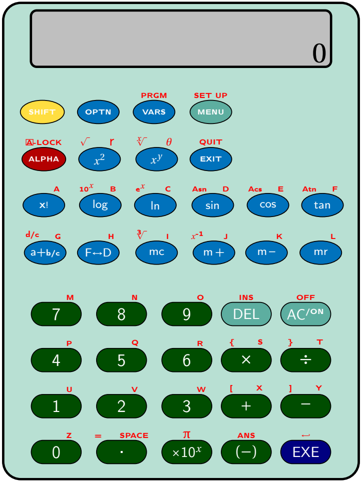
Iteração de Ponto Fixo

Prof. Americo Cunha

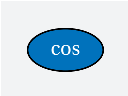
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

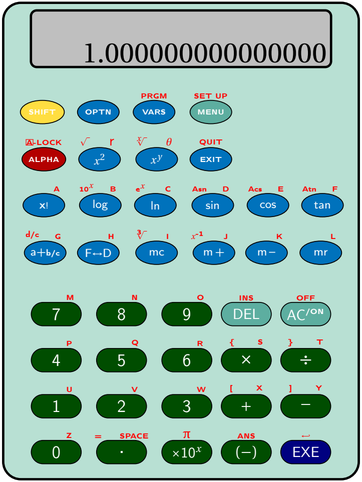
americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org

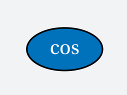


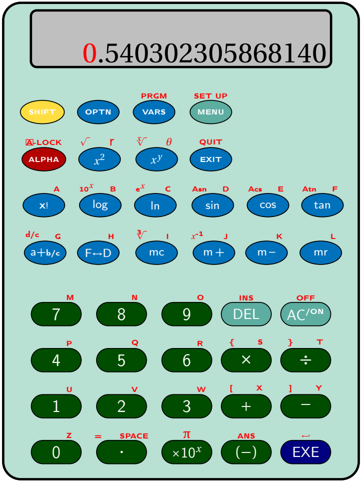
Pressione sucessivas vezes a tecla:



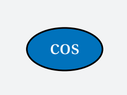


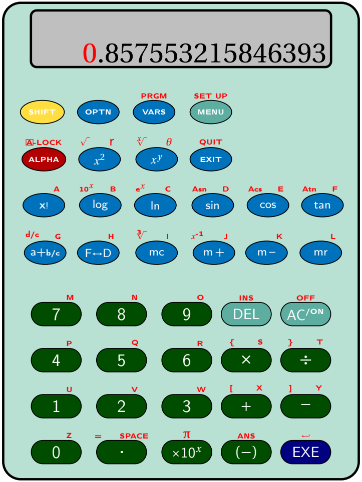
Pressione sucessivas vezes a tecla:



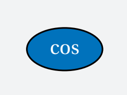


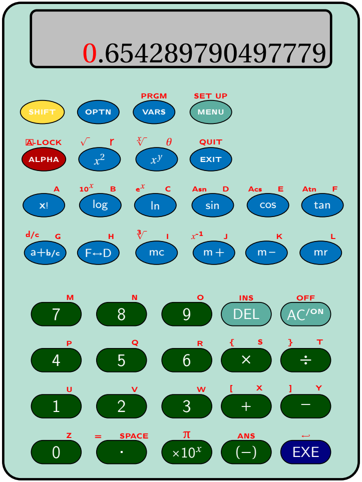
Pressione sucessivas vezes a tecla:



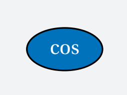


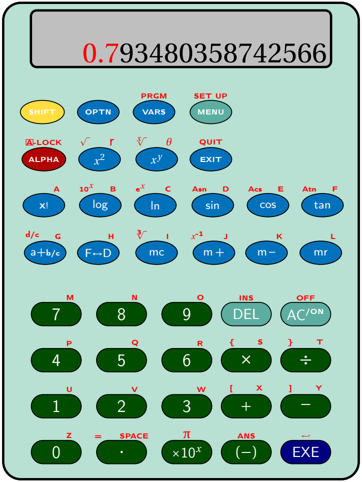
Pressione sucessivas vezes a tecla:



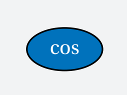


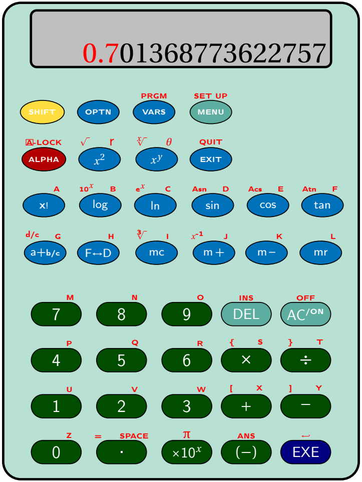
Pressione sucessivas vezes a tecla:



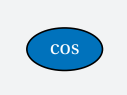


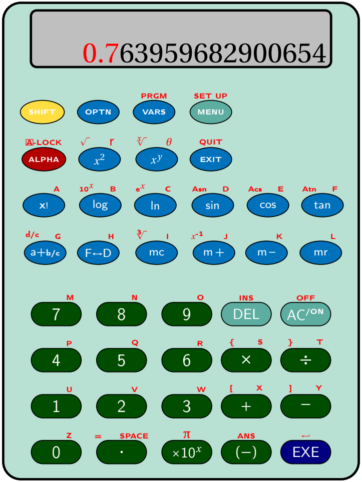
Pressione sucessivas vezes a tecla:



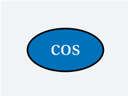


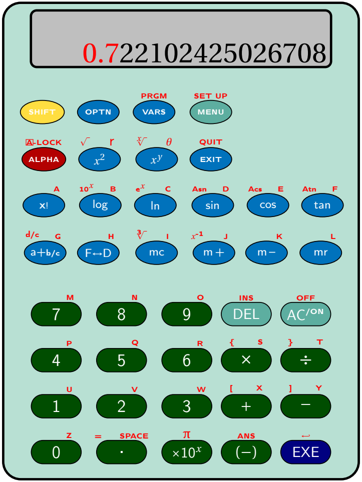
Pressione sucessivas vezes a tecla:



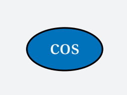


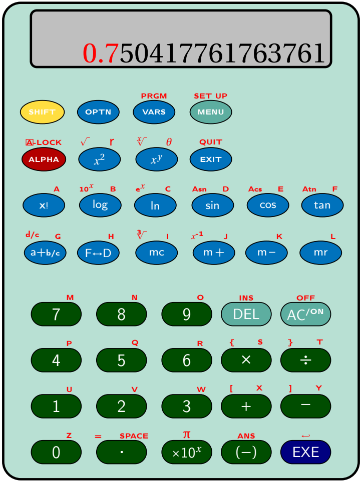
Pressione sucessivas vezes a tecla:



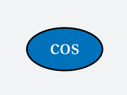


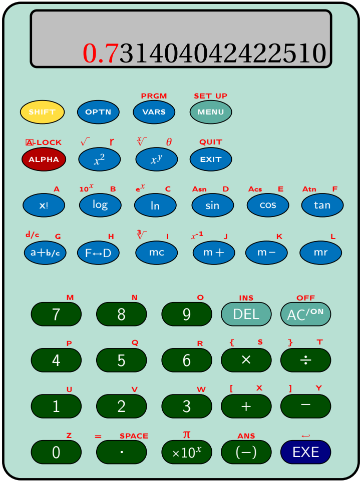
Pressione sucessivas vezes a tecla:



