Representação Decimal de Números Reais

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org

Números reais podem ser “quebrados” em somas!

$$1,234\cdots$$

Números reais podem ser "quebrados" em somas!

$$1,234\cdots$$

$$=$$

$$1+0,2+0,03+0,004+\cdots$$

A noção de representação decimal

Uma *representação decimal* do número real não negativo x é uma soma (possivelmente infinita) da forma

$$d_0 + d_{-1}\,10^{-1} + \cdots + d_{-n}\,10^{-n} + \cdots = x$$

sendo d_0 é um inteiro não negativo e $d_{-n} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, onde $n = 1,\ 2,\ \cdots$.

Por construção,

$$x \;=\; \underbrace{d_0}_{\textit{parte inteira}} \;+\; \underbrace{0\,,\ d_{-1}\,d_{-2}\,d_{-3}\,\cdots}_{\textit{parte fracionária}}$$

Notação:

$$x = d_0\,,\ d_{-1}\,d_{-2}\,d_{-3}\ \cdots$$

ou

$$x = (d_0\,,\ d_{-1}\,d_{-2}\,d_{-3}\ \cdots)_{10}$$

Exemplo: número inteiro

- $x_1 = 17$

Exemplo: número inteiro

- $x_1 = 17$

$$17 = 17 + 0,0$$

Exemplo: número inteiro

- $x_1 = 17$

$$17 = 17 + 0,0$$

$$\boxed{x_1 = (17,0)_{10}}$$

Exemplo: número inteiro

- $x_1 = 17$

$$17 = 17 + 0,0$$

$$\boxed{x_1 = (17,0)_{10}}$$

$\Longrightarrow$ Representação finita

Exemplo: racional tipo fração exata

- $x_2 = 1/2$

Exemplo: racional tipo fração exata

- $x_2 = 1/2$

$$1/2 = 0,5$$

Exemplo: racional tipo fração exata

- $x_2 = 1/2$

$$1/2 = 0,5$$

$$\boxed{x_2 = (0,5)_{10}}$$

Exemplo: racional tipo fração exata

- $x_2 = 1/2$

$$1/2 = 0,5$$

$$\boxed{x_2 = (0,5)_{10}}$$

$\Longrightarrow$ Representação finita

Exemplo: outro racional tipo fração exata

- $x_3 = 25/4$

Exemplo: outro racional tipo fração exata

- $x_3 = 25/4$

$$25/4 = (24 + 1)/4 = 24/4 + 1/4 = 6 + 0,25$$

Exemplo: outro racional tipo fração exata

- $x_3 = 25/4$

$$25/4 = (24+1)/4 = 24/4 + 1/4 = 6 + 0,25$$

$$x_3 = (6,25)_{10}$$

Exemplo: outro racional tipo fração exata

- $x_3 = 25/4$

$$25/4 = (24+1)/4 = 24/4 + 1/4 = 6 + 0,25$$

$$\boxed{x_3 = (6,25)_{10}}$$

$\Longrightarrow$ Representação finita

Exemplo: racional tipo dízima periódica

- $x_4 = 1/3$

Exemplo: racional tipo dízima periódica

- $x_4 = 1/3$

$$1/3 = 0,333\cdots = 0 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + \cdots$$

Exemplo: racional tipo dízima periódica

- $x_4 = 1/3$

$$1/3 = 0,333\cdots = 0 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + \cdots$$

$$x_4 = (0,3333\cdots)_{10} = \left(0,\overline{3}\right)_{10}$$

Exemplo: racional tipo dízima periódica

- $x_4 = 1/3$

$$1/3 = 0,333\cdots = 0 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + \cdots$$

$$x_4 = (0,3333\cdots)_{10} = \left(0,\overline{3}\right)_{10}$$

$\Longrightarrow$ Representação infinita periódica

Exemplo: irracional

- $x_5 = \pi$

Exemplo: irracional

- $x_5 = \pi$

$$\pi = 3,1415\cdots = 3+0,1+0,04+0,001+0,0005+\cdots$$

Exemplo: irracional

- $x_5 = \pi$

$$\pi = 3,1415\cdots = 3+0,1+0,04+0,001+0,0005+\cdots$$

$$\boxed{x_5 = (3,141592\cdots)_{10}}$$

Exemplo: irracional

- $x_5 = \pi$

$$\pi = 3,1415\cdots = 3+0,1+0,04+0,001+0,0005+\cdots$$

$$\boxed{x_5 = (3,141592\cdots)_{10}}$$

$\Longrightarrow$ Representação infinita aperiódica

O curioso caso de $x = 0,9999\cdots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\cdots$ então

- $x < 1$
- $x = 1$
- $x > 1$

O curioso caso de $x = 0,9999\cdots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\cdots$ então

- $x < 1$
- $\mathbf{x = 1}$
- $x > 1$

O curioso caso de $x = 0,9999\cdots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\cdots$ então

- $x < 1$
- $\mathbf{x = 1}$
- $x > 1$

<u>Prova:</u>

O curioso caso de $x = 0,9999\cdots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\cdots$ então

- $x < 1$
- $\mathbf{x = 1}$
- $x > 1$

Prova:

$10x = 9,9999\cdots$

O curioso caso de $x = 0,9999\cdots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\cdots$ então

- $x < 1$
- $\mathbf{x = 1}$
- $x > 1$

Prova:

$$10x = 9,9999\cdots$$
$$-\ x = 0,9999\cdots$$

O curioso caso de $x = 0,9999\cdots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\cdots$ então

- $x < 1$
- $\mathbf{x = 1}$
- $x > 1$

<u>Prova:</u>

$$\begin{aligned} 10x &= 9,9999\cdots \\ -\ x &= 0,9999\cdots \\ \hline \end{aligned}$$

O curioso caso de $x = 0,9999\cdots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\cdots$ então

- $x < 1$
- $\mathbf{x = 1}$
- $x > 1$

<u>Prova:</u>

$$
\begin{array}{l}
10x = 9,9999\cdots \\
-\ x = 0,9999\cdots \\
\hline
\ 9x = 9
\end{array}
$$

O curioso caso de $x = 0,9999\cdots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\cdots$ então

- $x < 1$
- $\mathbf{x = 1}$
- $x > 1$

Prova:

$$10x = 9,9999\cdots$$
$$-\ x = 0,9999\cdots$$
$$\overline{}$$
$$9x = 9$$

$\Longrightarrow \quad x = 1$

O curioso caso de $x = 0,9999\cdots$

Exercício teórico:

Se $x = 0,9999\cdots$ então

- $x < 1$
- $\mathbf{x = 1}$
- $x > 1$

Prova:

$$\begin{array}{r} 10x = 9,9999\cdots \\ -\ x = 0,9999\cdots \\ \hline 9x = 9 \end{array}$$

$\Longrightarrow \quad x = 1$

$x = 1$ tem duas representações decimais!

- $x = (1,000\cdots)_{10}$
- $x = (0,999\cdots)_{10}$

Fatos sobre representação decimal

- *Racionais tem representação finita ou infinita periódica*
- *Irracionais tem representação infinita aperiódica*
- *Reais, em geral, tem representação não única (mais de uma)*

Para pensar em casa ...

Quais afirmações são verdadeiras?

Se $x = 2,122001\cdots$ e $y = 2,1220010\cdots$, então

- $x = y$
- $x > y$
- $|x - y| < 10^{-6}$

E se tivermos $x = 2,122001\cdots$ e $y = 2,122003\cdots$?

- $x - y = 0,000002$
- $|x - y| < 10^{-4}$
- $x < y$

Como citar esse material?

A. Cunha, *Representação Decimal de Números Reais*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2020.