

# Métodos Iterativos para Equações Escalares

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

[americo.cunha@uerj.br](mailto:americo.cunha@uerj.br)

[www.americocunha.org](http://www.americocunha.org)



$$f(x) = 0$$

**Como obter uma solução para essa equação se não sabemos resolvê-la analiticamente?**



$$f(x) = 0$$

**Como obter uma solução para essa equação se não sabemos resolvê-la analiticamente?**

**Desista de obter um valor exato, contrua uma  
aproximação numérica!**  
(com auxílio de um método iterativo)



# A estrutura de um método iterativo

1. **(Inicialização)** Defina:

- uma *regra de aproximação* para  $x^*$
- um *chute inicial*  $x_0$

2. **(Iteração)** Construa uma *seqüência de aproximações* para  $x^*$ :

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Num método iterativo “*bem projetado*” tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

i.e., a *seqüência de aproximações converge* para a raiz  $x^*$ .



# Características desejáveis

- *Eficiência*: necessita de um pequeno número de avaliações computacionais da função  $f$ ;
- *Robustez*: raramente (ou nunca) falha. Se falhar, informa ao usuário (você);
- Requer uma *quantidade mínima de informações* sobre  $f$  (e.g. continuidade, derivadas etc);
- Requer que  $f$  satisfaça *propriedades mínimas de suavidade*;
- Facilmente *generalizável* para equações com várias variáveis.



# Considerações práticas

- Em *teoria*, um método iterativo “bem projetado” encontra o *valor exato* de  $x^*$ , pois constrói uma sequência convergente, i.e.,  $x_n \rightarrow x^*$  quando  $n \rightarrow \infty$ ;
- Na *prática*, um método iterativo “bem projetado” encontra uma *aproximação* para  $x^*$ , pois um computador não consegue iterar infinitas vezes, i.e.,  $x_n \approx x^*$  para  $n \gg 1$ ;
- Como é necessário *interromper o processo iterativo* após um número finito de etapas, um *critério de parada* se faz necessário;
- Diversos critérios de parada podem ser utilizados para verificar a *(quase) convergência* de um método iterativo.



# Alguns critérios de parada

O processo iterativo é *interrompido* após *n iterações* se:

- *CP1 (máximo de iterações):*

$$n > \text{maxiter}$$

- *CP3 ("erro" relativo):*

$$|x_n - x_{n-1}| < \text{tol} |x_n|$$

- *CP2 ("erro" absoluto):*

$$|x_n - x_{n-1}| < \text{tol}$$

- *CP4 (teste do resíduo):*

$$|f(x_n)| < \text{tol}$$

Parâmetros:

- $x_n$  e  $x_{n+1}$  são duas aproximações sucessivas para  $x^*$ ;
- $\text{tol}$  e  $\text{maxiter}$  são parâmetros definidos pelo usuário (você).



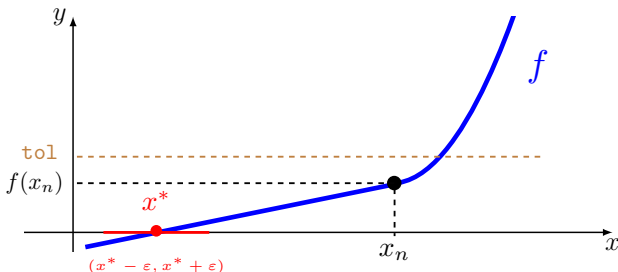
# Observações sobre os critérios de parada

- Em geral (mas nem sempre) **(CP3)** é mais robusto que **(CP2)**;
- Os critérios **(CP2)** e **(CP3)** podem ser combinados:

$$|x_n - x_{n-1}| < \text{tol} (1 + |x_n|)$$

- O critério **(CP4)** não tem precisão garantida, pois

$$|f(x_n)| < \text{tol} \not\Rightarrow |x^* - x_n| < \varepsilon$$



\* Figura por Marcos Vinícius Issa.



# Algoritmo genérico para um método iterativo

Input:  $f$ ,  $x_0$ ,  $tol$ ,  $maxiter$

```
1:  $iter = 0$ 
2:  $Error = \infty$ 
3: while termination criterion is not met ( $Error$ ,  $tol$ ,  $maxiter$ ) do
4:    $iter = iter + 1$ 
5:   Construct  $x_n$  based on  $x_{n-1}, \dots, x_0$ 
6:   Estimate the  $Error$  based on  $x_n$  and  $x_{n-1}$ 
7: end while
```

Output:  $x_n$ ,  $iter$



## Como citar esse material?

A. Cunha, *Métodos Iterativos para Equações Escalares*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2020.

Essas notas de aula podem ser compartilhadas nos termos da licença Creative Commons BY-NC-ND 3.0, com propósitos exclusivamente educacionais.

