Eliminação Gaussiana com Pivotamento

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr

Experimento Computacional 1

$$\begin{bmatrix} 10^{-16} & 10 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 10^{-16} \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [1e-16 10; 5 -6]
>> b = [10+1e-16; -1]
>> x = gauss(A,b)
```

Experimento Computacional 1

$$\begin{bmatrix} 10^{-16} & 10 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 10^{-16} \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [1e-16 10; 5 -6]
>> b = [10+1e-16; -1]
>> x = gauss(A,b)
```

```
x =

    0
    1
```

Experimento Computacional 1

$$\begin{bmatrix} 10^{-16} & 10 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 10^{-16} \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [1e-16 10; 5 -6]
>> b = [10+1e-16; -1]
>> x = gauss(A,b)
```

```
x =

  0
  1
```

Esse exemplo mostra que o algoritmo da eliminação gaussiana é instável!

Por que a eliminação gaussiana erra esse cálculo?

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 + 10\, x_2 = 10 + \varepsilon \\ 5\, x_1 - 6\, x_2 = -1 \end{cases}$$

Por que a eliminação gaussiana erra esse cálculo?

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 + 10\, x_2 = 10 + \varepsilon \\ 5\, x_1 - 6\, x_2 = -1 \end{cases} \qquad {\color{blue}L_2} \leftarrow L_2 - \frac{5}{{\color{red}\varepsilon}} L_1$$

Por que a eliminação gaussiana erra esse cálculo?

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 & + & 10\, x_2 & = & 10 + \varepsilon \\ 5\, x_1 & - & 6\, x_2 & = & -1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{\varepsilon}\, L_1 \approx -\frac{5}{\varepsilon}\, L_1$$

Por que a eliminação gaussiana erra esse cálculo?

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 + 10\, x_2 = 10 + \varepsilon \\ 5\, x_1 - 6\, x_2 = -1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{\varepsilon} L_1 \approx -\frac{5}{\varepsilon} L_1$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 + 10\, x_2 = 10 + \varepsilon \\ \qquad - (50/\varepsilon)\, x_2 = -(50/\varepsilon + 5) \end{cases}$$

Por que a eliminação gaussiana erra esse cálculo?

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 & + & 10\, x_2 & = & 10 + \varepsilon \\ 5\, x_1 & - & 6\, x_2 & = & -1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{\varepsilon} L_1 \approx -\frac{5}{\varepsilon} L_1$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 & + & 10\, x_2 & = & 10 + \varepsilon \\ & - & (50/\varepsilon)\, x_2 & = & -(50/\varepsilon + 5) \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{-(50/\varepsilon + 5)}{-(50/\varepsilon)}$$

Por que a eliminação gaussiana erra esse cálculo?

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \varepsilon\, x_1 & + & 10\, x_2 & = & 10+\varepsilon \\ 5\, x_1 & - & 6\, x_2 & = & -1 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{\varepsilon} L_1 \approx -\frac{5}{\varepsilon} L_1$$

$$\downarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \varepsilon\, x_1 & + & 10\, x_2 & = & 10+\varepsilon \\ & - & (50/\varepsilon)\, x_2 & = & -(50/\varepsilon+5) \end{array}\right.$$

$$x_2 = \frac{-(50/\varepsilon+5)}{-(50/\varepsilon)} = 1+\varepsilon/10$$

Por que a eliminação gaussiana erra esse cálculo?

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 & + & 10\, x_2 & = & 10+\varepsilon \\ 5\, x_1 & - & 6\, x_2 & = & -1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{\varepsilon} L_1 \approx -\frac{5}{\varepsilon} L_1$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 & + & 10\, x_2 & = & 10+\varepsilon \\ & - & (50/\varepsilon)\, x_2 & = & -(50/\varepsilon + 5) \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{-(50/\varepsilon+5)}{-(50/\varepsilon)} \qquad x_1 = \frac{10+\varepsilon-10\,(1+\varepsilon/10)}{\varepsilon}$$

$$= 1+\varepsilon/10$$

Por que a eliminação gaussiana erra esse cálculo?

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 + 10\, x_2 = 10 + \varepsilon \\ 5\, x_1 - 6\, x_2 = -1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{\varepsilon} L_1 \approx -\frac{5}{\varepsilon} L_1$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 + 10\, x_2 = 10 + \varepsilon \\ \quad - (50/\varepsilon)\, x_2 = -(50/\varepsilon + 5) \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{-(50/\varepsilon + 5)}{-(50/\varepsilon)} = 1 + \varepsilon/10 \qquad x_1 = \frac{10 + \varepsilon - 10\,(1 + \varepsilon/10)}{\varepsilon} = 0$$

Por que a eliminação gaussiana erra esse cálculo?

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 & + & 10\, x_2 & = & 10 + \varepsilon \\ 5\, x_1 & - & 6\, x_2 & = & -1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{\varepsilon} L_1 \approx -\frac{5}{\varepsilon} L_1$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 & + & 10\, x_2 & = & 10 + \varepsilon \\ & - & (50/\varepsilon)\, x_2 & = & -(50/\varepsilon + 5) \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{-(50/\varepsilon + 5)}{-(50/\varepsilon)} = 1 + \varepsilon/10 \qquad x_1 = \frac{10 + \varepsilon - 10\,(1 + \varepsilon/10)}{\varepsilon} = 0$$

Como esse problema pode ser remediado?

Experimento Computacional 2

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 10^{-16} & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 + 10^{-16} \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [5 -6; 1e-16 10;]
>> b = [-1; 10+1e-16]
>> x = gauss(A,b)
```

Experimento Computacional 2

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 10^{-16} & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 + 10^{-16} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [5 -6; 1e-16 10;]
>> b = [-1; 10+1e-16]
>> x = gauss(A,b)
```

```
x =

   1
   1
```

Experimento Computacional 2

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 10^{-16} & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 + 10^{-16} \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [5 -6; 1e-16 10;]
>> b = [-1; 10+1e-16]
>> x = gauss(A,b)
```

```
x =

    1
    1
```

Em geral, pivôs pequenos podem ser evitados trocando a ordem das equações!

Estratégias de pivotamento

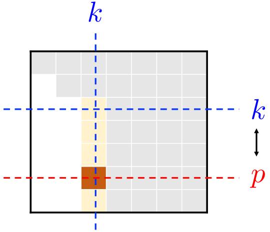
A cada estágio k do algoritmo, antes da eliminação:

Pivotamento Parcial:

1. escolha o menor p tal que

$$|a_{pk}^{(k)}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}^{(k)}|$$

2. troque linhas k/q

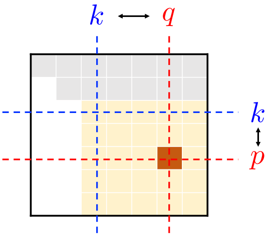


Pivotamento Completo:

1. escolha os menores p e q tal que

$$|a_{pq}^{(k)}| = \max_{k \le i, j \le n} |a_{ij}^{(k)}|$$

2. troque linhas k/p e colunas k/q



Algoritmo p/ eliminação gaussiana c/ pivotamento parcial

Input: A, $\mathbf{b}$

Compute the length of $\mathbf{b}$
for k=1:n-1 **do**
    Partial pivoting process
    for i=k+1:n **do**
        $l_{ik} = -a_{ik}/a_{kk}$
        for j=1:n **do**
            $a_{ij} = a_{ij} + l_{ik}\, a_{kj}$
        end for
        $b_i = b_i + l_{ik}\, b_k$
    end for
end for
Compute $\mathbf{x}$ with backward substitution
return

Output: $\mathbf{x}$

Esse algoritmo tem uma implementação pedagógica da eliminação gaussiana com pivotamento, não é o mais eficiente do ponto de vista computacional.

Implementação em GNU Octave

```
function [x,A,b] = gaussPivotP(A,b)
  n = length(b);
  for k=1:n-1
    [A,b] = pivoting(A,b,n,k);
    for i=k+1:n
      Lik = -A(i,k)/A(k,k);
      for j=1:n
        A(i,j) = A(i,j) + Lik*A(k,j);
      end
      b(i) = b(i) + Lik*b(k);
    end
  end
  x = backwardsub(A,b);
end
```

Implementação em GNU Octave

```
function [A,b] = pivoting(A,b,n,k)
      pivot = abs(A(k,k));
      row   = k;
      for i=k+1:n
        if abs(A(i,k)) > pivot
            pivot = abs(A(i,k));
            row   = i;
        end
      end
      for j=k:n
         swap      = A(row,j);
         A(row,j)  = A(k,j);
         A(k,j)    = swap;
      end
      swap   = b(row);
      b(row) = b(k);
      b(k)   = swap;
end
```

Experimento Computacional 3

$$\begin{bmatrix} 10^{-16} & 10 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 10^{-16} \\ -1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
>>  A = [1e-16 10; 5 -6]
>>  b = [10+1e-16; -1]
>>  x = gaussPivotP(A,b)
```

Experimento Computacional 3

$$\begin{bmatrix} 10^{-16} & 10 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 10^{-16} \\ -1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [1e-16 10; 5 -6]
>> b = [10+1e-16; -1]
>> x = gaussPivotP(A,b)
```

```
x =

   1
   1
```

Experimento Computacional 3

$$\begin{bmatrix} 10^{-16} & 10 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 10^{-16} \\ -1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [1e-16 10; 5 -6]
>> b = [10+1e-16; -1]
>> x = gaussPivotP(A,b)
```

```
x =

    1
    1
```

O pivotamento aumenta a estabilidade do algoritmo!

Quando não é preciso pivotar?

- Matriz diagonal dominante (DD)

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|\,, \qquad i = 1, \cdots, n$$

- Matriz simétrica positiva definida (SPD)

$$A = A^T \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x}^T A\,\mathbf{x} > 0 \;\; \text{para qualquer} \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Quando não é preciso pivotar?

- Matriz diagonal dominante (DD)

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, \cdots, n$$

- Matriz simétrica positiva definida (SPD)

$$A = A^T \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0 \ \text{ para qualquer } \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

A é **SPD**; B é **DD**; C não é **SPD** nem **DD**.

Qual o custo computacional adicional do pivotamento?

Estratégias de Pivotamento:

$$\texttt{flops}\,(\textbf{Pivotamento Parcial}) \sim n^2$$

$$\texttt{flops}\,(\textbf{Pivotamento Completo}) \sim n^3$$

Eliminação Gaussiana com Pivotamento:

$$\texttt{flops}\,(\textbf{Gauss Pivotamento Parcial}) \sim \frac{2}{3}\,n^3$$

$$\texttt{flops}\,(\textbf{Gauss Pivotamento Completo}) \sim \frac{5}{3}\,n^3$$

Fatos sobre a eliminação gaussiana

1. A eliminação gaussiana pode ser instável caso a matriz do sistema tenha pivôs pequenos;
2. Estratégias de pivotamento aumentam a estabilidade do algoritmo da eliminação gaussiana;
3. Tipicamente o pivotamento parcial é suficiente para garantir a estabilidade do algoritmo. Mas existem casos (raros) onde só o pivotamento completo garante estabilidade;

Para pensar em casa ...

Exercício computacional:

Pense num algoritmo eficiente (em termos de processamento e uso de memória) para implementar a eliminação gaussiana c/ pivotamento parcial. Implemente esse algoritmo no ambiente GNU Octave.

Exercício computacional:

Pense num algoritmo eficiente (em termos de processamento e uso de memória) para implementar a eliminação gaussiana c/ pivotamento completo. Implemente esse algoritmo no ambiente GNU Octave.

Como citar esse material?

A. Cunha, *Eliminação Gaussiana com Pivotamento*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr