

Representação Binária de Números Reais

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org



Números reais podem ser “quebrados” em potências de 2

23



Números reais podem ser “quebrados” em potências de 2

$$\begin{aligned} 23 \\ = \\ 16 + 4 + 2 + 1 \end{aligned}$$



Números reais podem ser “quebrados” em potências de 2

$$\begin{aligned} 23 &= \\ 16 + 4 + 2 + 1 &= \\ 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 \end{aligned}$$



A noção de representação binária

Uma *representação binária* do número real não negativo x é uma soma (possivelmente infinita) da forma

$$b_k 2^k + \cdots + b_1 2^1 + b_0 2^0 + b_{-1} 2^{-1} + \cdots + b_{-n} 2^{-n} + \cdots = x$$

sendo $b_n \in \{0, 1\}$, onde $n = k, \dots, 1, 0, -1, -2, \dots$.

Por construção,

$$x = \underbrace{(b_k \cdots b_1 b_0)_2}_{\text{parte inteira}} + \underbrace{(0, b_{-1} b_{-2} b_{-3} \cdots)_2}_{\text{parte fracionária}}$$

Notação:

$$x = (b_k \cdots b_1 b_0, b_{-1} b_{-2} b_{-3} \cdots)_2$$



Exemplo: número inteiro

- $x_1 = (23, 0)_{10}$



Exemplo: número inteiro

- $x_1 = (23, 0)_{10}$

$$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$



Exemplo: número inteiro

- $x_1 = (23, 0)_{10}$

$$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$23 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1}$$



Exemplo: número inteiro

- $x_1 = (23, 0)_{10}$

$$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$23 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1}$$



Exemplo: número inteiro

- $x_1 = (23, 0)_{10}$

$$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$23 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1}$$

$$x_1 = (10111, 0)_2$$



Exemplo: número inteiro

- $x_1 = (23, 0)_{10}$

$$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$23 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1}$$

