IMPEROR
Amélie
MIGNOT
Adrien

Projet d'optimisation

I Etude du problème d'optimisation

1. La formule des revenus s'obtient :

R = quantité vendue − matières premières achetées

des matières premières achetées correspondent à la somme des quantités x, pondérée par leur coût c. D'où le produit scalaire $c^T v$

Pour la quantité vendue elle correspond à la somme des produits vendus pondérés par les prix de vente. Mais pour chaque produit, la quantité vendue s'obtient en faisant le minimum entre la quantité produite par la boulangerie et celle demandée par les clients. D'où la formule :

$$v^T \min\{q, d\}$$

On obtient bien $\text{Revenu} = v^T \min\{q, d\} - c^T v$

2. Le problème de notre fonction $\min\{q,d\}$ est qu'elle n'est pas continûment différentiable par rapport à q. On ne pourra donc pas lui appliquer les algorithmes d'utilisation classique.

3. Supposons $\alpha \gg 1$.
Soit $(q, d) \in \mathbb{R}^{2p}$, soit $i \in [\![1 ; p]\!]$

Supposons $q_i > d_i$

Avec $\alpha \gg 1$, $\alpha q_i \gg \alpha d_i$, on peut négliger le terme $e^{-\alpha q_i}$ devant $e^{-\alpha d_i}$.

$$\text{D'où } h_i(q, d) \simeq \frac{d_i e^{-\alpha d_i}}{e^{-\alpha d_i}} = d_i = \min(q_i, d_i)$$

De même, si $q_i < d_i$, alors $h_i(q, d) \simeq q_i = \min(q_i, d_i)$

Suite 3)

Enfin, si $q_i = d_i$:

$$h_i(q,d) = \frac{2 q_i e^{-\alpha q_i}}{2 e^{-\alpha q_i}} = q_i = \min(q_i, d_i)$$

Donc pour $\alpha \gg 1$, $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $h_i(q,d) \simeq \min(q_i, d_i)$

Pour $\alpha \gg 1$, $\forall (q,d) \in \mathbb{R}^{2p}$, $h(q,d) \underset{\uparrow}{\simeq} \min\{q, d\}$

composante par composante.

h est bien une bonne approximation de la fonction min. (si $\alpha \gg 1$)

h étant continûment différentiable, on peut résoudre le problème approché (4) avec des algorithmes d'optimisation traditionnelles.

4. On considère la fonction $f(q, R) = c^T r - v^T h(q,d)$ que l'on cherche à minimiser selon la contrainte $r \geq Aq$

On pose $z = (q, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

La contrainte $c(z) = Aq - R$ doit vérifier $c(z) \leq 0$

II Etude et résolution numérique

5. On envisage d'utiliser l'algorithme d'ARROW-HURWICZ ou bien d'Uzawa, qui sont deux algorithmes d'optimisation sous contraintes de type inégalité.

6. Cette réponse est en partie rédigée sur notre Jupyter Notebook.

Nous utilisons CasADi

Alors $n = p + m = 3 + 5 = 8$

L'algorithme nous annonce que l'optimum est atteint en :

- vendant 402 baguettes, 73 pains au chocolat et 42 croissants.
- achetant ainsi : 1596 g de levure, 107,4 kg de farine, 712 g de sucre, 3,3 kg de beurre et 621 g de chocolat

Ça nous paraît cohérent, nous sommes satisfaits. :)

II - 7) a) Cette fois, on cherche à maximiser l'espérance du coût, qu'on va noter E_c.

$$E_c = E\left(v^T h(q,d) - c^T r\right) = \sum_{i=1}^{k} \pi^i \left(v^T h(q,d^i) - c^T r\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} \pi^i v^T h(q,d^i)\right) - c^T r$$

$$\left(\text{car } \sum_{i=1}^{k} \pi^i = 1\right)$$

Maximiser E_c, c'est minimiser $-E_c$.

Ici, les objets q et r varient, sous la contrainte $r \geqslant Aq$.

Pour reprendre les notations de l'énoncé :

- $z = (q, r) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$
- $c(z) = Aq - r$ (on veut $c(z) \leqslant 0$)
- $f(z) = f(q,r) = c^T r - \sum_{i=1}^{k} \pi^i v^T h(q, d^i)$ est la quantité à minimiser ici (c'est $-E_c$).

On cherche donc z tel que $\min_{c(z) \leqslant 0} f(z)$ est atteint.

7) b) L'algorithme nous annonce que l'optimum est atteint en :

- vendant 407 baguettes, 77 pains au chocolat et 54 croissants
- achetant ainsi : 1,6 kg de levure, 109 kg de farine, 780g de sucre, 3,6 kg de beurre et 656g de chocolat.

Nous sommes satisfaits, les ordres de grandeurs sont équivalents à ceux obtenus plus haut, tout en étant des résultats différents, ce qui est normal : nous avons ici considéré que la demande n'était pas connue avec certitude.

8) a) Le coût (8) à minimiser est donné par :

$$\| q - d \|^2 - v^T h(q, d)$$

Comme montré plus haut, h est une bonne approximation (sous réserve d'avoir $\alpha \gg 1$) de la fonction min.
Le terme $v^T h(q, d)$ est donc le terme constituant les entrées d'argent de la boulangerie.
Cependant, on a adopté ici une stratégie à 2 temps : les matières premières ont déjà été achetées, il ne sert donc à rien d'essayer de minimiser les sorties d'argent.
En revanche, on va chercher à maximiser le bien-être des gens, en fabriquant une quantité de produits le plus proche possible de la demande, pour minimiser le nombre de clients mécontents.

On raisonne ici sur la norme du vecteur q-d et non sur les différents produits séparément, car plusieurs produits peuvent nécessiter les mêmes matières premières : à quantité de matière première fixée, on cherche à satisfaire du mieux qu'on le peut la demande.

8) b) Dans un premier temps, on va faire des prédictions sur les quantités à produire avant de connaître avec précision la demande. Une fois la quantité de matière première commandée (et donc fixée) et la demande connue, on décide de la quantité de produits à fabriquer.

L'algorithme nous fait d'abord commander :

- 1,6 kg de levure
- 109 kg de farine
- 780 g de sucre
- 3,6 kg de beurre
- 656 g de chocolat

soit de quoi produire 407 baguettes, 77 pains au chocolat et 34 croissants.

On fixe alors la demande $d = d_3$ et on produit en conséquence. L'algorithme nous indique qu'il faut fabriquer :

- 300 baguettes
- 60 pains au chocolat
- 43 croissants

On fabrique tout ce qu'il faut pour honorer la demande d_3. Cependant, il y a un peu de gaspillage de matières premières : on aurait pu produire plus.

IMPEROR et MIGNOT
Projet d'Optimisation
Page 3.

9) On cesse ici d'étudier des variantes du problème initial.
Ce qui nous embête, c'est le fait que la fonction
$(q, d) \longmapsto \min\{q, d\}$ n'est pas différentiable

$\min\{q, d\}$ représente la quantité vendue par le boulanger :
il ne peut vendre plus que ce qu'il produit ou ce qu'on lui demande.
Plutôt que de considérer la dépendance de cette grandeur avec q et d, on va en faire une variable à part :
appelons e la quantité effectivement vendue par le boulanger.

La fonction coût est donc $f(q, r, e) = c^T r - v^T e$
f est bien différentiable, tout va bien
En plus de la contrainte "habituelle" $Aq - r \leq 0$, il faut aussi respecter :

$-e \leq 0$ (on vend une quantité positive)

$e - d \leq 0$ (on ne vend pas plus que ce que l'on nous demande)

$e - q \leq 0$ (on ne vend pas plus que ce qu'on a pu produire)

10)

On trouve que $e = q = d$: on fabrique autant que ce qui est demandé, donc on arrive à tout vendre ! C'est super, nous sommes contents, le boulanger et les clients également.