Taki Academy

Généralités sur les fonctions

$$f : \overset{\subseteq \mathbb{R}}{I} \longrightarrow \overset{\subseteq \mathbb{R}}{J}$$

$$x \longmapsto f(x)$$

$$f = \frac{u}{\boxed{v}} \quad v \neq 0$$

$$f = \sqrt{u} \quad u \geq 0$$

D_f : domaine de définition de f

Exple :

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\longrightarrow D_f = \mathbb{R}^*$$

$$g(x) = \frac{1}{\boxed{x-2}} \quad \neq 0$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x - 2 \neq 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 2\}$$
$$= \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$h(x) = \sqrt{x - 1}$$

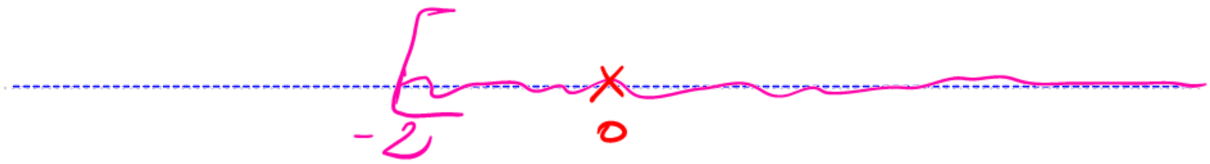
$$D_h = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x - 1 \geq 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 1\}$$
$$= [1, +\infty[$$

$$k(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x}$$

$$D_k=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x\neq 0 \text{ et } x+2\geq 0\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x\neq 0 \text{ et } x\geq -2\}$$

$$=[-2,+\infty[\setminus\{0\}$$



$$F(x)=\frac{x+1}{\sqrt{\boxed{2x-1}}}$$

$$D_F=\{x\in\mathbb{R} \,/\, 2x-1\geq 0 \text{ et } \sqrt{2x-1}\neq 0\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R} \,/\, \underline{2x-1>0}\}$$ $\rightarrow 2x-1\neq 0$

$$=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x>\frac{1}{2}\}$$

$D_F = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$\sqrt{u} = 0 \iff u = 0$

$\sqrt{u} \neq 0 \iff u \neq 0$

Exercice 1 | 25 min | 20 pt

I/ Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

•) $f_1(x) = \dfrac{x\sqrt{x+1}}{-2x^2+3x-1}$

$D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \underbrace{x+1 \geq 0}_{\bullet} \; \underbrace{\text{et}}_{\cap} \; \underbrace{-2x^2+3x-1 \neq 0}_{\bullet}\}$

*/ $x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$

$\iff x \in [-1, +\infty[$

*) On pose $-2x^2+3x-1=0$

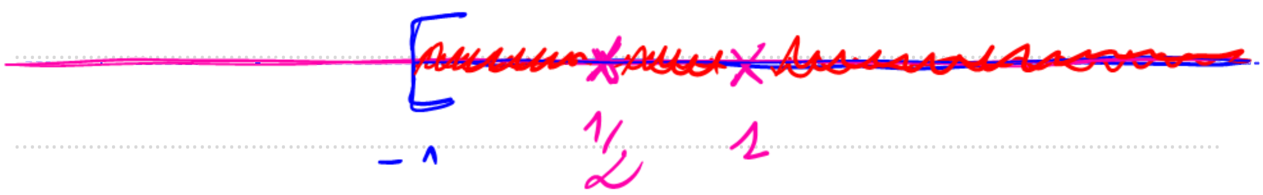
$a+b+c=0$

$x=1$ ou $x=\frac{c}{a}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$

donc $-2x^2+3x-1\neq 0$

$\Leftrightarrow x\in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2},1\right\}$

d'où $D_{f_1}=[-1,+\infty[\,\cap\,\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2},1\right\}$



Ainsi $D_{f_1}=[-1,+\infty[\,\setminus\left\{\frac{1}{2},1\right\}$

Taki Academy

$ax^2+bx+c=0$

$\Delta = b^2-4ac$

$x' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$b = 2b'$

$\Delta' = (b')^2 - ac$

$x' = \dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$

$x'' = \dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$

$$f_2(x) = \frac{\sqrt{2}x-|x|}{2x^2+x+3}$$

$D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2+x+3 \neq 0\}$

$\cdot)\ 2x^2+x+3=0$

>0

$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 3$

$= 1 - 24$

$= -23 < 0$

$\Delta < 0 \Rightarrow \text{signe}(ax^2 + bx + c) = \text{signe}(a)$
$\forall x \in \mathbb{R}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x^2 + x + 3 > 0$ car $2 > 0$

$\Downarrow$

$\neq 0$

Ainsi $\boxed{D_{f_2} = \mathbb{R}}$

$$f_3(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{|x^2 - 1| - 3}$$

$D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ et } |x^2 - 1| - 3 \neq 0\}$

$\cap$

$\bullet)\ |x^2-1|-3 \neq 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{|x^2-1|}_{a} \neq \underbrace{3}_{b}$

$x^2=-2$ impossible

$|a|=b \Leftrightarrow a=b$ ou $a=-b$

$|a|\neq b \Leftrightarrow a\neq b$ et $a\neq -b$

$\Leftrightarrow x^2-1\neq 3$ et $x^2-1\neq -3$

$\Leftrightarrow x^2\neq 4$ et $\underline{x^2\neq -2}$

toujours vrai

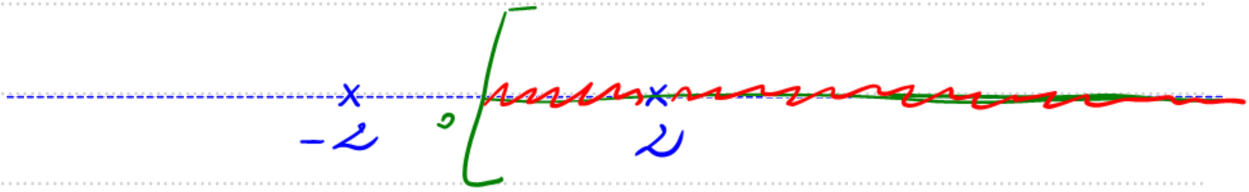
$\Leftrightarrow x\neq 2$ et $x\neq -2$

$a^2=b \Leftrightarrow a=\sqrt{b}$ ou $a=-\sqrt{b}$

$a^2\neq b \Leftrightarrow a\neq \sqrt{b}$ et $a\neq -\sqrt{b}$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$\Rightarrow D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \cap [0, +\infty[$



Ainsi $\boxed{D_{f_3} = [0, +\infty[\setminus \{2\}}$

$f_4(x) = \sqrt{-2x^2 + 5x - 3}$

$D_{f_4} = \{x \in \mathbb{R} / -2x^2 + 5x - 3 \geq 0\}$

$$-2x^2+5x-3=0$$

$$a+b+c=-2+5-3=0$$

$$x_1=1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+5x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

signe de $-a$

signe de a

Ainsi $\boxed{D_{f_4}=\left[1,\frac{3}{2}\right]}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c			0	signe de $-a$	0		

signe de a

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

$\Delta<0$

x	$-\infty$		$x_1=-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c			0		

$\Delta=0$

signe de a

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

Taki Academy

$$f_5(x) = \frac{3\sqrt{x-3}}{x^2-9}$$

$$D_{f_5} = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, \underbrace{x-3 \geq 0}_{} \text{ et } \underbrace{x^2-9 \neq 0}_{} \}$$

$\cap$

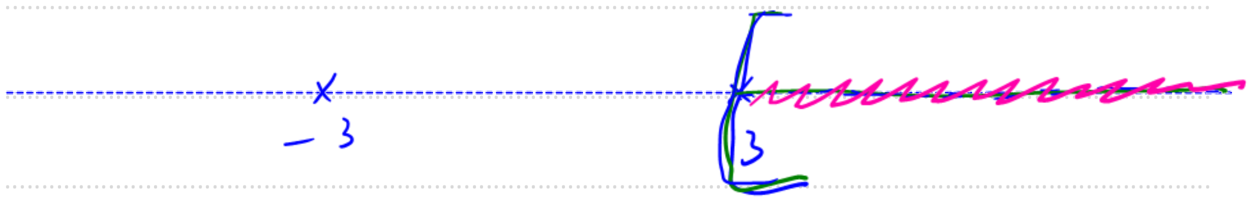
.) $x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3$

$\iff x \in [3, +\infty[$

.) $x^2 - 9 \neq 0 \iff x^2 \neq 9$

$\iff x \neq -3 \text{ et } x \neq 3$

$\iff x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$



Dmc $\boxed{D_{f_5} =]3, +\infty[}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe}\}$

$$f_6(x) = \frac{-5x^2+5}{x+1-\sqrt{2x+5}}$$

$D_{f_6} = \{x \in \mathbb{R} / 2x+5 \geq 0 \text{ et } x+1-\sqrt{2x+5} \neq 0\}$

*) $2x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[$

*) $x+1-\sqrt{2x+5} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+5} = x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 2x+5 = (x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ \text{et} \\ x \geq -1 \\ \text{et} \\ \cancel{2x}+5 = x^2 \cancel{+2x}+1 \end{cases} \Rightarrow x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 = 4 \end{cases}$$

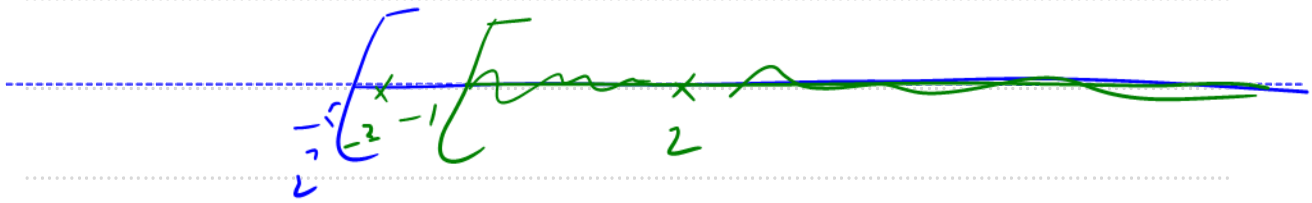
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = -2 \text{ ou } x = 2 \end{cases}$$

donc $x+1-\sqrt{2x+5} \neq 0$

$\iff x \in [-1,+\infty[\setminus \{-2,2\}$

$\iff x \in [-1,+\infty[\setminus \{2\}$

$$D_{f_6} = [-\frac{5}{2},+\infty[\cap [-1,+\infty[\setminus \{2\}$$



Ainsi $\boxed{D_{f_6} = [-1,+\infty[\setminus \{2\}}$

Taki Academy

Soit f une fonction sur I

*) f est majorée sur I

s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$\forall x \in I, \; f(x) \leq M$

majorant

*) f est minorée sur I

s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$\forall x \in I, \; f(x) \geq m$

minorant

*) f est bornée si f est majorée et minorée

c-à-d s'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in I$

$m \leq f(x) \leq M$

II/ Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = -(2x+4)^2 + 3$.

1/ Montrer que f est majorée sur IR.

$f(x) \leq M$?

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $(2x+4)^2 \geq 0$

$\Rightarrow -(2x+4)^2 \leq 0$

$\Rightarrow -(2x+4)^2 + 3 \leq 3$

$\Rightarrow f(x) \leq 3$

Donc f est majorée par 3

2/ Montrer que f est bornée sur [-2,4].

$\forall x \in [-2,4]$, $m \leq f(x) \leq M$??

