Eliminação Gaussiana

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

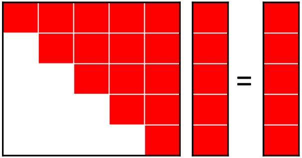
americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org

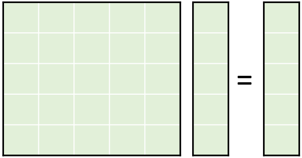
@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr

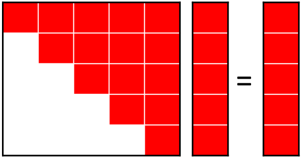
Num sistema linear triangular existe um desacoplamento entre as equações que facilita a solução!



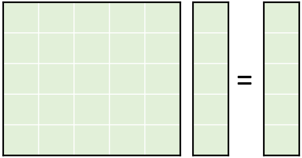
Num sistema linear "cheio" não existe tal desacoplamento!



Num sistema linear triangular existe um desacoplamento entre as equações que facilita a solução!



Num sistema linear “cheio” não existe tal desacoplamento!



Como proceder nesse caso?

Sistema $n \times n$ "cheio"

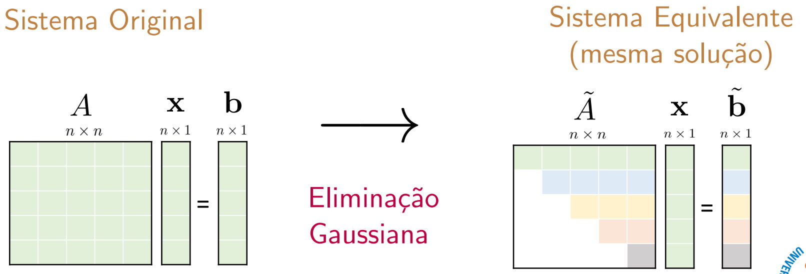
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- A matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *é "cheia"*, i.e., *não tem uma estrutura especial com muitos zeros*;
- Esse é um sistema linear onde as *equações são acopladas*, em geral cada equação depende de todas as demais equações;
- O *método direto* padrão para resolver esse tipo de sistema linear é chamada *eliminação gaussiana*.

Eliminação Gaussiana

Ideia do método:

- Transformar o sistema "cheio" num sistema triangular que seja equivalente ao sistema original (tenha a mesma solução);
- Resolver o sistema triangular por substituição.

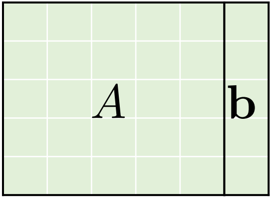


Como transformar um sistema “cheio” num triangular?

Através de uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas/colunas de posição;
- multiplicar uma linha/coluna por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha/coluna a outra linha/coluna.

O sistema original, em formato estendido, é alterado coluna por coluna até chegar num formato triangular superior equivalente:

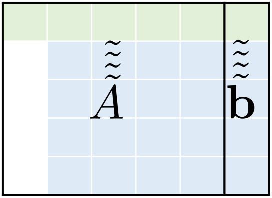


Como transformar um sistema “cheio” num triangular?

Através de uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas/colunas de posição;
- multiplicar uma linha/coluna por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha/coluna a outra linha/coluna.

O sistema original, em formato estendido, é alterado coluna por coluna até chegar num formato triangular superior equivalente:

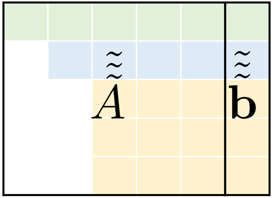


Como transformar um sistema “cheio” num triangular?

Através de uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas/colunas de posição;
- multiplicar uma linha/coluna por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha/coluna a outra linha/coluna.

O sistema original, em formato estendido, é alterado coluna por coluna até chegar num formato triangular superior equivalente:

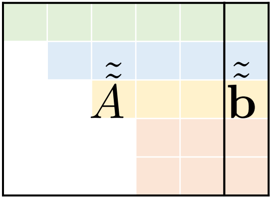


Como transformar um sistema “cheio” num triangular?

Através de uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas/colunas de posição;
- multiplicar uma linha/coluna por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha/coluna a outra linha/coluna.

O sistema original, em formato estendido, é alterado coluna por coluna até chegar num formato triangular superior equivalente:

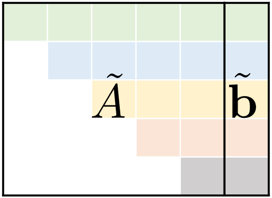


Como transformar um sistema “cheio” num triangular?

