawah sejauh 1 satuan menghasilkan $f_2(x)$.



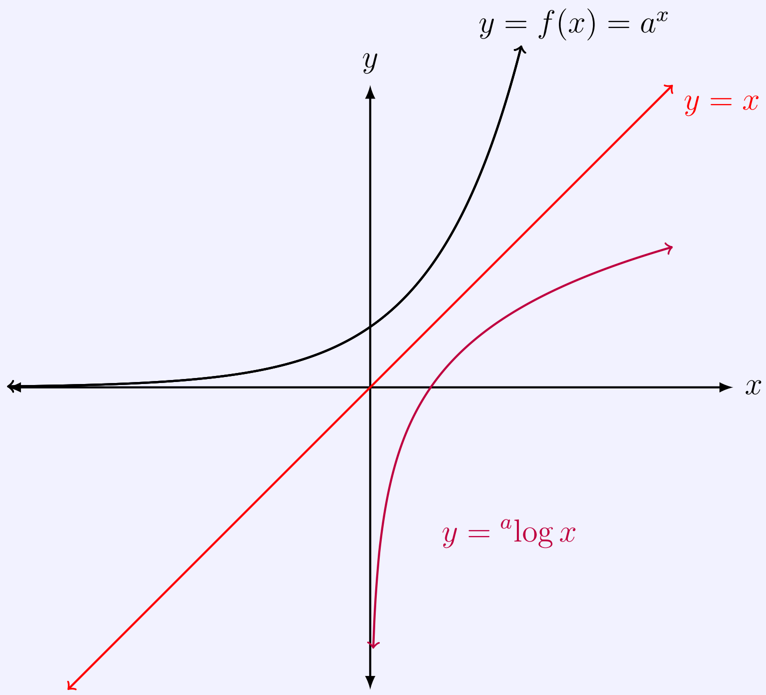
Gambar 2.4: Pergeseran grafik $f(x) = {}^2\log x$ ke atas atau ke bawah

Pada bagian awal, telah dijelaskan bahwa $f(x) = k \times {}^a\log x$ merupakan hasil pencerminan $g(x) = k \times {}^{\frac{1}{a}}\log x$ terhadap sumbu-y, atau sebaliknya. Dengan mudah, pencerminan $f(x) = {}^2\log x$ terhadap sumbu-x adalah $f_1(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$. Lalu bagaimana jika dicerminkan terhadap sumbu-y? Perhatikan Gambar 2.4. Misalkan pencerminan $f(x)$ terhadap sumbu-y menghasilkan $f_2(x)$.



Gambar 2.5: Pencerminan grafik $f(x) = {}^2\log x$ dan $f_1(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ terhadap sumbu-y

2.2.4 Hubungan Grafik Eksponensial dan Grafik Logaritma



Gambar 2.6: Hubungan Grafik $f(x)$ dan $g(x)$

Grafik $f(x) = a^x$ diperoleh dari pencerminan grafik $g(x) = {}^a\log x$ terhadap garis $y = x$, atau sebaliknya.

2.3 Persamaan Logaritma

Persamaan logaritma adalah persamaan pada bentuk logaritma yang di dalamnya memuat variabel. Variabel tersebut dapat menempati numerus atau bilangan pokok. Beberapa bentuk persamaan logaritma beserta penyelesaiannya dijelaskan pada bagian berikut.

(i). Jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log p$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka $f(x) = p$ dengan syarat $f(x) > 0$.

(ii). Jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka $f(x) = g(x)$ dengan syarat $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$.

(iii). Jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{b}\log f(x)$ dengan $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$, dan $a \neq b$, maka $f(x) = 1$.

(iv). Jika ${}^{h(x)}\log f(x) = {}^{h(x)}\log g(x)$, maka $f(x) = g(x)$ dengan syarat $h(x) > 0, h(x) \neq 1, f(x) > 0$, dan $g(x) > 0$.

(v). Jika ${}^{f(x)}\log h(x) = {}^{g(x)}\log h(x)$, maka $f(x) = g(x)$ dengan syarat $f(x) > 0, f(x) \neq 1, g(x) > 0, g(x) \neq 1$, dan $h(x) > 0$.

(vi). Untuk $A\left({}^{a}\log x\right)^2 + B\left({}^{a}\log x\right) + C = 0$ dengan $A, B, C \in \mathbb{R}, A \neq 0, a > 0, a \neq 1, x > 0$. Untuk menyelesaikan bentuk persamaa tersebut dilakukan pemisalan $y = {}^{a}\log x$ sehingga diperoleh $Ay^2 + By + C = 0$. Setelah diperoleh nilai y, subtitusikan kembali pada $y = {}^{a}\log x$ sehingga diperoleh nilai x.

2.4 Pertidaksamaan Logaritma

1. Untuk $a > 1$.

   (a). Jika ${}^a\log f(x) > {}^a\log g(x)$, maka $f(x) > g(x)$ dengan $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$.

   (b). Jika ${}^a\log f(x) \geq {}^a\log g(x)$, maka $f(x) \geq g(x)$ dengan $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$.

   (c). Jika ${}^a\log f(x) < {}^a\log g(x)$, maka $f((x) < g(x)$ dengan $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$.

   (d). Jika ${}^a\log f(x) \leq {}^a\log g(x)$, maka $f(x) \leq g(x)$ dengan $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$.

2. Untuk $0 < a < 1$.

   (a). Jika ${}^a\log f(x) > {}^a\log g(x)$, maka $f(x) < g(x)$ dengan $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$.

   (b). Jika ${}^a\log f(x) \geq {}^a\log g(x)$, maka $f(x) \leq g(x)$ dengan $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$.

   (c). Jika ${}^a\log f(x) < {}^a\log g(x)$, maka $f((x) > g(x)$ dengan $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$.

   (d). Jika ${}^a\log f(x) \leq {}^a\log g(x)$, maka $f(x) \geq g(x)$ dengan $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$.

Trik 3. Jika $a > 1$, tanda pertidaksamaan **tidak berubah**. Sebagai contoh, jika ${}^a\log f(x) > {}^a\log g(x)$, maka tandanya tidak berubah, yaitu menjadi $f(x) > g(x)$.
Jika $0 < a < 1$, tanda pertidaksamaan **berubah menjadi kebalikannya**. Sebagai contoh, jika ${}^a\log f(x) < {}^a\log g(x)$, maka tandanya berubah menjadi $f(x) > g(x)$.

3

Kunci Jawaban

3.1 Eksponensial

Latihan 1

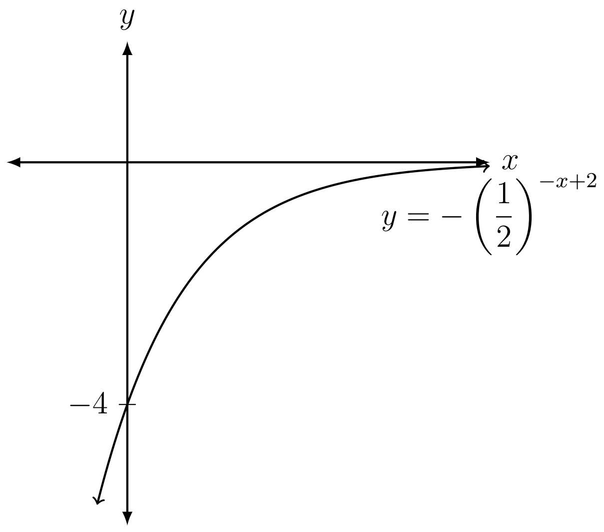
1. (a) 2^{10} (b) 5^2 (c) $\frac{3^4}{4^4}$ (d) 4^6 (e) 2^6 (f) $\frac{2^3}{3^3}$ (g) 5^2 (h) 3^{-1}
2. (a) $\frac{y^2}{z}$ (b) $\frac{xy^5}{z}$ (c) $\frac{25a^{10}}{b^{16}c^{12}}$ (d) $\frac{36x^4z^4}{y^3}$ (e) $\frac{27y^3}{x^3}$ (f) $a-b$
3. (a) 1 (b) 29 (c) 7 (d) 2
4. (a) 2916 cm (b) 864 cm (c) $\frac{512}{3}$ cm (d) $6561 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ cm $= 3^{8-n} \times 2^n$ cm

Latihan 2

1. Untuk $y = 3^x$,
   (a) Memotong sumbu-y di titik $(0, 1)$.
   (b) Memiliki asimtot datar sumbu-x (atau garis $y = 0$).
   (c) Merupakan fungsi monoton naik.

   Untuk $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$,
   (a) Memotong sumbu-y di titik $(0, 1)$.
   (b) Memiliki asimtot datar sumbu-x (atau garis $y = 0$).
   (c) Merupakan fungsi monoton turun.
2. (a) $a(x) = 2^{x+2}$
   (b) $b(x) = 2^{x-3} - 2$
   (c) $c(x) = -2^x$
   (d) $d(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$

(e)



Gambar 3.1: Grafik $d(x)$

3. (a) $f(x) = 4^{x+2}$
   (b) $g(x) = 4 \times 3^x + 3$
   (c) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} + 5$
   (d) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
4. $y = 3^{-x+1}$ atau $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$
5. $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}$

Latihan 3

1. (a) $x = 3$ (b) $x = \frac{2}{3}$ (c) $x = 0$ atau $x = -4$ (d) $= 1$ (e) $x = -2$ atau $x = -4$ (f) $x = -1$ (g) $x = -1$
2. (a) $\{-1, 4\}$ (b) $\{-2, -1, 0, 4\}$ (c) $\left\{1 - \sqrt{5}, 1, 1 + \sqrt{5}\right\}$ (d) $\left\{-1, -\frac{1}{3}, 3\right\}$ (e) $\{-2, 0, 2\}$

Bibliografi

[1] Chakrabarti, D.K. 2018. *Matematika Untuk SMA Kelas X Peminatan Matematika dan Ilmu Alam.* Bogor: Quadra.

[2] Aksin, Nur, D.K. 2018. *Matematika Untuk SMA/MA Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam.* Yogyakarta: PT Intan Pariwara.