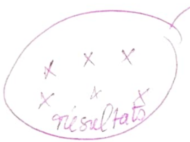
Introduction à la probabilité discrète

Expérience aléatoire

- plusieurs résultats
- incertitude



Ω : espace fondamentale

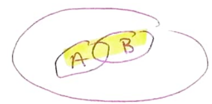
(univers)

équiprobable

Probabilité d'un événement

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B})$
$= P(B) - P(B \cap \bar{A})$

A et B sont incompatibles

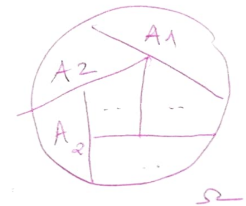
$A \cap B = \emptyset$

$P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\bar{A} = \Omega \setminus A$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$



$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

si $A_i \cap A_j = \emptyset$

A_i sont deux à deux incompatibles

Principe d'addition

Opération A avec n choix

ou

Opération B avec m choix

=> n + m (l'une des deux)

Principe de multiplicité

Opération A avec n choix

et après

Opération B avec m choix

=> n x m

Arrangement sans répétition

Disposition ordonnée de r éléments parmi n éléments distincts

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

successive = ordre compte

simultané = ordre ne compte pas

Combinaison sans répétition

Disposition non ordonée de k éléments parmi n éléments distincts

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}$$

Probabilité conditionnelle

A et B deux événements de Ω

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

↳ Proba de réaliser A sachant que B est réaliser

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$$

A et B sont indépendants

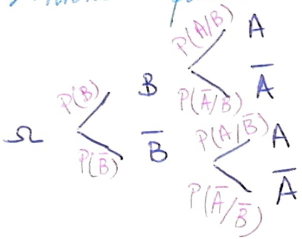
$$P(A/B) = P(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

$$P(B/A) = P(B)$$

A et B sont incompatibles ($P(A \cap B) = 0$)

$$P(A/B) = 0$$

Arbre pondéré



$\longrightarrow P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$

$\longrightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}/B) \cdot P(B)$

$\longrightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A/\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$

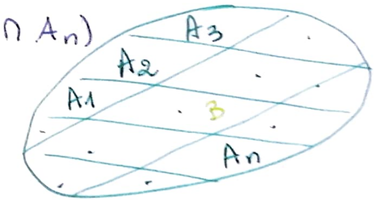
$\longrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}/\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$

Formule des probabilités totales

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \cdot P(A_i)$$



$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

et $A_i \cap A_j = \emptyset$

$\forall i \neq j$

Formule de Bayes

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B/A_i)\, P(A_i)}{\sum^{n} P(B/A_j)\, P(A_j)}$$

Variable aléatoire discrète.

$$X : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & I \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array} \qquad (\text{finie dénombrable}) \quad I = \{x_1, \dots, x_n\}$$

Loi de probabilité de X

$$\left.\begin{array}{l} f_X(x_i) = P(X = x_i) \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1 \end{array}\right\} \text{fonction de probabilité}$$

Fonction de répartition

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$P(a < X \leq b)$$

$$= P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

$$= F_X(b) - F_X(a)$$

$$]a, b]$$

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$$

$$= 1 - F_X(a)$$

Espérance mathématique

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, f_X(x_i)$$

$$E[aX + b] = a\,E[X] + b$$

$$E[\phi(x)] = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) \, P(X = x_i)$$

$\hookrightarrow$ ϕ continue

Variance

$$V[X] = E[(X - E(X))^2]$$

$$= E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, P(X = x_i)$$

$$V[aX + b] = a^2 \, V[X]$$

Ecart type

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\sigma(aX + b) = |a| \sqrt{V(X)}$$

Loi de Bernoulli $X \sim B(p)$

oui $\longrightarrow$ succès $\longrightarrow$ 1 (p)

non $\longrightarrow$ échec $\longrightarrow$ 0 ($1-p$)

X

$$P(X = 0) = 1 - p$$

$$P(X = 1) = p$$

$$E(X) = p$$

$$V(X) = p(1 - p)$$

Loi Binomiale $X \sim B(n, p)$

n fois une expérience de Bernoulli d'une façon indépendante et identique

X : nb de succès sur n expériences

$X : \Omega \longrightarrow \{0, \dots, n\}$

$$P(X = k) = C_n^k \, p^k (1 - p)^{n-k} \quad k \in \{0, \dots, n\}$$

$$E[X] = np$$

$$V[X] = np(1 - p)$$

Loi géométrique $X \sim G(p)$

répétition d'une expérience de Bernouilli d'une façon indépendante et identique jusqu'au premier succès

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$P(X=k) = p\ (1-p)^{k-1}$$

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

$$V[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

Loi de Poisson $X \sim P(\lambda)$

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$P(X=k) = \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!} \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$E[X] = V[X] = \lambda$$