Através de uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas/colunas de posição;
- multiplicar uma linha/coluna por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha/coluna a outra linha/coluna.

O sistema original, em formato estendido, é alterado coluna por coluna até chegar num formato triangular superior equivalente:



O procedimento de eliminação

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{(1)} & \mathbf{b}^{(1)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

O procedimento de eliminação

Passo 1: anular todos os elementos abaixo do pivô $a_{11}^{(1)}$:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{(1)} & \mathbf{b}^{(1)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

Para $i = 2, \ldots, n$, atualize as linhas segundo:

$$L_i^{(2)} \leftarrow L_i^{(1)} - \frac{a_{i\,1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)}$$

O procedimento de eliminação

$$
\left[\begin{array}{c|c} A^{(2)} & \mathbf{b}^{(2)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccc|c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)}
\end{array}\right]
$$

O procedimento de eliminação

Passo 2: anular todos os elementos abaixo do pivô $a_{22}^{(2)}$:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{(2)} & \mathbf{b}^{(2)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

Para $i = 3, \ldots, n$, atualize as linhas segundo:

$$L_i^{(3)} \leftarrow L_i^{(2)} - \frac{a_{i\,2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} L_2^{(2)}$$

O procedimento de eliminação

$$
\left[\begin{array}{c|c} A^{(3)} & \mathbf{b}^{(3)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccc|c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)}
\end{array}\right]
$$

O procedimento de eliminação

Passo 3: anular todos os elementos abaixo do pivô $a_{33}^{(3)}$:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{(3)} & \mathbf{b}^{(3)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_{1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_{2}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_{3}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_{n}^{(3)} \end{array}\right]$$

Para $i = 4, \ldots, n$, atualize as linhas segundo:

$$L_i^{(4)} \leftarrow L_i^{(3)} - \frac{a_{i\,3}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} L_3^{(3)}$$

O procedimento de eliminação

$$
\left[\begin{array}{c|c} A^{(4)} & \mathbf{b}^{(4)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(4)} & b_n^{(4)}
\end{array}\right]
$$

O procedimento de eliminação

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{(4)} & \mathbf{b}^{(4)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(4)} & b_n^{(4)} \end{array}\right]$$

... continua até a coluna $(n-1)$

O procedimento de eliminação

A *fórmula geral da eliminação gaussiana* é dada por

$$L_i^{(k+1)} \leftarrow L_i^{(k)} - \frac{a_{i\,k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)}$$

onde $k = 1, 2, \cdots, n-1$

Algoritmo para a eliminação gaussiana

Input: A, $\mathbf{b}$

```
Compute the length of b
for k=1:n-1 do
    for i=k+1:n do
        l_ik = -a_ik / a_kk
        for j=1:n do
            a_ij = a_ij + l_ik a_kj
        end for
        b_i = b_i + l_ik b_k
    end for
end for
Compute x with backward substitution
return
```

Output: $\mathbf{x}$

Esse algoritmo tem uma implementação pedagógica da eliminação gaussiana, não é o mais eficiente do ponto de vista computacional.

Implementação em GNU Octave

```
function [x,A,b] = gausselim(A,b)
   n = length(b);
   for k=1:n-1
      for i=k+1:n
         Lik = -A(i,k)/A(k,k);
         for j=1:n
            A(i,j) = A(i,j) + Lik*A(k,j);
         end
         b(i) = b(i) + Lik*b(k);
      end
   end
   x = backwardsub(A,b);
end
```

Experimento Computacional 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [2 1 -1; -3 -1 2; -2 1 2];
>> b = [8; -11; -3];
>> [x,A,b] = gausselim(A,b)
```

Experimento Computacional 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [1 2 3 4; 2 1 4 3; 3 2 1 4; 4 3 2 1];
>> b = A*ones(4,1);
>> [x,A,b] = gausselim(A,b)
```

Experimento Computacional 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [1 1 1; 1 1 2; 1 2 2];
>> b = [1; 2; 1];
>> [x,A,b] = gausselim(A,b)
```

Qual o problema nesse último experimento?

Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:

Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{\mathbf{0}} L_2$$

Divisão por zero, perigo!

Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{\mathbf{0}} L_2$$

Divisão por zero, perigo!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \text{NaN} & \text{NaN} & -\infty & -\infty \end{array}\right]$$

Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{\mathbf{0}} L_2$$

Divisão por zero, perigo!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \text{NaN} & \text{NaN} & -\infty & -\infty \end{array}\right]$$

Os demais cálculos são comprometidos por NaN e $-\infty$.

Para pensar em casa ...

Exercício computacional:

Pense num algoritmo mais eficiente (em termos de processamento e uso de memória) para implementar a eliminação gaussiana. Implemente esse algoritmo no ambiente GNU Octave.

Exercício computacional:

Pense num algoritmo para a eliminação gaussiana que resolva o problema de ter um denominador nulo durante o processo de escalonamento da matriz estendida. Implemente esse algoritmo no ambiente GNU Octave.

Mais a frente nesse curso veremos como remediar essa questão do denominador nulo.

Qual o custo computacional de um sistema cheio?

Elim. Gauss. = Triangularização + Substituição

Qual o custo computacional de um sistema cheio?

Elim. Gauss. = Triangularização + Substituição

$$\texttt{flops}\,(\textbf{Triangularização}) \approx \underbrace{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}_{\text{divisões}} + \underbrace{(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+1}_{\text{multiplicações}} + \underbrace{(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+1}_{\text{subtrações}}$$

Qual o custo computacional de um sistema cheio?

Elim. Gauss. = Triangularização + Substituição

$$
\begin{aligned}
\texttt{flops}\,(\textbf{Triangularização}) \approx\ & \underbrace{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}_{\text{divisões}} + \\
& \underbrace{(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+1}_{\text{multiplicações}} + \\
& \underbrace{(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+1}_{\text{subtrações}} \\
\sim\ & \frac{2}{3}\,n^3
\end{aligned}
$$

Qual o custo computacional de um sistema cheio?

Elim. Gauss. = Triangularização + Substituição

$$\texttt{flops}\,(\textbf{Triangularização}) \approx \underbrace{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}_{\text{divisões}} + \underbrace{(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+1}_{\text{multiplicações}} + \underbrace{(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+1}_{\text{subtrações}} \sim \frac{2}{3}\,n^3$$

Processamento:

Memória:

Qual o custo computacional de um sistema cheio?

Elim. Gauss. = Triangularização + Substituição

$$\texttt{flops}\,(\textbf{Triangularização}) \approx \underbrace{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}_{\text{divisões}} +$$

$$\underbrace{(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+1}_{\text{multiplicações}} +$$

$$\underbrace{(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+1}_{\text{subtrações}}$$

$$\sim \frac{2}{3}\,n^3$$

Processamento:

$$\texttt{flops}\,(\textbf{Gauss}) \sim \frac{2}{3}\,n^3 + n^2$$

Memória:

$$\texttt{mem}(\textbf{cheio}) = n^2 + 2\,n$$

Tempo de processamento para um sistema “cheio”

Intel Core i7 em 2011: 12×10^9 FLOPS
Intel Core i7 em 2021: 52×10^9 FLOPS

FLOPS = `flops` por segundo

n	`flops` (Elim. Gauss.)	Tempo de CPU 2011	Tempo de CPU 2021
10	767	64 ns	14 ns
10^2	$6,7 \times 10^5$	56 μs	13 μs
10^3	$6,7 \times 10^8$	56 ms	13 ms
10^4	$6,7 \times 10^{11}$	56 s	13 s
10^5	$6,7 \times 10^{14}$	15 horas	4 horas
10^6	$6,7 \times 10^{17}$	643 dias	148 dias
10^7	$6,7 \times 10^{20}$	1,7k anos	406 anos
10^8	$6,7 \times 10^{23}$	1,7M anos	406k anos

https://en.wikipedia.org/wiki/FLOPS https://www.cpubenchmark.net

Uso de memória para um sistema "cheio"

1 double = 8 bytes

n	entradas	memória
10	120	1 kB
10^2	10×10^3	80 kB
10^3	1×10^6	8 MB
10^4	100×10^6	763 MB
10^5	10×10^9	75 GB
10^6	1×10^{12}	7 TB
10^7	100×10^{12}	727 TB
10^8	1×10^{16}	71 PB

Moral sobre sistemas lineares “cheios”

1. **Sistemas lineares de grande porte em formato “cheio” são muito desafiadores em termos computacionais, tanto em tempo de processamento e quanto em uso de memória;**

2. **Os métodos iterativos ganham espaço quando não é viável usar um método direto num sistema “cheio”;**

3. **Na maioria das aplicações práticas onde sistemas de grande porte aparecem, as matrizes tem estrutura especial (e.g. tri-diagonal, penta-diagonal etc), que pode ser explorada para salvar tempo de processamento e memória;**

4. **O método numérico a ser utilizado na solução do sistema linear, bem como a estratégia de armazenamento, devem ser escolhidos com sabedoria!**

Como citar esse material?

A. Cunha, *Eliminação Gaussiana*,
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr