

# Como Resolver Sistemas Lineares?

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

[americo.cunha@uerj.br](mailto:americo.cunha@uerj.br)

[www.americocunha.org](http://www.americocunha.org)



@AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr



# Possíveis abordagens para sistemas lineares

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

**Métodos Diretos:** uma solução do sistema linear é obtida após um número finito de etapas, onde cada passo envolve operações com os elementos de  $A$  e  $\mathbf{b}$ , i.e.,

$$\mathbf{x} = T(A, \mathbf{b})$$

**Métodos Iterativos:** uma solução do sistema linear é obtida após um número infinito de etapas, como o limite de uma sequência de aproximações que envolve operações com os elementos de  $A$  e  $\mathbf{b}$ , i.e.,

$$\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n, \quad \text{onde} \quad \mathbf{x}_n = T_n(A, \mathbf{b})$$



# Métodos diretos

- Em *teoria* calculam uma *solução exata*;
- Na *prática* calculam uma *solução aproximada* devido aos erros da aritmética de ponto flutuante;
- Em geral, são *mais precisos* que os métodos iterativos.

Exemplos de métodos diretos:

- Eliminação gaussiana
- Fatoração LU
- Fatoração Cholesky
- Fatoração QR
- Fatoração SVD
- Regra de Cramer
- Gradiente Conjugado
- etc



# Métodos iterativos

- Em *teoria* calculam uma *solução exata* no limite;
- Na *prática* a iteração é interrompida após um número finito de etapas, de modo que se obtém uma *solução aproximada*;
- A solução aproximada está sujeita a *duas fontes de erro*:
  - ponto flutuante;
  - parada do processo iterativo;
- Em geral, são *mais rápidos* que os métodos diretos.

Exemplos de métodos iterativos:

- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Siedel
- Sobre-Relaxação Sucessiva
- Gradiente Conjugado
- Gradiente Bi-conjugado
- GMRES
- etc

**ATENÇÃO:** métodos iterativos só devem ser utilizados quando métodos diretos não forem viáveis!



**Podemos usar qualquer método numérico  
para resolver um sistema linear?**



**Podemos usar qualquer método numérico  
para resolver um sistema linear?**

Veremos a seguir que não!



# A regra de Cramer

$$\underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{b} \\ | \end{bmatrix}$$

Os *componentes do vetor solução* são dados por

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad \cdots, \quad x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

$$A_j = \begin{bmatrix} | & & | & | & | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \\ | & & | & | & | & & | \end{bmatrix} \quad j = 1, \cdots, n$$

Aplicável quando o sistema for não singular, i.e.  $\det A \neq 0$ .



## Exemplo de aplicação da regra de Cramer

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} \color{red}{5} & 3 & -2 \\ \color{red}{7} & 5 & 6 \\ \color{red}{8} & 4 & 3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}} \\ = \frac{+60}{-4} \\ = -15$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \color{red}{5} & -2 \\ 3 & \color{red}{7} & 6 \\ 2 & \color{red}{8} & 3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}} \\ = \frac{-32}{-4} \\ = 8$$

$$x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & \color{red}{5} \\ 3 & 5 & \color{red}{7} \\ 2 & 4 & \color{red}{8} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}} \\ = \frac{-8}{-4} \\ = 2$$





# Algoritmo da regra de Cramer

Input:  $A$ ,  $b$

```
1: Compute the length of  $b$ 
2: Allocate memory for  $x$ 
3: Compute the matrix determinant  $\det A$ 
4: if  $\det A = 0$  then
5:   return
6: end if
7: for  $i=1:n$  do
8:   Construct the modified matrix  $A_j$ 
9:   Compute the solution  $i$ -th component  $x(i) = \det A_j / \det A$ 
10: end for
11: return
```

Output:  $x$



# Implementação em GNU Octave

```
function x = cramer(A,b)
    n      = length(b);
    x      = zeros(n,1);
    detA = myDet(A);
    if detA == 0.0
        error('matriz singular')
    end
    for j = 1:n
        Aj      = A;
        Aj(:,j) = b;
        x(j)    = myDet(Aj)/detA;
    end
    disp(x)
end
```



# Implementação em GNU Octave

```
function detA = myDet(A)
    if isscalar(A)
        detA = A;
        return
    end
    detA = 0.0;
    toprow = A(1,:);
    A(1,:) = [];
    for i = 1:size(A,2)
        Ai = A;
        Ai(:,i) = [];
        detA = detA + (-1)^(i+1)*toprow(i)*myDet(Ai);
    end
end
```



# Experimento Computacional 1

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$



```
>> n = 5; A = eye(n,n); b = ones(n,1);  
>> tic; x = cramer(A,b); toc
```



# Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.



## Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) = (n + 1) \times \text{flops}(\text{det}(\mathbf{n} \times \mathbf{n})) + n$$



## Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) = (n + 1) \times \text{flops}(\det(n \times n)) + n$$

$$\text{flops}(\det(n \times n)) = n \times \det(n-1 \times n-1) + 2n - 1$$



## Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) = (n + 1) \times \text{flops}(\det(n \times n)) + n$$

$$\text{flops}(\det(n \times n)) = n \times \det(n-1 \times n-1) + 2n - 1$$

$$\text{flops}(\det(n \times n)) \sim n \times \det(n-1 \times n-1)$$





## Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) = (n + 1) \times \text{flops}(\det(n \times n)) + n$$

$$\text{flops}(\det(n \times n)) = n \times \det(n-1 \times n-1) + 2n - 1$$

$$\begin{aligned}\text{flops}(\det(n \times n)) &\sim n \times \det(n-1 \times n-1) \\ &\sim n \times (n-1) \times \det(n-2 \times n-2)\end{aligned}$$



## Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) = (n + 1) \times \text{flops}(\det(n \times n)) + n$$

$$\text{flops}(\det(n \times n)) = n \times \det(n-1 \times n-1) + 2n - 1$$

$$\begin{aligned} \text{flops}(\det(n \times n)) &\sim n \times \det(n-1 \times n-1) \\ &\sim n \times (n-1) \times \det(n-2 \times n-2) \\ &\vdots \end{aligned}$$



## Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) = (n + 1) \times \text{flops}(\det(n \times n)) + n$$

$$\text{flops}(\det(n \times n)) = n \times \det(n-1 \times n-1) + 2n - 1$$

$$\begin{aligned} \text{flops}(\det(n \times n)) &\sim n \times \det(n-1 \times n-1) \\ &\sim n \times (n-1) \times \det(n-2 \times n-2) \\ &\quad \vdots \\ &\sim n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times \det(1 \times 1) \end{aligned}$$



## Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) = (n + 1) \times \text{flops}(\det(n \times n)) + n$$

$$\text{flops}(\det(n \times n)) = n \times \det(n-1 \times n-1) + 2n - 1$$

$$\begin{aligned}\text{flops}(\det(n \times n)) &\sim n \times \det(n-1 \times n-1) \\ &\sim n \times (n-1) \times \det(n-2 \times n-2) \\ &\quad \vdots \\ &\sim n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times \det(1 \times 1) \\ &\sim n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1\end{aligned}$$



## Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) = (n + 1) \times \text{flops}(\det(n \times n)) + n$$

$$\text{flops}(\det(n \times n)) = n \times \det(n-1 \times n-1) + 2n - 1$$

$$\begin{aligned} \text{flops}(\det(n \times n)) &\sim n \times \det(n-1 \times n-1) \\ &\sim n \times (n-1) \times \det(n-2 \times n-2) \\ &\quad \vdots \\ &\sim n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times \det(1 \times 1) \\ &\sim n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \\ &\sim n! \end{aligned}$$



## Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) = (n + 1) \times \text{flops}(\det(n \times n)) + n$$

$$\text{flops}(\det(n \times n)) = n \times \det(n-1 \times n-1) + 2n - 1$$

$$\begin{aligned}\text{flops}(\det(n \times n)) &\sim n \times \det(n-1 \times n-1) \\ &\sim n \times (n-1) \times \det(n-2 \times n-2) \\ &\quad \vdots \\ &\sim n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times \det(1 \times 1) \\ &\sim n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \\ &\sim n!\end{aligned}$$

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) \sim e(n+1)!$$



# Tempo de processamento desse algoritmo

Intel Core i7 em 2011:  $12 \times 10^9$  FLOPS

Intel Core i7 em 2021:  $52 \times 10^9$  FLOPS

FLOPS = flops por segundo

n	flops	Tempo de CPU	
		2011	2021
5	720	180 ns	41 ns
10	$3,62 \times 10^6$	10 ms	2 ms
15	$1,31 \times 10^9$	87 min	20 min
20	$2,43 \times 10^{18}$	405 anos	93 anos



# Tempo de processamento desse algoritmo

Intel Core i7 em 2011:  $12 \times 10^9$  FLOPS

Intel Core i7 em 2021:  $52 \times 10^9$  FLOPS

FLOPS = flops por segundo

n	flops	Tempo de CPU	
		2011	2021
5	720	180 ns	41 ns
10	$3,62 \times 10^6$	10 ms	2 ms
15	$1,31 \times 10^9$	87 min	20 min
20	$2,43 \times 10^{18}$	405 anos	93 anos

**Não é viável usar a regra de Cramer em sistemas lineares do mundo real!**





## Experimento Computacional 2

$$\begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \varepsilon)^2 + 1 \\ -2 - \varepsilon \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon \\ -1 \end{bmatrix}$$



```
>> A = [1+eps -1; -1 1]; b = A*[1+eps; -1];  
>> x = cramer(A,b);
```



## Experimento Computacional 2

$$\begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \varepsilon)^2 + 1 \\ -2 - \varepsilon \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon \\ -1 \end{bmatrix}$$



```
>> A = [1+eps -1; -1 1]; b = A*[1+eps; -1];  
>> x = cramer(A,b);
```

**Além de ser muito cara computacionalmente,  
a regra de Cramer é instável!**



# Moral sobre sistemas lineares

1. **A escolha do método numérico tem grande influência na acurácia e eficiência computacional do cálculo da solução de um sistema linear;**
2. **O método numérico a ser utilizado na solução do sistema linear deve ser escolhido com sabedoria!**



## Como citar esse material?


A. Cunha, *Como Resolver Sistemas Lineares?*,  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.



 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr

Essas notas de aula podem ser compartilhadas nos termos da licença Creative Commons BY-NC-ND 3.0, com propósitos exclusivamente educacionais.

