

# Fundamentos de Sistemas Lineares

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

[americo.cunha@uerj.br](mailto:americo.cunha@uerj.br)

[www.americocunha.org](http://www.americocunha.org)



@AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr



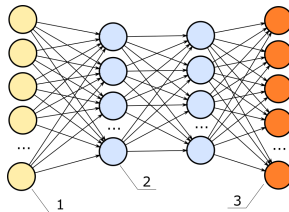
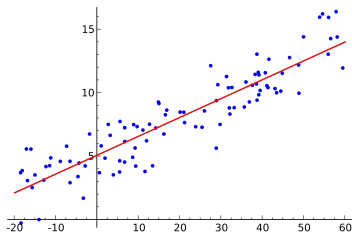
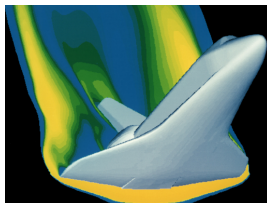
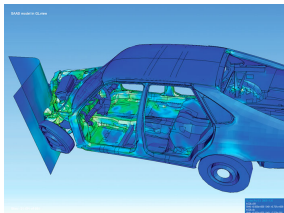
@AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr



# Sistemas lineares de grande porte são comuns em aplicações de engenharia e ciências!



# Forma geral

Considere um conjunto que contém  $m$  equações lineares munidas de  $n$  incógnitas, ao qual vamos chamar *sistema linear com  $m$  equações e  $n$  incógnitas*, que pode ser representado como

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \cdots & + & a_{1n} x_n & = & b_1 \\ a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + & \cdots & + & a_{2n} x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \cdots & + & a_{mn} x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$  – coeficientes
- $b_i \in \mathbb{R}$  – constantes
- $x_j \in \mathbb{R}$  – incógnitas



# Forma geral

Considere um conjunto que contém  $m$  equações lineares munidas de  $n$  incógnitas, ao qual vamos chamar *sistema linear com  $m$  equações e  $n$  incógnitas*, que pode ser representado como

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \cdots & + & a_{1n} x_n & = & b_1 \\ a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + & \cdots & + & a_{2n} x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & & \\ a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \cdots & + & a_{mn} x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$  – coeficientes (números conhecidos)
- $b_i \in \mathbb{R}$  – constantes (números conhecidos)
- $x_j \in \mathbb{R}$  – incógnitas (números desconhecidos)



## Versão matricial

Um sistema linear com  $m$  equações e  $n$  incógnitas também admite uma *representação matricial*:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  – matriz dos coeficientes (conhecida)
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  – vetor das constantes (conhecido)
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  – vetor das incógnitas (desconhecido)



## Versão vetorial

Outra forma de interpretar um sistema linear com  $m$  equações e  $n$  incógnitas é através da noção de *combinação linear de vetores*:

$$x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_2} + \cdots + x_n \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  – vetores geradores da imagem (conhecidos)
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  – vetor lado direito (conhecido)
- $x_j \in \mathbb{R}$  – incógnitas (números desconhecidos)



# A noção de solução

Uma *solução do sistema linear*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

pode ser pensada de 3 formas:

1. Atribuição de valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  às  $n$  incógnitas, de modo que as  $m$  equações do sistema sejam verificadas;
2. Um vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  que ao ser multiplicado à direita da matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  resulta no vetor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ;
3. Uma combinação linear das colunas de  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  que gere o vetor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ .

O conjunto formado por todas as soluções do sistema linear é chamado *conjunto solução*.



## Exemplo 1

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5$$

$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7$$

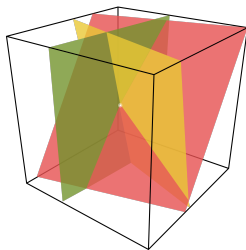
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 8$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Esse sistema possui uma única solução. O conjunto solução é um ponto em  $\mathbb{R}^3$ .





## Exemplo 2

$$a + b + c = 1$$

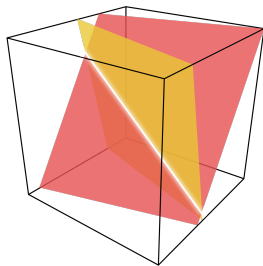
$$a + b + 2c = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Esse sistema possui infinitas soluções. O conjunto solução é um sub-espaco afim em  $\mathbb{R}^3$ .

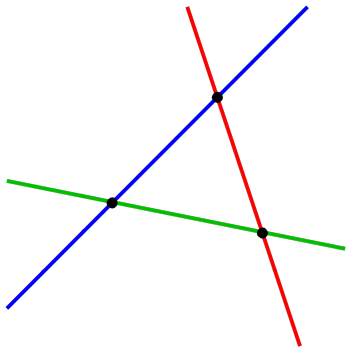


## Exemplo 3

$$\begin{aligned}2x + y &= -1 \\ -3x + y &= -2 \\ -x + y &= 1\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

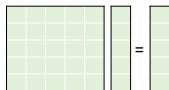


Solução:

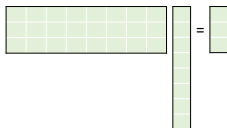
Esse sistema não possui solução. O conjunto solução é vazio.

# Cenários típicos em sistemas lineares

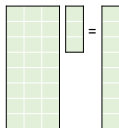
1. Sistema quadrado (*tipicamente solução única*)



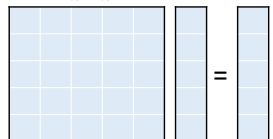
2. Sistema “baixinho e gordinho” (*tipicamente infinitas soluções*)



3. Sistema “altinho e magrinho” (*tipicamente não tem solução*)



# Sistema quadrado

$$\begin{array}{ccc} A & \mathbf{x} & \mathbf{b} \\ n \times n & n \times 1 & m \times 1 \end{array}$$


A solução é a *única combinação linear* das colunas de  $A$  que gera o vetor  $\mathbf{b}$ , i.e.,

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

para um único vetor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

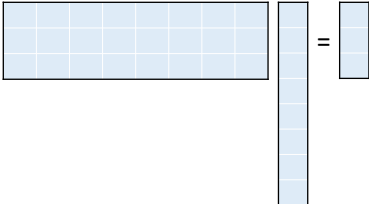
- Caso típico quando o sistema tem *solução única*;
- *Solução única*  $\iff \det A \neq 0$ ;
- A *solução única* é dada por

$$\mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{b}$$

onde  $A^{-1}$  é chamada *inversa* da matriz  $A$ .



# Sistema “baixinho e gordinho”

$$\begin{array}{c} A \\ m \times n \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ n \times 1 \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{b} \\ m \times 1 \end{array}$$


Cada solução é *uma combinação linear* das colunas de  $A$  que gera o vetor  $\mathbf{b}$ , i.e.,

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

para infinitos vetores  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ .

- Caso típico quando o sistema tem *infinitas soluções*;
- *Infinitas soluções*  $\iff \mathbf{b} \in \underbrace{\text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}}_{\text{sub-espaco gerado}}$ ;
- A escolha mais frequente é a *solução de menor norma*

$$\mathbf{x} = \arg \min \|\mathbf{x}\|, \text{ tal que } A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

“vetor solução  $\mathbf{x}$  de menor tamanho”



# Sistema “altinho e magrinho”

$$\begin{array}{ccc} A & \mathbf{x} & \mathbf{b} \\ m \times n & n \times 1 & m \times 1 \\ \begin{array}{|c|} \hline \text{Matriz } A \\ \hline \end{array} & = & \begin{array}{|c|} \hline \text{Vetor } \mathbf{b} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Nenhuma combinação linear das colunas de  $A$  gera o vetor  $\mathbf{b}$ , i.e.,

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n \neq \mathbf{b}$$

para qualquer vetor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ .

- Caso típico quando o sistema **não tem solução**;
- **Não tem solução**  $\iff \mathbf{b} \notin \underbrace{\text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}}_{\text{sub-espaco gerado}}$ ;
- Nesse caso é utilizada a ***solução generalizada***

$$\mathbf{x} = \arg \min ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||$$

“projeção ortogonal de  $\mathbf{b}$  no sub-espaco  $A\mathbf{x}$ ”



## Como citar esse material?

A. Cunha, *Fundamentos de Sistemas Lineares*,  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.



 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr

Essas notas de aula podem ser compartilhadas nos termos da licença Creative Commons BY-NC-ND 3.0, com propósitos exclusivamente educacionais.

