

Representação Decimal de Números Reais

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org



Números reais podem ser “quebrados” em somas!

$1,234 \dots$



Números reais podem ser “quebrados” em somas!

$$1,234 \dots$$

$$=$$

$$1 + 0,2 + 0,03 + 0,004 + \dots$$



A noção de representação decimal

Uma *representação decimal* do número real não negativo x é uma soma (possivelmente infinita) da forma

$$d_0 + d_{-1} 10^{-1} + \cdots + d_{-n} 10^{-n} + \cdots = x$$

sendo d_0 é um inteiro não negativo e $d_{-n} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, onde $n = 1, 2, \dots$.

Por construção,

$$x = \underbrace{d_0}_{\text{parte inteira}} + \underbrace{0, d_{-1} d_{-2} d_{-3} \cdots}_{\text{parte fracionária}}$$

Notação:

$$x = d_0, d_{-1} d_{-2} d_{-3} \cdots$$

ou

$$x = (d_0, d_{-1} d_{-2} d_{-3} \cdots)_{10}$$



Exemplo: número inteiro

- $x_1 = 17$



Exemplo: número inteiro

- $x_1 = 17$

$$17 = 17 + 0,0$$



Exemplo: número inteiro

- $x_1 = 17$

$$17 = 17 + 0,0$$

$$x_1 = (17, 0)_{10}$$



Exemplo: número inteiro

- $x_1 = 17$

$$17 = 17 + 0,0$$

$$x_1 = (17, 0)_{10}$$

⇒ Representação finita



Exemplo: racional tipo fração exata

- $x_2 = 1/2$



Exemplo: racional tipo fração exata

- $x_2 = 1/2$

$$1/2 = 0,5$$



Exemplo: racional tipo fração exata

- $x_2 = 1/2$

$$1/2 = 0,5$$

$$x_2 = (0,5)_{10}$$



Exemplo: racional tipo fração exata

- $x_2 = 1/2$

$$1/2 = 0,5$$

$$x_2 = (0,5)_{10}$$

\Rightarrow Representação finita



Exemplo: outro racional tipo fração exata

- $x_3 = 25/4$



Exemplo: outro racional tipo fração exata

- $x_3 = 25/4$

$$25/4 = (24 + 1)/4 = 24/4 + 1/4 = 6 + 0,25$$



Exemplo: outro racional tipo fração exata

- $x_3 = 25/4$

$$25/4 = (24 + 1)/4 = 24/4 + 1/4 = 6 + 0,25$$

$$x_3 = (6,25)_{10}$$



Exemplo: outro racional tipo fração exata

- $x_3 = 25/4$

$$25/4 = (24 + 1)/4 = 24/4 + 1/4 = 6 + 0,25$$

$$x_3 = (6,25)_{10}$$

\Rightarrow Representação finita



Exemplo: racional tipo dízima periódica

- $x_4 = 1/3$



Exemplo: racional tipo dízima periódica

- $x_4 = 1/3$

$$1/3 = 0,333\ldots = 0 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + \ldots$$



Exemplo: racional tipo dízima periódica

- $x_4 = 1/3$

$$1/3 = 0,333\ldots = 0 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + \ldots$$

$$x_4 = (0,3333\ldots)_{10} = (0,\overline{3})_{10}$$



Exemplo: racional tipo dízima periódica

- $x_4 = 1/3$

$$1/3 = 0,333\ldots = 0 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + \ldots$$

$$x_4 = (0,3333\ldots)_{10} = (0,\overline{3})_{10}$$

⇒ Representação infinita periódica



Exemplo: irracional

- $x_5 = \pi$



Exemplo: irracional

- $x_5 = \pi$

$$\pi = 3,1415\dots = 3 + 0,1 + 0,04 + 0,001 + 0,0005 + \dots$$



Exemplo: irracional

- $x_5 = \pi$

$$\pi = 3,1415\dots = 3+0,1+0,04+0,001+0,0005+\dots$$

$$x_5 = (3,141592\dots)_{10}$$



Exemplo: irracional

- $x_5 = \pi$

$$\pi = 3,1415\dots = 3 + 0,1 + 0,04 + 0,001 + 0,0005 + \dots$$

$$x_5 = (3,141592\dots)_{10}$$

\implies Representação infinita aperiódica



O curioso caso de $x = 0,9999\ldots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\ldots$ então

- $x < 1$
- $x = 1$
- $x > 1$



O curioso caso de $x = 0,9999\ldots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\ldots$ então

- $x < 1$
- $x = 1$
- $x > 1$



O curioso caso de $x = 0,9999\ldots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\ldots$ então

- $x < 1$
- $x = 1$
- $x > 1$

Prova:



O curioso caso de $x = 0,9999\dots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\dots$ então

- $x < 1$
- **$x = 1$**
- $x > 1$

Prova:

$$10x = 9,9999\dots$$



O curioso caso de $x = 0,9999\dots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\dots$ então

- $x < 1$
- **$x = 1$**
- $x > 1$

Prova:

$$10x = 9,9999\dots$$

$$- x = 0,9999\dots$$



O curioso caso de $x = 0,9999\dots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\dots$ então

- $x < 1$
- **$x = 1$**
- $x > 1$

Prova:

$$10x = 9,9999\dots$$

$$- x = 0,9999\dots$$



O curioso caso de $x = 0,9999\dots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\dots$ então

- $x < 1$
- **$x = 1$**
- $x > 1$

Prova:

$$10x = 9,9999\dots$$

$$- x = 0,9999\dots$$

$$9x = 9$$



O curioso caso de $x = 0,9999\dots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\dots$ então

- $x < 1$
- **$x = 1$**
- $x > 1$

Prova:

$$10x = 9,9999\dots$$

$$- x = 0,9999\dots$$

$$9x = 9$$

$$\Rightarrow x = 1$$



O curioso caso de $x = 0,9999\dots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\dots$ então

- $x < 1$
- **$x = 1$**
- $x > 1$

Prova:

$$10x = 9,9999\dots$$

$$- x = 0,9999\dots$$

$$9x = 9$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$x = 1$ tem duas representações decimais!

- $x = (1,000\dots)_{10}$
- $x = (0,999\dots)_{10}$



Fatos sobre representação decimal

- *Racionais tem representação finita ou infinita periódica*
- *Irracionais tem representação infinita aperiódica*
- *Reais, em geral, tem representação não única (mais de uma)*



Para pensar em casa ...

Quais afirmações são verdadeiras?

Se $x = 2,122001\cdots$ e $y = 2,1220010\cdots$, então

- $x = y$
- $x > y$
- $|x - y| < 10^{-6}$

E se tivermos $x = 2,122001\cdots$ e $y = 2,122003\cdots$?

- $x - y = 0,000002$
- $|x - y| < 10^{-4}$
- $x < y$



Como citar esse material?

A. Cunha, *Representação Decimal de Números Reais*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2020.

Essas notas de aula podem ser compartilhadas nos termos da licença Creative Commons BY-NC-ND 3.0, com propósitos exclusivamente educacionais.

