Sistema de Ponto Flutuante

Prof. Americo Cunha

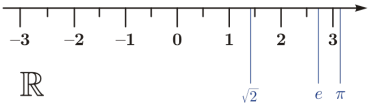
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org

Números no Papel

Uma quantidade infinita de números ao longo de uma reta contínua



Números no Computador

Uma quantidade finita de números ao longo de uma reta discreta

A noção de sistema de ponto flutuante

O *sistema de ponto flutuante* $F \subset \mathbb{R}$ é subconjunto dos reais cujos elementos tem o seguinte formato:

$$\underbrace{\texttt{fl}\,(x)}_{\textit{float de } x} = \pm \underbrace{(0, d_1\, d_2\, \cdots\, , \, d_t)_\beta}_{\textit{mantissa}} \times \beta^e,$$

onde os dígitos $\{d_i\}_{i=1}^t$ são inteiros tais que $0 \leq d_i \leq \beta - 1$ e $d_1 \neq 0$.

O sistema é caracterizado por quatro números inteiros:

- a *base* $\beta > 1$ (também chamada de *radix*),
- a *precisão* $t \geq 1$ (quantidade de dígitos significativos), e
- o *intervalo do expoente* $m \leq e \leq M$.

Notação:

$F(\beta, t, m, M)$ ou (β, t, m, M)

Um sistema de ponto flutuante simplista

Considere o sistema de ponto flutuante

$$F(\beta, t, m, M) = F(2, 3, -1, 3)$$

- Quais números são representáveis nesse sistema?
- Qual o menor número representável (em módulo e não nulo)?
- Qual o maior número representável (em módulo)?

Um sistema de ponto flutuante simplista

$$\texttt{fl}(x) = \pm (0, d_1\, d_2\, d_3)_2 \times 2^e,\ d_1 = 1,\ d_2, d_3 \in \{0, 1\},\ -1 \leq e \leq 3$$

Um sistema de ponto flutuante simplista

$$\texttt{fl}(x) = \pm(0, d_1\, d_2\, d_3)_2 \times 2^e,\ d_1 = 1,\ d_2, d_3 \in \{0, 1\},\ -1 \le e \le 3$$

$\pm(0,100)_2 \times 2^{-1} \quad =$	$\pm(0,110)_2 \times 2^{-1} \quad =$
$\pm(0,100)_2 \times 2^{+0} \quad =$	$\pm(0,110)_2 \times 2^{+0} \quad =$
$\pm(0,100)_2 \times 2^{+1} \quad =$	$\pm(0,110)_2 \times 2^{+1} \quad =$
$\pm(0,100)_2 \times 2^{+2} \quad =$	$\pm(0,110)_2 \times 2^{+2} \quad =$
$\pm(0,100)_2 \times 2^{+3} \quad =$	$\pm(0,110)_2 \times 2^{+3} \quad =$
$\pm(0,101)_2 \times 2^{-1} \quad =$	$\pm(0,111)_2 \times 2^{-1} \quad =$
$\pm(0,101)_2 \times 2^{+0} \quad =$	$\pm(0,111)_2 \times 2^{+0} \quad =$
$\pm(0,101)_2 \times 2^{+1} \quad =$	$\pm(0,111)_2 \times 2^{+1} \quad =$
$\pm(0,101)_2 \times 2^{+2} \quad =$	$\pm(0,111)_2 \times 2^{+2} \quad =$
$\pm(0,101)_2 \times 2^{+3} \quad =$	$\pm(0,111)_2 \times 2^{+3} \quad =$

Um sistema de ponto flutuante simplista

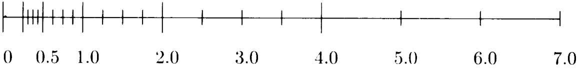
$$\texttt{fl}\,(x) = \pm\,(0, d_1\, d_2\, d_3)_2 \times 2^e,\ \ d_1 = 1,\ \ d_2, d_3 \in \{0,1\},\ \ -1 \le e \le 3$$

