Fundamentos de Sistemas Lineares

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

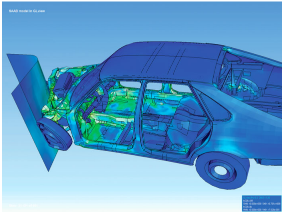
americo.cunha@uerj.br

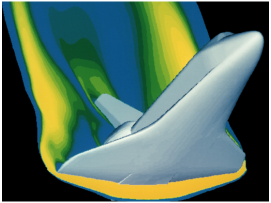
www.americocunha.org

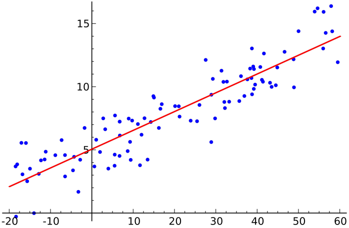
@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr

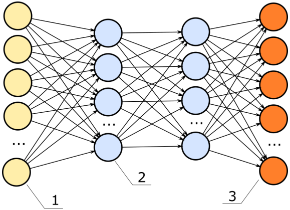
@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr

Sistemas lineares de grande porte são comuns em aplicações de engenharia e ciências!









Forma geral

Considere um conjunto que contém m equações lineares munidas de n incógnitas, ao qual vamos chamar *sistema linear com m equações e n incógnitas*, que pode ser representado como

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$ – coeficientes
- $b_i \in \mathbb{R}$ – constantes
- $x_j \in \mathbb{R}$ – incógnitas

Forma geral

Considere um conjunto que contém m equações lineares munidas de n incógnitas, ao qual vamos chamar *sistema linear com m equações e n incógnitas*, que pode ser representado como

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$ – coeficientes (números conhecidos)
- $b_i \in \mathbb{R}$ – constantes (números conhecidos)
- $x_j \in \mathbb{R}$ – incógnitas (números desconhecidos)

Versão matricial

Um sistema linear com m equações e n incógnitas também admite uma *representação matricial*:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – matriz dos coeficientes (conhecida)
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ – vetor das constantes (conhecido)
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ – vetor das incógnitas (desconhecido)

Versão vetorial

Outra forma de interpretar um sistema linear com m equações e n incógnitas é através da noção de *combinação linear de vetores*:

$$x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_2} + \cdots + x_n \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ – vetores geradores da imagem (conhecidos)
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ – vetor lado direito (conhecido)
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ – vetor incógnita (desconhecido)

A noção de solução

Uma *solução do sistema linear*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

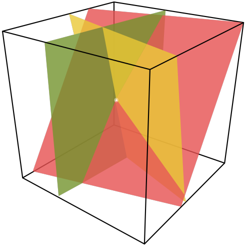
pode ser pensada de 3 formas:

1. Atribuição de valores $x_1, x_2, \cdots, x_n$ às n incógnitas, de modo que as m equações do sistema sejam verificadas;
2. Um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ que ao ser multiplicado à direita da matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ resulta no vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$;
3. Uma combinação linear das colunas de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ que gere o vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$.

O conjunto formado por todas as soluções do sistema linear é chamado *conjunto solução*.

Exemplo 1

$$\begin{aligned} x_1 + 3\,x_2 - 2\,x_3 &= 5 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_3 &= 7 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3 &= 8 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$



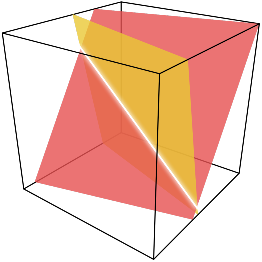
Solução:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Esse sistema possui uma única solução. O conjunto solução é um ponto em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2

$$\begin{aligned} a + b + \ \ c &= 1 \\ a + b + 2c &= 3 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$



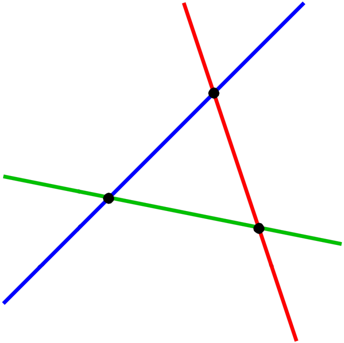
Solução:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

Esse sistema possui infinitas soluções. O conjunto solução é um sub-espaço afim em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 3

$$\begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ -3x + y &= -2 \\ -x + y &= 1 \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

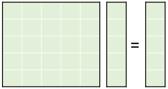


Solução:

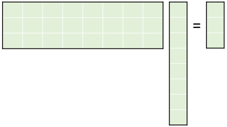
Esse sistema não possui solução. O conjunto solução é vazio.

Cenários típicos em sistemas lineares

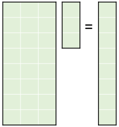
1. Sistema quadrado *(tipicamente solução única)*



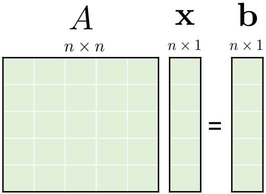
2. Sistema "baixinho e gordinho" *(tipicamente infinitas soluções)*



3. Sistema "altinho e magrinho" *(tipicamente não tem solução)*



Sistema quadrado



A solução é a *única combinação linear* das colunas de A que gera o vetor $\mathbf{b}$, i.e.,

$$x_1\,\mathbf{a}_1 + x_2\,\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

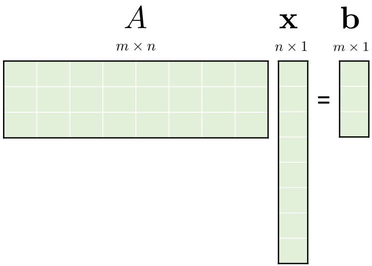
para um único vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

- Caso típico quando o sistema tem solução única;
- Solução única $\iff$ $\det A \neq 0$;
- A *solução única* é dada por

$$\boxed{\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{b}}$$

onde A^{-1} é chamada *inversa* da matriz A.

Sistema “baixinho e gordinho”



Cada solução é *uma combinação linear* das colunas de A que gera o vetor $\mathbf{b}$, i.e.,

$$x_1\,\mathbf{a}_1 + x_2\,\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

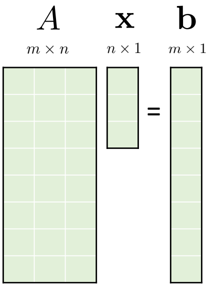
para infinitos vetores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$.

- Caso típico quando o sistema tem infinitas soluções;
- Infinitas soluções $\iff$ $\mathbf{b} \in \underbrace{\mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}}_{\text{sub-espaço gerado}}$;
- A escolha mais frequente é a *solução de menor norma*

$$\mathbf{x} = \arg\min ||\mathbf{x}||\,, \quad \text{tal que} \quad A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

“vetor solução $\mathbf{x}$ de menor tamanho”

Sistema “altinho e magrinho”



Nenhuma combinação linear das colunas de A gera o vetor $\mathbf{b}$, i.e.,

$$x_1\,\mathbf{a}_1 + x_2\,\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{a}_n \neq \mathbf{b}$$

para qualquer vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$.

- Caso típico quando o sistema não tem solução;
- Não tem solução $\iff \mathbf{b} \notin \underbrace{\text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}}_{\text{sub-espaço gerado}}$;
- Nesse caso é utilizada a *solução generalizada*

$$\boxed{\mathbf{x} = \arg\min ||A\,\mathbf{x} - \mathbf{b}||}$$

“projeção ortogonal de $\mathbf{b}$ no sub-espaço $A\,\mathbf{x}$”

Como citar esse material?

A. Cunha, *Fundamentos de Sistemas Lineares*,
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr