

# Iteração de Ponto Fixo

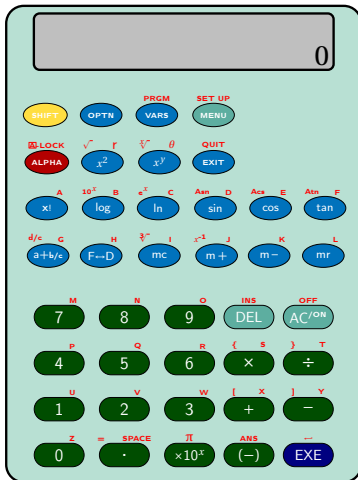
Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

[americo.cunha@uerj.br](mailto:americo.cunha@uerj.br)

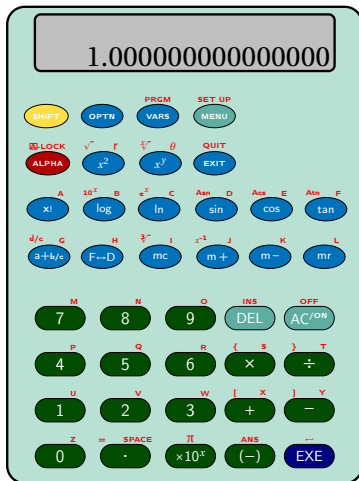
[www.americocunha.org](http://www.americocunha.org)





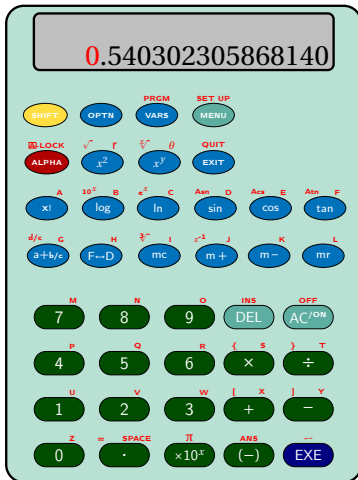
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:





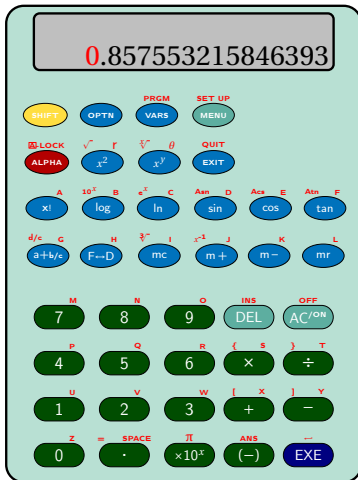
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:





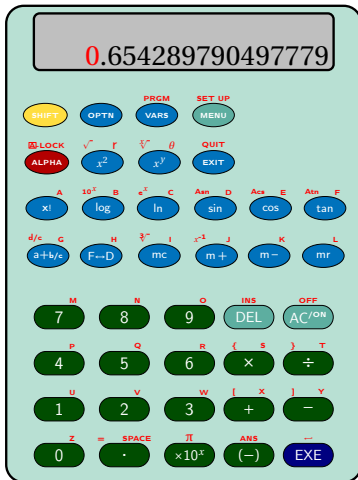
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:





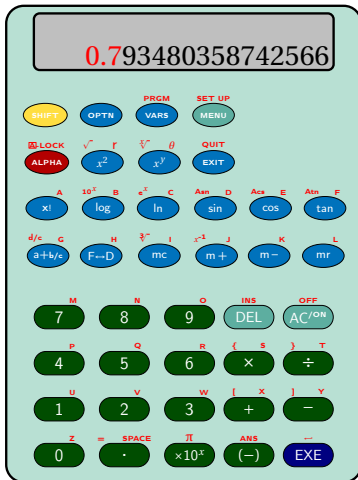
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:





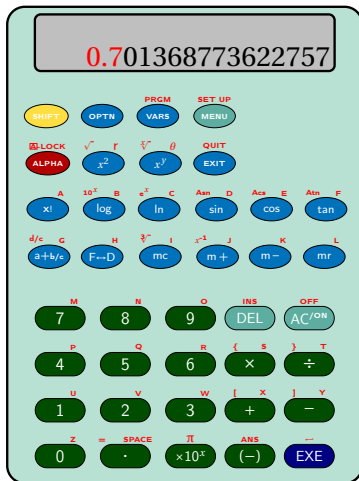
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:





Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:

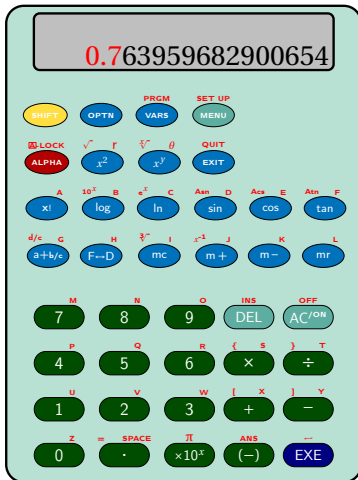




Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:

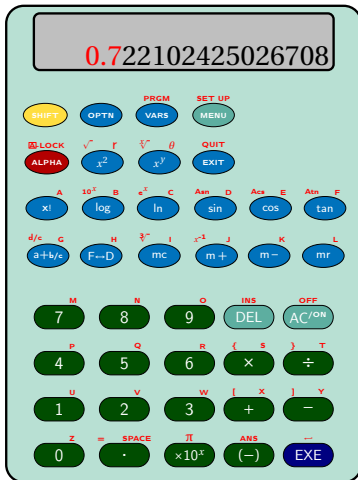






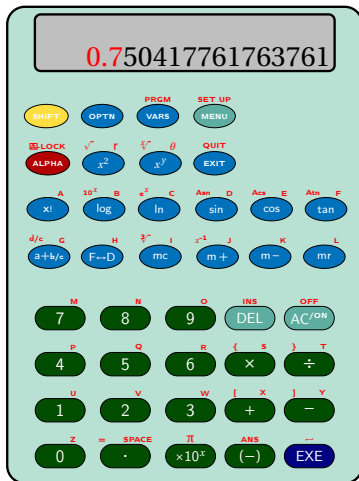
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:





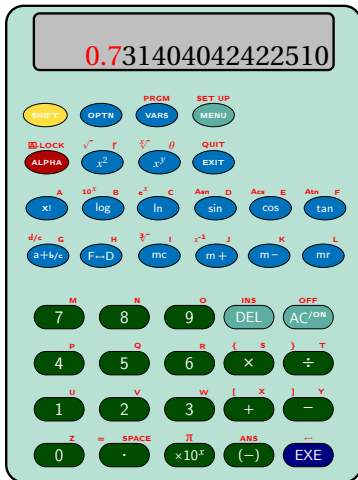
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:



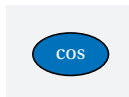


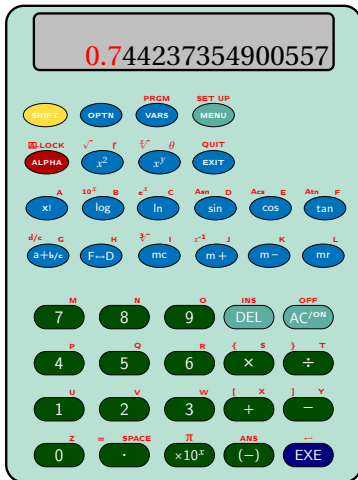
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:





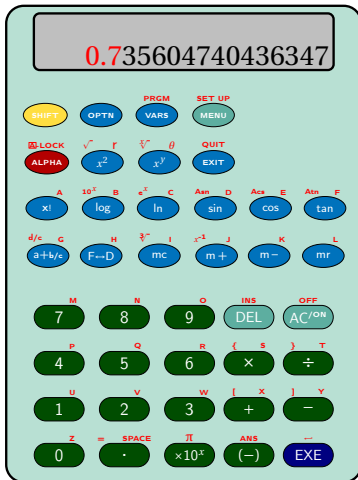
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:





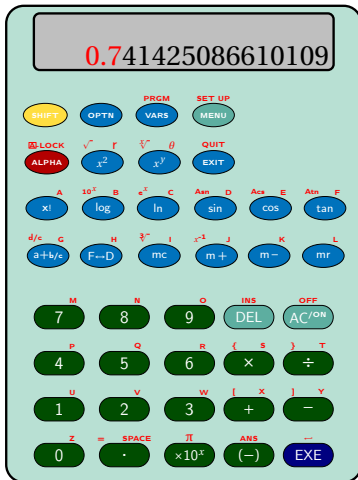
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:





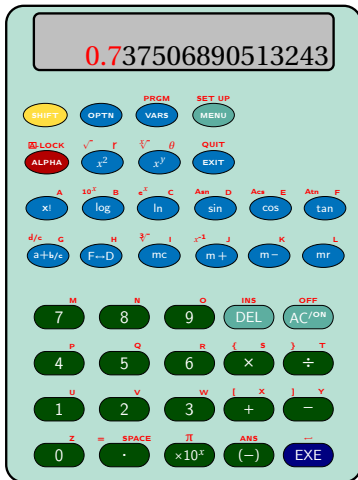
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:



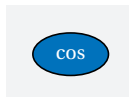


Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:

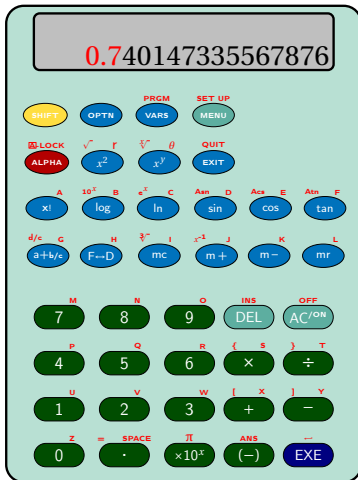




Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:

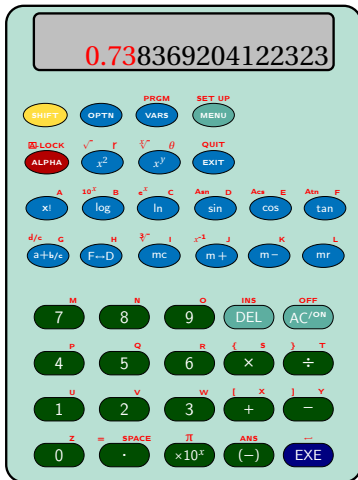




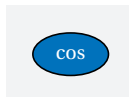


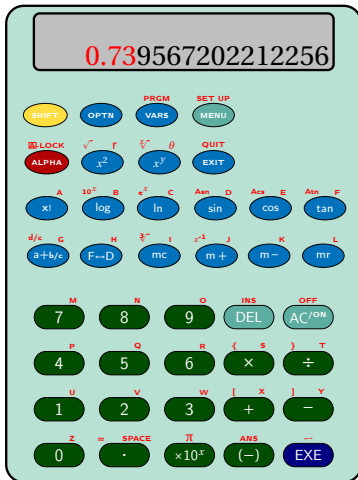
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:





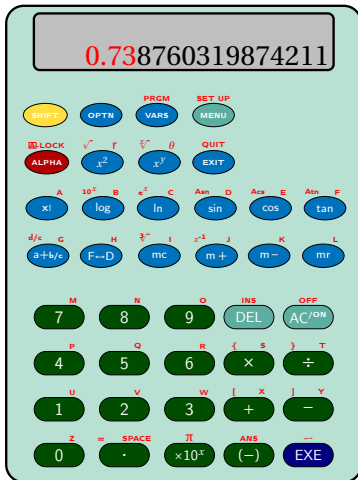
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:





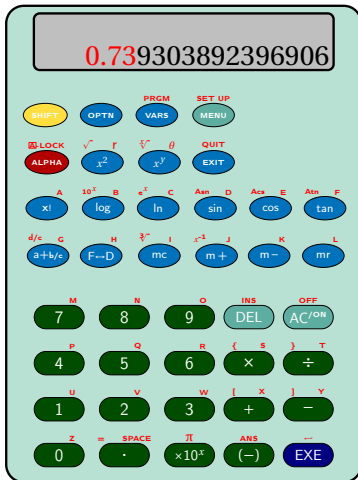
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:





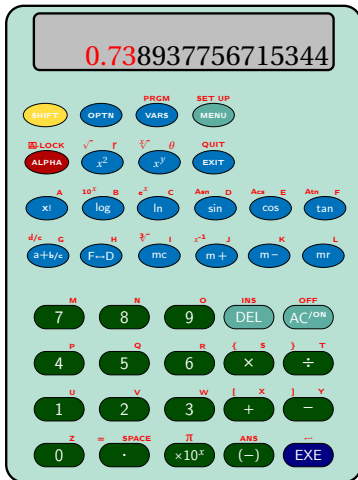
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:





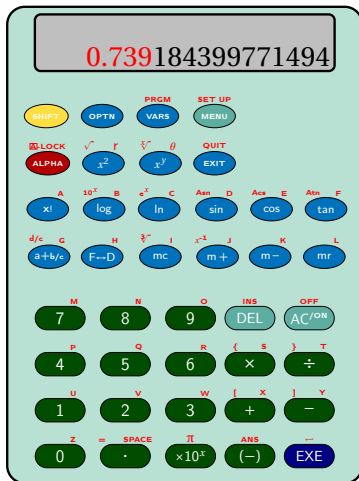
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:





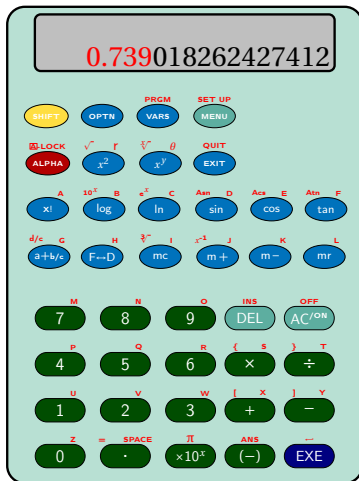
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:





Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:

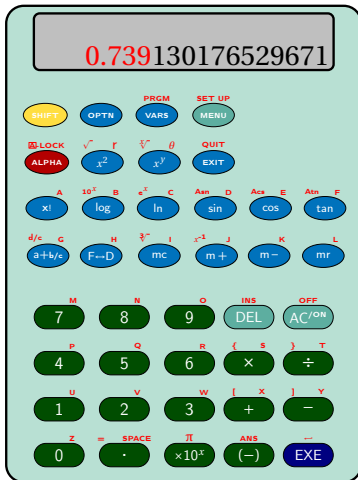




Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:

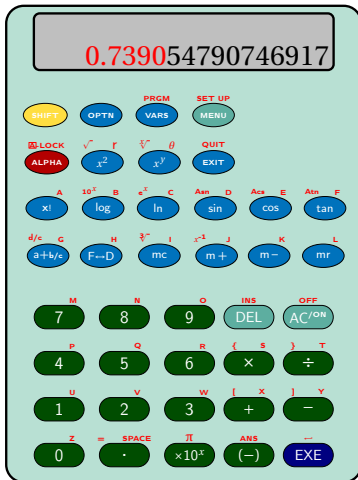






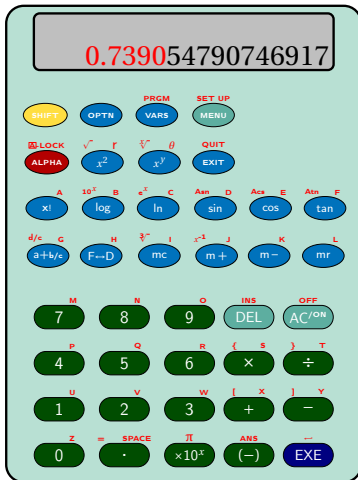
Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:





Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:





Pressione  
sucessivas vezes  
a tecla:



Esse processo encontra um  
ponto fixo da função cosseno!



# A noção de ponto fixo

Considere uma função real  $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . O escalar real  $x^* \in [a, b] \subset \mathbb{R}$  é dito um *ponto fixo* de  $g$  se

$$g(x^*) = x^*$$

## Exemplos:

$$g(x) = \cos x \quad h(x) = x^2 - 3x + 4$$

- $x^* = 0,739 \dots$  é ponto fixo de  $g$ :  $\cos(0,739 \dots) = 0,739 \dots$
- $x^* = 0$  não é ponto fixo de  $g$ :  $\cos 0 = 1 \neq 0$
- $x^* = 2$  é ponto fixo de  $h$ :  $2^2 - 3 \times 2 + 4 = 2$
- $x^* = 1$  não é ponto fixo de  $h$ :  $1^2 - 3 \times 1 + 4 = 2 \neq 1$



# Iteração de ponto fixo

É um *método numérico* para calcular uma *solução aproximada* para a equação  $f(x) = 0$  partindo de um chute inicial  $x_0$ .

Hipóteses:

$$f \in C[a, b] \text{ e existe } x^* \in [a, b] \text{ tal que } f(x^*) = 0$$

Ideia do método:

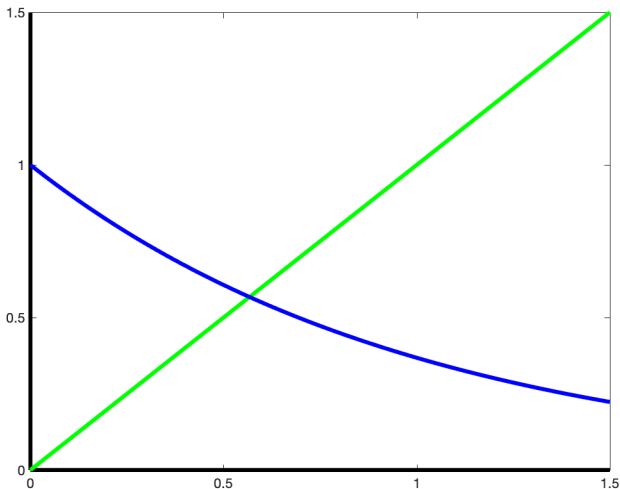
- Transformar o cálculo de uma *raiz de  $f$*  num *problema equivalente (mais fácil)*, onde buscamos um *ponto fixo de  $g$* :

$$f(x) = 0 \iff x = g(x)$$

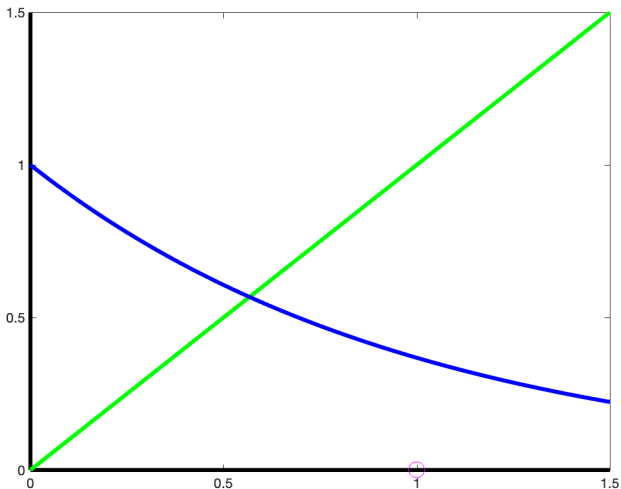
- A partir de um dado *chute inicial  $x_0$* , obtenha uma *nova aproximação* para  $x^*$  aplicando a *função de iteração  $g$*
- Repita esse procedimento até obter uma *aproximação* com a *tolerância desejada*



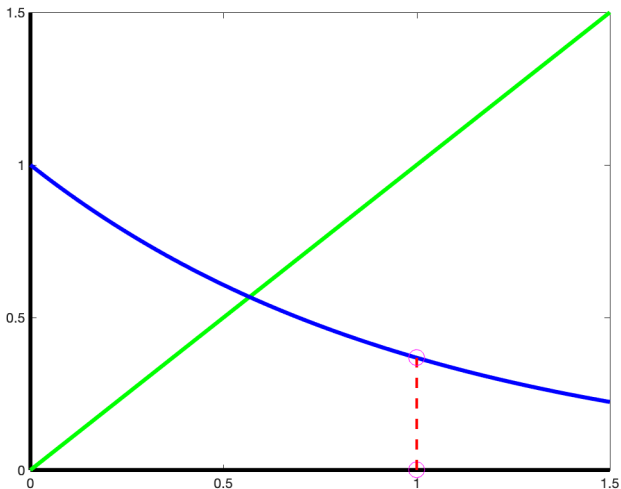
# Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



# Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo

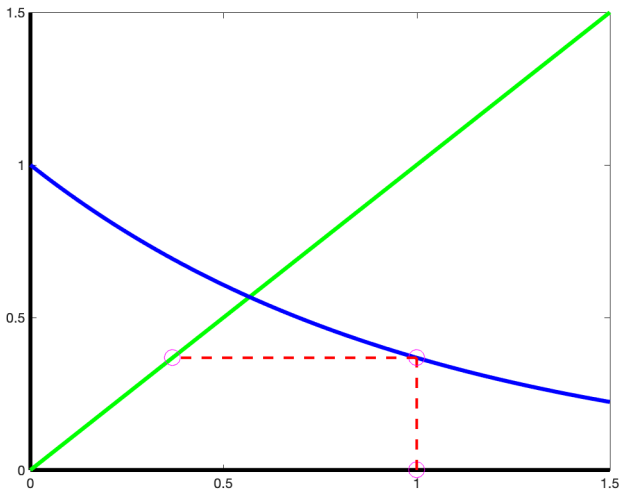


# Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo

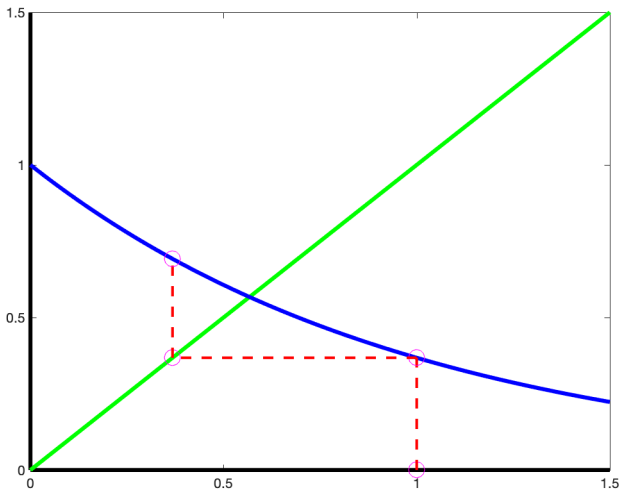




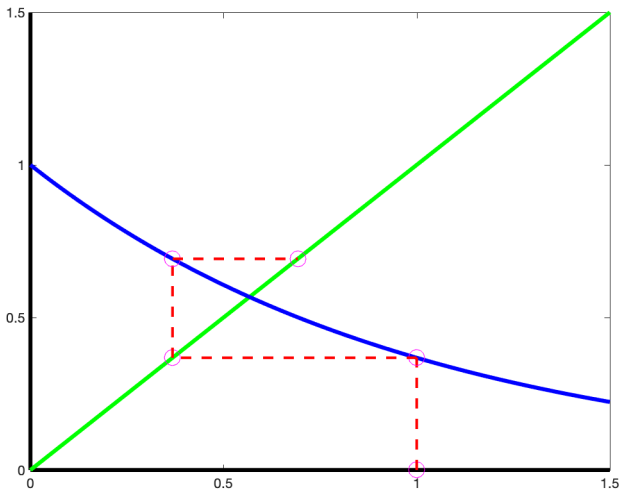
# Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



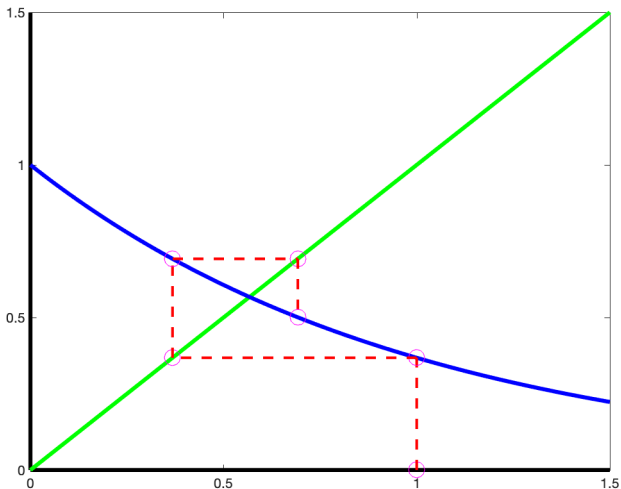
# Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



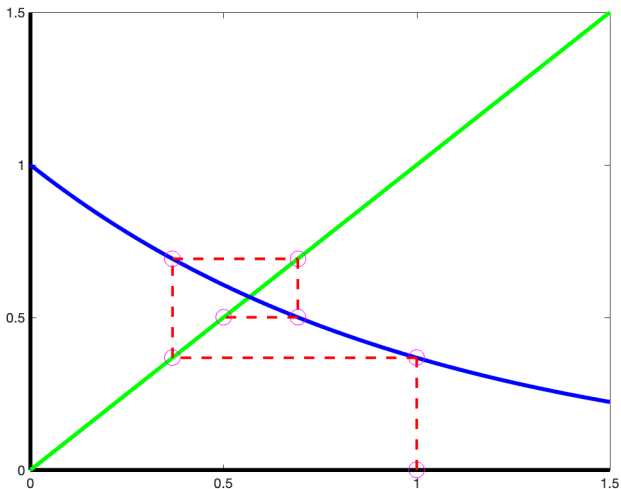
# Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



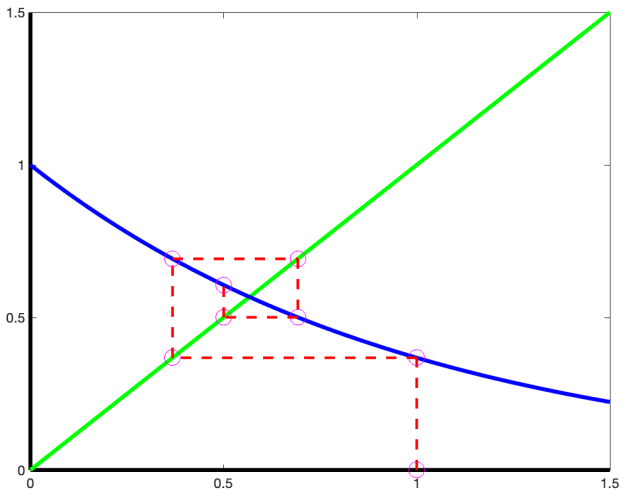
# Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



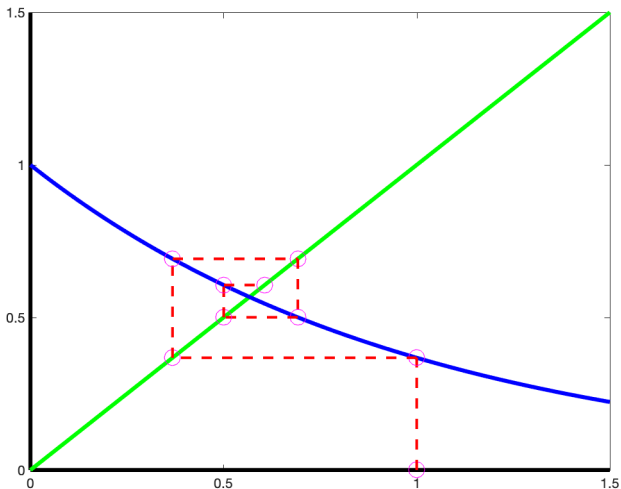
# Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



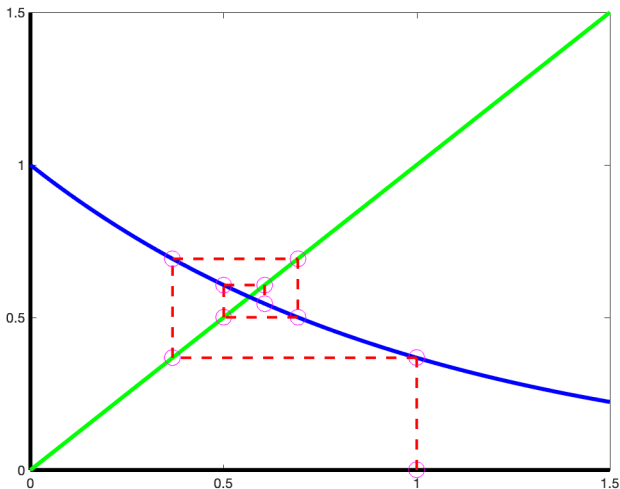
# Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



# Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo

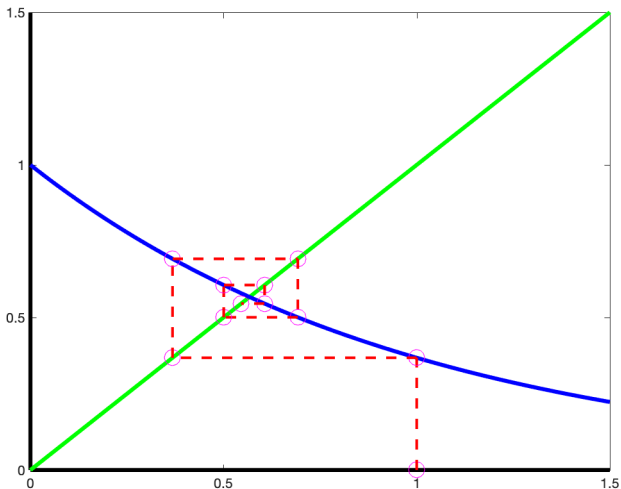


# Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo

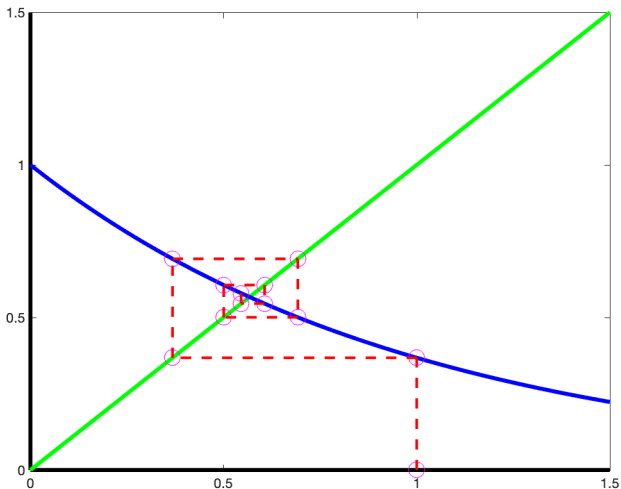




# Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



# Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



# Desenvolvimento analítico da iteração de ponto fixo

Será que sempre é possível escrever  $f(x) = 0 \iff x = g(x)$  ?



# Desenvolvimento analítico da iteração de ponto fixo

Será que sempre é possível escrever  $f(x) = 0 \iff x = g(x)$  ?

Sim! Existem muitas maneiras diferentes:



# Desenvolvimento analítico da iteração de ponto fixo

Será que sempre é possível escrever  $f(x) = 0 \iff x = g(x)$  ?

Sim! Existem muitas maneiras diferentes:



# Desenvolvimento analítico da iteração de ponto fixo

Será que sempre é possível escrever  $f(x) = 0 \iff x = g(x)$  ?

Sim! Existem muitas maneiras diferentes:

- $g(x) = x + f(x)$



# Desenvolvimento analítico da iteração de ponto fixo

Será que sempre é possível escrever  $f(x) = 0 \iff x = g(x)$  ?

Sim! Existem muitas maneiras diferentes:

- $g(x) = x + f(x)$
- $g(x) = x + \alpha f(x)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$



# Desenvolvimento analítico da iteração de ponto fixo

Será que sempre é possível escrever  $f(x) = 0 \iff x = g(x)$  ?

Sim! Existem muitas maneiras diferentes:

- $g(x) = x + f(x)$
- $g(x) = x + \alpha f(x)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$
- $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ ,  $f'(x) \neq 0$





# Desenvolvimento analítico da iteração de ponto fixo

Será que sempre é possível escrever  $f(x) = 0 \iff x = g(x)$  ?

Sim! Existem muitas maneiras diferentes:

- $g(x) = x + f(x)$
- $g(x) = x + \alpha f(x)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$
- $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ ,  $f'(x) \neq 0$
- etc



# Desenvolvimento analítico da iteração de ponto fixo

Será que sempre é possível escrever  $f(x) = 0 \iff x = g(x)$  ?

Sim! Existem muitas maneiras diferentes:

- $g(x) = x + f(x)$
- $g(x) = x + \alpha f(x)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$
- $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ ,  $f'(x) \neq 0$
- etc

Dado chute inicial  $x_0$ , uma sequência de aproximações para  $x^*$  é construída através do processo iterativo

$$x_{n+1} = g(x_n)$$



# Algoritmo da iteração de ponto fixo

Input:  $g$ ,  $x_0$ ,  $\text{tol}$  and  $\text{maxiter}$

```
1:  $\text{iter} = 0$ 
2:  $\text{Error} = \infty$ 
3: while termination criterion is not met ( $\text{Error}$ ,  $\text{tol}$ ,  $\text{maxiter}$ ) do
4:    $\text{iter} = \text{iter} + 1$ 
5:   Compute the approximation  $x_{\text{new}} = g(x_0)$ 
6:   Estimate the  $\text{Error}$  based on  $x_{\text{new}}$  and  $x_0$ 
7:   Update the initial guess  $x_0 = x_{\text{new}}$ 
8: end while
9: if  $\text{Error} > \text{tol}$  then
10:   $x_{\text{new}} = \text{NaN}$ 
11: end if
12: return
```

Output:  $x_{\text{new}}$ ,  $\text{iter}$



# Implementação em GNU Octave

```
function [xnew,iter] = fixedpoint(g,x0,tol,maxiter)
    iter = 0;
    Error = inf;
    while Error > tol && iter < maxiter
        iter = iter + 1;
        xnew = g(x0);
        Error = abs(xnew-x0);
        x0 = xnew;
        fprintf([' iter = %3d   ',...
                ' root = %.16f ',...
                'Error = %.16f \n'],iter,xnew,Error);
    end
    if Error > tol
        xnew = NaN;
    end
end
```



# Alguns exemplos

Considere a função  $f(x) = x e^x - 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$  e três possíveis iterações de ponto fixo:

1.  $g_1(x) = e^{-x}$
2.  $g_2(x) = (1 + x)/(1 + e^x)$
3.  $g_3(x) = x + 1 - x e^x$



# Experimentos computacionais



```
>> x0 = 0.5; tol = 1.0e-9; maxiter = 100;  
>> g1 = @(x) exp(-x);  
>> root1 = fixedpoint(g1,x0,tol,maxiter);
```



```
>> g2 = @(x) (1+x)/(1+exp(x));  
>> root2 = fixedpoint(g2,x0,tol,maxiter);
```



```
>> g3 = @(x) x + 1 - x*exp(x);  
>> root3 = fixedpoint(g3,x0,tol,maxiter);
```

# Observações sobre a iteração

$$g_1(x) = e^{-x}$$

$$g_2(x) = (1 + x)/(1 + e^x)$$

$$g_3(x) = x + 1 - x e^x$$



# Observações sobre a iteração

$$g_1(x) = e^{-x}$$

$$g_2(x) = (1 + x)/(1 + e^x)$$

$$g_3(x) = x + 1 - x e^x$$



**converge lentamente**





# Observações sobre a iteração

$$g_1(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow$$

**converge lentamente**

$$g_2(x) = (1 + x)/(1 + e^x) \quad \Rightarrow$$

**converge rapidamente**

$$g_3(x) = x + 1 - x e^x$$



# Observações sobre a iteração

$g_1(x) = e^{-x}$	$\Rightarrow$	<b>converge lentamente</b>
$g_2(x) = (1 + x)/(1 + e^x)$	$\Rightarrow$	<b>converge rapidamente</b>
$g_3(x) = x + 1 - x e^x$	$\Rightarrow$	<b>não converge</b>



# Observações sobre a iteração

$g_1(x) = e^{-x}$	$\Rightarrow$	<b>converge lentamente</b>
$g_2(x) = (1 + x)/(1 + e^x)$	$\Rightarrow$	<b>converge rapidamente</b>
$g_3(x) = x + 1 - x e^x$	$\Rightarrow$	<b>não converge</b>

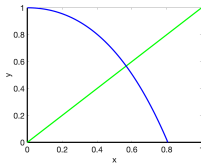
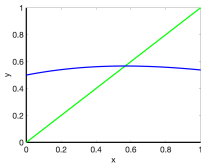
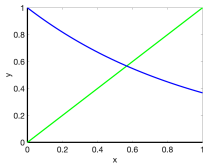
$$\underbrace{f(x) = 0}_{\text{raiz de } f} \iff \underbrace{x = g(x)}_{\text{ponto fixo de } g} \iff \underbrace{\begin{cases} y = x \\ y = g(x) \end{cases}}_{\text{interseção entre } y = x \text{ e } y = g(x)}$$



# Observações sobre a iteração

$g_1(x) = e^{-x}$	$\implies$	<b>converge lentamente</b>
$g_2(x) = (1+x)/(1+e^x)$	$\implies$	<b>converge rapidamente</b>
$g_3(x) = x + 1 - x e^x$	$\implies$	<b>não converge</b>

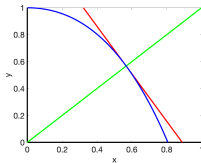
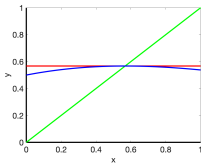
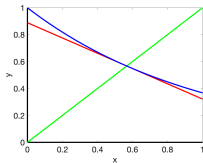
$$\underbrace{f(x) = 0}_{\text{raiz de } f} \iff \underbrace{x = g(x)}_{\text{ponto fixo de } g} \iff \underbrace{\begin{cases} y = x \\ y = g(x) \end{cases}}_{\text{interseção entre } y = x \text{ e } y = g(x)}$$



# Observações sobre a iteração

$g_1(x) = e^{-x}$	$\Rightarrow$	<b>converge lentamente</b>
$g_2(x) = (1+x)/(1+e^x)$	$\Rightarrow$	<b>converge rapidamente</b>
$g_3(x) = x + 1 - x e^x$	$\Rightarrow$	<b>não converge</b>

$$\underbrace{f(x) = 0}_{\text{raiz de } f} \iff \underbrace{x = g(x)}_{\text{ponto fixo de } g} \iff \underbrace{\begin{cases} y = x \\ y = g(x) \end{cases}}_{\text{interseção entre } y = x \text{ e } y = g(x)}$$



# Algumas questões

Considere a iteração de ponto fixo  $x_{n+1} = g(x_n)$  para uma função de iteração  $g$  contínua no intervalo  $[a, b]$ , i.e.,  $g \in C[a, b]$ .

Perguntas naturais:

1. Existe um ponto fixo em  $[a, b]$  ?
2. Se existe, ele é único ?
3. A sequência de aproximações converge para uma raiz ?
4. Se sim, quão rápida é a convergência ?
5. Se não, isso significa que não existe raiz ?



# Fundamentação teórica

## Teorema de iteração de ponto fixo

Considere a iteração de ponto fixo  $x_{n+1} = g(x_n)$  para uma função de iteração  $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Se  $g \in C[a, b]$  e  $a \leq g(x) \leq b$  para qualquer  $x \in [a, b]$ , então:

1. existe ponto fixo de  $g$  em  $[a, b]$ , denotado por  $x^*$ .

Se, adicionalmente, a derivada  $g'$  existir e houver uma constante  $\rho < 1$  tal que  $|g'(x)| < \rho$  para todo  $x \in (a, b)$ , então:

2. o ponto fixo é único;
3. a sequência de aproximações converge para  $x^*$ .



# Fundamentação teórica

## Teorema de iteração de ponto fixo

Considere a iteração de ponto fixo  $x_{n+1} = g(x_n)$  para uma função de iteração  $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Se  $g \in C[a, b]$  e  $a \leq g(x) \leq b$  para qualquer  $x \in [a, b]$ , então:

1. existe ponto fixo de  $g$  em  $[a, b]$ , denotado por  $x^*$ .

Se, adicionalmente, a derivada  $g'$  existir e houver uma constante  $\rho < 1$  tal que  $|g'(x)| < \rho$  para todo  $x \in (a, b)$ , então:

2. o ponto fixo é único;
3. a sequência de aproximações converge para  $x^*$ .

Esse teorema responde afirmativamente as questões 1, 2 e 3.





# Demonstração do teorema

## Parte 1 (existência de um ponto fixo):



# Demonstração do teorema

## Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se  $g(a) = a$  ou  $g(b) = b$ , existe um ponto fixo (trivial).



# Demonstração do teorema

## Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se  $g(a) = a$  ou  $g(b) = b$ , existe um ponto fixo (trivial).

Se  $g(a) > a$  e  $g(b) < b$ , defina a função

$$\phi(x) = g(x) - x$$



# Demonstração do teorema

## Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se  $g(a) = a$  ou  $g(b) = b$ , existe um ponto fixo (trivial).

Se  $g(a) > a$  e  $g(b) < b$ , defina a função

$$\phi(x) = g(x) - x$$

- $\phi$  é a diferença entre duas funções contínuas  
 $\implies \phi$  é contínua



# Demonstração do teorema

## Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se  $g(a) = a$  ou  $g(b) = b$ , existe um ponto fixo (trivial).

Se  $g(a) > a$  e  $g(b) < b$ , defina a função

$$\phi(x) = g(x) - x$$

- $\phi$  é a diferença entre duas funções contínuas  
 $\implies \phi$  é contínua
- $\phi(a) = g(a) - a > 0$  e  $\phi(b) = g(b) - b < 0$   
 $\implies \phi$  muda de sinal no intervalo  $[a, b]$



# Demonstração do teorema

## Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se  $g(a) = a$  ou  $g(b) = b$ , existe um ponto fixo (trivial).

Se  $g(a) > a$  e  $g(b) < b$ , defina a função

$$\phi(x) = g(x) - x$$

- $\phi$  é a diferença entre duas funções contínuas  
 $\implies \phi$  é contínua
- $\phi(a) = g(a) - a > 0$  e  $\phi(b) = g(b) - b < 0$   
 $\implies \phi$  muda de sinal no intervalo  $[a, b]$

Teorema de Bolzano  $\implies$  Existe  $x^* \in (a, b)$  que é raiz de  $\phi$



# Demonstração do teorema

## Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se  $g(a) = a$  ou  $g(b) = b$ , existe um ponto fixo (trivial).

Se  $g(a) > a$  e  $g(b) < b$ , defina a função

$$\phi(x) = g(x) - x$$

- $\phi$  é a diferença entre duas funções contínuas  
 $\implies \phi$  é contínua
- $\phi(a) = g(a) - a > 0$  e  $\phi(b) = g(b) - b < 0$   
 $\implies \phi$  muda de sinal no intervalo  $[a, b]$

Teorema de Bolzano  $\implies$  Existe  $x^* \in (a, b)$  que é raiz de  $\phi$

$$\phi(x^*) = 0$$



# Demonstração do teorema

## Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se  $g(a) = a$  ou  $g(b) = b$ , existe um ponto fixo (trivial).

Se  $g(a) > a$  e  $g(b) < b$ , defina a função

$$\phi(x) = g(x) - x$$

- $\phi$  é a diferença entre duas funções contínuas  
 $\implies \phi$  é contínua
- $\phi(a) = g(a) - a > 0$  e  $\phi(b) = g(b) - b < 0$   
 $\implies \phi$  muda de sinal no intervalo  $[a, b]$

Teorema de Bolzano  $\implies$  Existe  $x^* \in (a, b)$  que é raiz de  $\phi$

$$\phi(x^*) = 0 \iff g(x^*) - x^* = 0$$





# Demonstração do teorema

## Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se  $g(a) = a$  ou  $g(b) = b$ , existe um ponto fixo (trivial).

Se  $g(a) > a$  e  $g(b) < b$ , defina a função

$$\phi(x) = g(x) - x$$

- $\phi$  é a diferença entre duas funções contínuas  
 $\implies \phi$  é contínua
- $\phi(a) = g(a) - a > 0$  e  $\phi(b) = g(b) - b < 0$   
 $\implies \phi$  muda de sinal no intervalo  $[a, b]$

Teorema de Bolzano  $\implies$  Existe  $x^* \in (a, b)$  que é raiz de  $\phi$

$$\phi(x^*) = 0 \iff g(x^*) - x^* = 0 \iff x^* = g(x^*)$$



# Demonstração do teorema

## Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se  $g(a) = a$  ou  $g(b) = b$ , existe um ponto fixo (trivial).

Se  $g(a) > a$  e  $g(b) < b$ , defina a função

$$\phi(x) = g(x) - x$$

- $\phi$  é a diferenças entre duas funções contínuas  
 $\implies \phi$  é contínua
- $\phi(a) = g(a) - a > 0$  e  $\phi(b) = g(b) - b < 0$   
 $\implies \phi$  muda de sinal no intervalo  $[a, b]$

Teorema de Bolzano  $\implies$  Existe  $x^* \in (a, b)$  que é raiz de  $\phi$

$$\phi(x^*) = 0 \iff g(x^*) - x^* = 0 \iff x^* = g(x^*)$$

$x^*$  é um ponto fixo de  $g$



# Demonstração do teorema

## Parte 2 (unicidade do ponto fixo):



# Demonstração do teorema

## Parte 2 (unicidade do ponto fixo):

Suponha que exista  $y^* = g(y^*)$ , outro ponto fixo de  $g$  em  $[a, b]$ .



# Demonstração do teorema

## Parte 2 (unicidade do ponto fixo):

Suponha que exista  $y^* = g(y^*)$ , outro ponto fixo de  $g$  em  $[a, b]$ .

Teorema do Valor Médio:

$$|x^* - y^*| = |g(x^*) - g(y^*)| = |g'(\xi)| |(x^* - y^*)| \leq \rho |x^* - y^*|,$$

onde  $\xi \in (x^*, y^*)$ .



# Demonstração do teorema

## Parte 2 (unicidade do ponto fixo):

Suponha que exista  $y^* = g(y^*)$ , outro ponto fixo de  $g$  em  $[a, b]$ .

Teorema do Valor Médio:

$$|x^* - y^*| = |g(x^*) - g(y^*)| = |g'(\xi)| |(x^* - y^*)| \leq \rho |x^* - y^*|,$$

onde  $\xi \in (x^*, y^*)$ .

Como  $\rho < 1$ , tem-se

$$|x^* - y^*| \leq \rho |x^* - y^*| \iff x^* = y^*.$$



# Demonstração do teorema

## Parte 2 (unicidade do ponto fixo):

Suponha que exista  $y^* = g(y^*)$ , outro ponto fixo de  $g$  em  $[a, b]$ .

Teorema do Valor Médio:

$$|x^* - y^*| = |g(x^*) - g(y^*)| = |g'(\xi)| |(x^* - y^*)| \leq \rho |x^* - y^*|,$$

onde  $\xi \in (x^*, y^*)$ .

Como  $\rho < 1$ , tem-se

$$|x^* - y^*| \leq \rho |x^* - y^*| \iff x^* = y^*.$$

**Só existe um ponto fixo de  $g$  em  $[a, b]$ .**



# Demonstração do teorema

## Parte 3 (convergência da iteração)





# Demonstração do teorema

## Parte 3 (convergência da iteração)

### Teorema do Valor Médio:

$$|x^* - x_n| = |g(x^*) - g(x_{n-1})| = |g'(\xi)| |x^* - x_{n-1}| \leq \rho |x^* - x_{n-1}|$$

onde  $\xi \in (x^*, x_{n-1})$ .



# Demonstração do teorema

## Parte 3 (convergência da iteração)

### Teorema do Valor Médio:

$$|x^* - x_n| = |g(x^*) - g(x_{n-1})| = |g'(\xi)| |x^* - x_{n-1}| \leq \rho |x^* - x_{n-1}|$$

onde  $\xi \in (x^*, x_{n-1})$ .

Analogamente,

$$|x^* - x_n| \leq \rho |x^* - x_{n-1}| \leq \rho^2 |x^* - x_{n-2}| \leq \cdots \leq \rho^n |x^* - x_0|$$



# Demonstração do teorema

## Parte 3 (convergência da iteração)

### Teorema do Valor Médio:

$$|x^* - x_n| = |g(x^*) - g(x_{n-1})| = |g'(\xi)| |x^* - x_{n-1}| \leq \rho |x^* - x_{n-1}|$$

onde  $\xi \in (x^*, x_{n-1})$ .

Analogamente,

$$|x^* - x_n| \leq \rho |x^* - x_{n-1}| \leq \rho^2 |x^* - x_{n-2}| \leq \cdots \leq \rho^n |x^* - x_0|$$

Como  $\rho^n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , segue que  $x_n \rightarrow x^*$ .



# Demonstração do teorema

## Parte 3 (convergência da iteração)

### Teorema do Valor Médio:

$$|x^* - x_n| = |g(x^*) - g(x_{n-1})| = |g'(\xi)| |x^* - x_{n-1}| \leq \rho |x^* - x_{n-1}|$$

onde  $\xi \in (x^*, x_{n-1})$ .

Analogamente,

$$|x^* - x_n| \leq \rho |x^* - x_{n-1}| \leq \rho^2 |x^* - x_{n-2}| \leq \dots \leq \rho^n |x^* - x_0|$$

Como  $\rho^n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , segue que  $x_n \rightarrow x^*$ .

**A iteração converge para a raiz.**



# Demonstração do teorema

## Parte 3 (convergência da iteração)

### Teorema do Valor Médio:

$$|x^* - x_n| = |g(x^*) - g(x_{n-1})| = |g'(\xi)| |x^* - x_{n-1}| \leq \rho |x^* - x_{n-1}|$$

onde  $\xi \in (x^*, x_{n-1})$ .

Analogamente,

$$|x^* - x_n| \leq \rho |x^* - x_{n-1}| \leq \rho^2 |x^* - x_{n-2}| \leq \dots \leq \rho^n |x^* - x_0|$$

Como  $\rho^n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , segue que  $x_n \rightarrow x^*$ .

**A iteração converge para a raiz.**

**Note que a convergência independe do chute inicial!**



# Quão rápida é a convergência?



# Quão rápida é a convergência?

Para  $x_n$  “suficientemente próximo” de  $x^*$

$$x_n - x^* \approx g'(x^*) (x_{n-1} - x^*)$$

(aproximação linear)



# Quão rápida é a convergência?

Para  $x_n$  “suficientemente próximo” de  $x^*$

$$x_n - x^* \approx g'(x^*) (x_{n-1} - x^*)$$

(aproximação linear)

Como  $0 < \rho = |g'(x)| < 1$ , então

$$|x_n - x^*| \approx \rho |x_{n-1} - x^*| \approx \rho^2 |x_{n-2} - x^*| \approx \cdots \approx \rho^n |x_0 - x^*|$$





# Quão rápida é a convergência?

Para  $x_n$  “suficientemente próximo” de  $x^*$

$$x_n - x^* \approx g'(x^*) (x_{n-1} - x^*)$$

(aproximação linear)

Como  $0 < \rho = |g'(x)| < 1$ , então

$$|x_n - x^*| \approx \rho |x_{n-1} - x^*| \approx \rho^2 |x_{n-2} - x^*| \approx \cdots \approx \rho^n |x_0 - x^*|$$

- taxa de convergência =  $-\log \rho$



# Quão rápida é a convergência?

Para  $x_n$  “suficientemente próximo” de  $x^*$

$$x_n - x^* \approx g'(x^*) (x_{n-1} - x^*)$$

(aproximação linear)

Como  $0 < \rho = |g'(x)| < 1$ , então

$$|x_n - x^*| \approx \rho |x_{n-1} - x^*| \approx \rho^2 |x_{n-2} - x^*| \approx \dots \approx \rho^n |x_0 - x^*|$$

- *taxa de convergência* =  $-\log \rho$
- Quanto menor  $\rho$  mais rápida é a convergência



# Quão rápida é a convergência?

Para  $x_n$  “suficientemente próximo” de  $x^*$

$$x_n - x^* \approx g'(x^*) (x_{n-1} - x^*)$$

(aproximação linear)

Como  $0 < \rho = |g'(x)| < 1$ , então

$$|x_n - x^*| \approx \rho |x_{n-1} - x^*| \approx \rho^2 |x_{n-2} - x^*| \approx \cdots \approx \rho^n |x_0 - x^*|$$

- *taxa de convergência* =  $-\log \rho$
- Quanto menor  $\rho$  mais rápida é a convergência
- Aproximadamente  $1/\text{taxa}$  iterações são necessárias para reduzir o erro em uma ordem de grandeza



# Exercício teórico

$x^2 + x - 6$  tem raiz  $x^* = 2$

Iteração de ponto fixo:

- $g_1(x) = 6 - x^2$
- $g_2(x) = \sqrt{6 - x}$

Qual desses processos converge para  $x^*$  ?



## Exercício teórico

$x^2 + x - 6$  tem raiz  $x^* = 2$

Iteração de ponto fixo:

- $g_1(x) = 6 - x^2$
- $g_2(x) = \sqrt{6 - x}$

Qual desses processos converge para  $x^*$  ?

$$g_1'(x) = -2x \implies \rho = |g_1'(x^*)| = 4 > 1$$



# Exercício teórico

$x^2 + x - 6$  tem raiz  $x^* = 2$

Iteração de ponto fixo:

- $g_1(x) = 6 - x^2$
- $g_2(x) = \sqrt{6 - x}$

Qual desses processos converge para  $x^*$  ?

$$g_1'(x) = -2x \implies \rho = |g_1'(x^*)| = 4 > 1$$

O processo 1 não converge!



# Exercício teórico

$x^2 + x - 6$  tem raiz  $x^* = 2$

Iteração de ponto fixo:

- $g_1(x) = 6 - x^2$
- $g_2(x) = \sqrt{6 - x}$

Qual desses processos converge para  $x^*$  ?

$$g_1'(x) = -2x \implies \rho = |g_1'(x^*)| = 4 > 1$$

O processo 1 não converge!

$$g_2'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{6-x}} \implies \rho = |g_2'(x^*)| = 1/4 < 1$$



## Exercício teórico

$x^2 + x - 6$  tem raiz  $x^* = 2$

Iteração de ponto fixo:

- $g_1(x) = 6 - x^2$
- $g_2(x) = \sqrt{6 - x}$

Qual desses processos converge para  $x^*$  ?

$$g_1'(x) = -2x \implies \rho = |g_1'(x^*)| = 4 > 1$$

O processo 1 não converge!

$$g_2'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{6-x}} \implies \rho = |g_2'(x^*)| = 1/4 < 1$$


O processo 2 converge!





# Para pensar em casa ...

## Exercício computacional:

Utilize a função de iteração  $g(x) = x + \alpha f(x)$  para encontrar as raízes da função  $f(x) = x^2 - 2$ . Encontre um valor de  $\alpha$  que promova a convergência da iteração. 



# Características de uma iteração de ponto fixo

- ☺ Simples e fácil de implementar
- ☺ Fácil de generalizar para várias variáveis
- ☺ Requer pouca informação sobre  $f$
- ☹ Convergência lenta em geral
- ☹ Convergência não garantida em geral
- ☹ Convergência dependente de  $g$  e do chute inicial



## Como citar esse material?

A. Cunha, *Iteração de Ponto Fixo*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2020.

Essas notas de aula podem ser compartilhadas nos termos da licença Creative Commons BY-NC-ND 3.0, com propósitos exclusivamente educacionais.

