Suites réelles

Exercice 4 | 25 min | 20 pt

Soit $(U_{n\in IN})$ la suite définie sur IN par: $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2} = f(U_n) \end{cases}$

1) calculer U_1 et U_2

*) $U_1 = U_{0+1}$

$= \frac{1}{2}U_0 + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2}$

$= 1 + \frac{1}{2}$

$= \boxed{\frac{3}{2}}$

*) $U_2 = U_{1+1}$

$= \frac{1}{2} U_1 + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

$= \boxed{\frac{5}{4}}$

Soit U_p, U_{p+1} et U_{p+2} trois termes consécutifs d'une suite (U_n)

*) (U_n) est arithmétique ssi

$\forall p \in \mathbb{N} \quad U_p + U_{p+2} = 2U_{p+1}$

*) (U_n) est géométrique ssi :

$\forall p \in \mathbb{N} \quad U_p \times U_{p+2} = U_{p+1}^2$

$\underbrace{U_0 \,,\, \overset{\times 2}{U_1} \,,\, U_2}_{\neq}$

2) montrer que U n'est pas ni arithmétique ni géométrique

$$\begin{cases} U_0 + U_2 = 2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4} \\ 2U_1 = 2 \times \frac{3}{2} = 3 \end{cases}$$

donc $U_0 + U_2 \neq 2U_1$

alors $\boxed{(U_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$

$$\begin{cases} U_0 \times U_2 = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2} \\ U_1^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

donc $U_0 \times U_2 \neq U_1^2$

alors $\boxed{(U_n) \text{ n'est pas géométrique}}$

Ou bien

$$\begin{cases} U_2 - U_1 = \frac{5}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4} \\ U_1 - U_0 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$$

Alors $\boxed{(U_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$

$$\begin{cases} \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{5}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{6} \\[2ex] \dfrac{U_1}{U_0} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$\dfrac{U_2}{U_1} \neq \dfrac{U_1}{U_0}$ alors $\boxed{(U_n) \text{ n'est pas géométrique}}$

quelque soit / pour tout

3) soit la suite V définie par $V_n = U_n - 1 \quad \forall n \in IN$

a) montrer que V est une suite géométrique que l'on précisera son premier terme et sa raison.

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = r \quad \text{arith} \\ v_{n+1} = \dots = q v_n \quad \text{géo} \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - 1$

$= \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} - 1$

$= \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} (u_n - 1)$

$= \frac{1}{2} v_n$

Donc v est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

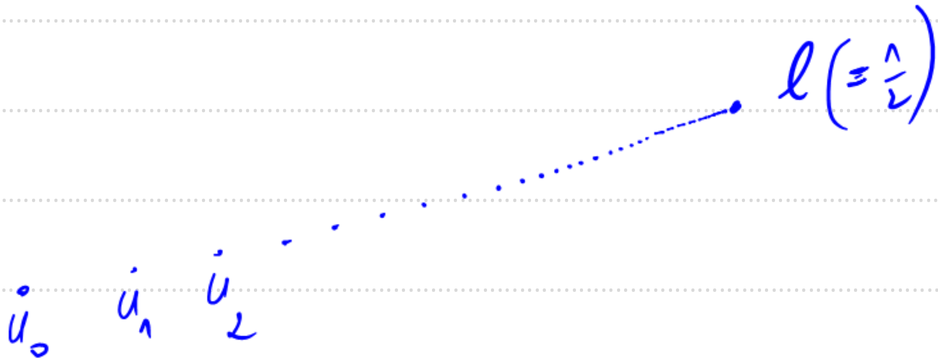
*) $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n}$

Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

*) $v_n = u_n - 1 \iff u_n = v_n + 1$

$\iff \boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$

Limites



Suite arith.

$$U_n = U_0 + nr$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r>0 \\ -\infty & \text{si } r<0 \\ U_0 & \text{si } r=0 \end{cases}$$

$$U_0 = U_1 = \cdots = U_{1000} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \text{constante} = \text{constante} \quad \left(\lim_{n\to+\infty} 1 = 1\right)$$

qui ne dépend pas de n

$$U_0 = U_1 = U_2 = \cdots = U_{10} = \cdots = U_{1000000}$$

Suite géom.

$$U_n = U_0 \, \boxed{q}^{\,n}$$

$q \in \mathbb{R}$ raison

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} U_0 \times \lim_{n\to+\infty} q^n = U_0 \lim_{n\to+\infty} q^n$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$:

- $\xrightarrow{q \leq -1}$ n'existe pas $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ n'existe pas
- $\xrightarrow{-1 < q < 1}$ $0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$
- $\xrightarrow{q = 1}$ $1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = U_0$

  $1^n = 1$
- $\xrightarrow{q > 1}$ $+\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } U_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } U_0 < 0 \end{cases}$

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$

$$n \xrightarrow[\neq]{} +\infty \neq n = +\infty$$

c) Calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$

$$\lim_{n\to+\infty} (U_n + V_n) = \lim_{n\to+\infty} U_n + \lim_{n\to+\infty} V_n$$

q^n

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \lim_{n\to+\infty} 1$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$$

$\lim_{n\to+\infty} q^n$

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

0

d'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 0 + 1 = 1}$

$(\sqrt{3})^n \longrightarrow +\infty$

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

d) Calculer $S = U_3 + U_4 + \ldots + U_{20}$

$$v_n = u_n - 1 \iff u_n = v_n + 1$$

$$S = (v_3 + 1) + (v_4 + 1) + \cdots + (v_{20} + 1)$$

$$= \underbrace{v_3 + v_4 + \cdots + v_{20}} + 1 \times \underbrace{(20 - 3 + 1)}_{\text{nbre de termes}}$$

$$= v_3 \frac{1 - q^{20-3+1}}{1-q} + 18$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{18}}{\frac{1}{2}} + 18$$

$$= \frac{1}{8} \times 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{18}\right) + 18$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{18}\right) + 18}$$

u_0 u_1 u_2

$U_{999999} = 0,00000001$

$U_{1000000} = 0,900000000001$

0

Exercice 5 25 min 20 pt

Soit la suite géométrique U définie sur IN tels que $U_0=1$ et $U_3 = 27$

1) a) déterminer la raison de cette suite

$U_3 = U_0 \times q^3$

s.g. $U_n = U_p\, q^{n-p}$ / s.a. $U_n = U_p + (n-p)r$

$\Leftrightarrow 27 = q^3$

$\Leftrightarrow \boxed{q = 3}$

b) exprimer U_n en fonction de n

$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0 \times q^n$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = 3^n}$

c) calculer la somme $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}$, $n \geq 1$.

$$S_n = \underbrace{U_0}_{1} \frac{1 - q^{n-1-0+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1-3^n}{1-3}$$

Donc $\forall n \geq 1,\ S_n = -\frac{1}{2}(1 - 3^n)$

$= \frac{1}{2}(3^n - 1)$

s.g:

$$S = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \dots + U_n$$

$$= \begin{cases} U_p \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ U_p \times (n - p + 1) & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

2) on considère la suite V définie sur IN par : $V_n = 3^n + 2$

a) calculer V_0, V_1 et V_2

$v_0 = 3^0 + 2 = 1 + 2 = \boxed{3}$

$v_1 = 3^1 + 2 = \boxed{5}$

$v_2 = 3^2 + 2 = \boxed{11}$

b) la suite V est-elle arithmétiques ? Géométrique ?

$$\begin{cases} v_0 + v_2 = 3 + 11 = 14 \\ 2v_1 = 2 \times 5 = 10 \end{cases}$$

Comme $v_0 + v_2 \neq 2v_1$

alors $\boxed{(v_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$

$$\begin{cases} v_0 \times v_2 = 3 \times 11 = 33 \\ v_1^2 = 5^2 = 25 \end{cases}$$

Comme $v_0 \times v_2 \neq v_1^2$

alors $\boxed{(v_n) \text{ n'est pas géométrique}}$

3) soit la somme $T_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1}$, $n \geq 1$.

a) Montrer que $T_n = S_n + 2n$

On remarque que $\boxed{v_n = u_n + 2}$, $\forall n \geq 0$

donc $T_n = \boxed{v_0} + \boxed{v_1} + \ldots + \boxed{v_{n-1}}$

$= \boxed{(u_0 + 2)} + \boxed{(u_1 + 2)} + \ldots + \boxed{(u_{n-1} + 2)}$

$$= \underbrace{U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}} + 2 \times (n \cancel{-1} - 0 \cancel{+1})$$

nbre de termes

$$= S_n + 2n$$

Ainsi $\boxed{\forall n \geq 0,\ T_n = S_n + 2n}$

b) en déduire l'expression de T_n en fonction de n.

On a $T_n = S_n + 2n$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) + 2n}$$

limite de S_n ?

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{2}}_{>0}\Big(\underbrace{\underbrace{\boxed{3^n}}_{+\infty}-1}_{+\infty}\Big) \qquad q^n$$

$$q^n \quad \begin{cases} -1<q<1 \\ q\leq -1 \\ q=1 \\ q>1 \end{cases} \qquad q^n$$

On a $3>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \boxed{+\infty}$

Limite de T_n ?

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n + 2n)$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to+\infty} S_n}_{+\infty} + \underbrace{\lim_{\boxed{n\to+\infty}} 2n}_{+\infty}$$

$$= \boxed{+\infty}$$