

Aproximação de Funções

Prof. Americo Cunha

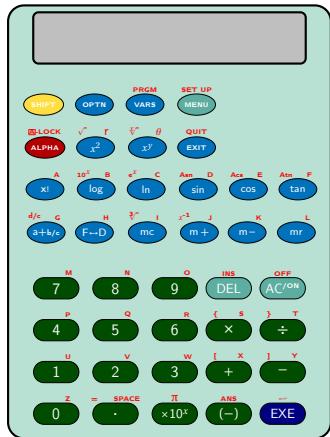
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

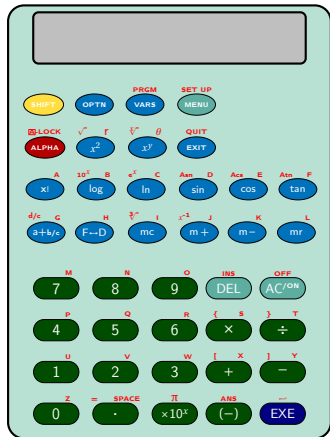
www.americocunha.org



Como avaliar uma função em ponto flutuante?



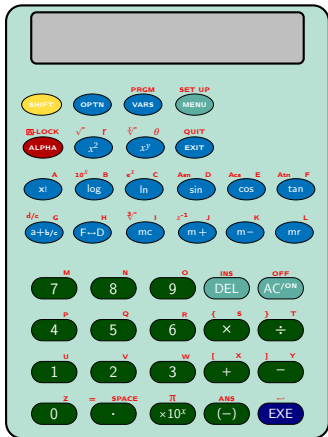
Como avaliar uma função em ponto flutuante?



- Ponto flutuante (4 operações):

$$+ \quad - \quad \times \quad /$$

Como avaliar uma função em ponto flutuante?



- Ponto flutuante (4 operações):

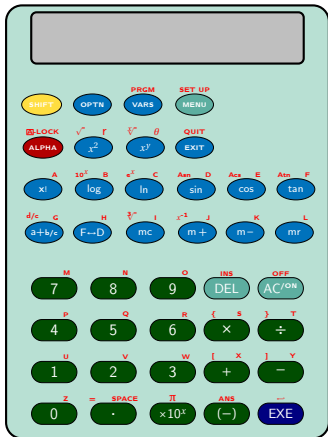
$$+ \quad - \quad \times \quad /$$

- Polinômios: **OK!**

$$3x^3 + 2x^2 + x + 1$$
$$3 * x * x * x + 2 * x * x + x + 1$$



Como avaliar uma função em ponto flutuante?



- Ponto flutuante (4 operações):

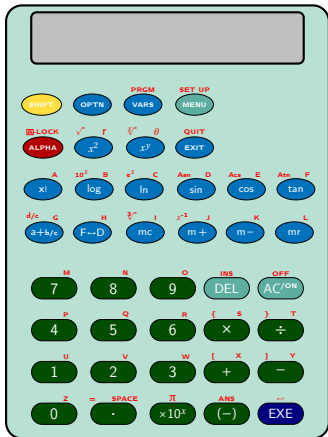
$$+ \quad - \quad \times \quad /$$

- Polinômios: **OK!**

$$3x^3 + 2x^2 + x + 1$$
$$3*x*x*x + 2*x*x + x + 1$$

- E se a função não for polinomial?
(e^x , $\sin x$, $\log x$ etc)

Como avaliar uma função em ponto flutuante?



- Ponto flutuante (4 operações):

$$+ \quad - \quad \times \quad /$$

- Polinômios: **OK!**

$$3x^3 + 2x^2 + x + 1$$
$$3*x*x*x + 2*x*x + x + 1$$

- E se a função não for polinomial?
(e^x , $\sin x$, $\log x$ etc)

É preciso “polinomizar” a função!



Uma primeira abordagem: aproximação linear

Se x for “próximo” de a , podemos usar a *aproximação linear*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

caso a função f seja diferenciável em a .



Alguns exemplos de aproximação linear

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$
- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$
- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$



Alguns exemplos de aproximação linear

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$e^x \approx 1 + x$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$



Alguns exemplos de aproximação linear

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$e^x \approx 1 + x$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

$$\sin x \approx x$$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$



Alguns exemplos de aproximação linear

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$e^x \approx 1 + x$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

$$\sin x \approx x$$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$

$$\ln x \approx x - 1$$



Uma segunda abordagem: aproximação quadrática

Se x for “próximo” de a , podemos usar a *aproximação quadrática*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(a)(x - a)^2$$

caso a função f seja duas vezes diferenciável em a .



Alguns exemplos de aproximação quadrática

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$
- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$
- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$



Alguns exemplos de aproximação quadrática

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$



Alguns exemplos de aproximação quadrática

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

$$\sin x \approx x$$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$



Alguns exemplos de aproximação quadrática

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

$$\sin x \approx x$$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$

$$\ln x \approx x - 1 + \frac{1}{2}(x - 1)^2$$



Uma abordagem mais geral: aproximação de ordem k

Se x for “próximo” de a , podemos usar a *aproximação de ordem k*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$$

caso a função f seja k vezes diferenciável em a .

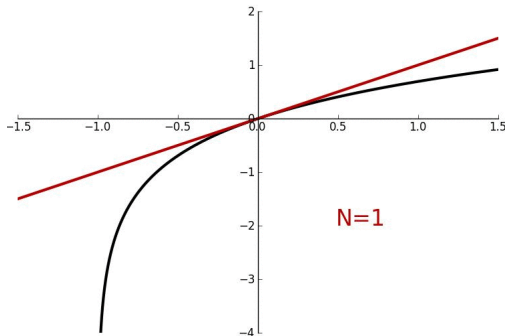


Figura obtida em: https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series © ⓘ ⓘ ⓘ

Uma abordagem mais geral: aproximação de ordem k

Se x for “próximo” de a , podemos usar a *aproximação de ordem k*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}(x - a)^k$$

caso a função f seja k vezes diferenciável em a .

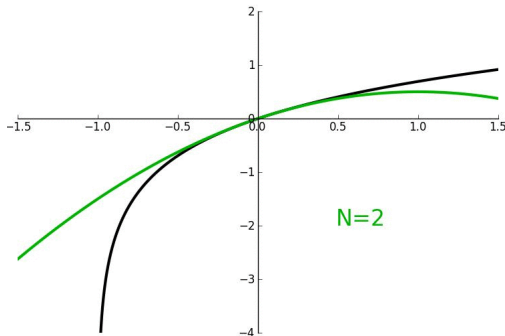


Figura obtida em: https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series © ⓘ ⓘ ⓘ

Uma abordagem mais geral: aproximação de ordem k

Se x for “próximo” de a , podemos usar a *aproximação de ordem k*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}(x - a)^k$$

caso a função f seja k vezes diferenciável em a .

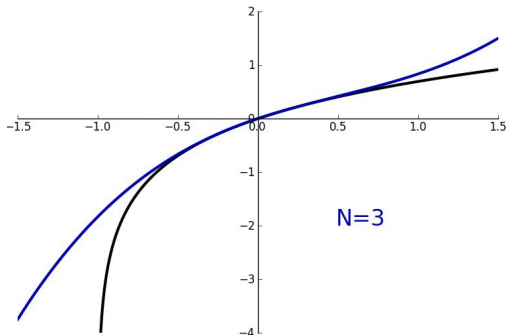


Figura obtida em: https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series © ⓘ ⓘ ⓘ

Uma abordagem mais geral: aproximação de ordem k

Se x for “próximo” de a , podemos usar a *aproximação de ordem k*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}(x - a)^k$$

caso a função f seja k vezes diferenciável em a .

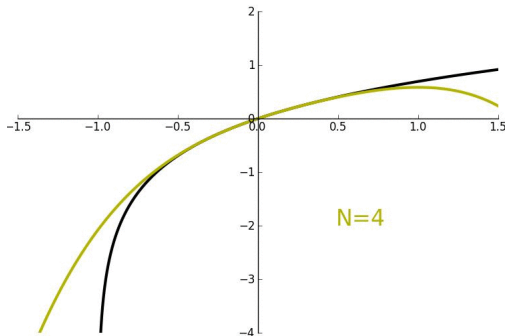


Figura obtida em: https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series © ⓘ ⓘ ⓘ

Uma abordagem mais geral: aproximação de ordem k

Se x for “próximo” de a , podemos usar a *aproximação de ordem k*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}(x - a)^k$$

caso a função f seja k vezes diferenciável em a .

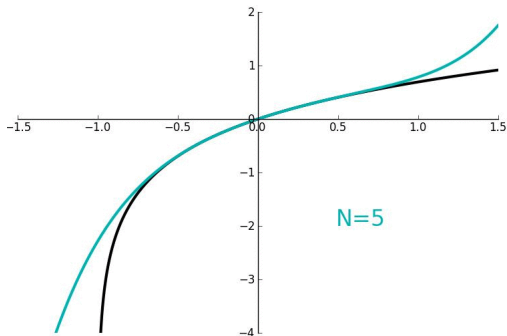


Figura obtida em: https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series © ⓘ ⓘ ⓘ ⓘ



Alguns exemplos de aproximação de ordem k

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$
- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$
- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$



Alguns exemplos de aproximação de ordem k

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$



Alguns exemplos de aproximação de ordem k

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!}x^k, \quad k \text{ ímpar}$$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$



Alguns exemplos de aproximação de ordem k

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!}x^k, \quad k \text{ ímpar}$$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$

$$\ln x \approx x - 1 + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x - 1)^k$$



Experimento computacional 1

```
clc; clear

f = @(x) exp(x);
x = -2:0.1:2; y = f(x);
Nx = length(x); k = 5;

T = zeros(k+1,Nx); T(1,:) = ones(1,Nx);
for n=2:k+1
    T(n,:) = T(n-1,:) + x.^(n-1) / factorial(n-1);
end

plot(x,y,'-k','linewidth',3);
hold on
for n=1:k+1
    plot(x,T(n,:), 'linewidth',1.5);
end
hold off
set(gca,'fontsize', 22)
```



Experimento computacional 2

```
clc; clear
```

```
syms x
```

```
f = exp(x);
```

```
a = 0;
```

```
taylor(f, x, a, 'order', 6)
```

```
ans =
```

```

$$x^5/120 + x^4/24 + x^3/6 + x^2/2 + x + 1$$

```



Fundamentação teórica para essas aproximações

Teorema (Fórmula de Taylor)

Se f é uma função $k + 1$ vezes diferenciável em (a, x) , então

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}(x - a)^k + \text{Erro}(x, a)$$

onde o erro da aproximação é dado por

$$\text{Erro}(x, a) = \frac{f^{k+1}(\xi)}{(k + 1)!}(x - a)^{k+1}$$

para $\xi \in (a, x)$.

Essa equação é conhecida como *fórmula de Taylor*.



Interpretando a fórmula de Taylor

Para uma **função duas vezes diferenciável**, temos

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{\text{aproximação linear}} + \underbrace{\frac{1}{2} f''(\xi)(x-a)^2}_{\text{erro}}$$

para $\xi \in (a, x)$.

- O **erro da aproximação linear** é proporcional ao **quadrado da distância entre x e a** , i.e., $\text{Erro}(x, a) \sim (x-a)^2$
- A **constante de proporcionalidade** depende da **segunda derivada de f** , i.e., $\text{Erro}(x, a)/(x-a)^2 = \text{constante}(f'')$



Algumas observações

- Existem muitas outras técnicas para aproximar uma função por um polinômio (Hermite, Legrende etc). Cada uma usa um tipo diferente de base para construir o aproximante;
- A aproximação de Taylor é a técnica mais simples do ponto de vista conceitual, mas em geral é a mais lenta (precisa de mais termos para ter uma boa aproximação);
- Mesmo sendo lenta, Taylor é a técnica mais utilizada para se desenvolver teorias de aproximação em física e outras áreas;
- Em geral, calculadoras e ambientes de computação científica (e.g. GNU Octave) usam uma técnica chamada aproximação de Padé, que utiliza funções racionais (razão entre polinômios).




Para pensar em casa ...

Exercício teórico:

Considere a função $f(x) = \cos x$ e o ponto $a = 0$.

- Calcule a **aproximação linear** de f em torno de a
- Calcule a **aproximação quadrática** de f em torno de a
- Calcule a **aproximação de ordem k** de f em torno de a
- Quais são os respectivos **erros de aproximação**?

Exercício computacional:

Implemente no GNU Octave uma rotina computacional que calcule o valor de $f(x) = \cos x$ com pelo menos 5 casas decimais de precisão. 



Como citar esse material?

A. Cunha, *Aproximação de Funções*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.

Essas notas de aula podem ser compartilhadas nos termos da licença Creative Commons BY-NC-ND 3.0, com propósitos exclusivamente educacionais.