$$x_1 = (10111, 0)_2$$

\Rightarrow Representação finita



Exemplo: fracionário com potência de 2 no denominador

- $x_2 = (0,125)_{10}$



Exemplo: fracionário com potência de 2 no denominador

- $x_2 = (0,125)_{10}$

$$0,125 = 1/8 = 1/2^3 = 2^{-3}$$



Exemplo: fracionário com potência de 2 no denominador

- $x_2 = (0,125)_{10}$

$$0,125 = 1/8 = 1/2^3 = 2^{-3}$$

$$0,125 = 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$



Exemplo: fracionário com potência de 2 no denominador

- $x_2 = (0,125)_{10}$

$$0,125 = 1/8 = 1/2^3 = 2^{-3}$$

$$0,125 = 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$



Exemplo: fracionário com potência de 2 no denominador

- $x_2 = (0,125)_{10}$

$$0,125 = 1/8 = 1/2^3 = 2^{-3}$$

$$0,125 = 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

$$x_1 = (0,001)_2$$



Exemplo: fracionário com potência de 2 no denominador

- $x_2 = (0,125)_{10}$

$$0,125 = 1/8 = 1/2^3 = 2^{-3}$$

$$0,125 = 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

$$x_1 = (0,001)_2$$

\Rightarrow Representação finita



Exemplo: “quebrado” em parte inteira + parte fracionária

- $x_3 = (23, 125)_{10}$



Exemplo: “quebrado” em parte inteira + parte fracionária

- $x_3 = (23,125)_{10}$

$$23,125 = (23)_{10} + (0,125)_{10}$$



Exemplo: “quebrado” em parte inteira + parte fracionária

- $x_3 = (23, 125)_{10}$

$$23, 125 = (23)_{10} + (0, 125)_{10}$$

$$(23)_{10} + (0, 125)_{10} = (10111)_2 + (0, 001)_2$$



Exemplo: “quebrado” em parte inteira + parte fracionária

- $x_3 = (23, 125)_{10}$

$$23, 125 = (23)_{10} + (0, 125)_{10}$$

$$(23)_{10} + (0, 125)_{10} = (10111)_2 + (0, 001)_2$$



Exemplo: “quebrado” em parte inteira + parte fracionária

- $x_3 = (23, 125)_{10}$

$$23, 125 = (23)_{10} + (0, 125)_{10}$$

$$(23)_{10} + (0, 125)_{10} = (10111)_2 + (0, 001)_2$$

$$x_3 = (10111, 001)_2$$



Exemplo: “quebrado” em parte inteira + parte fracionária

- $x_3 = (23, 125)_{10}$

$$23, 125 = (23)_{10} + (0, 125)_{10}$$

$$(23)_{10} + (0, 125)_{10} = (10111)_2 + (0, 001)_2$$

$$x_3 = (10111, 001)_2$$

⇒ Representação finita



Exemplo: fracionário sem potência de 2 no denominador

- $x_4 = (0, 1)_{10}$



Exemplo: fracionário sem potência de 2 no denominador

- $x_4 = (0, 1)_{10}$

$$0, 1 = 1/10$$

(denominador não é potência de 2)



Exemplo: fracionário sem potência de 2 no denominador

- $x_4 = (0, 1)_{10}$

$0, 1 = 1/10$
(denominador não é potência de 2)

$$x_4 = (0, 0001\overline{1})_2$$



Exemplo: fracionário sem potência de 2 no denominador

- $x_4 = (0, 1)_{10}$

$0, 1 = 1/10$
(denominador não é potência de 2)

$$x_4 = (0, 0001\overline{1})_2$$

⇒ Representação infinita periódica
(dízima em base 2)



Exemplo: número irracional

- $x_5 = \pi$



Exemplo: número irracional

- $x_5 = \pi$

$$\pi = 3,141592 \dots$$

(infinitos dígitos sem periodicidade)



Exemplo: número irracional

- $x_5 = \pi$

$\pi = 3,141592\dots$
(infinitos dígitos sem periodicidade)

$$x_5 = (11,001001\dots)_2$$



Exemplo: número irracional

- $x_5 = \pi$

$$\pi = 3,141592\dots$$

(infinitos dígitos sem periodicidade)

$$x_5 = (11,001001\dots)_2$$

\implies Representação infinita aperiódica



Representação numa base arbitrária

Uma *representação numa base natural* $\beta > 1$ do número real não negativo x é uma soma (possivelmente infinita) da forma

$$a_k \beta^k + \cdots + a_1 \beta^1 + a_0 \beta^0 + a_{-1} \beta^{-1} + \cdots + a_{-n} \beta^{-n} + \cdots = x$$

sendo $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, \beta - 1\}$, onde $n = k, \dots, 1, 0, -1, -2, \dots$.

Por construção,

$$x = \underbrace{(a_k \cdots a_1 a_0)}_{\text{parte inteira}}_{\beta} + \underbrace{(0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \cdots)}_{\text{parte fracionária}}_{\beta}$$

Notação:

$$x = (a_k \cdots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \cdots)_{\beta}$$



Um exemplo em base octal ($\beta = 8$)

- $(125, 0)_{10}$



Um exemplo em base octal ($\beta = 8$)

- $(125, 0)_{10}$

$$125 = 64 + 56 + 5$$



Um exemplo em base octal ($\beta = 8$)

- $(125, 0)_{10}$

$$125 = 64 + 56 + 5$$

$$125 = 1 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 5 \times 8^0$$



Um exemplo em base octal ($\beta = 8$)

- $(125, 0)_{10}$

$$125 = 64 + 56 + 5$$

$$125 = 1 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 5 \times 8^0$$



Um exemplo em base octal ($\beta = 8$)

- $(125, 0)_{10}$

$$125 = 64 + 56 + 5$$

$$125 = 1 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 5 \times 8^0$$

$$(125, 0)_{10} = (175, 0)_8$$



Para pensar em casa ...

Exercício Teórico:

Encontre a representação decimal do número $x = (111, \overline{01})_2$.

Exercício Teórico:

Qual a representação do número $x = (12, 20)_4$ na base $\beta = 3$?

Exercício Teórico:

Existe alguma base na qual $8/7 = 1, \overline{142857}$ admita uma representação finita?



Como citar esse material?

A. Cunha, *Representação Binária de Números Reais*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2020.

Essas notas de aula podem ser compartilhadas nos termos da licença Creative Commons BY-NC-ND 3.0, com propósitos exclusivamente educacionais.