$$-2 \leq x \leq 4$$

$$-4 \leq 2x \leq 8$$

$$0 \leq 2x+4 \leq 12$$

$$0 \leq a \leq b \to a^2 \leq b^2$$

$$a \leq b \leq 0 \to a^2 \geq b^2$$

$$0 \leq (2x+4)^2 \leq 144$$

$$-144 \leq -(2x+4)^2 \leq 0$$

$$-141 \leq -(2x+4)^2 + 3 \leq 3$$

$$\boxed{-141 \leq f(x) \leq 3}$$

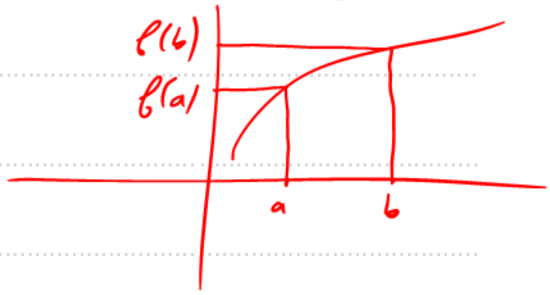
Donc $\boxed{f \text{ est bornée}}$

Soit f une fct définie sur I

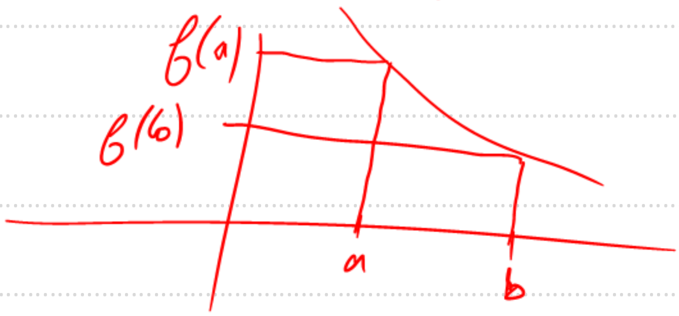
et $a, b \in I$ tel que $a < b$

*) $f(a) \leq f(b) \Rightarrow f$ est croissante sur I

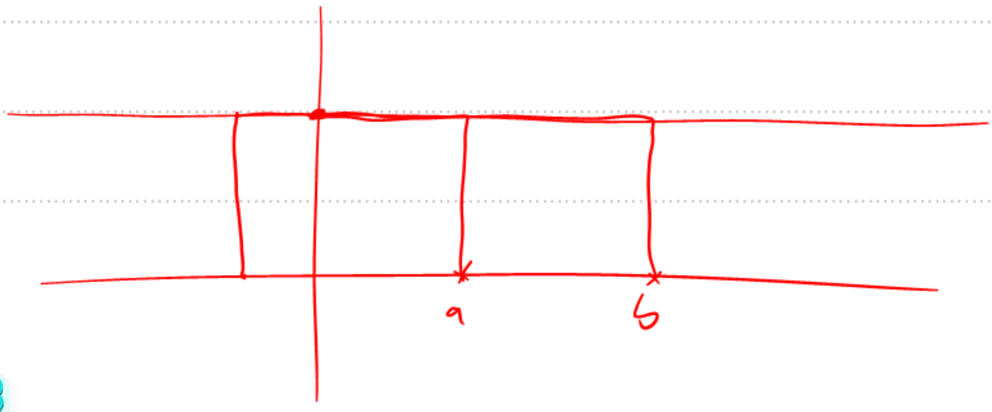
$\left(f(b) - f(a) \geq 0\right)$



*) $f(a) \geq f(b) \Rightarrow f$ est décroissante sur I



*) $f(a) = f(b) \Rightarrow f$ est constante



3/ Etudier les variations de f pour x ≥ -2 puis pour x ≤ -2.

Sur $[-2,+\infty[$:

Soit $a, b \in [-2,+\infty[$ tels que $\boxed{a \leq b}$

$f(a) \ ? \ f(b)$

$$-2 \leq a \leq b$$

$$-4 \leq 2a \leq 2b$$

$$0 \leq 2a+4 \leq 2b+4$$

$$(2a+4)^2 \leq (2b+4)^2$$

$$-(2a+4)^2 \geq -(2b+4)^2$$

$$-(2a+4)^2+3 \geq -(2b+4)^2+3$$

$$f(a) \geq f(b)$$

Donc f est décroissante sur $[-2,+\infty[$

Sur $]-\infty,-2]$:

Soit $a, b \in]-\infty,-2]$ tels que $a<b$

$$a \leq b \leq -2$$

$$2a \leq 2b \leq -4$$

$$2a+4 \leq 2b+4 \leq 0$$

$$a<b<0 \rightarrow a^2>b^2$$

$$0<a<b \rightarrow a^2<b^2$$

$$(2a+4)^2 \geq (2b+4)^2$$

$$-(2a+4)^2 \leq -(2b+4)^2$$

$$-(2a+4)^2+3 \leq -(2b+4)^2+3$$

$a \leq b$ → $f(a) \geq f(b)$ → f décroissante

$a \leq b$ → $f(a) \leq f(b)$ → f est croissante

$x \longleftrightarrow \underline{f(x)}$

antécédant — l'image de x

$$f(a) \leq f(b)$$

Donc $\boxed{f \text{ est croissante sur }]-\infty, -2]}$

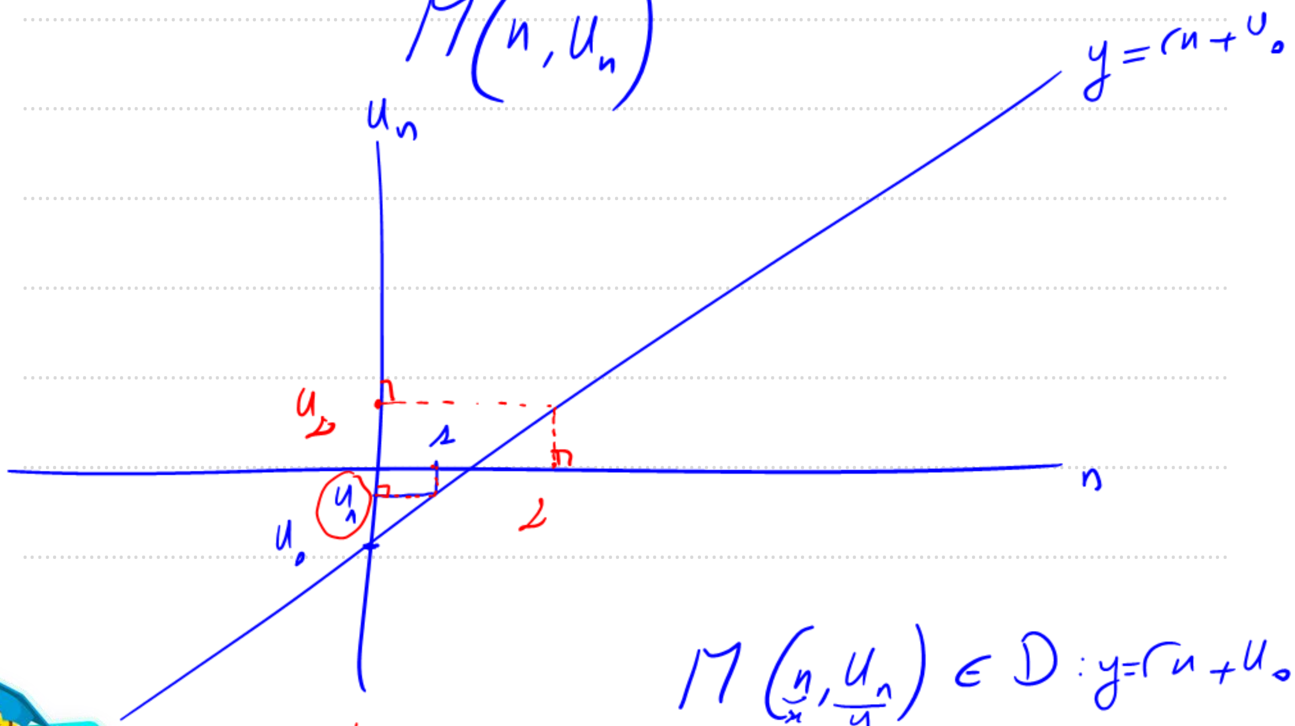
$x \in [-2, 4]$

$-141 \leq f(x) \leq 3 \rightarrow f(x) \in [-141, 3]$

$u_n = u_0 + nr$

$D : y = u_0 + xr = rx + u_0$

$M(n, u_n)$



$M(\underset{x}{n}, \underset{y}{u_n}) \in D : y = rn + u_0$

$u_2 = 2r + u_0$

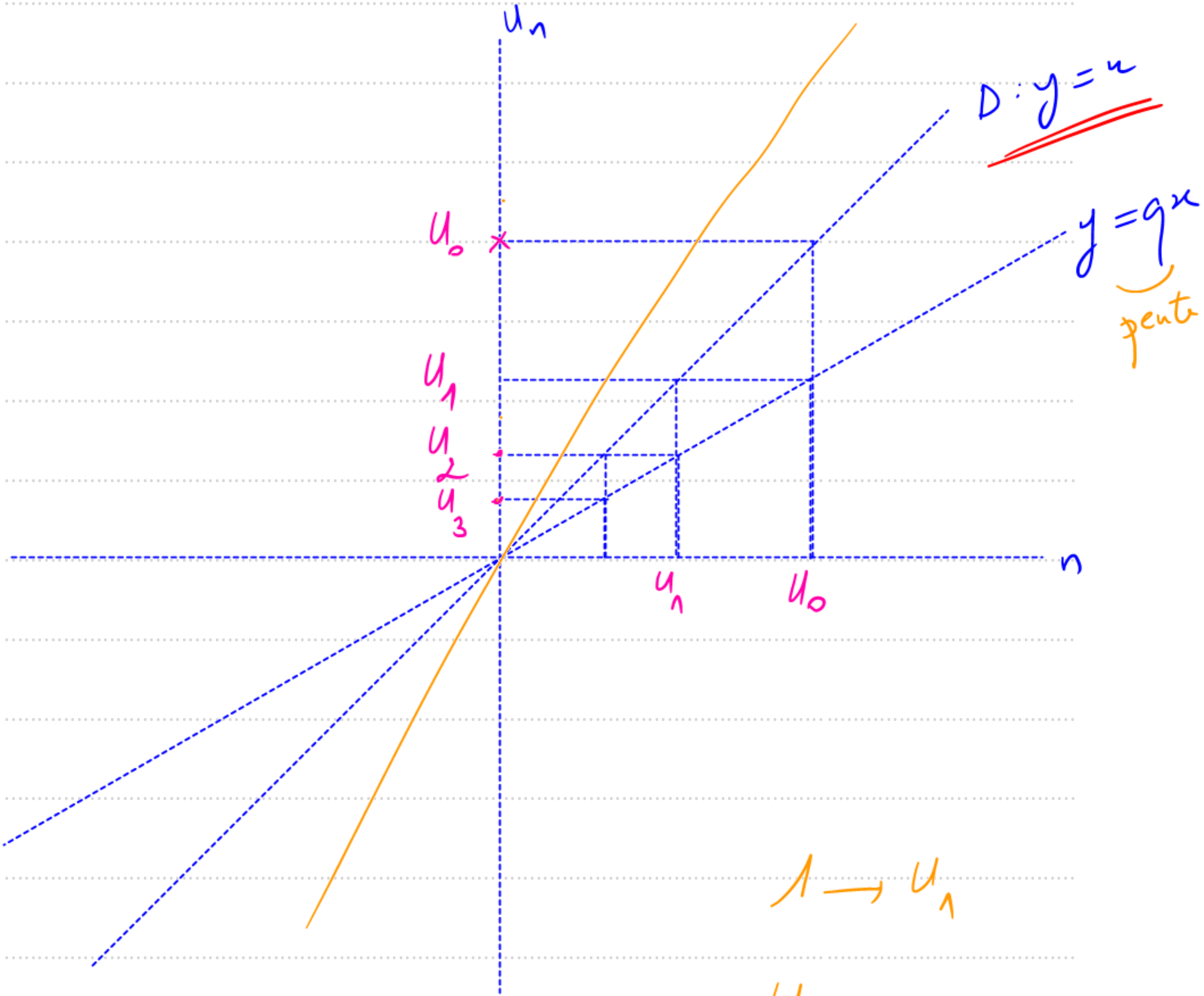
$u_n = rn + u_0$

$u_1 = r \times 1 + u_0$

s. géom

raison de la suite

$D: y = x$ et $D: y = qx$



$1 \to u_1$

u_1

(u_n) s. géo $\to$ $u_{n+1} = q u_n$

$y = qx$

$u_1 = q u_0$

$u_2 = 9u_1$