Método de Newton

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org

Encontre uma solução para a equação cúbica:

$$x^3 - 2x - 4 = 0$$

Encontre uma solução para a equação cúbica:

$$x^3 - 2x - 4 = 0$$

Candidatos à solução: ± 2 , ± 4

Encontre uma solução para a equação cúbica:

$$x^3 - 2x - 4 = 0$$

Candidatos à solução: ± 2 , ± 4

Olhômetro: $x = 2$ **é solução!**

Encontre uma solução para a equação cúbica:

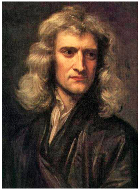
$$x^3 - 2x - 4 = 0$$

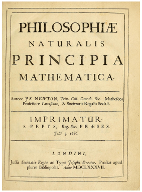
Candidatos à solução: ± 2 , ± 4

Olhômetro: $x = 2$ **é solução!**

E se a equação fosse

$$x^3 - 2x - 4.1 = 0 \quad ?$$





PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

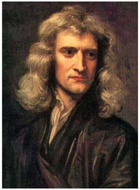
Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

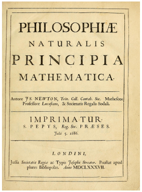
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Sir Isaac Newton (1687)

$$x^3 - 2x - 4.1 = 0$$





PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheſeos Profeſſore Lucaſiano, & Societatis Regalis Sodali.

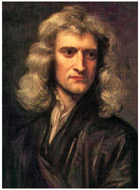
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

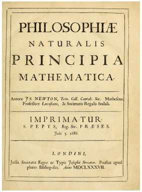
LONDINI,
Juſſu Societatis Regiæ ac Typis Joſephi Streater. Proſtat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Sir Isaac Newton (1687)

$$x^3 - 2x - 4.1 = 0$$

2 está “perto” da raiz (continuidade)





PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

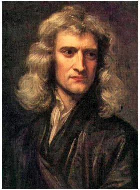
Sir Isaac Newton (1687)

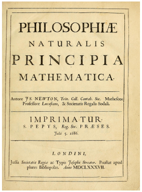
$$x^3 - 2x - 4.1 = 0$$

2 está "perto" da raiz (continuidade)

$$x = 2 + \Delta x$$

"raiz = chute + correção"




PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Sir Isaac Newton (1687)

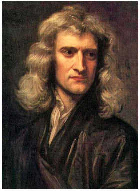
$$x^3 - 2x - 4.1 = 0$$

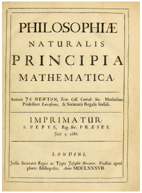
2 está "perto" da raiz (continuidade)

$$x = 2 + \Delta x$$

"raiz = chute + correção"

$$\Longrightarrow (2 + \Delta x)^3 - 2(2 + \Delta x) - 4,1 = 0$$




PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Sir Isaac Newton (1687)

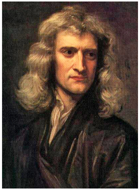
$$x^3 - 2x - 4.1 = 0$$

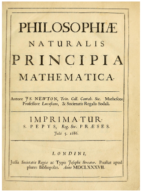
2 está "perto" da raiz (continuidade)

$$x = 2 + \Delta x$$

"raiz = chute + correção"

$$\Longrightarrow (2+\Delta x)^3 - 2\,(2+\Delta x) - 4,1 = 0$$
$$\Longrightarrow 8 + 6\,\Delta x^2 + 12\,\Delta x + \Delta x^3 - 4 - 2\,\Delta x - 4,1 = 0$$





Sir Isaac Newton (1687)

$$x^3 - 2x - 4.1 = 0$$

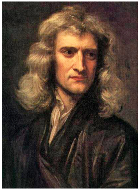
2 está "perto" da raiz (continuidade)

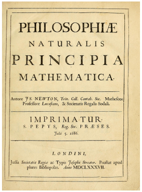
$$x = 2 + \Delta x$$

"raiz = chute + correção"

$$\Longrightarrow (2 + \Delta x)^3 - 2(2 + \Delta x) - 4,1 = 0$$

$$\Longrightarrow 8 + 6\cancel{\Delta x^2} + 12\,\Delta x + \cancel{\Delta x^3} - 4 - 2\,\Delta x - 4,1 = 0$$





PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Sir Isaac Newton (1687)

$$x^3 - 2x - 4.1 = 0$$

2 está "perto" da raiz (continuidade)

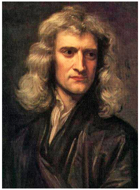
$$x = 2 + \Delta x$$

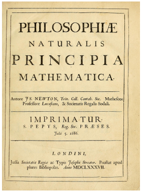
"raiz = chute + correção"

$$\Longrightarrow (2+\Delta x)^3 - 2(2+\Delta x) - 4,1 = 0$$

$$\Longrightarrow 8 + 6\cancel{\Delta x^2} + 12\,\Delta x + \cancel{\Delta x^3} - 4 - 2\,\Delta x - 4,1 = 0$$

$$\Longrightarrow 8 + 12\,\Delta x - 4 - 2\,\Delta x - 4,1 \approx 0$$





PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J.S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Sir Isaac Newton (1687)

$$x^3 - 2x - 4.1 = 0$$

2 está “perto” da raiz (continuidade)

$$x = 2 + \Delta x$$

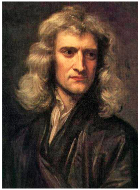
“raiz = chute + correção”

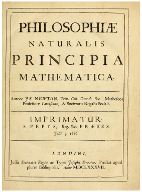
$$\Longrightarrow (2+\Delta x)^3 - 2(2+\Delta x) - 4,1 = 0$$

$$\Longrightarrow 8 + 6\cancel{\Delta x^2} + 12\,\Delta x + \cancel{\Delta x^3} - 4 - 2\,\Delta x - 4,1 = 0$$

$$\Longrightarrow 8 + 12\,\Delta x - 4 - 2\,\Delta x - 4,1 \approx 0$$

$$\Longrightarrow 10\,\Delta x - 0,1 \approx 0$$




PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Sir Isaac Newton (1687)

$$x^3 - 2x - 4.1 = 0$$

2 está "perto" da raiz (continuidade)

$$x = 2 + \Delta x$$

"raiz = chute + correção"

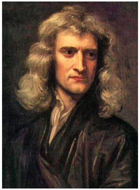
$$\Longrightarrow (2 + \Delta x)^3 - 2(2 + \Delta x) - 4,1 = 0$$

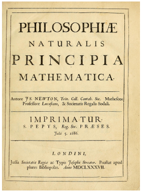
$$\Longrightarrow 8 + 6\cancel{\Delta x^2} + 12\,\Delta x + \cancel{\Delta x^3} - 4 - 2\,\Delta x - 4,1 = 0$$

$$\Longrightarrow 8 + 12\,\Delta x - 4 - 2\,\Delta x - 4,1 \approx 0$$

$$\Longrightarrow 10\,\Delta x - 0,1 \approx 0$$

$$\Longrightarrow \Delta x \approx 0,01$$





PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Sir Isaac Newton (1687)

$$x^3 - 2x - 4.1 = 0$$

2 está "perto" da raiz (continuidade)

$$x = 2 + \Delta x$$

"raiz = chute + correção"

$$\Longrightarrow (2+\Delta x)^3 - 2(2+\Delta x) - 4,1 = 0$$

$$\Longrightarrow 8 + 6\cancel{\Delta x^2} + 12\,\Delta x + \cancel{\Delta x^3} - 4 - 2\,\Delta x - 4,1 = 0$$

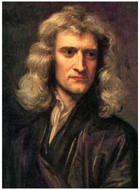
$$\Longrightarrow 8 + 12\,\Delta x - 4 - 2\,\Delta x - 4,1 \approx 0$$

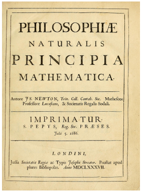
$$\Longrightarrow 10\,\Delta x - 0,1 \approx 0$$

$$\Longrightarrow \Delta x \approx 0,01$$

$$x \approx 2 + 0,01 = 2,01$$

(aproximação)





PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Sir Isaac Newton (1687)

$$x^3 - 2x - 4.1 = 0$$

2 está "perto" da raiz (continuidade)

$$x = 2 + \Delta x$$

"raiz = chute + correção"

$$\Longrightarrow (2+\Delta x)^3 - 2(2+\Delta x) - 4,1 = 0$$
$$\Longrightarrow 8 + 6\cancel{\Delta x^2} + 12\,\Delta x + \cancel{\Delta x^3} - 4 - 2\,\Delta x - 4,1 = 0$$
$$\Longrightarrow 8 + 12\,\Delta x - 4 - 2\,\Delta x - 4,1 \approx 0$$
$$\Longrightarrow 10\,\Delta x - 0,1 \approx 0$$
$$\Longrightarrow \Delta x \approx 0,01$$

$$\boxed{x \approx 2 + 0,01 = 2,01}$$

(aproximação)

$$\boxed{x = 2,00994\cdots}$$

(valor exato)

Método de Newton

É um *método numérico* para calcular uma *solução aproximada* para a equação $f(x) = 0$ partindo de um chute inicial x_0.

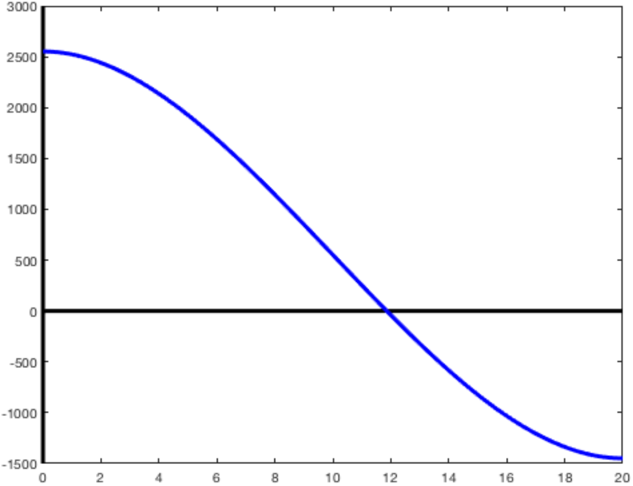
Hipóteses:

$f \in C^2[a, b]$ e existe $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$ e $f'(x^*) \neq 0$

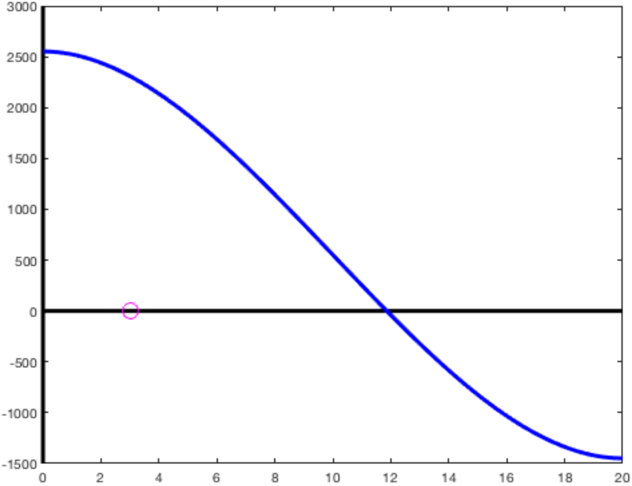
Ideia do método:

- A partir de um dado chute inicial x_0, calcule a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$
- A interseção entre essa reta tangente e o eixo x fornece uma nova aproximação para x^*
- Repita esse procedimento até obter uma aproximação com a tolerância desejada

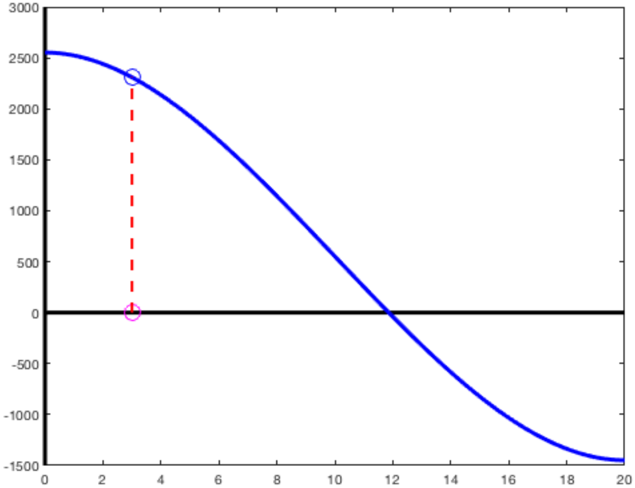
Interpretação geométrica do método de Newton



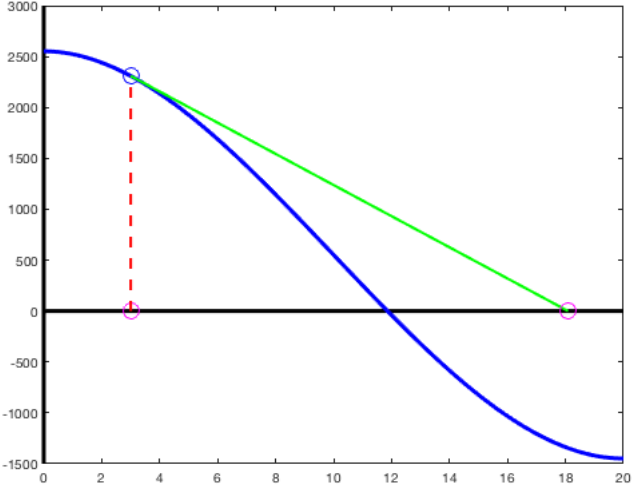
Interpretação geométrica do método de Newton



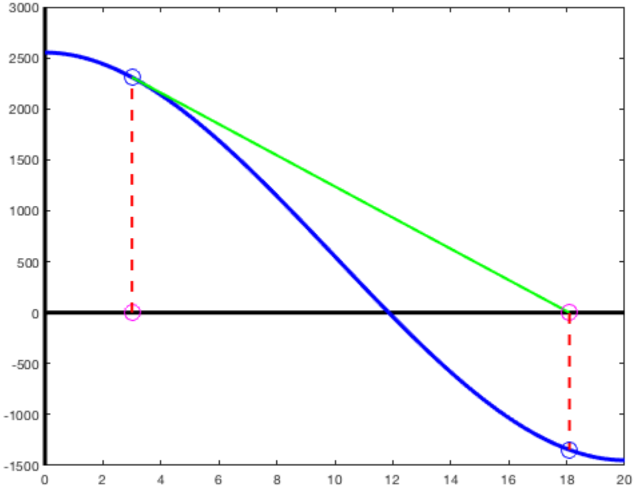
Interpretação geométrica do método de Newton



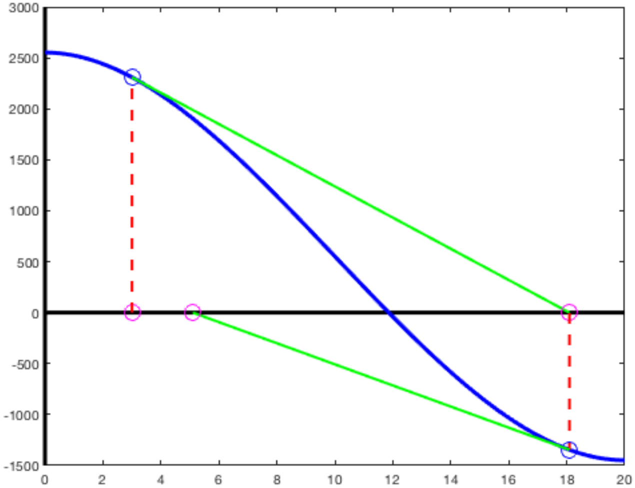
Interpretação geométrica do método de Newton



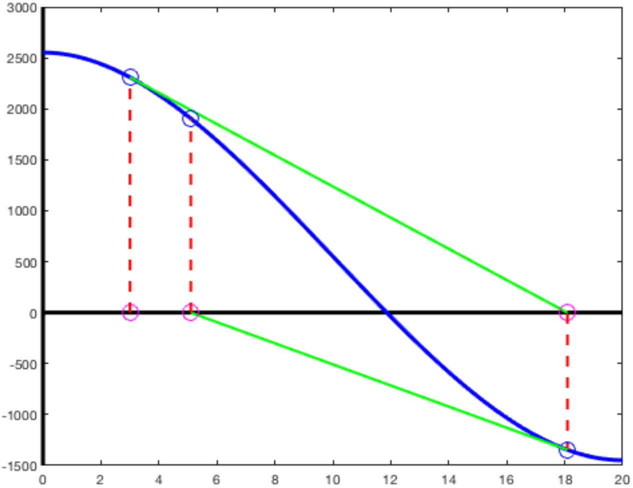
Interpretação geométrica do método de Newton



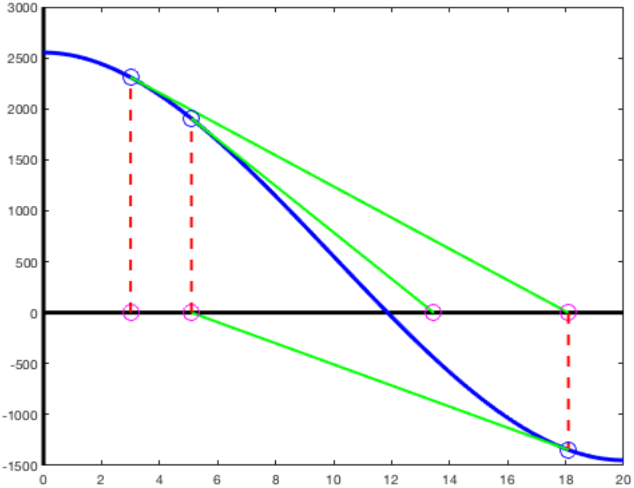
Interpretação geométrica do método de Newton



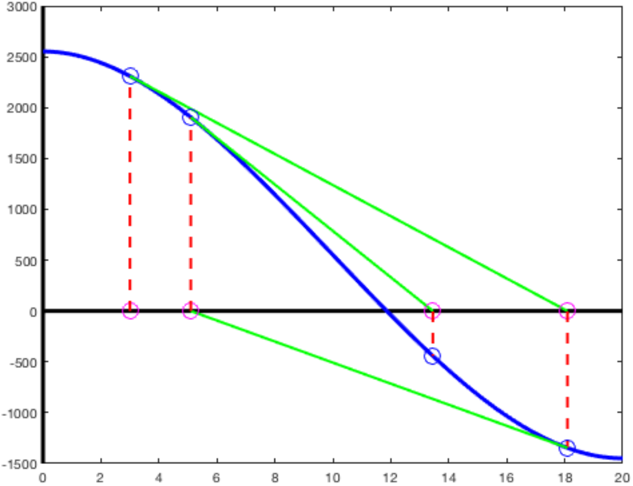
Interpretação geométrica do método de Newton



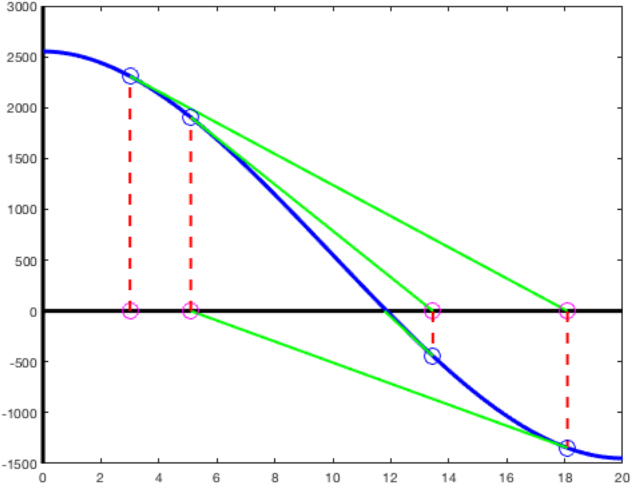
Interpretação geométrica do método de Newton



Interpretação geométrica do método de Newton



Interpretação geométrica do método de Newton



Desenvolvimento analítico do método de Newton

Desenvolvimento analítico do método de Newton

Reta tangente ao gráfico de f em $(x_n, f(x_n))$:

$$y = f(x_n) + f'(x_n)\,(x - x_n)$$

Desenvolvimento analítico do método de Newton

Reta tangente ao gráfico de f em $(x_n, f(x_n))$:

$$y = f(x_n) + f'(x_n)\,(x - x_n)$$

Na interseção entre a reta e o eixo x temos $y = 0$ e $x = x_{n+1}$:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)\,(x_{n+1} - x_n)$$

Desenvolvimento analítico do método de Newton

Reta tangente ao gráfico de f em $(x_n, f(x_n))$:

$$y = f(x_n) + f'(x_n)\,(x - x_n)$$

Na interseção entre a reta e o eixo x temos $y = 0$ e $x = x_{n+1}$:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)\,(x_{n+1} - x_n)$$

Isolando x_{n+1}, obtemos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\;\; f'(x_n) \neq 0$$

Desenvolvimento analítico do método de Newton

Reta tangente ao gráfico de f em $(x_n, f(x_n))$:

$$y = f(x_n) + f'(x_n)\,(x - x_n)$$

Na interseção entre a reta e o eixo x temos $y = 0$ e $x = x_{n+1}$:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)\,(x_{n+1} - x_n)$$

Isolando x_{n+1}, obtemos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \;\; f'(x_n) \neq 0$$

Esquema iterativo do *método de Newton*:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Algoritmo do método de Newton

Input: f, f', x_0, `tol` and `maxiter`

$\texttt{iter} = 0$
$\texttt{Error} = \infty$
while termination criterion is not met ($\texttt{Error}$, $\texttt{tol}$, $\texttt{maxiter}$) **do**
    $\texttt{iter} = \texttt{iter} + 1$
    Compute the correction $\Delta x = -f(x_0)/f'(x_0)$
    Update the approximation $x_{new} = x_0 + \Delta x$
    Estimate the `Error` based on x_{new} and x_0
    Update the initial guess $x_0 = x_{new}$
end while
if $\texttt{Error} > \texttt{tol}$ **then**
    $x_{new} = \texttt{NaN}$
end if
return

Output: x_{new}, `iter`

Implementação em GNU Octave

```
function [xnew,iter] = newton(f,df,x0,tol,maxiter)
     iter = 0;
    Error = inf;
    while Error > tol && iter < maxiter
         iter = iter + 1;
           dx = - f(x0)/df(x0);
         xnew = x0 + dx;
        Error = abs(xnew-x0);
           x0 = xnew;
        fprintf([' iter = %3d   ',...
                 ' root = %.16f ',...
                 'Error = %.16f \n'],iter,xnew,Error);
    end
    if Error > tol
        xnew = NaN;
    end
return
```

Experimento computacional 1

```
>> x0 = 0.5; tol = 1.0e-9; maxiter = 10;
>> f = @(x) x*exp(x)-1;
>> df = @(x) x*(1+exp(x));
>> root1 = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```

```
>> g = @(x) exp(-x);
>> root2 = fixedpoint(g,x0,tol,maxiter);
```

```
>> a = 0.0; b = 1.0;
>> root3 = bisection(f,a,b,tol);
```

Experimento computacional 1

```
>> x0 = 0.5; tol = 1.0e-9; maxiter = 10;
>> f = @(x) x*exp(x)-1;
>> df = @(x) x*(1+exp(x));
>> root1 = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```

```
>> g = @(x) exp(-x);
>> root2 = fixedpoint(g,x0,tol,maxiter);
```

```
>> a = 0.0; b = 1.0;
>> root3 = bisection(f,a,b,tol);
```

Em geral Newton é muito mais rápido que os outros métodos!

Experimento computacional 2

```
>> tol = 1.0e-9; maxiter = 10;
>> f = @(x) x^2 - 2;
>> df = @(x) 2*x;
>> x0 = 2.0;
>> root1 = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
>> x0 = -2.0;
>> root2 = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```

Experimento computacional 2

```
>> tol = 1.0e-9; maxiter = 10;
>> f = @(x) x^2 - 2;
>> df = @(x) 2*x;
>> x0 = 2.0;
>> root1 = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
>> x0 = -2.0;
>> root2 = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```

Chute iniciais diferentes podem convergir para raízes diferentes!

Fundamentação teórica

Teorema (convergência do método de Newton)

Seja $f \in C^2[a,b]$, onde $[a,b]$ é um intervalo que contém uma raiz de f, i.e., existe $x^* \in [a,b]$ tal que $f(x^*) = 0$.

Se $f'(x^*) \neq 0$, então:

1. existe $\delta > 0$ tal que para todo $x_0 \in (x^* - \delta, x^* + \delta) \subset [a,b]$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

é uma sequência que converge para x^*, i.e., $x_n \to x^*$

2. a convergência é quadrática, i.e., para algum $M > 0$ tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} = M$$

Demonstração do teorema

Parte 1 (convergência):

Demonstração do teorema

Parte 1 (convergência):

O método de Newton é uma iteração de ponto fixo

$$x_{n+1} = \underbrace{x_n - f(x_n)/f'(x_n)}_{g(x_n)}$$

Demonstração do teorema

Parte 1 (convergência):

O método de Newton é uma iteração de ponto fixo

$$x_{n+1} = \underbrace{x_n - f(x_n)/f'(x_n)}_{g(x_n)}$$

Alguns fatos:

Demonstração do teorema

Parte 1 (convergência):

O método de Newton é uma iteração de ponto fixo

$$x_{n+1} = \underbrace{x_n - f(x_n)/f'(x_n)}_{g(x_n)}$$

Alguns fatos:

- $g'(x) = f(x)\, f''(x)/f'(x)^2$

Demonstração do teorema

Parte 1 (convergência):

O método de Newton é uma iteração de ponto fixo

$$x_{n+1} = \underbrace{x_n - f(x_n)/f'(x_n)}_{g(x_n)}$$

Alguns fatos:

- $g'(x) = f(x)\, f''(x)/f'(x)^2$
- $f \in C^2[a,b] \implies f, f', f'' \in C[a,b] \implies g' \in C[a,b]$

Demonstração do teorema

Parte 1 (convergência):

O método de Newton é uma iteração de ponto fixo

$$x_{n+1} = \underbrace{x_n - f(x_n)/f'(x_n)}_{g(x_n)}$$

Alguns fatos:

- $g'(x) = f(x)\, f''(x)/f'(x)^2$
- $f \in C^2[a,b] \implies f, f', f'' \in C[a,b] \implies g' \in C[a,b]$
- $f(x^*) = 0 \quad \implies g'(x^*) = 0$

Demonstração do teorema

Parte 1 (convergência):

O método de Newton é uma iteração de ponto fixo

$$x_{n+1} = \underbrace{x_n - f(x_n)/f'(x_n)}_{g(x_n)}$$

Alguns fatos:

- $g'(x) = f(x)\, f''(x)/f'(x)^2$
- $f \in C^2[a,b] \implies f, f', f'' \in C[a,b] \implies g' \in C[a,b]$
- $f(x^*) = 0 \quad \implies g'(x^*) = 0$
- Existe $(x^* - \delta, x^* + \delta) \subset [a,b]$ tal que $|g'(x)| < 1$

Demonstração do teorema

Parte 1 (convergência):

O método de Newton é uma iteração de ponto fixo

$$x_{n+1} = \underbrace{x_n - f(x_n)/f'(x_n)}_{g(x_n)}$$

Alguns fatos:

- $g'(x) = f(x)\, f''(x)/f'(x)^2$
- $f \in C^2[a,b] \implies f, f', f'' \in C[a,b] \implies g' \in C[a,b]$
- $f(x^*) = 0 \quad \implies g'(x^*) = 0$
- Existe $(x^* - \delta, x^* + \delta) \subset [a,b]$ tal que $|g'(x)| < 1$

Teorema de ponto fixo $\implies x_{n+1} = g(x_n)$ converge em $(x^* - \delta, x^* + \delta)$

Demonstração do teorema

Parte 1 (convergência):

O método de Newton é uma iteração de ponto fixo

$$x_{n+1} = \underbrace{x_n - f(x_n)/f'(x_n)}_{g(x_n)}$$

Alguns fatos:

- $g'(x) = f(x)\, f''(x)/f'(x)^2$
- $f \in C^2[a, b] \implies f, f', f'' \in C[a, b] \implies g' \in C[a, b]$
- $f(x^*) = 0 \quad \implies g'(x^*) = 0$
- Existe $(x^* - \delta, x^* + \delta) \subset [a, b]$ tal que $|g'(x)| < 1$

Teorema de ponto fixo $\implies x_{n+1} = g(x_n)$ converge em $(x^* - \delta, x^* + \delta)$

O método de Newton converge para qualquer x_0 "suficientemente próximo" de x^*.

Demonstração do teorema

Parte 2 (velocidade de convergência):

Demonstração do teorema

Parte 2 (velocidade de convergência):

$$f(x^*) = 0 \Longleftrightarrow f(x_n + x^* - x_n) = 0$$

Demonstração do teorema

Parte 2 (velocidade de convergência):

$$f(x^*) = 0 \iff f(x_n + \underbrace{x^* - x_n}_{\Delta x_n}) = 0$$

Demonstração do teorema

Parte 2 (velocidade de convergência):

$$f(x^*) = 0 \iff f(x_n + \underbrace{x^* - x_n}_{\Delta x_n}) = 0$$

Teorema de Taylor:

$$f(x_n) + f'(x_n)\,(x^* - x_n) + \frac{1}{2}\,f''(\xi)\,(x^* - x_n)^2 = 0, \quad \xi \in (x^*, x_n)$$

Demonstração do teorema

Parte 2 (velocidade de convergência):

$$f(x^*) = 0 \iff f(x_n + \underbrace{x^* - x_n}_{\Delta x_n}) = 0$$

Teorema de Taylor:

$$f(x_n) + f'(x_n)\,(x^* - x_n) + \tfrac{1}{2}\,f''(\xi)\,(x^* - x_n)^2 = 0, \quad \xi \in (x^*, x_n)$$

$$\implies \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x^* - x_n = -\frac{1}{2}\,\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}\,(x^* - x_n)^2$$

Demonstração do teorema

Parte 2 (velocidade de convergência):

$$f(x^*) = 0 \iff f(x_n + \underbrace{x^* - x_n}_{\Delta x_n}) = 0$$

Teorema de Taylor:

$$f(x_n) + f'(x_n)\,(x^* - x_n) + \tfrac{1}{2}\, f''(\xi)\,(x^* - x_n)^2 = 0, \quad \xi \in (x^*, x_n)$$

$$\implies \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x^* - x_n = -\frac{1}{2}\,\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}\,(x^* - x_n)^2$$

$$\implies x^* - \underbrace{\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}_{x_{n+1}} = -\frac{1}{2}\,\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}\,(x^* - x_n)^2$$

Demonstração do teorema

Parte 2 (velocidade de convergência):

$$f(x^*) = 0 \iff f(x_n + \underbrace{x^* - x_n}_{\Delta x_n}) = 0$$

Teorema de Taylor:

$$f(x_n) + f'(x_n)\,(x^* - x_n) + \tfrac{1}{2}\,f''(\xi)\,(x^* - x_n)^2 = 0, \quad \xi \in (x^*, x_n)$$

$$\implies \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x^* - x_n = -\frac{1}{2}\,\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}\,(x^* - x_n)^2$$

$$\implies x^* - \underbrace{\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}_{x_{n+1}} = -\frac{1}{2}\,\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}\,(x^* - x_n)^2$$

$$\implies |x^* - x_{n+1}| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}\right|\,|x^* - x_n|^2$$

Demonstração do teorema

$$|x^* - x_{n+1}| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}\right| |x^* - x_n|^2$$

Demonstração do teorema

$$|x^* - x_{n+1}| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}\right| |x^* - x_n|^2$$

erro da iteração n+1 $\sim$ quadrado do erro da iteração n

Demonstração do teorema

$$|x^* - x_{n+1}| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}\right| |x^* - x_n|^2$$

erro da iteração n+1 $\sim$ quadrado do erro da iteração n

Definindo $M = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(x^*)}\right| > 0$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} = M$$

Demonstração do teorema

$$|x^* - x_{n+1}| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}\right| |x^* - x_n|^2$$

erro da iteração n+1 $\sim$ quadrado do erro da iteração n

Definindo $M = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(x^*)}\right| > 0$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} = M$$

O método de Newton converge quadraticamente!

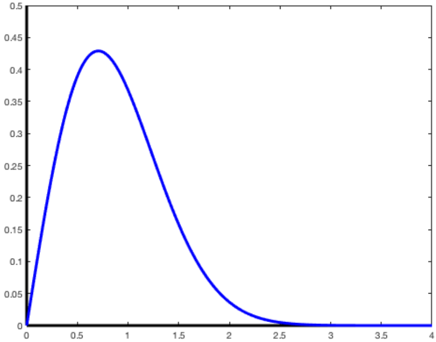
Mas nem tudo são flores ...

Patologia 1: chute inicial “longe” da raiz

```
>> x0 = 2.0; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) x*exp(-x ^ 2);
>> df = @(x) exp(-x ^ 2) - 2*(x^ 2)*exp(-x ^ 2);
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```

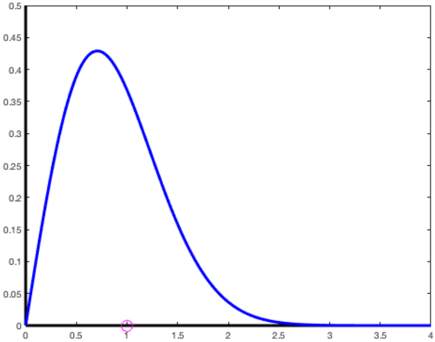
Patologia 1: chute inicial “longe” da raiz

```
>> x0 = 2.0; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) x*exp(-x ^ 2);
>> df = @(x) exp(-x ^ 2) - 2*(x^ 2)*exp(-x ^ 2);
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



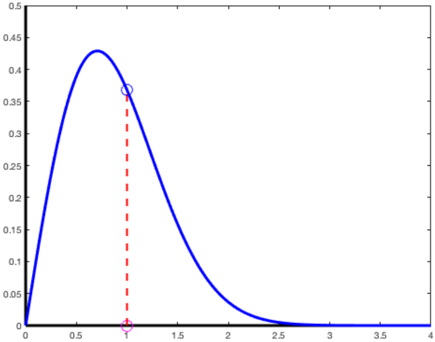
Patologia 1: chute inicial "longe" da raiz

```
>> x0 = 2.0; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) x*exp(-x ^ 2);
>> df = @(x) exp(-x ^ 2) - 2*(x^ 2)*exp(-x ^ 2);
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



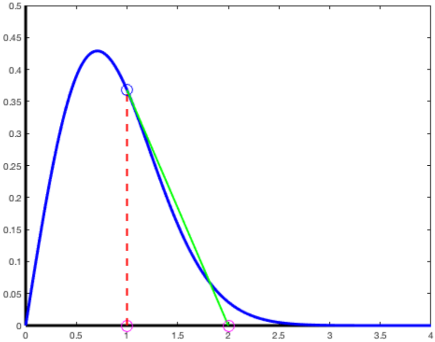
Patologia 1: chute inicial "longe" da raiz

```
>> x0 = 2.0; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) x*exp(-x ^ 2);
>> df = @(x) exp(-x ^ 2) - 2*(x^ 2)*exp(-x ^ 2);
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



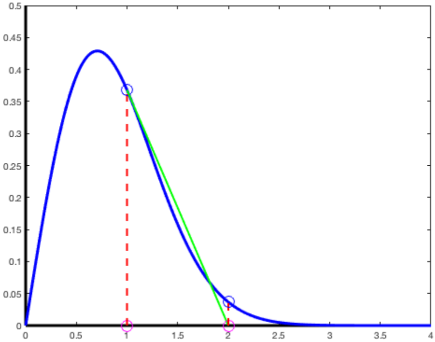
Patologia 1: chute inicial “longe” da raiz

```
>> x0 = 2.0; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) x*exp(-x ^ 2);
>> df = @(x) exp(-x ^ 2) - 2*(x^ 2)*exp(-x ^ 2);
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



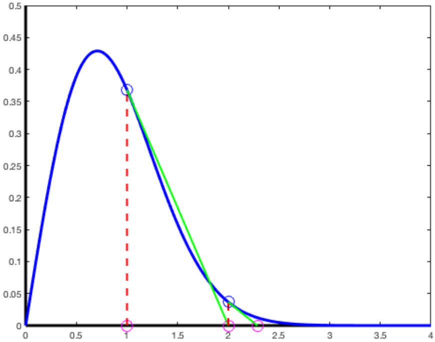
Patologia 1: chute inicial “longe” da raiz

```
>> x0 = 2.0; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) x*exp(-x ^ 2);
>> df = @(x) exp(-x ^ 2) - 2*(x^ 2)*exp(-x ^ 2);
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



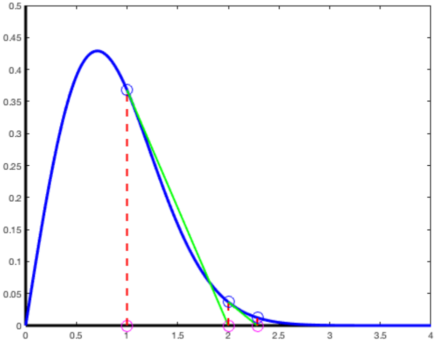
Patologia 1: chute inicial "longe" da raiz

```
>> x0 = 2.0; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) x*exp(-x ^ 2);
>> df = @(x) exp(-x ^ 2) - 2*(x^ 2)*exp(-x ^ 2);
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



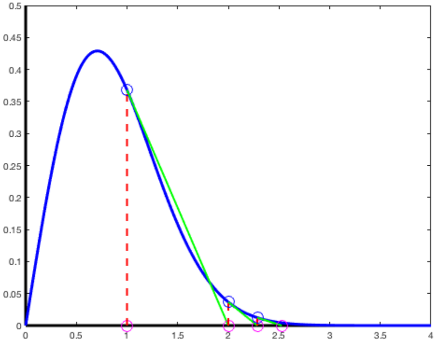
Patologia 1: chute inicial “longe” da raiz

```
>> x0 = 2.0; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) x*exp(-x ^ 2);
>> df = @(x) exp(-x ^ 2) - 2*(x^ 2)*exp(-x ^ 2);
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



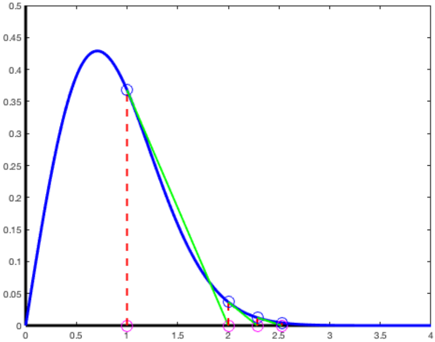
Patologia 1: chute inicial "longe" da raiz

```
>> x0 = 2.0; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) x*exp(-x ^ 2);
>> df = @(x) exp(-x ^ 2) - 2*(x^ 2)*exp(-x ^ 2);
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



Patologia 1: chute inicial "longe" da raiz

```
>> x0 = 2.0; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) x*exp(-x ^ 2);
>> df = @(x) exp(-x ^ 2) - 2*(x^ 2)*exp(-x ^ 2);
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```

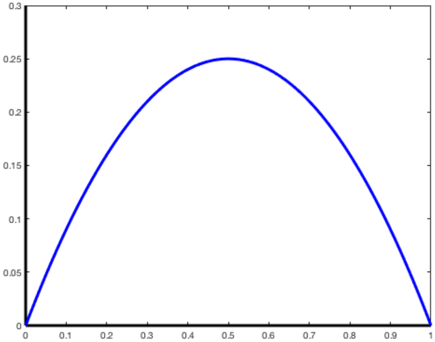


Patologia 2: encontrar um extremo local

```
>> x0 = 0.5; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) x*(1-x);
>> df = @(x) 1 - 2*x;
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```

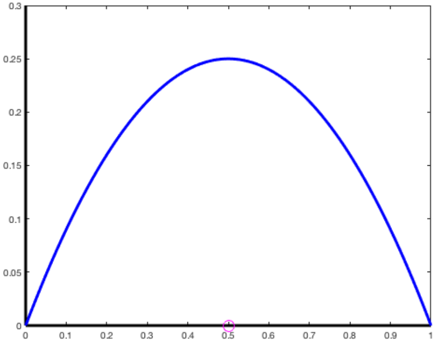
Patologia 2: encontrar um extremo local

```
>>  x0 = 0.5; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>>  f = @(x) x*(1-x);
>>  df = @(x) 1 - 2*x;
>>  root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



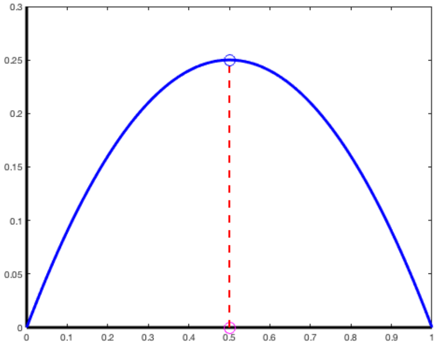
Patologia 2: encontrar um extremo local

```
>> x0 = 0.5; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) x*(1-x);
>> df = @(x) 1 - 2*x;
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



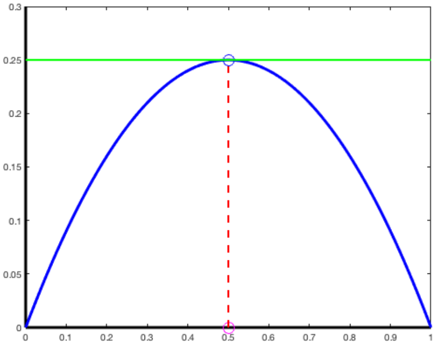
Patologia 2: encontrar um extremo local

```
>>  x0 = 0.5; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>>  f = @(x) x*(1-x);
>>  df = @(x) 1 - 2*x;
>>  root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



Patologia 2: encontrar um extremo local

```
>> x0 = 0.5; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) x*(1-x);
>> df = @(x) 1 - 2*x;
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```

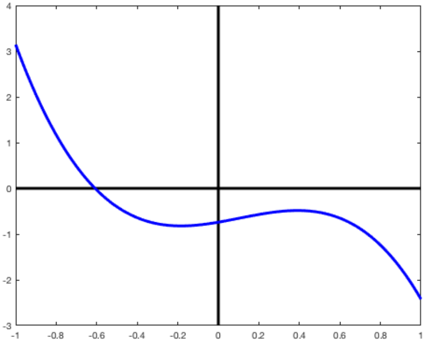


Patologia 3: ficar "preso" numa "região oscilatória"

```
>> x0 = 5/9; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) - 0.74 + 0.765*x + 1.1*x^2 - 3.55*x^3;
>> df = @(x) 0.765 + 2.2*x - 3*3.55*x^2
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```

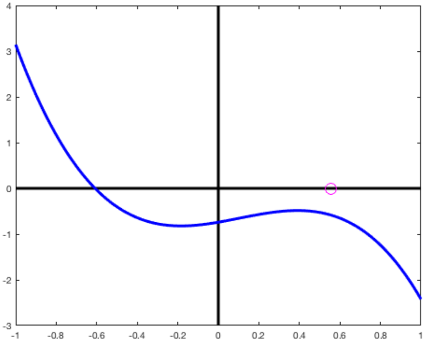
Patologia 3: ficar "preso" numa "região oscilatória"

```
>> x0 = 5/9; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) - 0.74 + 0.765*x + 1.1*x^2 - 3.55*x^3;
>> df = @(x) 0.765 + 2.2*x - 3*3.55*x^2
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



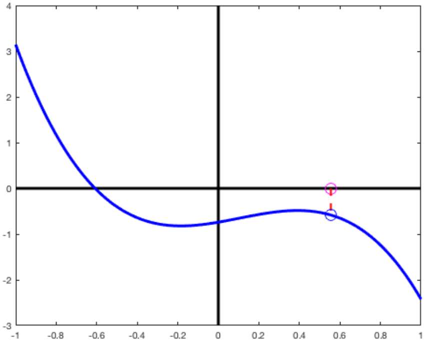
Patologia 3: ficar “preso” numa “região oscilatória”

```
>> x0 = 5/9; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) - 0.74 + 0.765*x + 1.1*x^2 - 3.55*x^3;
>> df = @(x) 0.765 + 2.2*x - 3*3.55*x^2
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



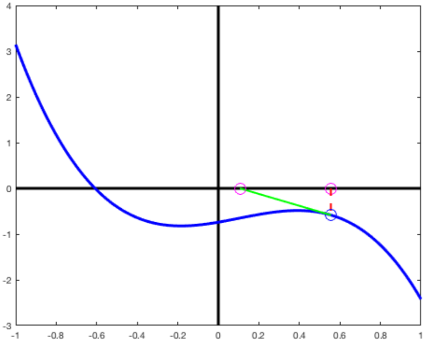
Patologia 3: ficar “preso” numa “região oscilatória”

```
>> x0 = 5/9; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) - 0.74 + 0.765*x + 1.1*x^2 - 3.55*x^3;
>> df = @(x) 0.765 + 2.2*x - 3*3.55*x^2
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



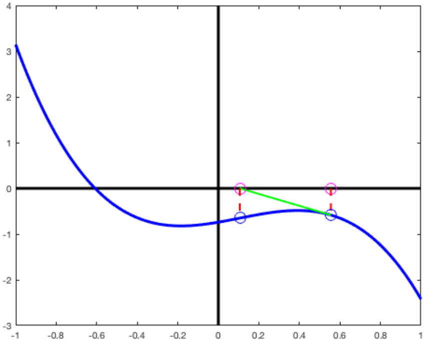
Patologia 3: ficar “preso” numa “região oscilatória”

```
>> x0 = 5/9; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) - 0.74 + 0.765*x + 1.1*x^2 - 3.55*x^3;
>> df = @(x) 0.765 + 2.2*x - 3*3.55*x^2
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



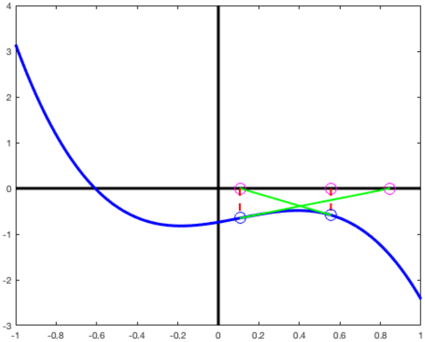
Patologia 3: ficar “preso” numa “região oscilatória”

```
>> x0 = 5/9; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) - 0.74 + 0.765*x + 1.1*x^2 - 3.55*x^3;
>> df = @(x) 0.765 + 2.2*x - 3*3.55*x^2
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



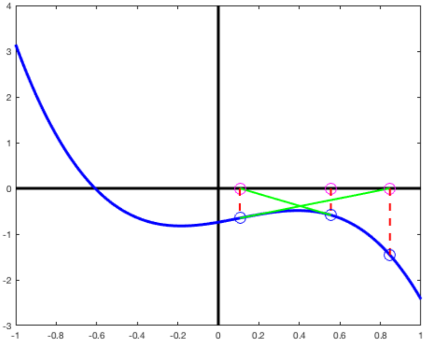
Patologia 3: ficar “preso” numa “região oscilatória”

```
>> x0 = 5/9; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) - 0.74 + 0.765*x + 1.1*x^2 - 3.55*x^3;
>> df = @(x) 0.765 + 2.2*x - 3*3.55*x^2
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



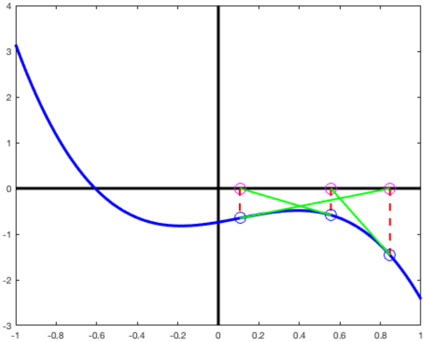
Patologia 3: ficar "preso" numa "região oscilatória"

```
>> x0 = 5/9; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) - 0.74 + 0.765*x + 1.1*x^2 - 3.55*x^3;
>> df = @(x) 0.765 + 2.2*x - 3*3.55*x^2
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



Patologia 3: ficar “preso” numa “região oscilatória”

```
>> x0 = 5/9; tol = 1.0e-6; maxiter = 20;
>> f = @(x) - 0.74 + 0.765*x + 1.1*x^2 - 3.55*x^3;
>> df = @(x) 0.765 + 2.2*x - 3*3.55*x^2
>> root = newton(f,df,x0,tol,maxiter);
```



Características do método de Newton

- ☺ Simples e fácil de implementar
- ☺ Fácil de generalizar para várias variáveis
- ☺ Convergência rápida
- ☹ Requer que f seja diferenciável
- ☹ O cálculo de f' pode ser computacionalmente caro
- ☹ Convergência não garantida e dependente do chute inicial

Como citar esse material?

A. Cunha, *Método de Newton*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2020.