Taki Academy

Suites réelles

Exercice 1 | 25 min | 20 pt

On considère la suite réelle u définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{\boxed{n+1}} = 3 - \dfrac{4}{1+u_n} \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) Calculer u_1 et u_2.

$$u_1 = u_{\boxed{0+1}} = 3 - \frac{4}{1+u_0} = 3 - \frac{4}{1+3} = \boxed{2}$$

$$u_2 = u_{\boxed{1+1}} = 3 - \frac{4}{1+u_1} = 3 - \frac{4}{1+2} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

Taki Academy

2°) On considère la suite v définie sur IN par : $v_n = \dfrac{1+u_n}{-1+u_n}$

a) Montrer que pour tout $n \in$ IN, on a : $v_{n+1} = \dfrac{2u_n}{-1+u_n}$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1+u_{n+1}}{-1+u_{n+1}}$$

$$= \frac{1+3-\dfrac{4}{1+u_n}}{-1+3-\dfrac{4}{1+u_n}}$$

$$= \frac{4-\dfrac{4}{1+u_n}}{2-\dfrac{4}{1+u_n}}$$

$$= \frac{\dfrac{\cancel{4}+4u_n-\cancel{4}}{\cancel{1+u_n}}}{\dfrac{2+2u_n-4}{\cancel{1+u_n}}}$$

$$v_{n+1} = \frac{4u_n}{-2+2u_n}$$

$$= \frac{4u_n}{2(-1+u_n)}$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n}{-1+u_n}}$

b) En déduire que *v* est une suite arithmétique de raison r = 1 puis exprimer v_n et u_n en fonction de *n*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n}{-1+u_n} - \frac{(1+u_n)}{-1+u_n}$$

$$= \frac{2u_n - 1 - u_n}{-1+u_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-1+U_n}{-1+U_n}$$

$$= 1$$

Donc v est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1+U_0}{-1+U_0} = \dfrac{1+3}{-1+3} = 2$

*) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 + nr$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2 + n}$

*) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1+U_n}{-1+U_n}$

$$\iff (-1+u_n)\,v_n = 1+u_n$$

$$\iff -v_n + v_n u_n = 1+u_n$$

$$\iff v_n u_n - u_n = 1+v_n$$

$$\iff u_n(v_n-1) = 1+v_n$$

$$\iff u_n = \frac{1+v_n}{-1+v_n}$$

$$= \frac{1+2+n}{-1+2+n}$$

Ainsi $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3+n}{1+n}}$

c) Exprimez $S_n=\sum_{K=1}^{n}V_K$ en fonction de n.

$$V_n = 2+n$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} V_k$$

$$=(n-1+1)\times\frac{(V_1+V_n)}{2}$$

$$=\frac{n}{2}(2+1+2+n)$$

$$=\frac{n}{2}(5+n)$$

$$\boxed{S_n=\frac{n^2+5n}{2}}$$

(U_n) s. arith.

$$S_n=\sum_{k=p}^{q}U_k=(\text{nbre de termes})\times\frac{1^{er}\text{ terme}+\text{dernier terme}}{2}$$

$$=(q-p+1)\times\frac{U_p+U_q}{2}$$

3°) Soit w la suite définie sur IN par : $w_n = 2^{v_n}$

a) Montrer que w est une suite géométrique de raison q = 2 et calculer w_0.

$\forall n \in \mathbb{N}, \; w_{n+1} = 2^{v_{n+1}}$

$v_{n+1} = v_n + 1$

$= 2^{v_n + 1}$

$= 2^{v_n} \times 2^1$

$a^{n+m} = a^n \times a^m$

$= 2 w_n$

Donc $\boxed{(w_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = 2}$

$w_0 = 2^{v_0} = 2^{2+0} = \boxed{4}$

$v_n = 2 + n$

(v_n) arith de raison $r = 1$

$v_n = n + 2$

$v_{n+1} = v_n + 1$

$v_{n+1} = v_n + 1$

$v_{n+2} = v_n + 2 \times 1$

b) Exprimer $S'_n = \sum_{K=0}^{n} w_K$ et $P_n = w_1 \times w_2 \times .... \times w_n$ à l'aide de n.

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$$

$$= w_0 \, \frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}$$

(v_n) s. géom

raison

nbr de termes

$$S_n = \sum_{k=r}^{s} v_k = v_r \, \frac{1-q^{s-r+1}}{1-q} \qquad (q \neq 1)$$

$$S_n = \sum_{k=r}^{s} v_k = \underbrace{(s-r+1)}_{\text{nbr de termes}} \times v_r \qquad (q = 1)$$

$$= 4 \, \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$$

$$= -4\left(1 - 2^{n+1}\right)$$

$$\boxed{S'_n = 4\left(2^{n+1} - 1\right)}$$

*) $P_n = w_1 \times w_2 \times \dots \times w_n$

$$= 2^{v_1} \times 2^{v_2} \times \dots \times 2^{v_n}$$

$$= 2^{(v_1 + v_2 + \dots + v_n)}$$

$$= 2^{S_n}$$

Ainsi $\boxed{P_n = 2^{\frac{n^2 + 5n}{2}}}$

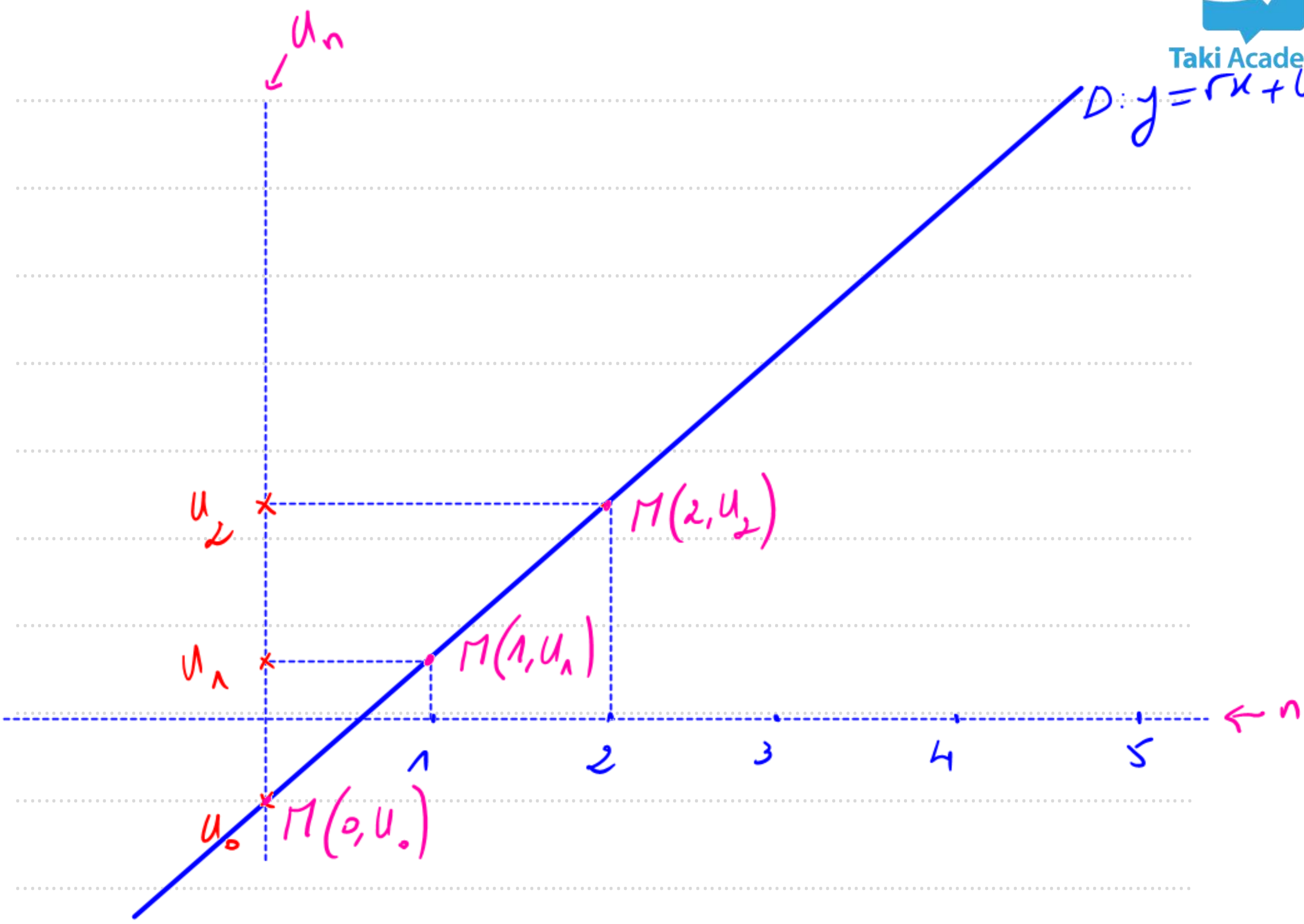
Représentation graphique d'une suite réelle

l'ensemble des points $M(n, U_n)$

*) Suite arith (U_n) de raison r et du premier terme U_0 :

$$U_n = U_0 + nr$$

la représentation graphique de (U_n) est la droite $\Delta : y = r.x + U_0$



$M(x, y)$

$D : y = rx + u_0$

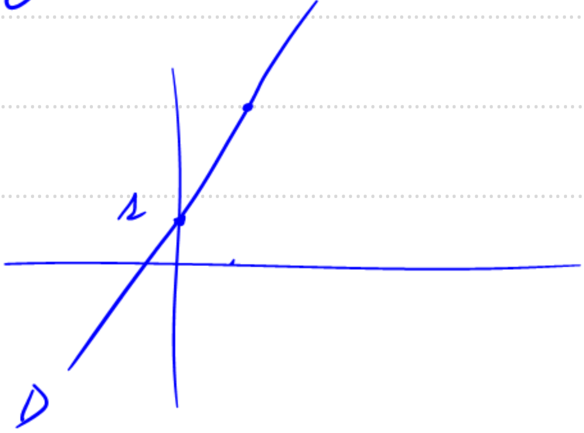
$x = 0 \rightarrow y = u_0 \rightarrow M(0, u_0) \in D$

$D : y = 2x + \boxed{1}$

$x = 1 \rightarrow y = 3$

$\Downarrow$

$(1, 3) \in D$

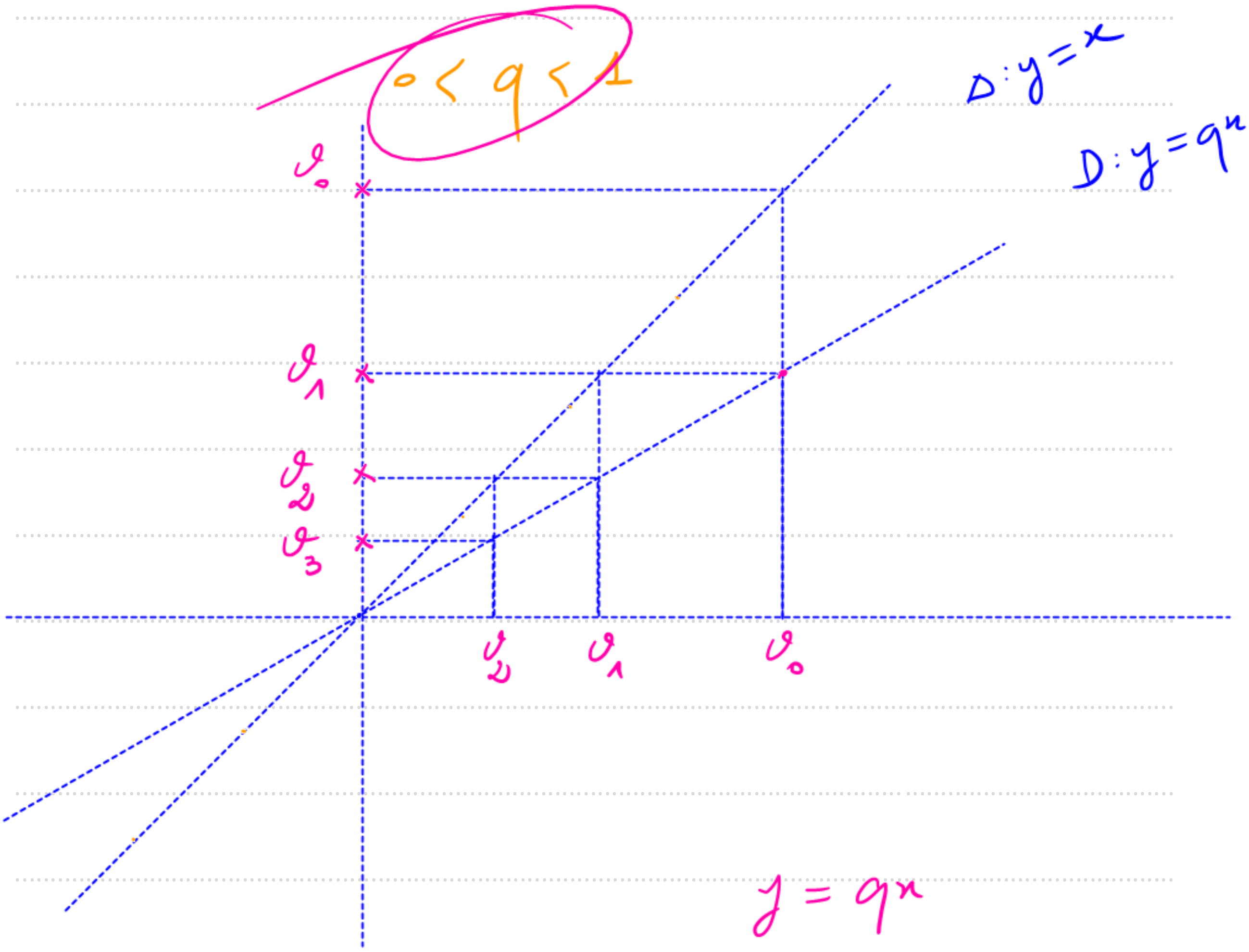


Suite géom. (v_n) de raison q et de 1er terme v_0

On trace les droites $D : y = qx$

et $\Delta : y = x$

$0 < q < 1$



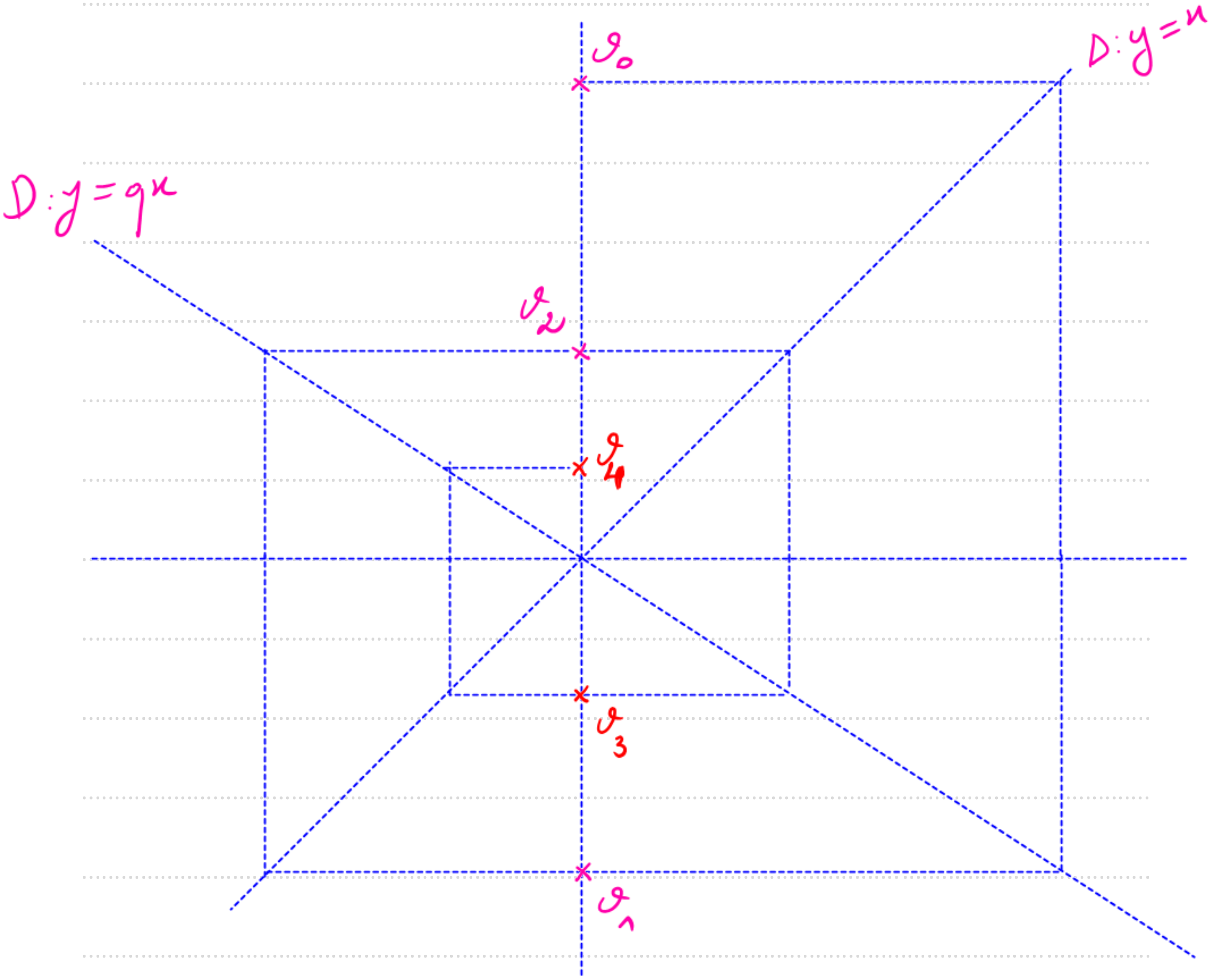
$y = qx$

$v_1 = q v_0 \longrightarrow x = v_0$

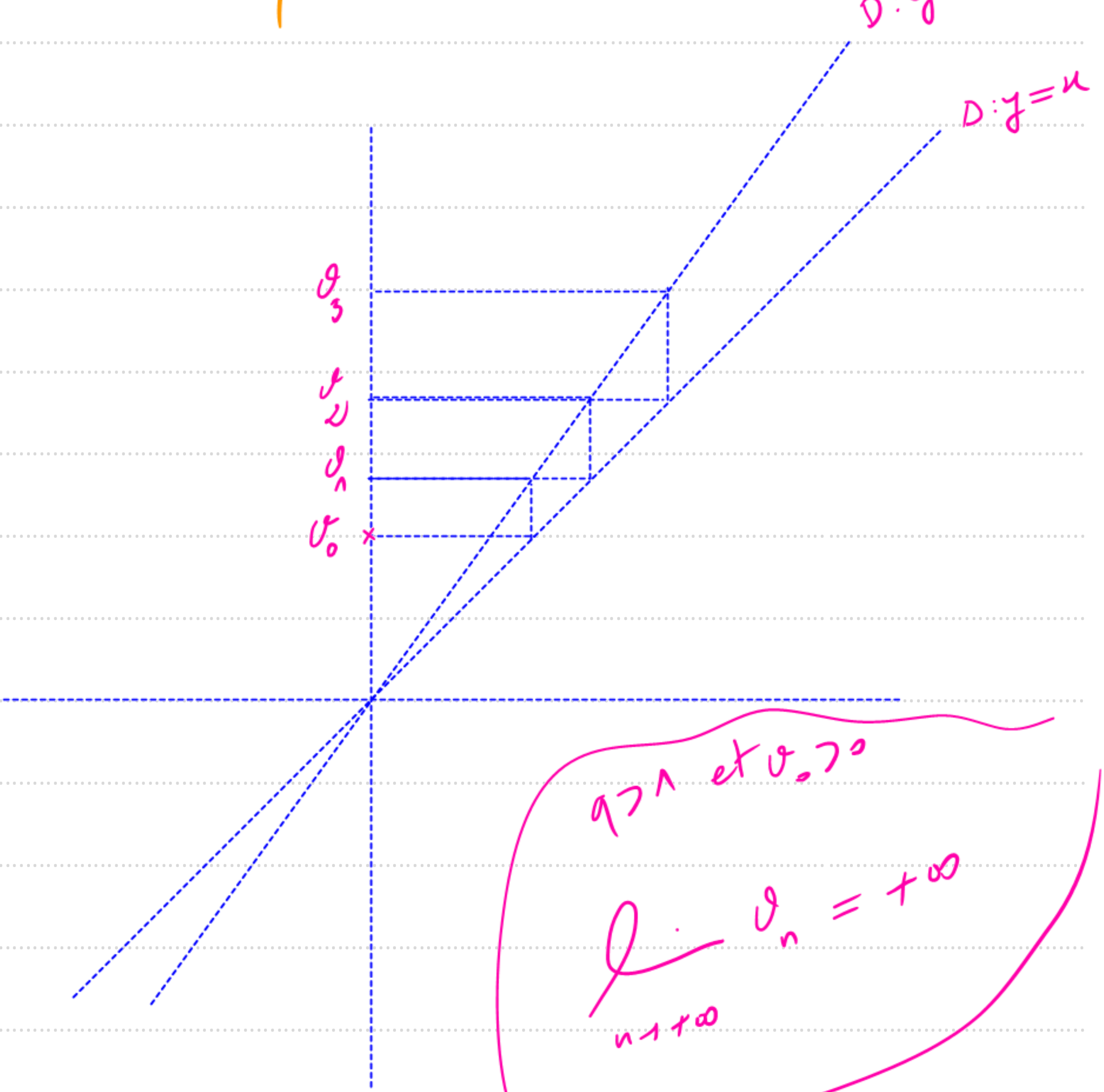
$(v_0, v_1) \in D : y = qx$

$D: y = qx$

$-1 < q < 0$



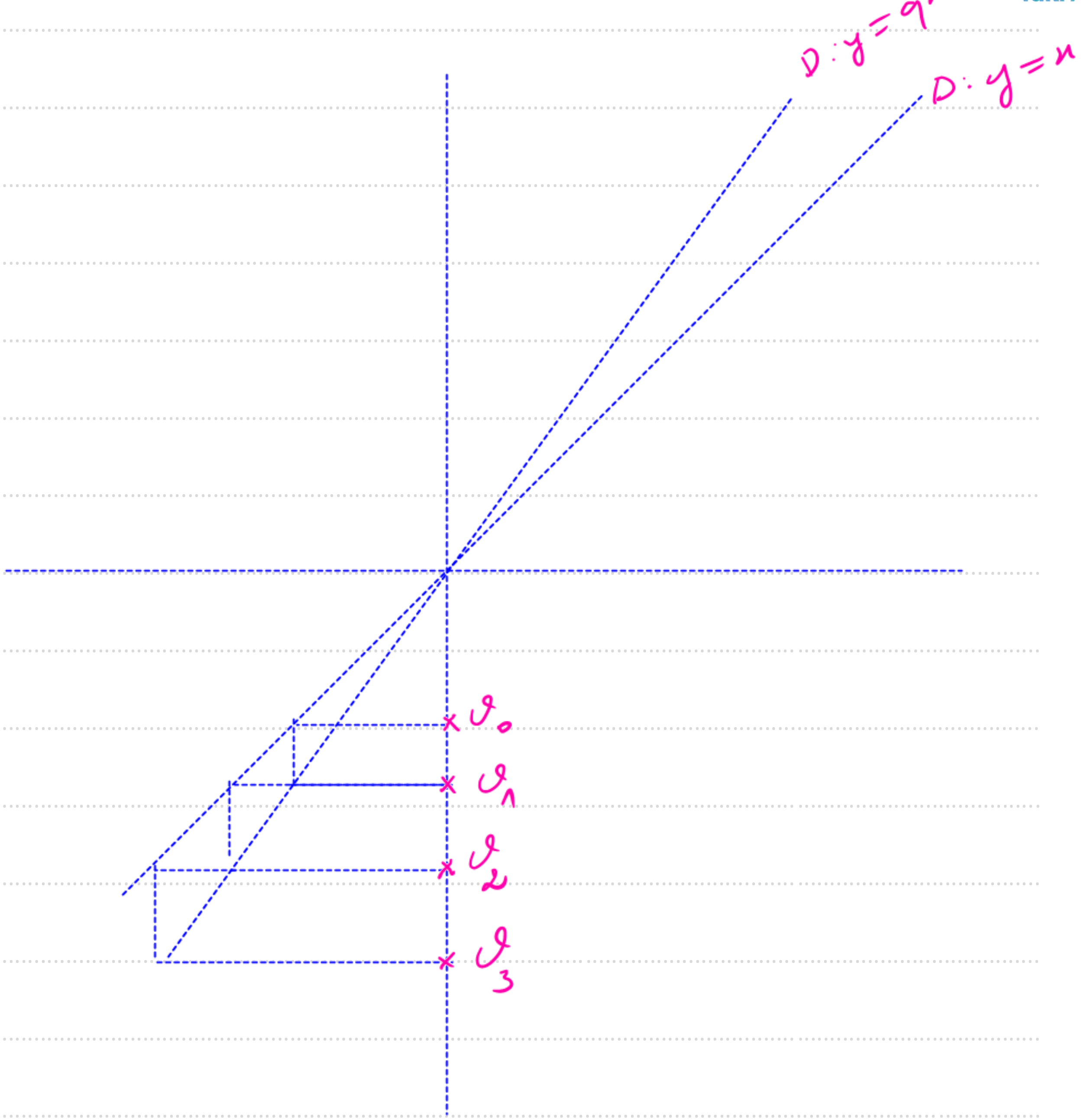
$q > 1$ et $v_0 > 0$



$q > 1$ et $v_0 > 0$

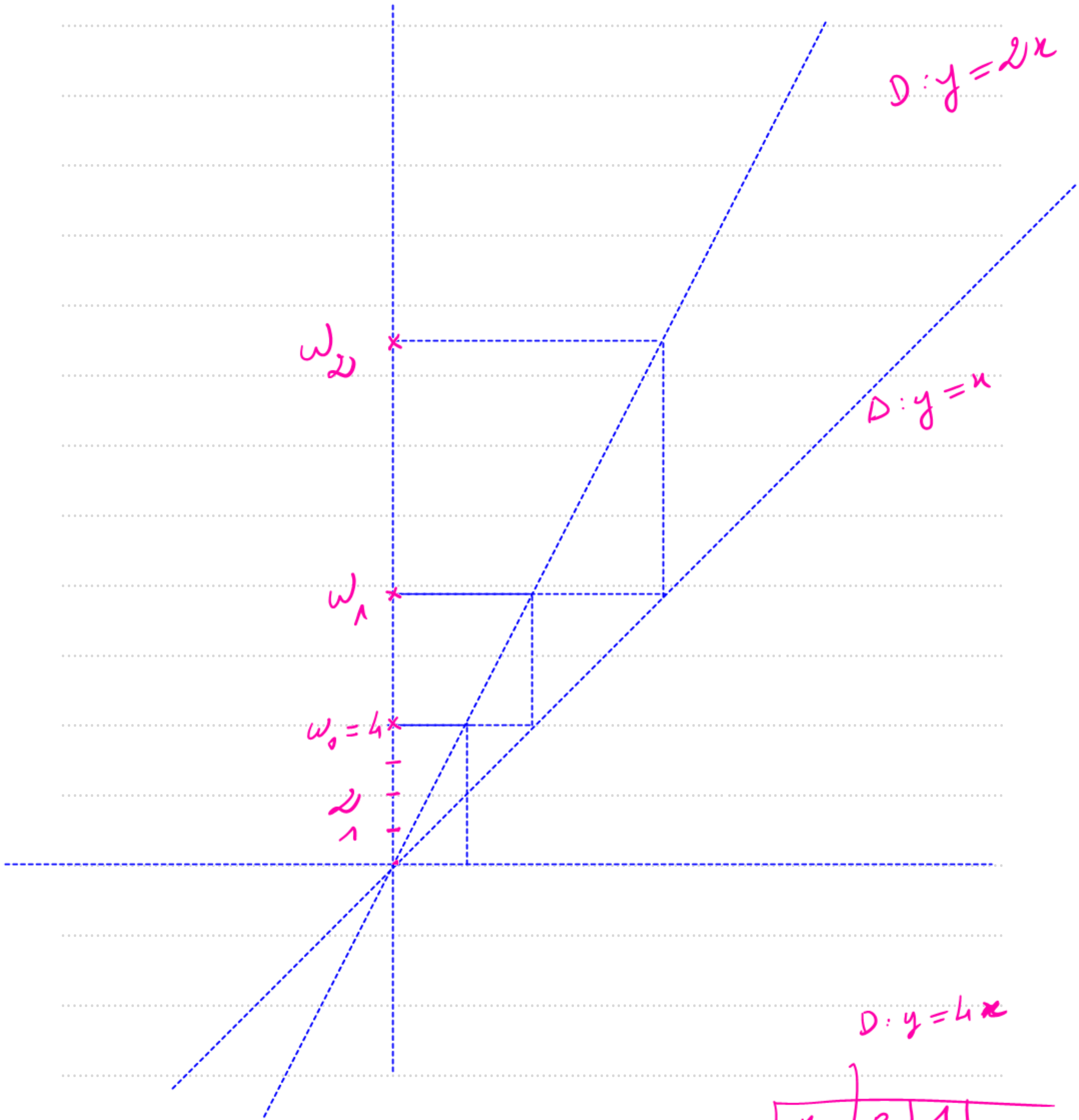
$$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$$

$a > 1$ et $v_0 < 0$



c) Représenter les quatre 1^{ers} termes de la suite w dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit $D : y = x$ et $D : y = 2x$



$D : y = 4x$

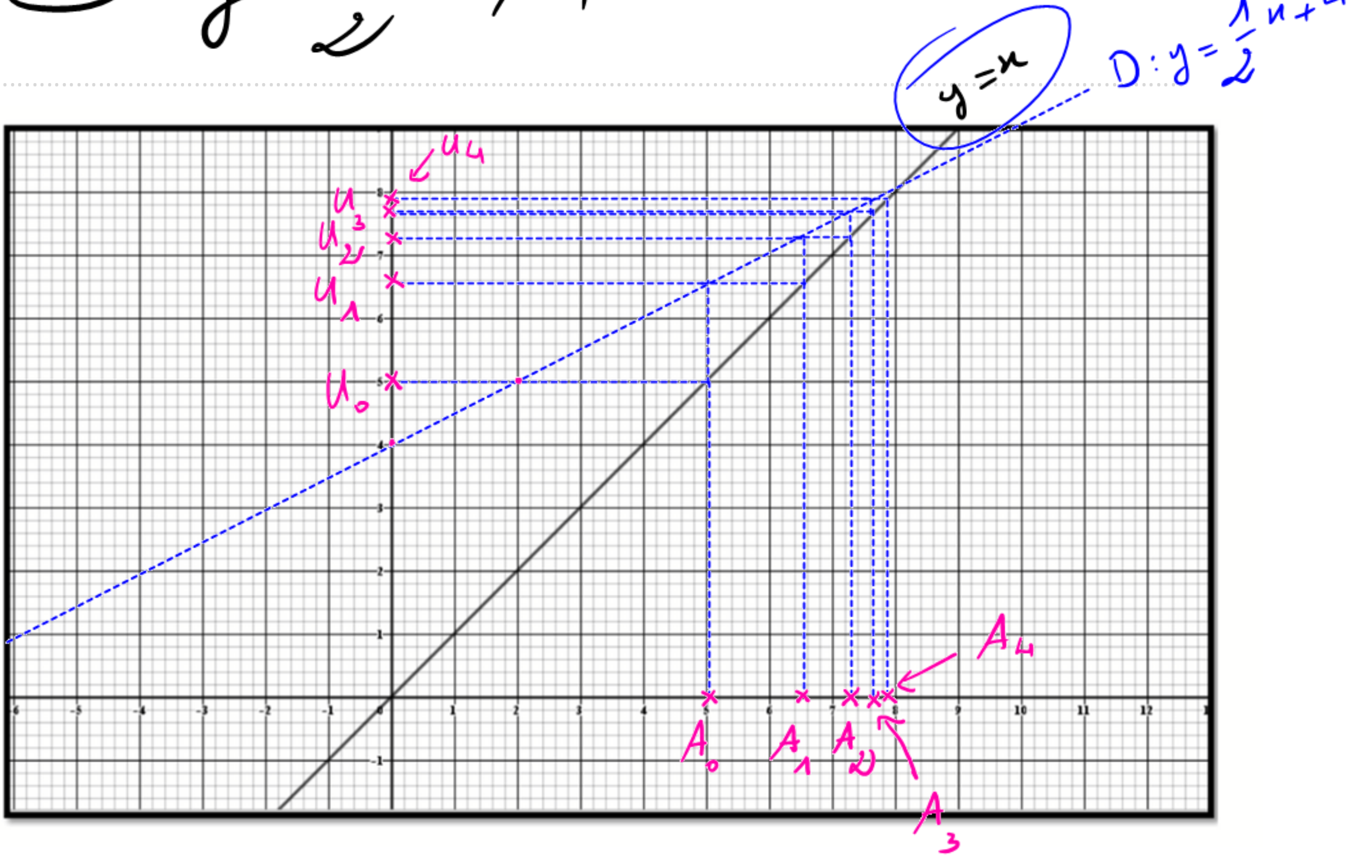
x	0	1	
y	0	2	

Taki Academy

Partie B

1- Construire, en donnant son équation, la deuxième droite associée à la suite (U_n) définie dans la **partie A**

$D : y = \frac{1}{2}x + 4$



$A_n(U_n, 0)$ $\qquad$ $A_0(U_0, 0)$

$x = U_n \longrightarrow y = U_{n+1}$

Taki Academy

$$U_n = f(n) \xrightarrow{\text{exple}} U_n = \frac{1}{3}n^2 + n - 1$$

$$U_{n+1} = f(U_n) \xrightarrow{\text{exple}} \boxed{U_{n+1} = 2U_n - 3}$$