$$\begin{array}{rclrcl}
\pm\,(0,100)_2 \times 2^{-1} & = & \pm\,0,2500 & \pm\,(0,110)_2 \times 2^{-1} & = & \pm\,0,3750 \\
\pm\,(0,100)_2 \times 2^{+0} & = & \pm\,0,5000 & \pm\,(0,110)_2 \times 2^{+0} & = & \pm\,0,7500 \\
\pm\,(0,100)_2 \times 2^{+1} & = & \pm\,1,0000 & \pm\,(0,110)_2 \times 2^{+1} & = & \pm\,1,5000 \\
\pm\,(0,100)_2 \times 2^{+2} & = & \pm\,2,0000 & \pm\,(0,110)_2 \times 2^{+2} & = & \pm\,3,0000 \\
\pm\,(0,100)_2 \times 2^{+3} & = & \pm\,4,0000 & \pm\,(0,110)_2 \times 2^{+3} & = & \pm\,6,0000 \\
\pm\,(0,101)_2 \times 2^{-1} & = & \pm\,0,3125 & \pm\,(0,111)_2 \times 2^{-1} & = & \pm\,0,4375 \\
\pm\,(0,101)_2 \times 2^{+0} & = & \pm\,0,6250 & \pm\,(0,111)_2 \times 2^{+0} & = & \pm\,0,8750 \\
\pm\,(0,101)_2 \times 2^{+1} & = & \pm\,1,2500 & \pm\,(0,111)_2 \times 2^{+1} & = & \pm\,1,7500 \\
\pm\,(0,101)_2 \times 2^{+2} & = & \pm\,2,5000 & \pm\,(0,111)_2 \times 2^{+2} & = & \pm\,3,5000 \\
\pm\,(0,101)_2 \times 2^{+3} & = & \pm\,5,0000 & \pm\,(0,111)_2 \times 2^{+3} & = & \pm\,7,0000
\end{array}$$

Um sistema de ponto flutuante simplista

$$\texttt{fl}\,(x) = \pm\,(0, d_1\, d_2\, d_3)_2 \,\times\, 2^e,\;\; d_1 = 1,\;\; d_2, d_3 \in \{0, 1\},\;\; -1 \le e \le 3$$

$$\begin{array}{lcllcl}
\pm\,(0,100)_2 \times 2^{-1} & = & \pm\,0,2500 & \pm\,(0,110)_2 \times 2^{-1} & = & \pm\,0,3750 \\
\pm\,(0,100)_2 \times 2^{+0} & = & \pm\,0,5000 & \pm\,(0,110)_2 \times 2^{+0} & = & \pm\,0,7500 \\
\pm\,(0,100)_2 \times 2^{+1} & = & \pm\,1,0000 & \pm\,(0,110)_2 \times 2^{+1} & = & \pm\,1,5000 \\
\pm\,(0,100)_2 \times 2^{+2} & = & \pm\,2,0000 & \pm\,(0,110)_2 \times 2^{+2} & = & \pm\,3,0000 \\
\pm\,(0,100)_2 \times 2^{+3} & = & \pm\,4,0000 & \pm\,(0,110)_2 \times 2^{+3} & = & \pm\,6,0000 \\
\pm\,(0,101)_2 \times 2^{-1} & = & \pm\,0,3125 & \pm\,(0,111)_2 \times 2^{-1} & = & \pm\,0,4375 \\
\pm\,(0,101)_2 \times 2^{+0} & = & \pm\,0,6250 & \pm\,(0,111)_2 \times 2^{+0} & = & \pm\,0,8750 \\
\pm\,(0,101)_2 \times 2^{+1} & = & \pm\,1,2500 & \pm\,(0,111)_2 \times 2^{+1} & = & \pm\,1,7500 \\
\pm\,(0,101)_2 \times 2^{+2} & = & \pm\,2,5000 & \pm\,(0,111)_2 \times 2^{+2} & = & \pm\,3,5000 \\
\pm\,(0,101)_2 \times 2^{+3} & = & \pm\,5,0000 & \pm\,(0,111)_2 \times 2^{+3} & = & \pm\,7,0000
\end{array}$$



Um sistema de ponto flutuante simplista

- 41 números são representáveis:

  40 números tabela anterior, mais o zero!

- O menor número representável (em módulo e não nulo) é

$$L = (0,100)_2 \times 2^{-1} = 0,25.$$

- O maior número representável (em módulo) é

$$U = (0,111)_2 \times 2^{3} = 7,0.$$

Alguns fatos sobre sistemas de ponto flutuante

No sistema de ponto flutuante $F(\beta, t, m, M)$:

- O menor número representável (em módulo e não nulo) é

$$L = (0,1\,\underbrace{00\cdots0}_{t-1\ \ vezes})_\beta \times \beta^{\,m}$$

- O maior número representável (em módulo) é

$$U = (0,\underbrace{(\beta-1)(\beta-1)\cdots(\beta-1)}_{t\ \ vezes})_\beta \times \beta^{\,M}$$

- O número zero admite diversas representações:

$$\mathtt{fl}\,(0) = (0,\underbrace{00\cdots0}_{t\ \ vezes})_\beta \times \beta^{\,e}, \quad m \le e \le M$$

A geometria de um sistema de ponto flutuante

- A região de underflow é definida por

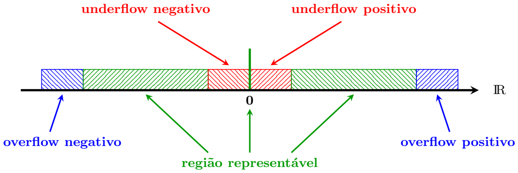
$$\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < L \;\; \text{e} \;\; x \neq 0\}$$

- A região de overflow é definida por

$$\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > U\}$$

- A região representável é definida por

$$\mathcal{R} = \{x \in F(\beta, t, m, M) \subset \mathbb{R} \mid L \leq |x| \leq U\} \cup \{0\}$$



* Figura elaborada por Marcus Vinicius Issa.

Representação exata ou aproximada

O real a seguir *não admite representação exata* em $F(\beta, t, m, M)$:

$$x = (0,\ d_1\, d_2\ \cdots\ d_{t-1}\, d_t\, d_{t+1}\, d_{t+2}\ \cdots)_\beta \times \beta^e$$

Isso ocorre porque *x tem mais de t dígitos!*

Nesses casos uma *representação não exata (aproximação)* do real x em $F(\beta, t, m, M)$ se faz necessária.

Existem duas estratégias para construir tal aproximação:

- *Truncamento*
- *Arredondamento*

Truncamento ou arredondamento?

- Truncamento

$$\texttt{fl}\,(x) = \pm\,(0, d_1\, d_2\, \cdots\,,\, d_t)_\beta \times \beta^e$$

- Arredondamento

$$\texttt{fl}\,(x) = \begin{cases} \pm\,(0, d_1\, d_2\, \cdots\, d_t)_\beta \times \beta^e & \text{se } d_{t+1} < \beta/2 \\ \pm\left(0, d_1\, d_2\, \cdots\, d_t + \beta^{-t}\right)_\beta \times \beta^e & \text{se } d_{t+1} > \beta/2 \end{cases}$$

Se $d_{t+1} = \beta/2$, arredonda-se para o número par mais próximo

Truncamento ou arredondamento?

- Truncamento (+ rápido)

$$\texttt{fl}\,(x) = \pm\,(0, d_1\, d_2\, \cdots\,,\, d_t)_\beta \times \beta^e$$

- Arredondamento

$$\texttt{fl}\,(x) = \begin{cases} \pm\,(0, d_1\, d_2\, \cdots\, d_t)_\beta \times \beta^e & \text{se } d_{t+1} < \beta/2 \\ \pm\,\left(0, d_1\, d_2\, \cdots\, d_t + \beta^{-t}\right)_\beta \times \beta^e & \text{se } d_{t+1} > \beta/2 \end{cases}$$

Se $d_{t+1} = \beta/2$, arredonda-se para o número par mais próximo

Truncamento ou arredondamento?

- Truncamento (+ rápido)

$$\texttt{fl}\,(x) = \pm\,(0, d_1\, d_2\, \cdots\,,\, d_t)_\beta\,\times\,\beta^e$$

- Arredondamento (+ preciso)

$$\texttt{fl}\,(x) = \begin{cases} \pm\,(0, d_1\, d_2\, \cdots\, d_t)_\beta\,\times\,\beta^e & \text{se } d_{t+1} < \beta/2 \\ \pm\,\left(0, d_1\, d_2\, \cdots\, d_t + \beta^{-t}\right)_\beta\,\times\,\beta^e & \text{se } d_{t+1} > \beta/2 \end{cases}$$

Se $d_{t+1} = \beta/2$, arredonda-se para o número par mais próximo

Erros numa representação em ponto flutuante

- Erro absoluto

$$|x - \mathtt{fl}\,(x)\,| \leq \begin{cases} 2\,\epsilon_M\,\beta^e, & \text{truncamento} \\ \epsilon_M\,\beta^e, & \text{arredondamento} \end{cases}$$

- Erro relativo (para $x \neq 0$)

$$\frac{|x - \mathtt{fl}\,(x)\,|}{|x|} \leq \begin{cases} 2\,\epsilon_M, & \text{truncamento} \\ \epsilon_M, & \text{arredondamento} \end{cases}$$

- $\epsilon_M = \frac{1}{2}\,\beta^{-t}$ é denominado *precisão da máquina* *(menor número representável tal que* $1 + \epsilon_M \neq 1$*)*

IEEE 754 - 2008 (o padrão dos computadores modernos)

Padrão técnico para cálculo de ponto flutuante, estabelecido em 1985 pelo Instituto de Engenheiros Elétricos e Eletrônicos (IEEE)

$$\mathtt{fl}\,(x) = \underbrace{(-1)^s}_{sinal}\,\underbrace{(1, b_1\, b_2\, \cdots\,, b_{t-1})_2}_{mantissa} \times 2^{e+M}$$

onde $s = 0$ se $x \geq 0$, $s = 1$ se $x < 0$ e $b_j \in \{0, 1\}$

tipo	sinal	expoente	mantissa	bits	β	t	m	M	ϵ_M
half	1	5	10	16	2	11	-14	15	$\approx 10^{-03}$
single	1	8	23	32	2	24	-126	127	$\approx 10^{-07}$
double	1	11	52	64	2	53	-1022	1023	$\approx 10^{-16}$

IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic, in IEEE Std 754-2008, Aug. 29 2008.

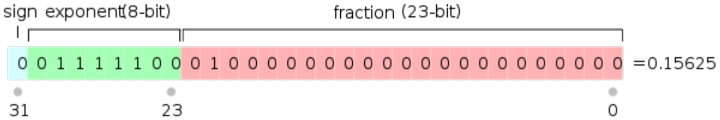
https://doi.org/10.1109/IEEESTD.2008.4610935

IEEE 754 - 2008 (o padrão dos computadores modernos)

Considere o número $x = (0,15625)_{10} = (1,01)_2 \times 2^{-3}$.

- precisão simples (single)

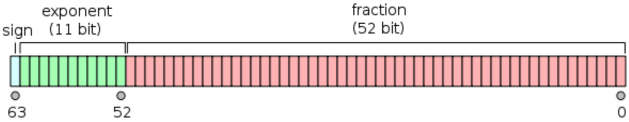
$$\texttt{fl}\,(x) = (-1)^0\ (1,01000000000000000000000)_2\ \times\ 2^{-3+127}$$



* Figura obtida em https://en.wikipedia.org/wiki/Floating-point_arithmetic

IEEE 754 - 2008 (o padrão dos computadores modernos)

- precisão dupla (double)



- valores especiais
  - Zero — e = todos 0, mantissa = todos 0, s arbitrário
  - $+\infty$ — e = todos 1, mantissa = todos 0, s = 0
  - $-\infty$ — e = todos 1, mantissa = todos 0, s = 1
  - NaN — e = todos 1, mantissa $\neq 0$ (not a number)

* Figura obtida em https://en.wikipedia.org/wiki/Double-precision_floating-point_format

Para pensar em casa ...

Exercício teórico:

Considere o sistema de ponto flutuante $(\beta, t, m, M) = (10, 3, -3, 4)$, onde a parcela que não pode ser incorporada à mantissa é truncada.

- Qual a região de *overflow* desse sistema?
- Qual a região de *underflow* desse sistema?
- Qual a representação de $\alpha = 10^{-5}$ nesse sistema?

Exercício computacional:

Implemente no GNU Octave um algoritmo para calcular a *precisão da máquina* ϵ_M.

Como citar esse material?

A. Cunha, *Sistema de Ponto Flutuante*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2020.