

Fundamentos de Sistemas Lineares

Prof. Americo Cunha


Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org



 @AmericoCunhaJr

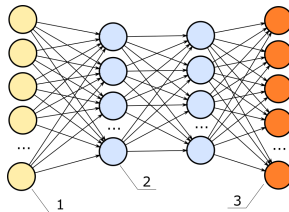
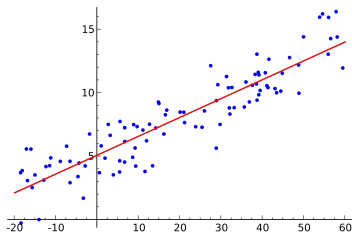
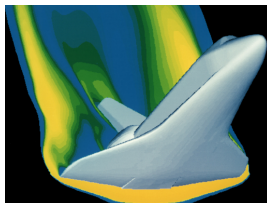
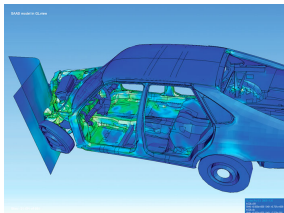
 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr



Sistemas lineares de grande porte são comuns em aplicações de engenharia e ciências!



Forma geral

Considere um conjunto que contém m equações lineares munidas de n incógnitas, ao qual vamos chamar *sistema linear com m equações e n incógnitas*, que pode ser representado como

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \cdots & + & a_{1n} x_n & = & b_1 \\ a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + & \cdots & + & a_{2n} x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \cdots & + & a_{mn} x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$ – coeficientes
- $b_i \in \mathbb{R}$ – constantes
- $x_j \in \mathbb{R}$ – incógnitas



Forma geral

Considere um conjunto que contém m equações lineares munidas de n incógnitas, ao qual vamos chamar *sistema linear com m equações e n incógnitas*, que pode ser representado como

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \cdots & + & a_{1n} x_n & = & b_1 \\ a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + & \cdots & + & a_{2n} x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & & \\ a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \cdots & + & a_{mn} x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$ – coeficientes (números conhecidos)
- $b_i \in \mathbb{R}$ – constantes (números conhecidos)
- $x_j \in \mathbb{R}$ – incógnitas (números desconhecidos)



Versão matricial

Um sistema linear com m equações e n incógnitas também admite uma *representação matricial*:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – matriz dos coeficientes (conhecida)
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ – vetor das constantes (conhecido)
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ – vetor das incógnitas (desconhecido)



Versão vetorial

Outra forma de interpretar um sistema linear com m equações e n incógnitas é através da noção de *combinação linear de vetores*:

$$x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_2} + \cdots + x_n \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ – vetores geradores da imagem (conhecidos)
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ – vetor lado direito (conhecido)
- $x_j \in \mathbb{R}$ – incógnitas (números desconhecidos)



A noção de solução

Uma *solução do sistema linear*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

pode ser pensada de 3 formas:

1. Atribuição de valores x_1, x_2, \dots, x_n às n incógnitas, de modo que as m equações do sistema sejam verificadas;
2. Um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ que ao ser multiplicado à direita da matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ resulta no vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$;
3. Uma combinação linear das colunas de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que gere o vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$.

O conjunto formado por todas as soluções do sistema linear é chamado *conjunto solução*.



Exemplo 1

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5$$

$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7$$

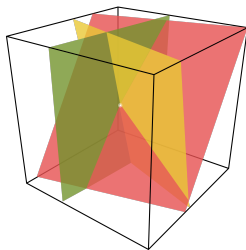
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 8$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Esse sistema possui uma única solução. O conjunto solução é um ponto em \mathbb{R}^3 .



Exemplo 2

$$a + b + c = 1$$

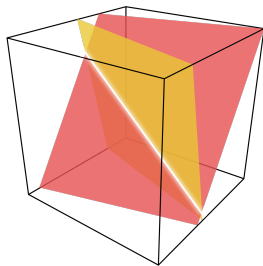
$$a + b + 2c = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Esse sistema possui infinitas soluções. O conjunto solução é um sub-espaco afim em \mathbb{R}^3 .

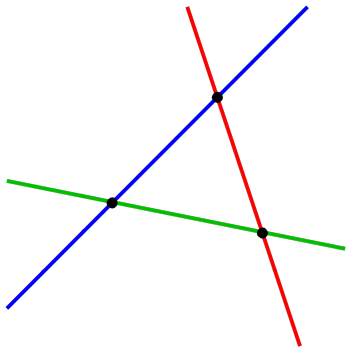


Exemplo 3

$$\begin{aligned}2x + y &= -1 \\ -3x + y &= -2 \\ -x + y &= 1\end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

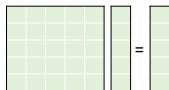


Solução:

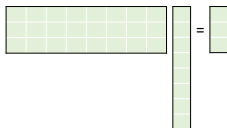
Esse sistema não possui solução. O conjunto solução é vazio.

Cenários típicos em sistemas lineares

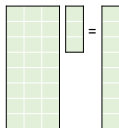
1. Sistema quadrado (*tipicamente solução única*)



2. Sistema “baixo e gordinho” (*tipicamente infinitas soluções*)



3. Sistema “alto e magrinho” (*tipicamente não tem solução*)



Sistema quadrado

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{x} & \mathbf{b} \\ n \times n & n \times 1 & m \times 1 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} & = & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \end{array}$$

A solução é a *única combinação linear* das colunas de A que gera o vetor \mathbf{b} , i.e.,

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

para um único vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

- Caso típico quando o sistema tem *solução única*;
- *Solução única* $\iff \det A \neq 0$;
- A *solução única* é dada por

$$\mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{b}$$

onde A^{-1} é chamada *inversa* da matriz A .



Sistema “baixinho e gordinho”

$$\begin{array}{c} A \\ m \times n \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ n \times 1 \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{b} \\ m \times 1 \end{array}$$

Cada solução é *uma combinação linear* das colunas de A que gera o vetor \mathbf{b} , i.e.,

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

para infinitos vetores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

- Caso típico quando o sistema tem *infinitas soluções*;
- *Infinitas soluções* $\iff \mathbf{b} \in \underbrace{\text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}}_{\text{sub-espaco gerado}}$;
- A escolha mais frequente é a *solução de menor norma*

$$\mathbf{x} = \arg \min \|\mathbf{x}\|, \text{ tal que } A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

“vetor solução \mathbf{x} de menor tamanho”



Sistema “altinho e magrinho”

$$\begin{array}{ccc} A & \mathbf{x} & \mathbf{b} \\ m \times n & n \times 1 & m \times 1 \\ \begin{array}{|c|} \hline \text{grid} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \text{column} \\ \hline \end{array} & = \begin{array}{|c|} \hline \text{column} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Nenhuma combinação linear das colunas de A gera o vetor \mathbf{b} , i.e.,

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n \neq \mathbf{b}$$

para qualquer vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

- Caso típico quando o sistema **não tem solução**;
- **Não tem solução** $\iff \mathbf{b} \notin \underbrace{\text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}}_{\text{sub-espaco gerado}}$;
- Nesse caso é utilizada a ***solução generalizada***

$$\mathbf{x} = \arg \min ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||$$

“projeção ortogonal de \mathbf{b} no sub-espaco $A\mathbf{x}$ ”



Como citar esse material?

A. Cunha, *Fundamentos de Sistemas Lineares*,
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.



 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr

Essas notas de aula podem ser compartilhadas nos termos da licença Creative Commons BY-NC-ND 3.0, com propósitos exclusivamente educacionais.

