Decomposição LU

Prof. Americo Cunha

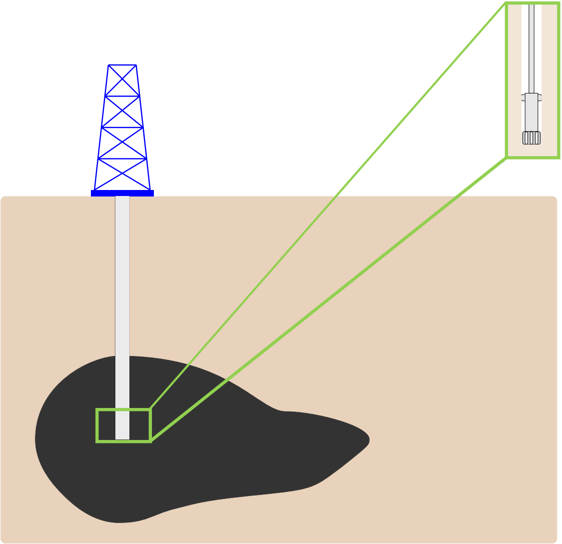
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

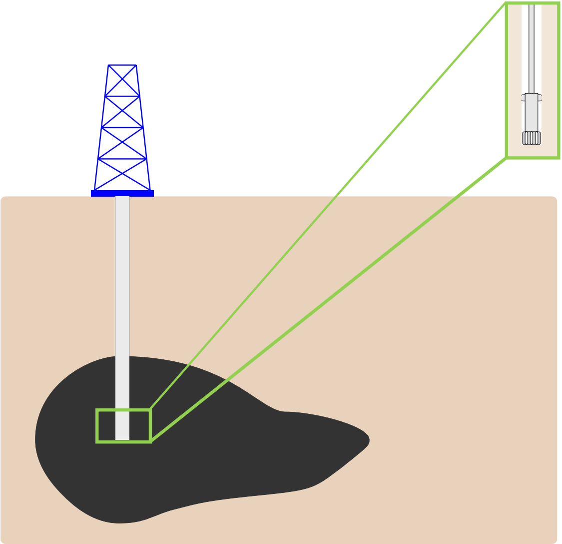
americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr





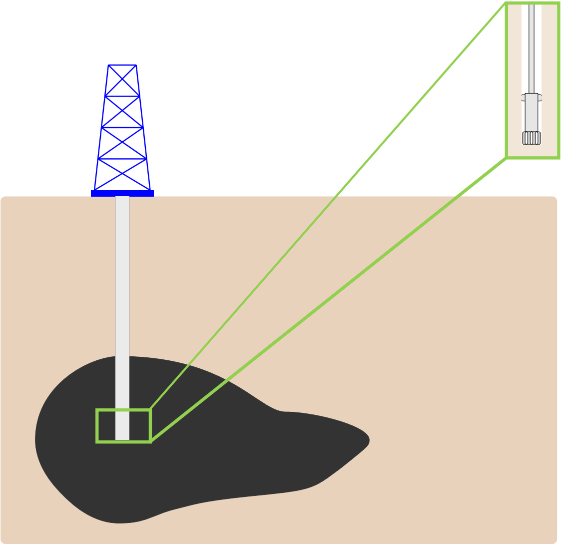
Análise Estrutural
(depende do tempo)

$$A\,\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{b}(t_1)$$

$$A\,\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{b}(t_2)$$

$$\vdots$$

$$A\,\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{b}(t_k)$$



Análise Estrutural
(depende do tempo)

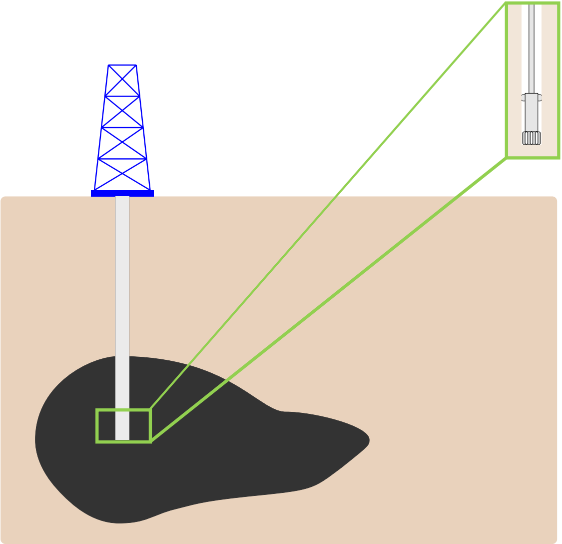
$$A\,\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{b}(t_1)$$

$$A\,\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{b}(t_2)$$

$$\vdots$$

$$A\,\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{b}(t_k)$$

\$ \$ \$ \$ \$



Análise Estrutural
(depende do tempo)

$$A\,\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{b}(t_1)$$

$$A\,\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{b}(t_2)$$

$$\vdots$$

$$A\,\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{b}(t_k)$$

\$ \$ \$ \$ \$

É possível resolver esse problema num tempo razoável?

Eliminação Gaussiana

A eliminação gaussiana *triangulariza* uma matriz "cheia":

Matriz Original

Matriz Triangular

Eliminação Gaussiana

Essa triangularização é via uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas de posição;
- multiplicar uma linha por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha à outra linha.

Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}}$$

Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1\,L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3\,L_1 \end{aligned}$$

Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$
$$L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - 1\,L_1$$
$$L_4 \leftarrow L_4 - 3\,L_1$$

Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}}$$

$$\begin{array}{lll} L_1 & \leftarrow & L_1 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 1\,L_1 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 - 3\,L_1 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} L_1 & \leftarrow & L_1 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 2\,L_2 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 - 1\,L_2 \end{array}$$

Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1\,L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3\,L_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2\,L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 1\,L_2 \end{aligned}$$

Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1\,L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3\,L_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2\,L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 1\,L_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 2\,L_3 \end{aligned}$$

Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1\,L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3\,L_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2\,L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 1\,L_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 2\,L_3 \end{aligned}$$

Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1\,L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3\,L_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2\,L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 1\,L_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 2\,L_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -- & L_1 & -- \\ -- & L_2 & -- \\ -- & L_3 & -- \\ -- & L_4 & -- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -- & L_1 & -- \\ -- & L_2 & -- \\ -- & L_3 & -- \\ -- & L_4 & -- \end{bmatrix}$$

Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1\,L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3\,L_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2\,L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 1\,L_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 2\,L_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1\,L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3\,L_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2\,L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 1\,L_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 2\,L_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -- & L_1 & -- \\ -- & L_2 & -- \\ -- & L_3 & -- \\ -- & L_4 & -- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -- & L_1 & -- \\ -- & L_2 & -- \\ -- & L_3 & -- \\ -- & L_4 & -- \end{bmatrix}$$

Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1\,L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3\,L_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2\,L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 1\,L_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 2\,L_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1\,L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3\,L_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2\,L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 1\,L_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 2\,L_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -- & L_1 & -- \\ -- & L_2 & -- \\ -- & L_3 & -- \\ -- & L_4 & -- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -- & L_1 & -- \\ -- & L_2 & -- \\ -- & L_3 & -- \\ -- & L_4 & -- \end{bmatrix}$$

Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1\,L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3\,L_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2\,L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 1\,L_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 2\,L_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}}$$

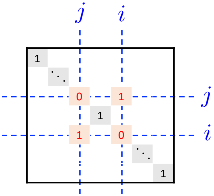
$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1\,L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3\,L_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2\,L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 1\,L_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 2\,L_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Cada operação elementar numa linha corresponde à multiplicação à esquerda por uma matriz elementar.

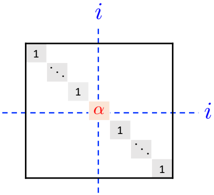
Matrizes Elementares

Uma *matriz elementar* é uma espécie de "modificação" da matriz identidade, cuja ação produz o mesmo efeito que uma operação elementar numa linha.



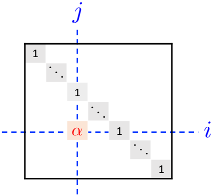
$L_i \leftrightarrow L_j$

(trocar linhas)



$L_i \leftarrow \alpha\, L_i\,,\ \alpha \neq 0$

(multiplicar linha)

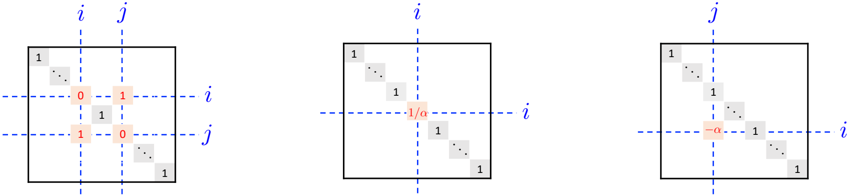


$L_i \leftarrow L_i + \alpha\, L_j$

(somar linha)

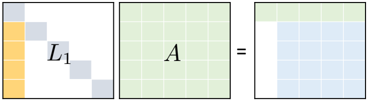
Matrizes Elementares Inversas

Uma *matriz elementar inversa* é uma espécie de "modificação" da matriz identidade, que desfaz a ação produzida pela operação elementar original. Inverter uma matriz elementar é muito fácil.

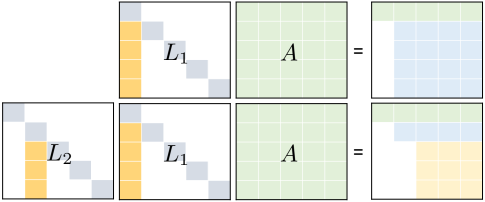


$L_j \leftrightarrow L_i$	$L_i \leftarrow 1/\alpha\, L_i\,,\ \alpha \neq 0$	$L_i \leftarrow L_i - \alpha\, L_j$
(trocar linhas)	(multiplicar linha)	(somar linha)

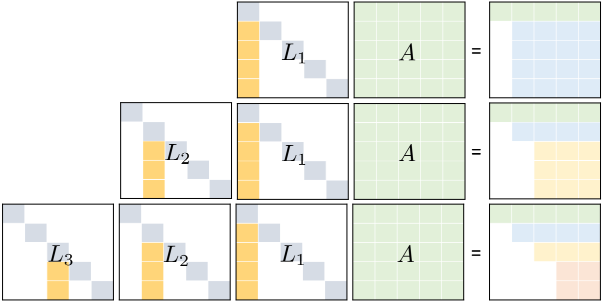
Eliminação Gaussiana – Versão Matricial



Eliminação Gaussiana – Versão Matricial



Eliminação Gaussiana – Versão Matricial

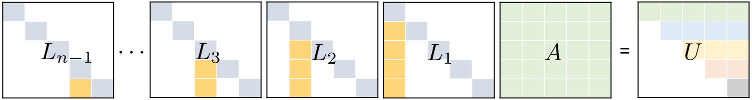


Eliminação Gaussiana – Versão Matricial

Eliminação Gaussiana – Versão Matricial

Sequência de multiplicações por matrizes triangulares inferiores, gerando uma matriz triangular superior.

Eliminação Gaussiana – Versão Matricial

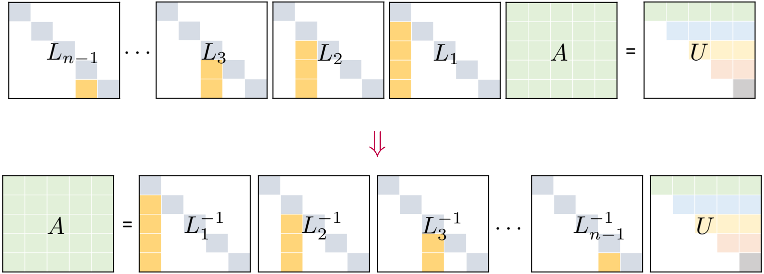


Eliminação Gaussiana – Versão Matricial

$$L_{n-1} \cdots L_3 \, L_2 \, L_1 \, A = U$$

$$\Downarrow$$

Eliminação Gaussiana – Versão Matricial



Eliminação Gaussiana – Versão Matricial

$$L_{n-1} \cdots L_3 \, L_2 \, L_1 \, A = U$$

$$\Downarrow$$

$$A = L_1^{-1} \, L_2^{-1} \, L_3^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} \, U$$

$$\Downarrow$$

Eliminação Gaussiana – Versão Matricial

$$L_{n-1} \cdots L_3 \, L_2 \, L_1 \, A = U$$

$$\Downarrow$$

$$A = L_1^{-1} \, L_2^{-1} \, L_3^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} \, U$$

$$\Downarrow$$

$$A = L \, U$$

Eliminação Gaussiana – Versão Matricial

$$L_{n-1} \cdots L_3 \, L_2 \, L_1 \, A = U$$

$$\Downarrow$$

$$A = L_1^{-1} \, L_2^{-1} \, L_3^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} \, U$$

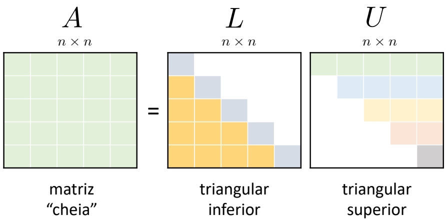
$$\Downarrow$$

$$A = L \, U$$

A eliminação gaussiana induz uma fatoração matricial tipo triangular inferior $\times$ triangular superior.

(L = lower / U = upper)

Fatoração LU



- A *fatoração LU* é a versão matricial da *eliminação gaussiana*, ambas têm o mesmo custo computacional $\sim 2/3\, n^3$;
- A matriz *triangular superior U* é obtida naturalmente ao final do processo de triangularização;
- A matriz *triangular inferior L* é construída com os coeficientes utilizados no processo de triangularização (mudando o sinal).

Exemplo de fatoração LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

Exemplo de fatoração LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 3\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2\,L_1 \end{aligned}$$

Exemplo de fatoração LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 3\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2\,L_1 \end{aligned}$$

Exemplo de fatoração LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 3\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2\,L_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1\,L_2 \end{aligned}$$

Exemplo de fatoração LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 3\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2\,L_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1\,L_2 \end{aligned}$$

Exemplo de fatoração LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 3\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2\,L_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1\,L_2 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +3 & 1 & 0 \\ +2 & +1 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{U}$$

Experimento Computacional 1

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

```
>>  A = [-2 0 1; 1 3 1; 1 2 0]
>>  [L,U] = lu(A)
```

Como resolver um sistema linear via fatoração LU?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Como resolver um sistema linear via fatoração LU?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff L\,U\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Como resolver um sistema linear via fatoração LU?

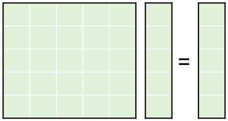
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff L\underbrace{U\mathbf{x}}_{\color{red}{\mathbf{y}}} = \mathbf{b}$$

Como resolver um sistema linear via fatoração LU?

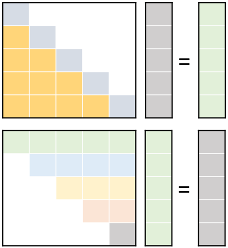
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff L\,\underbrace{U\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} L\mathbf{y} & = & \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} & = & \mathbf{y} \end{array} \right.$$

Como resolver um sistema linear via fatoração LU?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff L\underbrace{U\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} L\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} &= \mathbf{y} \end{cases}$$

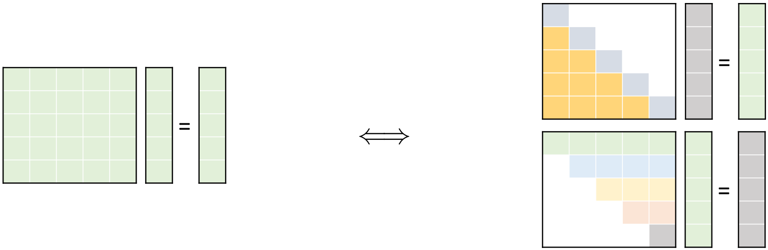


$\iff$



Como resolver um sistema linear via fatoração LU?

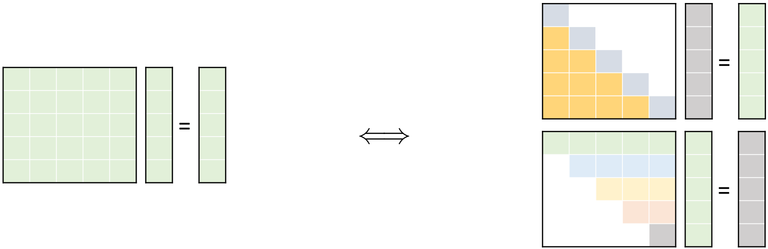
$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff L\,\underbrace{U\,\mathbf{x}}_{\color{red}\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} L\,\mathbf{y} & = & \mathbf{b} \\ U\,\mathbf{x} & = & \mathbf{y} \end{cases}$$



1. Calcular a fatoração $A = L\,U$;
2. Resolver por substituição progressiva $L\,\mathbf{y} = \mathbf{b}$;
3. Resolver por substituição regressiva $U\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Como resolver um sistema linear via fatoração LU?

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff L\,\underbrace{U\,\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} L\,\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ U\,\mathbf{x} &= \mathbf{y} \end{cases}$$



1. Calcular a fatoração $A = L\,U$;
2. Resolver por substituição progressiva $L\,\mathbf{y} = \mathbf{b}$;
3. Resolver por substituição regressiva $U\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

$$\texttt{flops}\,(\textbf{sistema via LU}) \sim \frac{2}{3}\,n^3 + 2\,n^2$$

Qual a vantagem de usar a fatoração LU?

Imagine que você precise resolver k sistemas com a mesma matriz:

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \qquad A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \qquad \cdots \qquad A\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k$$

Qual a vantagem de usar a fatoração LU?

Imagine que você precise resolver k sistemas com a mesma matriz:

$$A\,\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \qquad A\,\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \qquad \cdots \qquad A\,\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k$$

- Estratégia ingênua: Eliminação gaussiana k vezes

$$\texttt{flops}\,(\textbf{k sistemas via Gauss}) \sim \frac{2}{3}\,k\,n^3 + k\,n^2$$

Qual a vantagem de usar a fatoração LU?

Imagine que você precise resolver k sistemas com a mesma matriz:

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \qquad A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \qquad \cdots \qquad A\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k$$

- Estratégia ingênua: Eliminação gaussiana k vezes

$$\texttt{flops}\left(\textbf{k sistemas via Gauss}\right) \sim \frac{2}{3}\,k\,n^3 + k\,n^2$$

- Estratégia otimizada: Fatoração LU e $2kn$ substituições

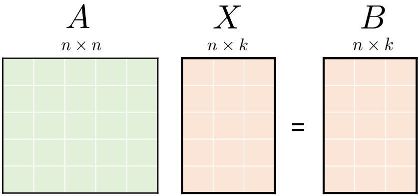
$$\texttt{flops}\left(\textbf{k sistemas via LU}\right) \sim \frac{2}{3}\,n^3 + 2\,k\,n^2$$

Outras aplicações

- Determinante:

$$\det A = \det(L\,U) = \underbrace{\det L}_{=1} \times \det U = u_{11} \times u_{22} \times \cdots \times u_{nn}$$

- Sistema com incógnita matricial:



Em alguns casos, a fatoração LU não existe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Em alguns casos, a fatoração LU não existe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1\,L_1 \end{aligned}$$

Em alguns casos, a fatoração LU não existe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 1\,L_1$

Em alguns casos, a fatoração LU não existe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 1\,L_1$

Pivô nulo, perigo!

Em alguns casos, a fatoração LU não existe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$
$$L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - 1\,L_1$$

Pivô nulo, perigo!

$$L_2 \leftrightarrow L_3$$

Em alguns casos, a fatoração LU não existe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 1\,L_1$

Pivô nulo, perigo!

$L_2 \leftrightarrow L_3$

Em alguns casos, a fatoração LU não existe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1\,L_1 \end{aligned}$$

Pivô nulo, perigo!

$$L_2 \leftrightarrow L_3$$

Nesse caso, existe uma fatoração do tipo $P\,A = L\,U$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +1 & 1 & 0 \\ +2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{U}$$

Em alguns casos, a fatoração LU não existe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 1\,L_1$

Pivô nulo, perigo!

$L_2 \leftrightarrow L_3$

Nesse caso, existe uma fatoração do tipo $P\,A = L\,U$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +1 & 1 & 0 \\ +2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{U}$$

A fatoração PLU é a versão matricial da eliminação gaussiana com pivotamento parcial.

Experimento Computacional 2

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [10 -7 0; -3 2 6; 5 -1 5]
>> [L,U,P] = lu(A)
>> P*A-L*U
```

Fundamentação teórica

Teorema (existência e unicidade da fatoração LU)

Considere $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz triangular inferior com 1's na diagonal principal, $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz triangular superior, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz de permutação de linhas e os menores principais líderes

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \cdots, n.$$

1. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não singular admite uma única fatoração $A = L\,U$ se, e somente se, todos os seus menores principais líderes forem não singulares;
2. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ singular de posto k admite uma fatoração $A = L\,U$, se os primeiros k menores principais líderes forem não singulares (embora o inverso não seja verdadeiro);
3. Qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ admite uma fatoração $P\,A = L\,U$.

Para pensar em casa ...

Exercício computacional:

Pense num algoritmo eficiente (em termos de processamento e uso de memória) para implementar a fatoração LU. Implemente esse algoritmo no ambiente GNU Octave.

Exercício computacional:

Pense num algoritmo eficiente para resolver um sistema linear com diferentes vetores do lado direito. Implemente esse algoritmo no ambiente GNU Octave.

Como citar esse material?

A. Cunha, *Decomposição LU*,
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr