

# Eliminação Gaussiana

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

[americo.cunha@uerj.br](mailto:americo.cunha@uerj.br)

[www.americocunha.org](http://www.americocunha.org)



 @AmericoCunhaJr

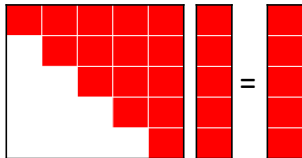
 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr

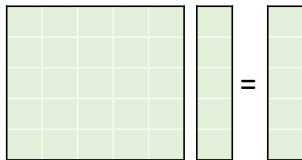
 @AmericoCunhaJr



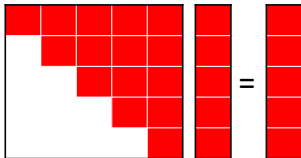
**Num sistema linear triangular, existe um desacoplamento entre as equações, que facilita a solução!**



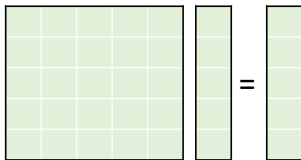
**Num sistema linear “cheio”, não existe tal desacoplamento!**



**Num sistema linear triangular, existe um desacoplamento entre as equações, que facilita a solução!**



**Num sistema linear “cheio”, não existe tal desacoplamento!**



**Como proceder nesse caso?**

## Sistema $n \times n$ “cheio”

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- A matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é “cheia”, i.e., *não tem uma estrutura especial com muitos zeros*;
- Em geral, esse sistema linear tem as *equações são acopladas*, cada equação depende de todas as demais equações;
- O *método direto* padrão para resolver esse tipo de sistema linear é chamado *eliminação gaussiana*.



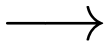
# Eliminação Gaussiana

## Ideia do método:

- Transformar o sistema “cheio” num sistema triangular, que seja equivalente ao sistema original (tenha a mesma solução);
- Resolver o sistema triangular por substituição.

### Sistema Original

$$\begin{array}{c} A \\ n \times n \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ n \times 1 \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{b} \\ n \times 1 \end{array}$$



Eliminação  
Gaussiana

### Sistema Equivalente (mesma solução)

$$\begin{array}{c} \tilde{A} \\ n \times n \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ n \times 1 \end{array} = \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{b}} \\ n \times 1 \end{array}$$

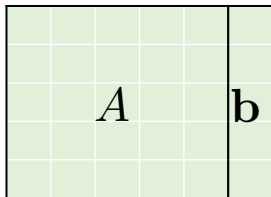


# Como transformar um sistema “cheio” num triangular?

Através de uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas/colunas de posição;
- multiplicar uma linha/coluna por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha/coluna a outra linha/coluna.

O sistema original, em formato estendido, é alterado coluna por coluna até chegar num formato triangular superior equivalente:

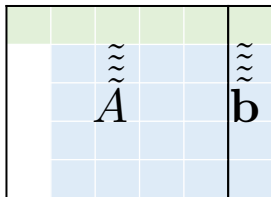


# Como transformar um sistema “cheio” num triangular?

Através de uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas/colunas de posição;
- multiplicar uma linha/coluna por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha/coluna a outra linha/coluna.

O sistema original, em formato estendido, é alterado coluna por coluna até chegar num formato triangular superior equivalente:

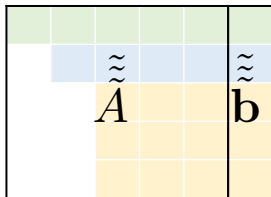


# Como transformar um sistema “cheio” num triangular?

Através de uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas/colunas de posição;
- multiplicar uma linha/coluna por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha/coluna a outra linha/coluna.

O sistema original, em formato estendido, é alterado coluna por coluna até chegar num formato triangular superior equivalente:



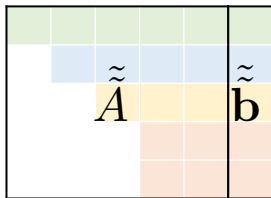


# Como transformar um sistema “cheio” num triangular?

Através de uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas/colunas de posição;
- multiplicar uma linha/coluna por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha/coluna a outra linha/coluna.

O sistema original, em formato estendido, é alterado coluna por coluna até chegar num formato triangular superior equivalente:

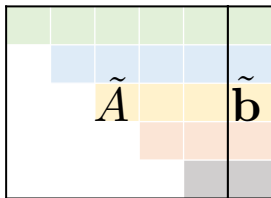


# Como transformar um sistema “cheio” num triangular?

Através de uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas/colunas de posição;
- multiplicar uma linha/coluna por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha/coluna a outra linha/coluna.

O sistema original, em formato estendido, é alterado coluna por coluna até chegar num formato triangular superior equivalente:



# O procedimento de eliminação

$$\left[ A^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)} \right] = \left[ \begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right]$$

# O procedimento de eliminação

**Passo 1:** anular todos os elementos abaixo do pivô  $a_{11}^{(1)}$ :

$$\left[ A^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)} \right] = \left[ \begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right]$$

Para  $i = 2, \dots, n$ , atualize as linhas segundo:

$$L_i^{(2)} \leftarrow L_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)}$$



## O procedimento de eliminação

$$\left[ A^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right]$$



## O procedimento de eliminação

**Passo 2:** anular todos os elementos abaixo do pivô  $a_{22}^{(2)}$ :

$$\left[ A^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right]$$

Para  $i = 3, \dots, n$ , atualize as linhas segundo:

$$L_i^{(3)} \leftarrow L_i^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} L_2^{(2)}$$



## O procedimento de eliminação

$$\left[ A^{(3)} \mid \mathbf{b}^{(3)} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array} \right]$$



## O procedimento de eliminação

**Passo 3:** anular todos os elementos abaixo do pivô  $a_{33}^{(3)}$ :

$$\left[ A^{(3)} \mid \mathbf{b}^{(3)} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array} \right]$$

Para  $i = 4, \dots, n$ , atualize as linhas segundo:

$$L_i^{(4)} \leftarrow L_i^{(3)} - \frac{a_{i3}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} L_3^{(3)}$$





# O procedimento de eliminação

... continua até a coluna  $(n - 1)$  ....



# O procedimento de eliminação

$$\left[ A^{(n)} \mid \mathbf{b}^{(n)} \right] = \left[ \begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{array} \right]$$



# O procedimento de eliminação

A *fórmula geral da eliminação gaussiana* é dada por

$$L_i^{(k+1)} \leftarrow L_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)}$$

onde  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ .



# Algoritmo para a eliminação gaussiana

Input:  $A$ ,  $b$

```
1: Compute the length of  $b$ 
2: for  $k=1:n-1$  do
3:   for  $i=k+1:n$  do
4:      $l_{ik} = -a_{ik}/a_{kk}$ 
5:     for  $j=1:n$  do
6:        $a_{ij} = a_{ij} + l_{ik} a_{kj}$ 
7:     end for
8:      $b_i = b_i + l_{ik} b_k$ 
9:   end for
10: end for
11: Compute  $x$  with backward substitution
12: return
```

Output:  $x$

Esse algoritmo tem uma implementação pedagógica da eliminação gaussiana,  
não é o mais eficiente do ponto de vista computacional.



# Implementação em GNU Octave

```
function [x,A,b] = gauss(A,b)
    n = length(b);
    for k=1:n-1
        for i=k+1:n
            Lik = -A(i,k)/A(k,k);
            for j=1:n
                A(i,j) = A(i,j) + Lik*A(k,j);
            end
            b(i) = b(i) + Lik*b(k);
        end
    end
    x = backsub(A,b);
end
```



# Experimento Computacional 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$



```
>> A = [2 1 -1; -3 -1 2; -2 1 2]
>> b = [8; -11; -3]
>> [x,A,b] = gauss(A,b)
```



# Experimento Computacional 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



```
>> A = [1 2 3 4; 2 1 4 3; 3 2 1 4; 4 3 2 1]
>> b = [10; 10; 10; 10]
>> [x,A,b] = gauss(A,b)
```



## Experimento Computacional 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



```
>> A = [1 1 1; 1 1 2; 1 2 2]
>> b = [1; 2; 1]
>> [x,A,b] = gauss(A,b)
```



# Qual o problema nesse último experimento?



# Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:



# Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right]$$



# Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$



# Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$



# Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{\mathbf{0}} L_2$$

Divisão por zero, perigo!



# Qual o problema nesse último experimento?

## Eliminação Gaussiana:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{\mathbf{0}} L_2$$

Divisão por zero, perigo!

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \text{NaN} & \text{NaN} & -\infty & -\infty \end{array} \right]$$



# Qual o problema nesse último experimento?

## Eliminação Gaussiana:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{\mathbf{0}} L_2$$

Divisão por zero, perigo!

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \text{NaN} & \text{NaN} & -\infty & -\infty \end{array} \right]$$


Os demais cálculos são comprometidos por NaN e  $-\infty$ .






## Para pensar em casa ...

### Exercício computacional:

Pense num algoritmo mais eficiente (em termos de processamento e uso de memória) para implementar a eliminação gaussiana. Implemente esse algoritmo no ambiente GNU Octave. 

### Exercício computacional:

Pense num algoritmo para a eliminação gaussiana, que resolva o problema de ter um denominador nulo durante o processo de escalonamento da matriz estendida. Implemente esse algoritmo no ambiente GNU Octave. 

**Mais a frente nesse curso veremos como remediar essa questão do denominador nulo.**



# Qual o custo computacional de um sistema cheio?

Elim. Gauss. = Triangularização + Substituição



# Qual o custo computacional de um sistema cheio?

Elim. Gauss. = Triangularização + Substituição

$$\begin{aligned}\text{flops}(\mathbf{Triangularização}) &\approx \underbrace{(n-1) + (n-2) + \cdots + 1}_{\text{divisões}} + \\ &\quad \underbrace{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1}_{\text{multiplicações}} + \\ &\quad \underbrace{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1}_{\text{subtrações}}\end{aligned}$$



# Qual o custo computacional de um sistema cheio?

Elim. Gauss. = Triangularização + Substituição

$$\begin{aligned}\text{flops}(\mathbf{Triangularização}) &\approx \underbrace{(n-1) + (n-2) + \cdots + 1}_{\text{divisões}} + \\ &\quad \underbrace{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1}_{\text{multiplicações}} + \\ &\quad \underbrace{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1}_{\text{subtrações}} \\ &\sim \frac{2}{3} n^3\end{aligned}$$



# Qual o custo computacional de um sistema cheio?

Elim. Gauss. = Triangularização + Substituição

$$\begin{aligned}\text{flops}(\mathbf{Triangularização}) &\approx \underbrace{(n-1) + (n-2) + \cdots + 1}_{\text{divisões}} + \\ &\quad \underbrace{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1}_{\text{multiplicações}} + \\ &\quad \underbrace{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1}_{\text{subtrações}} \\ &\sim \frac{2}{3} n^3\end{aligned}$$

Processamento:

Memória:



# Qual o custo computacional de um sistema cheio?

Elim. Gauss. = Triangularização + Substituição

$$\begin{aligned}\text{flops}(\mathbf{Triangularização}) &\approx \underbrace{(n-1) + (n-2) + \cdots + 1}_{\text{divisões}} + \\ &\quad \underbrace{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1}_{\text{multiplicações}} + \\ &\quad \underbrace{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1}_{\text{subtrações}} \\ &\sim \frac{2}{3} n^3\end{aligned}$$

Processamento:

$$\text{flops}(\mathbf{Gauss}) \sim \frac{2}{3} n^3 + n^2$$

Memória:

$$\text{mem}(\mathbf{cheio}) = n^2 + 2n$$



# Tempo de processamento para um sistema “cheio”

Intel Core i7 em 2011:  $12 \times 10^9$  FLOPS

Intel Core i7 em 2021:  $52 \times 10^9$  FLOPS

FLOPS = flops por segundo

n	flops (Elim. Gauss.)	Tempo de CPU	
		2011	2021
10	767	64 ns	14 ns
$10^2$	$6,7 \times 10^5$	56 $\mu$ s	13 $\mu$ s
$10^3$	$6,7 \times 10^8$	56 ms	13 ms
$10^4$	$6,7 \times 10^{11}$	56 s	13 s
$10^5$	$6,7 \times 10^{14}$	15 horas	4 horas
$10^6$	$6,7 \times 10^{17}$	643 dias	148 dias
$10^7$	$6,7 \times 10^{20}$	1,7k anos	406 anos
$10^8$	$6,7 \times 10^{23}$	1,7M anos	406k anos

<https://en.wikipedia.org/wiki/FLOPS>

<https://www.cpubenchmark.net>



# Uso de memória para um sistema “cheio”

1 double = 8 bytes

n	entradas	memória
10	120	1 kB
$10^2$	$10 \times 10^3$	80 kB
$10^3$	$1 \times 10^6$	8 MB
$10^4$	$100 \times 10^6$	763 MB
$10^5$	$10 \times 10^9$	75 GB
$10^6$	$1 \times 10^{12}$	7 TB
$10^7$	$100 \times 10^{12}$	727 TB
$10^8$	$1 \times 10^{16}$	71 PB





# Moral sobre sistemas lineares “cheios”

1. Sistemas lineares “cheios” são muito desafiadores, tanto em tempo de CPU quanto ao uso de memória;
2. Sistemas “cheios” que são intratáveis via métodos diretos podem ser atacados por métodos iterativos junto com estratégias de armazenamento otimizadas;
3. Na maioria das aplicações práticas as matrizes tem estruturas especiais (e.g. simétrica, em banda etc), que podem ser exploradas para reduzir tempo de CPU e uso de memória;
4. O método numérico a ser utilizado na solução do sistema linear, bem como a estratégia de armazenamento, devem ser escolhidos com sabedoria!



## Como citar esse material?

A. Cunha, *Eliminação Gaussiana*,  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.



 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr

Essas notas de aula podem ser compartilhadas nos termos da licença Creative Commons BY-NC-ND 3.0, com propósitos exclusivamente educacionais.

