Representação Binária de Números Reais

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ

americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org













Números reais podem ser "quebrados" em potências de 2

23



Números reais podem ser "quebrados" em potências de 2

$$23$$
=
 $16 + 4 + 2 + 1$



Números reais podem ser "quebrados" em potências de 2

$$\begin{array}{r}
23 \\
= \\
16 + 4 + 2 + 1 \\
= \\
2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0
\end{array}$$



A noção de representação binária

Uma $representação\ binária$ do número real não negativo x é uma soma (possivelmente infinita) da forma

$$b_k 2^k + \dots + b_1 2^1 + b_0 2^0 + b_{-1} 2^{-1} + \dots + b_{-n} 2^{-n} + \dots = x$$

sendo $b_n \in \{0,1\}$, onde $n = k, \dots, 1, 0, -1, -2, \dots$

Por construção,

$$x = \underbrace{(b_k \cdots b_1 b_0)_2}_{parte \ inteira} + \underbrace{(0, b_{-1} b_{-2} b_{-3} \cdots)_2}_{parte \ fracion \acute{a}ria}$$

Notação:

$$x = (b_k \cdots b_1 b_0, b_{-1} b_{-2} b_{-3} \cdots)_2$$



•
$$x_1 = (23,0)_{10}$$



•
$$x_1 = (23,0)_{10}$$

$$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$



•
$$x_1 = (23, 0)_{10}$$

$$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$23 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1}$$



•
$$x_1 = (23,0)_{10}$$

$$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$23 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1}$$



•
$$x_1 = (23,0)_{10}$$

$$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$23 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1}$$

$$x_1 = (10111, 0)_2$$



•
$$x_1 = (23,0)_{10}$$

$$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$23 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1}$$

$$x_1 = (10111, 0)_2$$

⇒ Representação finita



•
$$x_2 = (0, 125)_{10}$$



•
$$x_2 = (0, 125)_{10}$$

$$0,125 = 1/8 = 1/2^3 = 2^{-3}$$



•
$$x_2 = (0, 125)_{10}$$

 $0, 125 = 1/8 = 1/2^3 = 2^{-3}$
 $0, 125 = 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$



•
$$x_2 = (0, 125)_{10}$$

 $0, 125 = 1/8 = 1/2^3 = 2^{-3}$
 $0, 125 = 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$



•
$$x_2 = (0, 125)_{10}$$

 $0, 125 = 1/8 = 1/2^3 = 2^{-3}$
 $0, 125 = 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$
 $x_1 = (0, 001)_2$



•
$$x_2 = (0, 125)_{10}$$

$$0, 125 = 1/8 = 1/2^3 = 2^{-3}$$

$$0, 125 = 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

$$x_1 = (0, 001)_2$$

 \Longrightarrow Representação finita



•
$$x_3 = (23, 125)_{10}$$



•
$$x_3 = (23, 125)_{10}$$

 $23, 125 = (23)_{10} + (0, 125)_{10}$



•
$$x_3 = (23, 125)_{10}$$

$$23, 125 = (23)_{10} + (0, 125)_{10}$$

$$(23)_{10} + (0, 125)_{10} = (10111)_2 + (0, 001)_2$$



•
$$x_3 = (23, 125)_{10}$$

$$23, 125 = (23)_{10} + (0, 125)_{10}$$

$$(23)_{10} + (0, 125)_{10} = (10111)_2 + (0, 001)_2$$



•
$$x_3 = (23, 125)_{10}$$

$$23, 125 = (23)_{10} + (0, 125)_{10}$$

$$(23)_{10} + (0, 125)_{10} = (10111)_2 + (0, 001)_2$$

$$x_3 = (10111, 001)_2$$



•
$$x_3 = (23, 125)_{10}$$

$$23, 125 = (23)_{10} + (0, 125)_{10}$$

$$(23)_{10} + (0, 125)_{10} = (10111)_2 + (0, 001)_2$$

$$x_3 = (10111, 001)_2$$

⇒ Representação finita



•
$$x_4 = (0,1)_{10}$$



•
$$x_4 = (0,1)_{10}$$

$$0,1=1/10$$
 (denominador não é potência de 2)



•
$$x_4 = (0,1)_{10}$$

$$0,1=1/10$$
 (denominador não é potência de 2)

$$x_4 = \left(0, 0\overline{0011}\right)_2$$



•
$$x_4 = (0,1)_{10}$$

$$0,1=1/10$$
 (denominador não é potência de 2)

$$x_4 = \left(0, 0\overline{0011}\right)_2$$

⇒ Representação infinita periódica (dízima em base 2)



•
$$x_5 = \pi$$



•
$$x_5 = \pi$$

$$\pi=3,141592\cdots$$
 (infinitos dígitos sem periodicidade)



•
$$x_5 = \pi$$

$$\pi=3,141592\cdots$$
 (infinitos dígitos sem periodicidade)

$$x_5 = (11,001001\cdots)_2$$



•
$$x_5 = \pi$$

$$\pi=3,141592\cdots$$
 (infinitos dígitos sem periodicidade)

$$x_5 = (11,001001\cdots)_2$$

⇒ Representação infinita aperiódica



Representação numa base arbitrária

Uma representação numa base natural $\beta>1$ do número real não negativo x é uma soma (possivelmente infinita) da forma

$$a_k \beta^k + \dots + a_1 \beta^1 + a_0 \beta^0 + a_{-1} \beta^{-1} + \dots + a_{-n} \beta^{-n} + \dots = x$$

sendo $a_n \in \{0, 1, 2, \cdots, \beta - 1\}$, onde $n = k, \cdots, 1, 0, -1, -2, \cdots$. Por construção,

$$x = \underbrace{(a_k \cdots a_1 a_0)_{\beta}}_{parte inteira} + \underbrace{(0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \cdots)_{\beta}}_{parte fracionária}$$

Notação:

$$x = (a_k \cdots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \cdots)_{\beta}$$



• $(125,0)_{10}$



• $(125,0)_{10}$

$$125 = 64 + 56 + 5$$



•
$$(125,0)_{10}$$

$$125 = 64 + 56 + 5$$

$$125 = 1 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 5 \times 8^0$$



•
$$(125,0)_{10}$$

$$125 = 64 + 56 + 5$$

$$125 = 1 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 5 \times 8^0$$



• $(125,0)_{10}$

$$125 = 64 + 56 + 5$$

$$125 = 1 \times 8^{2} + 7 \times 8^{1} + 5 \times 8^{0}$$

$$(125, 0)_{10} = (175, 0)_{8}$$



Para pensar em casa ...

Exercício Teórico:

Encontre a representação decimal do número $x = (111, \overline{01})_2$.

Exercício Teórico:

Qual a representação do número $x = (12, 20)_4$ na base $\beta = 3$?

Exercício Teórico:

Existe alguma base na qual $8/7=1,\overline{142857}$ admita uma representação finita?

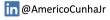


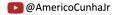
Como citar esse material?

A. Cunha, Representação Binária de Números Reais, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2020.











Essas notas de aula podem ser compartilhadas nos termos da licença Creative Commons BY-NC-ND 3.0, com propósitos exclusivamente educacionais.