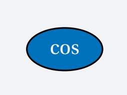


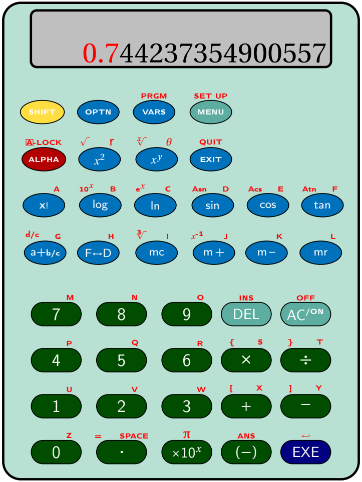
Pressione sucessivas vezes a tecla:



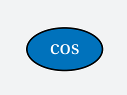


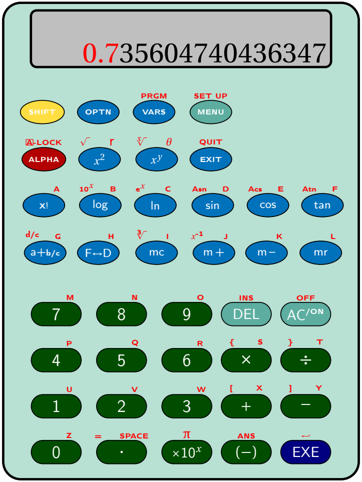
Pressione sucessivas vezes a tecla:



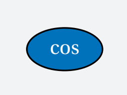


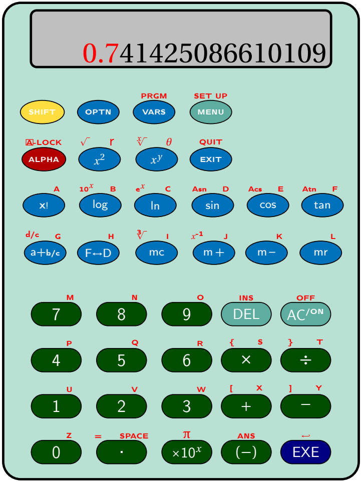
Pressione sucessivas vezes a tecla:



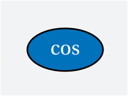


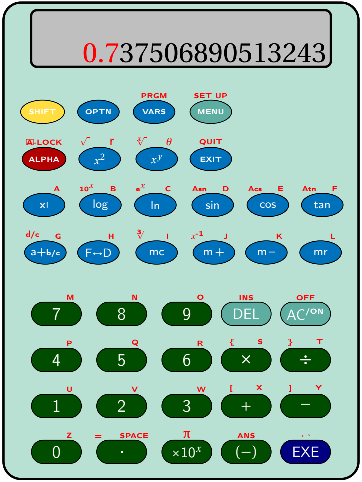
Pressione sucessivas vezes a tecla:



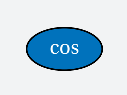


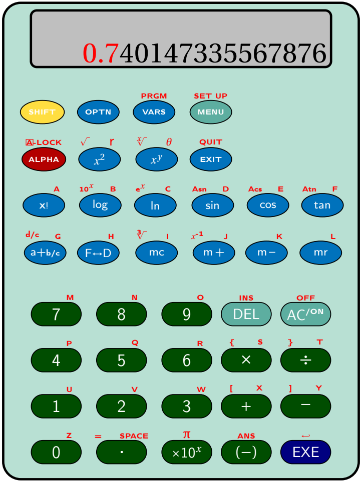
Pressione sucessivas vezes a tecla:



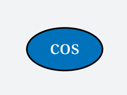


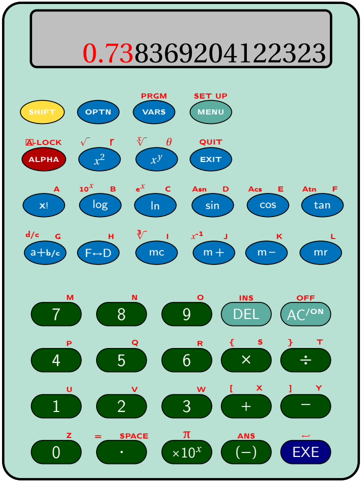
Pressione sucessivas vezes a tecla:



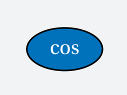


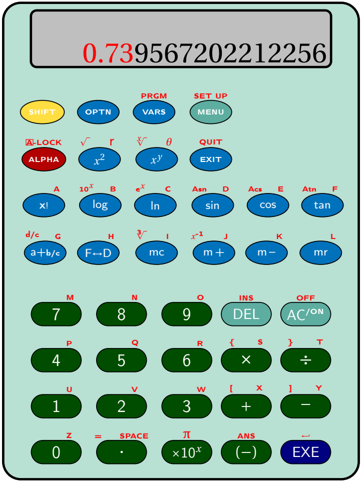
Pressione sucessivas vezes a tecla:



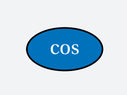


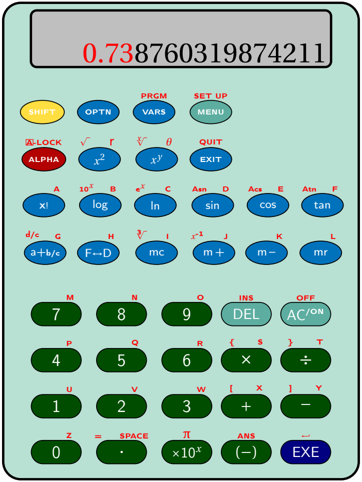
Pressione sucessivas vezes a tecla:



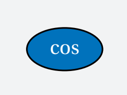


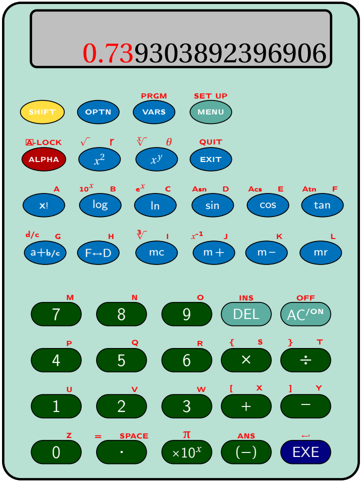
Pressione sucessivas vezes a tecla:



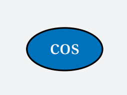


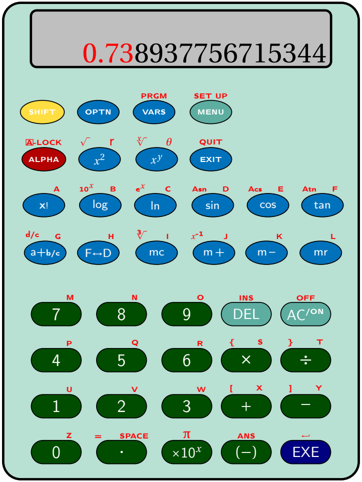
Pressione sucessivas vezes a tecla:



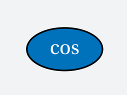


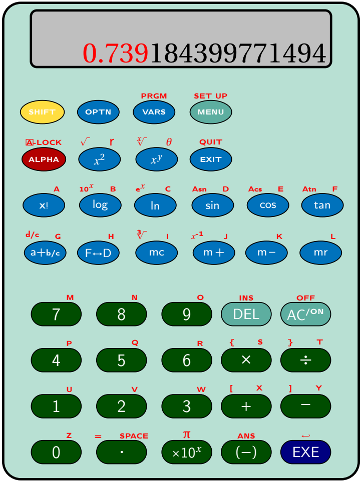
Pressione sucessivas vezes a tecla:



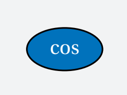


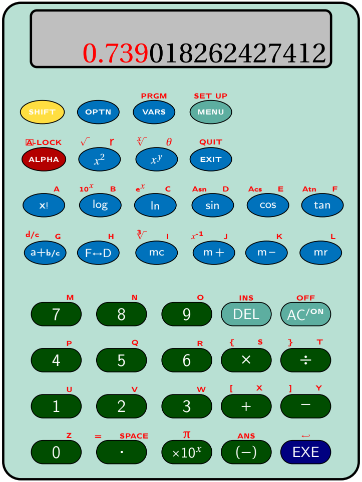
Pressione sucessivas vezes a tecla:



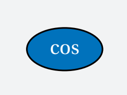


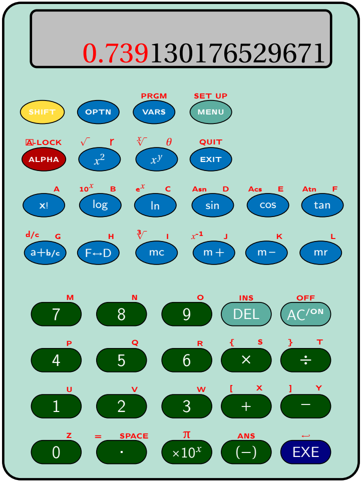
Pressione
sucessivas vezes
a tecla:



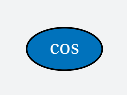


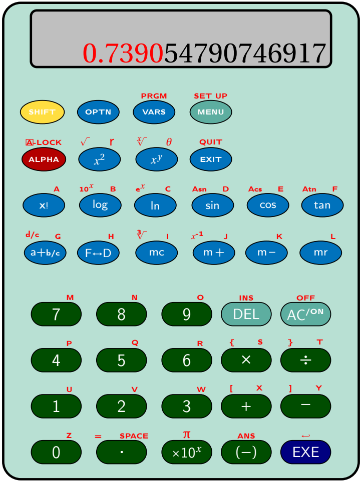
Pressione sucessivas vezes a tecla:



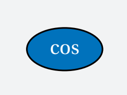


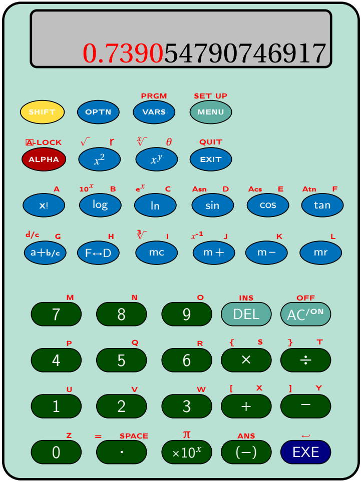
Pressione sucessivas vezes a tecla:



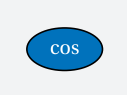


Pressione sucessivas vezes a tecla:





Pressione sucessivas vezes a tecla:



Esse processo encontra um ponto fixo da função cosseno!

A noção de ponto fixo

Considere uma função real $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. O escalar real $x^* \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ é dito um *ponto fixo* de g se

$$\boxed{g(x^*) = x^*}$$

Exemplos:

$$g(x) = \cos x \qquad h(x) = x^2 - 3x + 4$$

- $x^* = 0,739\cdots$ é ponto fixo de g: $\cos(0,739\cdots) = 0,739\cdots$
- $x^* = 0$ não é ponto fixo de g: $\cos 0 = 1 \neq 0$
- $x^* = 2$ é ponto fixo de h: $2^2 - 3 \times 2 + 4 = 2$
- $x^* = 1$ não é ponto fixo de h: $1^2 - 3 \times 1 + 4 = 2 \neq 1$

Iteração de ponto fixo

É um *método numérico* para calcular uma *solução aproximada* para a equação $f(x) = 0$ partindo de um chute inicial x_0.

Hipóteses:

$$f \in C[a,b] \text{ e existe } x^* \in [a,b] \text{ tal que } f(x^*) = 0$$

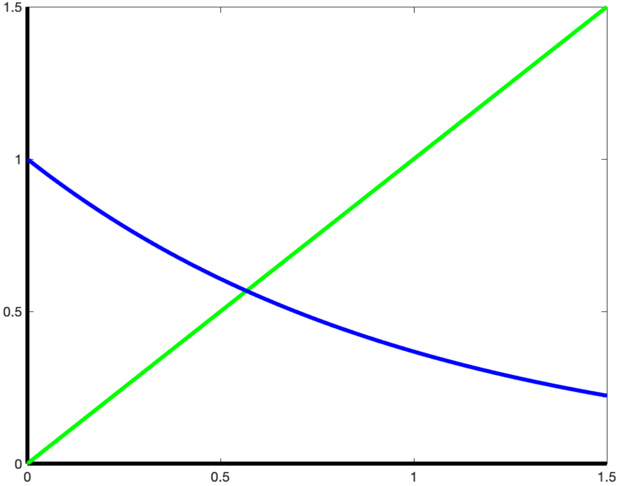
Ideia do método:

- Transformar o cálculo de uma raiz de f num *problema equivalente (mais fácil)*, onde buscamos um ponto fixo de g:

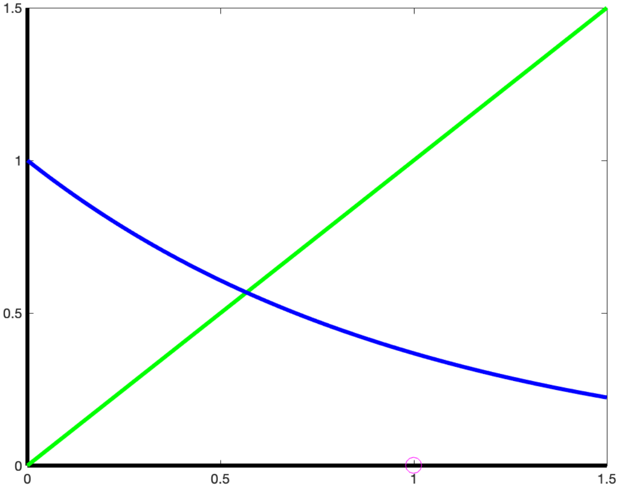
$$f(x) = 0 \iff x = g(x)$$

- A partir de um dado chute inicial x_0, obtenha uma nova aproximação para x^* aplicando a função de iteração g
- Repita esse procedimento até obter uma aproximação com a tolerância desejada

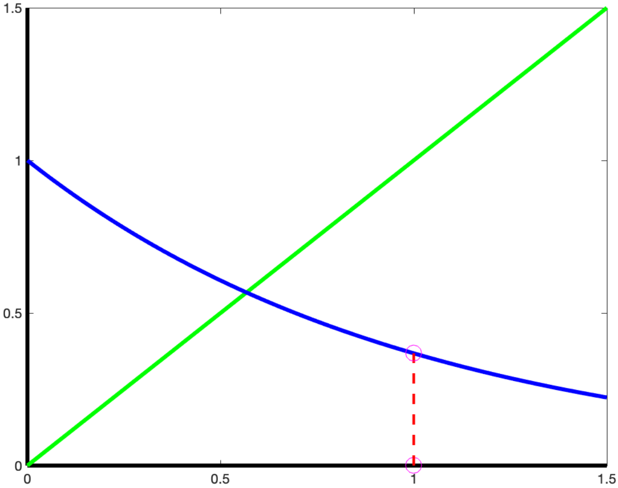
Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



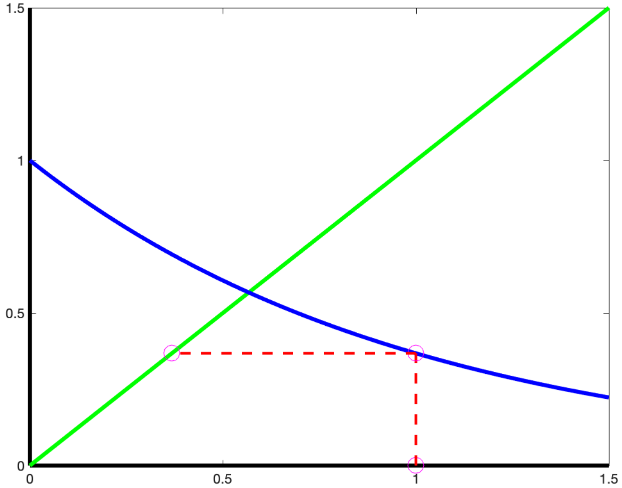
Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



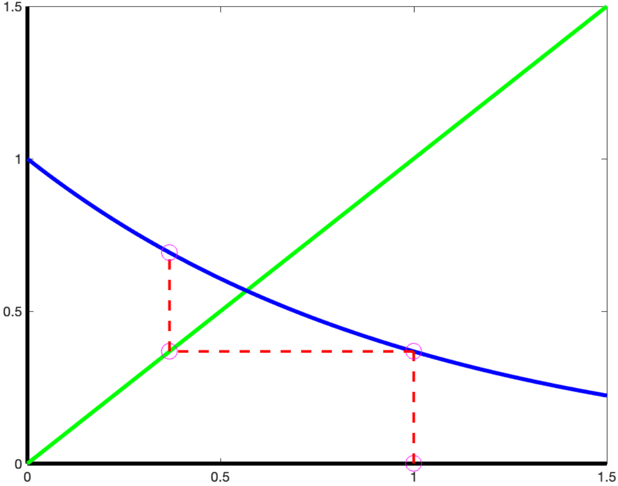
Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



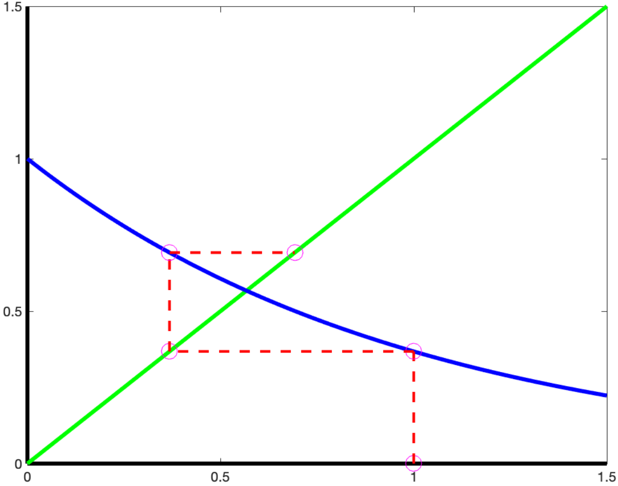
Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



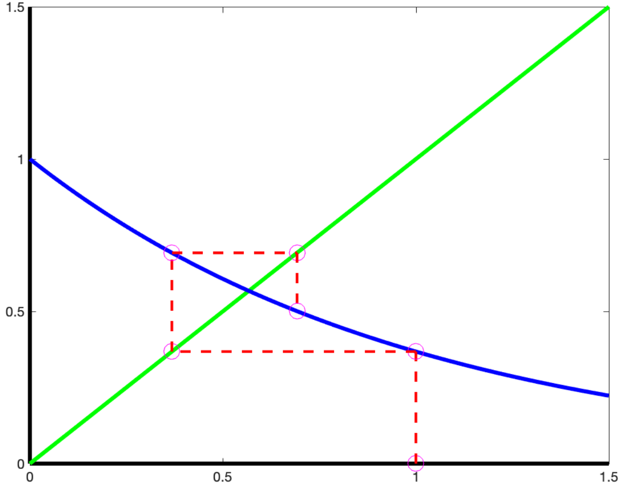
Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



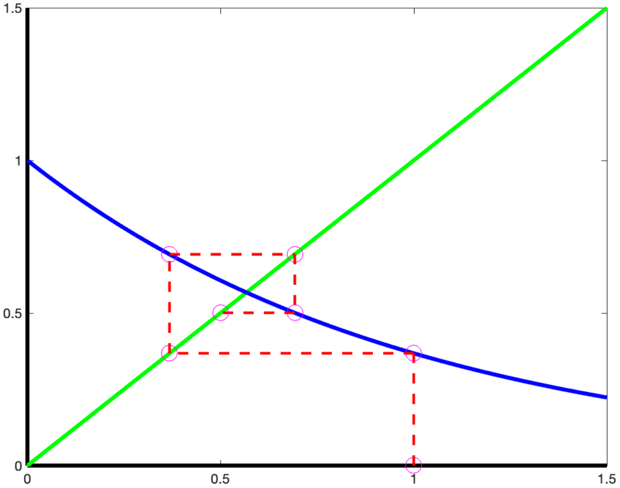
Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



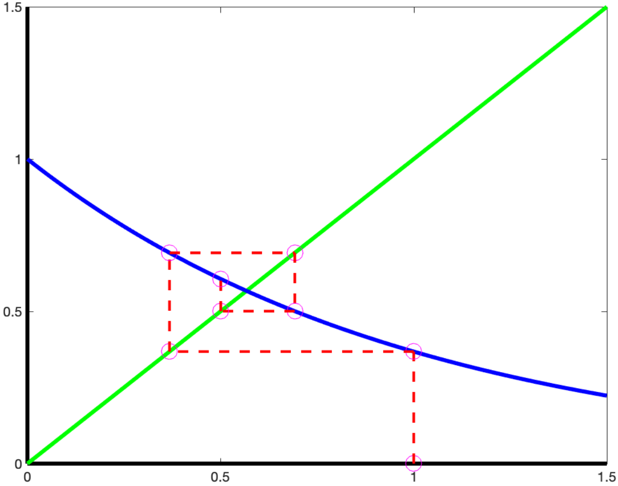
Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



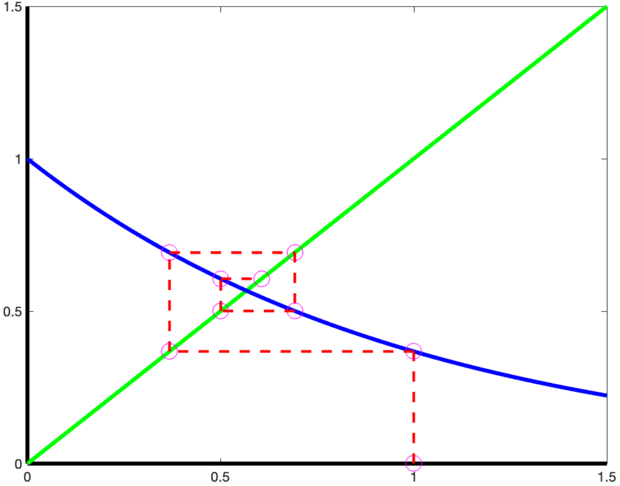
Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



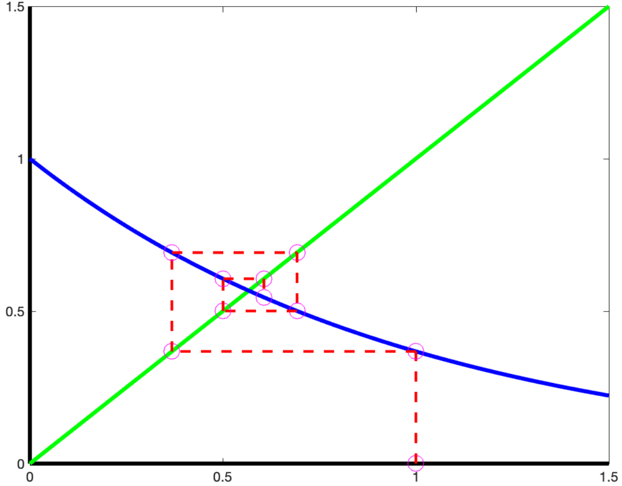
Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



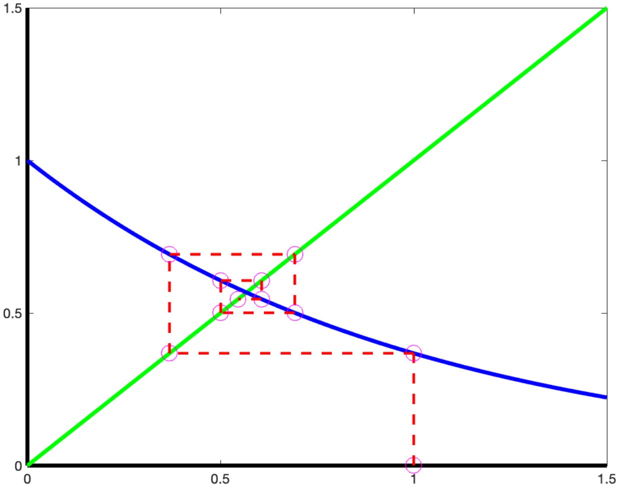
Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



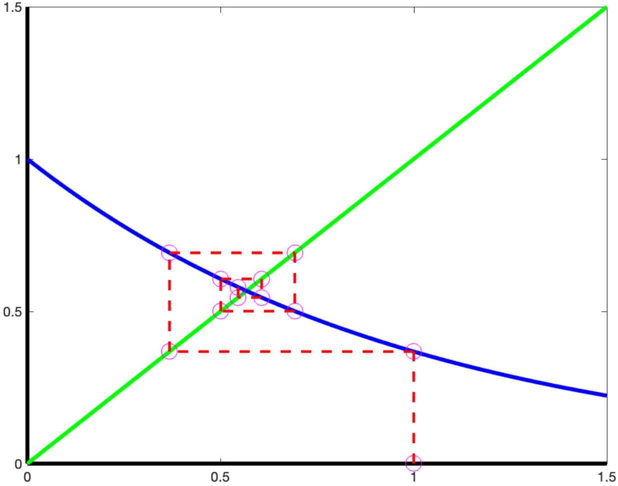
Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



Interpretação geométrica da iteração de ponto fixo



Desenvolvimento analítico da iteração de ponto fixo

Será que sempre é possível escrever $f(x) = 0 \iff x = g(x)$?

Desenvolvimento analítico da iteração de ponto fixo

Será que sempre é possível escrever $f(x) = 0 \iff x = g(x)$?

Sim! Existem muitas maneiras diferentes:

Desenvolvimento analítico da iteração de ponto fixo

Será que sempre é possível escrever $f(x) = 0 \iff x = g(x)$?

Sim! Existem muitas maneiras diferentes:

Desenvolvimento analítico da iteração de ponto fixo

Será que sempre é possível escrever $f(x) = 0 \iff x = g(x)$?

Sim! Existem muitas maneiras diferentes:

- $g(x) = x + f(x)$

Desenvolvimento analítico da iteração de ponto fixo

Será que sempre é possível escrever $f(x) = 0 \iff x = g(x)$?

Sim! Existem muitas maneiras diferentes:

- $g(x) = x + f(x)$
- $g(x) = x + \alpha f(x), \ \alpha \in \mathbb{R}$

Desenvolvimento analítico da iteração de ponto fixo

Será que sempre é possível escrever $f(x) = 0 \iff x = g(x)$?

Sim! Existem muitas maneiras diferentes:

- $g(x) = x + f(x)$
- $g(x) = x + \alpha f(x), \ \alpha \in \mathbb{R}$
- $g(x) = x - f(x)/f'(x), \ f'(x) \neq 0$

Desenvolvimento analítico da iteração de ponto fixo

Será que sempre é possível escrever $f(x) = 0 \iff x = g(x)$?

Sim! Existem muitas maneiras diferentes:

- $g(x) = x + f(x)$
- $g(x) = x + \alpha f(x),\ \alpha \in \mathbb{R}$
- $g(x) = x - f(x)/f'(x),\ f'(x) \neq 0$
- etc

Desenvolvimento analítico da iteração de ponto fixo

Será que sempre é possível escrever $f(x) = 0 \iff x = g(x)$?

Sim! Existem muitas maneiras diferentes:

- $g(x) = x + f(x)$
- $g(x) = x + \alpha f(x), \;\; \alpha \in \mathbb{R}$
- $g(x) = x - f(x)/f'(x), \;\; f'(x) \neq 0$
- etc

Dado chute inicial x_0, uma sequência de aproximações para x^* é construída através do processo iterativo

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Algoritmo da iteração de ponto fixo

Input: g, x_0, $\mathtt{tol}$ and $\mathtt{maxiter}$

$\mathtt{iter} = 0$
$\mathtt{Error} = \infty$
while termination criterion is not met $(\mathtt{Error}, \mathtt{tol}, \mathtt{maxiter})$ **do**
    $\mathtt{iter} = \mathtt{iter} + 1$
    Compute the approximation $x_{new} = g(x_0)$
    Estimate the $\mathtt{Error}$ based on x_{new} and x_0
    Update the initial guess $x_0 = x_{fpt}$
end while
if $\mathtt{Error} > \mathtt{tol}$ **then**
    $x_{new} = \mathrm{NaN}$
end if
return

Output: x_{new}, $\mathtt{iter}$

Implementação em GNU Octave

```
function [xnew,iter] = fixedpoint(g,x0,tol,maxiter)
    iter = 0;
    Error = inf;
    while Error > tol && iter < maxiter
        iter = iter + 1;
        xnew = g(x0);
        Error = abs(xnew-x0);
        x0 = xnew;
        fprintf([' iter = %3d    ',...
                 ' root = %.16f ',...
                 'Error = %.16f \n'],iter,xnew,Error);
    end
    if Error > tol
        xnew = NaN;
    end
return
```

Alguns exemplos

Considere a função $f(x) = x\, e^x - 1,\ 0 \leq x \leq 1$ e três possíveis iterações de ponto fixo:

1. $g_1(x) = e^{-x}$
2. $g_2(x) = (1 + x)/(1 + e^x)$
3. $g_3(x) = x + 1 - x\, e^x$

Experimentos computacionais

```
>> x0 = 0.5; tol = 1.0e-9; maxiter = 10;
>> g1 = @(x) exp(-x);
>> root1 = fixedpoint(g1,x0,tol,maxiter);
```

```
>> g2 = @(x) (1+x)/(1+exp(x));
>> root2 = fixedpoint(g2,x0,tol,maxiter);
```

```
>> g3 = @(x) x + 1 - x*exp(x);
>> root3 = fixedpoint(g3,x0,tol,maxiter);
```

Observações sobre a iteração

$$g_1(x) = e^{-x}$$
$$g_2(x) = (1 + x)/(1 + e^x)$$
$$g_3(x) = x + 1 - x\, e^x$$

Observações sobre a iteração

$$g_1(x) = e^{-x} \qquad \Longrightarrow \qquad \textbf{converge lentamente}$$
$$g_2(x) = (1+x)/(1+e^x)$$
$$g_3(x) = x + 1 - x\, e^x$$

Observações sobre a iteração

$$g_1(x) = e^{-x} \quad \Longrightarrow \quad \textbf{converge lentamente}$$

$$g_2(x) = (1 + x)/(1 + e^x) \quad \Longrightarrow \quad \textbf{converge rapidamente}$$

$$g_3(x) = x + 1 - x\,e^x$$

Observações sobre a iteração

$$g_1(x) = e^{-x} \qquad \Longrightarrow \qquad \textbf{converge lentamente}$$
$$g_2(x) = (1 + x)/(1 + e^x) \qquad \Longrightarrow \qquad \textbf{converge rapidamente}$$
$$g_3(x) = x + 1 - x\,e^x \qquad \Longrightarrow \qquad \textbf{não converge}$$

Observações sobre a iteração

$g_1(x) = e^{-x}$ $\Longrightarrow$ **converge lentamente**

$g_2(x) = (1 + x)/(1 + e^x)$ $\Longrightarrow$ **converge rapidamente**

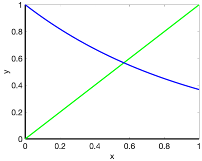
$g_3(x) = x + 1 - x\, e^x$ $\Longrightarrow$ **não converge**

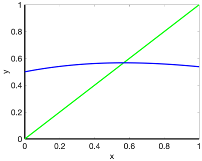
$$\underbrace{f(x) = 0}_{\text{raiz de f}} \Longleftrightarrow \underbrace{x = g(x)}_{\text{ponto fixo de g}} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{cases} y &= x \\ y &= g(x) \end{cases}}_{\text{interseção entre } y = x \text{ e } y = g(x)}$$

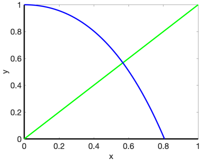
Observações sobre a iteração

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= e^{-x} & \Longrightarrow \quad & \textbf{converge lentamente} \\
g_2(x) &= (1+x)/(1+e^x) & \Longrightarrow \quad & \textbf{converge rapidamente} \\
g_3(x) &= x + 1 - x\,e^x & \Longrightarrow \quad & \textbf{não converge}
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{f(x) = 0}_{\text{raiz de f}} \iff \underbrace{x = g(x)}_{\text{ponto fixo de g}} \iff \underbrace{\begin{cases} y = x \\ y = g(x) \end{cases}}_{\text{interseção entre } y = x \text{ e } y = g(x)}
$$



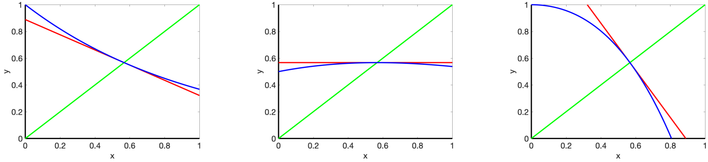




Observações sobre a iteração

$$
\begin{array}{lcl}
g_1(x) = e^{-x} & \Longrightarrow & \textbf{converge lentamente} \\
g_2(x) = (1+x)/(1+e^x) & \Longrightarrow & \textbf{converge rapidamente} \\
g_3(x) = x + 1 - x\,e^x & \Longrightarrow & \textbf{não converge}
\end{array}
$$

$$
\underbrace{f(x) = 0}_{\text{raiz de f}} \Longleftrightarrow \underbrace{x = g(x)}_{\text{ponto fixo de g}} \Longleftrightarrow \underbrace{\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & x \\ y & = & g(x) \end{array} \right.}_{\text{interseção entre } y = x \text{ e } y = g(x)}
$$



Algumas questões

Considere a iteração de ponto fixo $x_{n+1} = g(x_n)$ para uma função de iteração g contínua no intervalo $[a, b]$, i.e., $g \in C[a, b]$.

Perguntas naturais:

1. Existe um ponto fixo em $[a, b]$?
2. Se existe, ele é único ?
3. A sequência de aproximações converge para uma raiz ?
4. Se sim, quão rápida é a convergência ?
5. Se não, isso significa que não existe raiz ?

Fundamentação teórica

Teorema de iteração de ponto fixo

Considere a iteração de ponto fixo $x_{n+1} = g(x_n)$ para uma função de iteração $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Se $g \in C[a, b]$ e $a \leq g(x) \leq b$ para qualquer $x \in [a, b]$, então:

1. existe ponto fixo de g em $[a, b]$, denotado por x^*.

Se, adicionalmente, a derivada g' existir e houver uma constante $\rho < 1$ tal que $|g'(x)| < \rho$ para todo $x \in (a, b)$, então:

2. o ponto fixo é único;
3. a sequência de aproximações converge para x^*.

Fundamentação teórica

Teorema de iteração de ponto fixo

Considere a iteração de ponto fixo $x_{n+1} = g(x_n)$ para uma função de iteração $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Se $g \in C[a, b]$ e $a \leq g(x) \leq b$ para qualquer $x \in [a, b]$, então:

1. existe ponto fixo de g em $[a, b]$, denotado por x^*.

Se, adicionalmente, a derivada g' existir e houver uma constante $\rho < 1$ tal que $|g'(x)| < \rho$ para todo $x \in (a, b)$, então:

2. o ponto fixo é único;
3. a sequência de aproximações converge para x^*.

Esse teorema responde afirmativamente as questões 1, 2 e 3.

Demonstração do teorema

Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Demonstração do teorema

Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se $g(a) = a$ ou $g(b) = b$, existe um ponto fixo (trivial).

Demonstração do teorema

Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se $g(a) = a$ ou $g(b) = b$, existe um ponto fixo (trivial).

Se $g(a) > a$ e $g(b) < b$, defina a função

$$\phi(x) = g(x) - x$$

Demonstração do teorema

Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se $g(a) = a$ ou $g(b) = b$, existe um ponto fixo (trivial).

Se $g(a) > a$ e $g(b) < b$, defina a função

$$\phi(x) = g(x) - x$$

- ϕ é a diferenças entre duas funções contínuas
  $\Longrightarrow$ ϕ é contínua

Demonstração do teorema

Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se $g(a) = a$ ou $g(b) = b$, existe um ponto fixo (trivial).

Se $g(a) > a$ e $g(b) < b$, defina a função

$$\boxed{\phi(x) = g(x) - x}$$

- ϕ é a diferenças entre duas funções contínuas
  $\implies$ ϕ é contínua
- $\phi(a) = g(a) - a > 0$ e $\phi(b) = g(b) - b < 0$
  $\implies$ ϕ muda de sinal no intervalo $[a, b]$

Demonstração do teorema

Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se $g(a) = a$ ou $g(b) = b$, existe um ponto fixo (trivial).

Se $g(a) > a$ e $g(b) < b$, defina a função

$$\phi(x) = g(x) - x$$

- ϕ é a diferenças entre duas funções contínuas
  $\Longrightarrow$ ϕ é contínua
- $\phi(a) = g(a) - a > 0$ e $\phi(b) = g(b) - b < 0$
  $\Longrightarrow$ ϕ muda de sinal no intervalo $[a, b]$

Teorema de Bolzano $\Longrightarrow$ Existe $x^* \in (a, b)$ que é raiz de ϕ

Demonstração do teorema

Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se $g(a) = a$ ou $g(b) = b$, existe um ponto fixo (trivial).

Se $g(a) > a$ e $g(b) < b$, defina a função

$$\phi(x) = g(x) - x$$

- ϕ é a diferenças entre duas funções contínuas
  $\Longrightarrow$ ϕ é contínua
- $\phi(a) = g(a) - a > 0$ e $\phi(b) = g(b) - b < 0$
  $\Longrightarrow$ ϕ muda de sinal no intervalo $[a, b]$

Teorema de Bolzano $\Longrightarrow$ Existe $x^* \in (a, b)$ que é raiz de ϕ

$$\phi(x^*) = 0$$

Demonstração do teorema

Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se $g(a) = a$ ou $g(b) = b$, existe um ponto fixo (trivial).

Se $g(a) > a$ e $g(b) < b$, defina a função

$$\phi(x) = g(x) - x$$

- ϕ é a diferenças entre duas funções contínuas
  $\Longrightarrow$ ϕ é contínua
- $\phi(a) = g(a) - a > 0$ e $\phi(b) = g(b) - b < 0$
  $\Longrightarrow$ ϕ muda de sinal no intervalo $[a, b]$

Teorema de Bolzano $\Longrightarrow$ Existe $x^* \in (a, b)$ que é raiz de ϕ

$$\phi(x^*) = 0 \iff g(x^*) - x^* = 0$$

Demonstração do teorema

Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se $g(a) = a$ ou $g(b) = b$, existe um ponto fixo (trivial).

Se $g(a) > a$ e $g(b) < b$, defina a função

$$\phi(x) = g(x) - x$$

- ϕ é a diferenças entre duas funções contínuas
  $\Longrightarrow$ ϕ é contínua
- $\phi(a) = g(a) - a > 0$ e $\phi(b) = g(b) - b < 0$
  $\Longrightarrow$ ϕ muda de sinal no intervalo $[a, b]$

Teorema de Bolzano $\Longrightarrow$ Existe $x^* \in (a, b)$ que é raiz de ϕ

$$\phi(x^*) = 0 \iff g(x^*) - x^* = 0 \iff x^* = g(x^*)$$

Demonstração do teorema

Parte 1 (existência de um ponto fixo):

Se $g(a) = a$ ou $g(b) = b$, existe um ponto fixo (trivial).

Se $g(a) > a$ e $g(b) < b$, defina a função

$$\phi(x) = g(x) - x$$

- ϕ é a diferenças entre duas funções contínuas
  $\Longrightarrow$ ϕ é contínua
- $\phi(a) = g(a) - a > 0$ e $\phi(b) = g(b) - b < 0$
  $\Longrightarrow$ ϕ muda de sinal no intervalo $[a, b]$

Teorema de Bolzano $\Longrightarrow$ Existe $x^* \in (a, b)$ que é raiz de ϕ

$$\phi(x^*) = 0 \iff g(x^*) - x^* = 0 \iff x^* = g(x^*)$$

x^* é um ponto fixo de g

Demonstração do teorema

Parte 2 (unicidade do ponto fixo):

Demonstração do teorema

Parte 2 (unicidade do ponto fixo):

Suponha que exista $y^* = g(y^*)$, outro ponto fixo de g em $[a, b]$.

Demonstração do teorema

Parte 2 (unicidade do ponto fixo):

Suponha que exista $y^* = g(y^*)$, outro ponto fixo de g em $[a, b]$.

Teorema do Valor Médio:

$$|x^* - y^*| = |g(x^*) - g(y^*)| = |g'(\xi)|\,|(x^* - y^*)| \le \rho|x^* - y^*|,$$

onde $\xi \in (x^*, y^*)$.

Demonstração do teorema

Parte 2 (unicidade do ponto fixo):

Suponha que exista $y^* = g(y^*)$, outro ponto fixo de g em $[a, b]$.
Teorema do Valor Médio:

$$|x^* - y^*| = |g(x^*) - g(y^*)| = |g'(\xi)|\,|(x^* - y^*)| \leq \rho|x^* - y^*|,$$

onde $\xi \in (x^*, y^*)$.

Como $\rho < 1$, tem-se

$$|x^* - y^*| \leq \rho\,|x^* - y^*| \Longleftrightarrow x^* = y^*.$$

Demonstração do teorema

Parte 2 (unicidade do ponto fixo):

Suponha que exista $y^* = g(y^*)$, outro ponto fixo de g em $[a, b]$.

Teorema do Valor Médio:

$$|x^* - y^*| = |g(x^*) - g(y^*)| = |g'(\xi)|\,|(x^* - y^*)| \leq \rho|x^* - y^*|,$$

onde $\xi \in (x^*, y^*)$.

Como $\rho < 1$, tem-se

$$|x^* - y^*| \leq \rho\,|x^* - y^*| \iff x^* = y^*.$$

Só existe um ponto fixo de g em $[a, b]$.

Demonstração do teorema

Parte 3 (convergência da iteração)

Demonstração do teorema

Parte 3 (convergência da iteração)

Teorema do Valor Médio:

$$|x^* - x_n| = |g(x^*) - g(x_{n-1})| = |g'(\xi)|\,|x^* - x_{n-1}| \leq \rho|x^* - x_{n-1}|$$

onde $\xi \in (x^*, x_{n-1})$.

Demonstração do teorema

Parte 3 (convergência da iteração)

Teorema do Valor Médio:

$$|x^* - x_n| = |g(x^*) - g(x_{n-1})| = |g'(\xi)|\,|x^* - x_{n-1}| \leq \rho|x^* - x_{n-1}|$$

onde $\xi \in (x^*, x_{n-1})$.

Analogamente,

$$|x^* - x_n| \leq \rho|x^* - x_{n-1}| \leq \rho^2|x^* - x_{n-2}| \leq \cdots \leq \rho^n|x^* - x_0|$$

Demonstração do teorema

Parte 3 (convergência da iteração)

Teorema do Valor Médio:

$$|x^* - x_n| = |g(x^*) - g(x_{n-1})| = |g'(\xi)|\,|x^* - x_{n-1}| \leq \rho|x^* - x_{n-1}|$$

onde $\xi \in (x^*, x_{n-1})$.

Analogamente,

$$|x^* - x_n| \leq \rho|x^* - x_{n-1}| \leq \rho^2|x^* - x_{n-2}| \leq \cdots \leq \rho^n|x^* - x_0|$$

Como $\rho^n \to 0$ quando $n \to \infty$, segue que $x_n \to x^*$.

Demonstração do teorema

Parte 3 (convergência da iteração)

Teorema do Valor Médio:

$$|x^* - x_n| = |g(x^*) - g(x_{n-1})| = |g'(\xi)|\,|x^* - x_{n-1}| \leq \rho|x^* - x_{n-1}|$$

onde $\xi \in (x^*, x_{n-1})$.

Analogamente,

$$|x^* - x_n| \leq \rho|x^* - x_{n-1}| \leq \rho^2|x^* - x_{n-2}| \leq \cdots \leq \rho^n|x^* - x_0|$$

Como $\rho^n \to 0$ quando $n \to \infty$, segue que $x_n \to x^*$.

A iteração converge para a raiz.

Demonstração do teorema

Parte 3 (convergência da iteração)

Teorema do Valor Médio:

$$|x^* - x_n| = |g(x^*) - g(x_{n-1})| = |g'(\xi)|\,|x^* - x_{n-1}| \leq \rho|x^* - x_{n-1}|$$

onde $\xi \in (x^*, x_{n-1})$.

Analogamente,

$$|x^* - x_n| \leq \rho|x^* - x_{n-1}| \leq \rho^2|x^* - x_{n-2}| \leq \cdots \leq \rho^n|x^* - x_0|$$

Como $\rho^n \to 0$ quando $n \to \infty$, segue que $x_n \to x^*$.

A iteração converge para a raiz.

Note que a convergência independe do chute inicial!

Quão rápida é a convergência?

Quão rápida é a convergência?

Para x_n "suficientemente próximo" de x^*

$$x_n - x^* \approx g'(x^*)\,(x_{n-1} - x^*)$$

(aproximação linear)

Quão rápida é a convergência?

Para x_n "suficientemente próximo" de x^*

$$x_n - x^* \approx g'(x^*)\,(x_{n-1} - x^*)$$

(aproximação linear)

Como $0 < \rho = |g'(x)| < 1$, então

$$|x_n - x^*| \approx \rho\,|x_{n-1} - x^*| \approx \rho^2\,|x_{n-2} - x^*| \approx \cdots \approx \rho^n\,|x_0 - x^*|$$

Quão rápida é a convergência?

Para x_n "suficientemente próximo" de x^*

$$x_n - x^* \approx g'(x^*)\,(x_{n-1} - x^*)$$

(aproximação linear)

Como $0 < \rho = |g'(x)| < 1$, então

$$|x_n - x^*| \approx \rho\,|x_{n-1} - x^*| \approx \rho^2\,|x_{n-2} - x^*| \approx \cdots \approx \rho^n\,|x_0 - x^*|$$

- *taxa de convergência* $= -\log \rho$

Quão rápida é a convergência?

Para x_n "suficientemente próximo" de x^*

$$x_n - x^* \approx g'(x^*)\,(x_{n-1} - x^*)$$

(aproximação linear)

Como $0 < \rho = |g'(x)| < 1$, então

$$|x_n - x^*| \approx \rho\,|x_{n-1} - x^*| \approx \rho^2\,|x_{n-2} - x^*| \approx \cdots \approx \rho^n\,|x_0 - x^*|$$

- *taxa de convergência* $= -\log \rho$
- Quanto menor ρ mais rápida é a convergência

Quão rápida é a convergência?

Para x_n "suficientemente próximo" de x^*

$$x_n - x^* \approx g'(x^*)\,(x_{n-1} - x^*)$$

(aproximação linear)

Como $0 < \rho = |g'(x)| < 1$, então

$$|x_n - x^*| \approx \rho\,|x_{n-1} - x^*| \approx \rho^2\,|x_{n-2} - x^*| \approx \cdots \approx \rho^n\,|x_0 - x^*|$$

- *taxa de convergência* $= -\log\rho$
- Quanto menor ρ mais rápida é a convergência
- Aproximadamente $1/\text{taxa}$ iterações são necessárias para reduzir o erro em uma ordem de grandeza

Exercício teórico

$x^2 + x - 6$ tem raiz $x^* = 2$

Iteração de ponto fixo:

- $g_1(x) = 6 - x^2$
- $g_2(x) = \sqrt{6 - x}$

Qual desses processos converge para x^* ?

Exercício teórico

$x^2 + x - 6$ tem raiz $x^* = 2$

Iteração de ponto fixo:

- $g_1(x) = 6 - x^2$
- $g_2(x) = \sqrt{6 - x}$

Qual desses processos converge para x^* ?

$$g_1'(x) = -2\,x \Longrightarrow \rho = |g_1'(x^*)| = 4 > 1$$

Exercício teórico

$x^2 + x - 6$ tem raiz $x^* = 2$

Iteração de ponto fixo:

- $g_1(x) = 6 - x^2$
- $g_2(x) = \sqrt{6 - x}$

Qual desses processos converge para x^* ?

$$g_1'(x) = -2\,x \Longrightarrow \rho = |g_1'(x^*)| = 4 > 1$$

O processo 1 não converge!

Exercício teórico

$x^2 + x - 6$ tem raiz $x^* = 2$

Iteração de ponto fixo:

- $g_1(x) = 6 - x^2$
- $g_2(x) = \sqrt{6 - x}$

Qual desses processos converge para x^* ?

$$g_1'(x) = -2\,x \Longrightarrow \rho = |g_1'(x^*)| = 4 > 1$$

O processo 1 não converge!

$$g_2'(x) = -\frac{1}{2\,\sqrt{6-x}} \Longrightarrow \rho = |g_2'(x^*)| = 1/4 < 1$$

Exercício teórico

$x^2 + x - 6$ tem raiz $x^* = 2$

Iteração de ponto fixo:

- $g_1(x) = 6 - x^2$
- $g_2(x) = \sqrt{6 - x}$

Qual desses processos converge para x^* ?

$$g_1'(x) = -2\,x \Longrightarrow \rho = |g_1'(x^*)| = 4 > 1$$

O processo 1 não converge!

$$g_2'(x) = -\frac{1}{2\,\sqrt{6-x}} \Longrightarrow \rho = |g_2'(x^*)| = 1/4 < 1$$

O processo 2 converge!

Para pensar em casa ...

Exercício computacional:

Utilize a função de iteração $g(x) = x + \alpha f(x)$ para encontrar as raízes da função $f(x) = x^2 - 2$. Encontre um valor de α que promova a convergência da iteração.

Características de uma iteração de ponto fixo

- ☺ Simples e fácil de implementar
- ☺ Fácil de generalizar para várias variáveis
- ☺ Requer pouca informação sobre f
- ☹ Convergência lenta em geral
- ☹ Convergência não garantida em geral
- ☹ Convergência dependente de g e do chute inicial

Como citar esse material?

A. Cunha, *Iteração de Ponto Fixo*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2020.