Representação Binária de Números Reais

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org

Números reais podem ser “quebrados” em potências de 2

$$23$$

Números reais podem ser “quebrados” em potências de 2

$$23$$

$$=$$

$$16 + 4 + 2 + 1$$

Números reais podem ser “quebrados” em potências de 2

$$23$$

$$=$$

$$16 + 4 + 2 + 1$$

$$=$$

$$2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

A noção de representação binária

Uma *representação binária* do número real não negativo x é uma soma (possivelmente infinita) da forma

$$b_k\, 2^k + \cdots + b_1\, 2^1 + b_0\, 2^0 + b_{-1}\, 2^{-1} + \cdots + b_{-n}\, 2^{-n} + \cdots = x$$

sendo $b_n \in \{0, 1\}$, onde $n = k, \cdots, 1, 0, -1, -2, \cdots$.

Por construção,

$$x = \underbrace{(b_k \cdots b_1\, b_0)_2}_{\textit{parte inteira}} + \underbrace{(0, b_{-1}\, b_{-2}\, b_{-3} \cdots)_2}_{\textit{parte fracionária}}$$

<u>Notação:</u>

$$x = (b_k \cdots b_1\, b_0\,,\; b_{-1}\, b_{-2}\, b_{-3} \cdots)_2$$

Exemplo: número inteiro

- $x_1 = (23,0)_{10}$

Exemplo: número inteiro

- $x_1 = (23,0)_{10}$

$$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

Exemplo: número inteiro

- $x_1 = (23,0)_{10}$

$$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$23 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1}$$

Exemplo: número inteiro

- $x_1 = (23,0)_{10}$

$$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$23 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1}$$

Exemplo: número inteiro

- $x_1 = (23,0)_{10}$

$$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$23 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1}$$

$$\boxed{x_1 = (10111,0)_2}$$

Exemplo: número inteiro

- $x_1 = (23,0)_{10}$

$$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$23 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1}$$

$$x_1 = (10111,0)_2$$

$\Longrightarrow$ Representação finita

Exemplo: fracionário com potência de 2 no denominador

- $x_2 = (0,125)_{10}$

Exemplo: fracionário com potência de 2 no denominador

- $x_2 = (0,125)_{10}$

$$0,125 = 1/8 = 1/2^3 = 2^{-3}$$

Exemplo: fracionário com potência de 2 no denominador

- $x_2 = (0,125)_{10}$

$$0,125 = 1/8 = 1/2^3 = 2^{-3}$$

$$0,125 = 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

Exemplo: fracionário com potência de 2 no denominador

- $x_2 = (0,125)_{10}$

$$0,125 = 1/8 = 1/2^3 = 2^{-3}$$

$$0,125 = 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

Exemplo: fracionário com potência de 2 no denominador

- $x_2 = (0,125)_{10}$

$$0,125 = 1/8 = 1/2^3 = 2^{-3}$$

$$0,125 = 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

$$\boxed{x_1 = (0,001)_2}$$

Exemplo: fracionário com potência de 2 no denominador

- $x_2 = (0,125)_{10}$

$$0,125 = 1/8 = 1/2^3 = 2^{-3}$$

$$0,125 = 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

$$\boxed{x_1 = (0,001)_2}$$

$\Longrightarrow$ Representação finita

Exemplo: “quebrado” em parte inteira + parte fracionária

- $x_3 = (23,125)_{10}$

Exemplo: “quebrado” em parte inteira + parte fracionária

- $x_3 = (23,125)_{10}$

$$23,125 = (23)_{10} + (0,125)_{10}$$

Exemplo: “quebrado” em parte inteira + parte fracionária

- $x_3 = (23,125)_{10}$

$$23,125 = (23)_{10} + (0,125)_{10}$$

$$(23)_{10} + (0,125)_{10} = (10111)_2 + (0,001)_2$$

Exemplo: “quebrado” em parte inteira + parte fracionária

- $x_3 = (23,125)_{10}$

$$23,125 = (23)_{10} + (0,125)_{10}$$

$$(23)_{10} + (0,125)_{10} = (10111)_2 + (0,001)_2$$

Exemplo: "quebrado" em parte inteira + parte fracionária

- $x_3 = (23,125)_{10}$

$$23,125 = (23)_{10} + (0,125)_{10}$$

$$(23)_{10} + (0,125)_{10} = (10111)_2 + (0,001)_2$$

$$\boxed{x_3 = (10111,001)_2}$$

Exemplo: "quebrado" em parte inteira + parte fracionária

- $x_3 = (23,125)_{10}$

$$23,125 = (23)_{10} + (0,125)_{10}$$

$$(23)_{10} + (0,125)_{10} = (10111)_2 + (0,001)_2$$

$$\boxed{x_3 = (10111,001)_2}$$

$\Longrightarrow$ Representação finita

Exemplo: fracionário sem potência de 2 no denominador

- $x_4 = (0,1)_{10}$

Exemplo: fracionário sem potência de 2 no denominador

- $x_4 = (0,1)_{10}$

$$0,1 = 1/10$$

(denominador não é potência de 2)

Exemplo: fracionário sem potência de 2 no denominador

- $x_4 = (0,1)_{10}$

$$0,1 = 1/10$$

(denominador não é potência de 2)

$$\boxed{x_4 = \left(0,0\overline{0011}\right)_2}$$

Exemplo: fracionário sem potência de 2 no denominador

- $x_4 = (0,1)_{10}$

$$0,1 = 1/10$$

(denominador não é potência de 2)

$$\boxed{x_4 = \left(0,0\overline{0011}\right)_2}$$

$\Longrightarrow$ Representação infinita periódica
(dízima em base 2)

Exemplo: número irracional

- $x_5 = \pi$

Exemplo: número irracional

- $x_5 = \pi$

$$\pi = 3,141592\cdots$$

(infinitos dígitos sem periodicidade)

Exemplo: número irracional

- $x_5 = \pi$

$$\pi = 3,141592\cdots$$
(infinitos dígitos sem periodicidade)

$$\boxed{x_5 = (11,001001\cdots)_2}$$

Exemplo: número irracional

- $x_5 = \pi$

$$\pi = 3,141592\cdots$$

(infinitos dígitos sem periodicidade)

$$\boxed{x_5 = (11,001001\cdots)_2}$$

$\Longrightarrow$ Representação infinita aperiódica

Representação numa base arbitrária

Uma *representação numa base natural $\beta > 1$* do número real não negativo x é uma soma (possivelmente infinita) da forma

$$a_k\,\beta^k + \cdots + a_1\,\beta^1 + a_0\,\beta^0 + a_{-1}\,\beta^{-1} + \cdots + a_{-n}\,\beta^{-n} + \cdots = x$$

sendo $a_n \in \{0, 1, 2, \cdots, \beta - 1\}$, onde $n = k, \cdots, 1, 0, -1, -2, \cdots$.

Por construção,

$$x = \underbrace{(a_k\ \cdots\ a_1\,a_0)_\beta}_{\textit{parte inteira}} + \underbrace{(0, a_{-1}\,a_{-2}\,a_{-3}\ \cdots)_\beta}_{\textit{parte fracionária}}$$

Notação:

$$x = (a_k\ \cdots\ a_1\,a_0\,,\ a_{-1}\,a_{-2}\,a_{-3}\ \cdots)_\beta$$

Um exemplo em base octal ($\beta = 8$)

- $(125,0)_{10}$

Um exemplo em base octal ($\beta = 8$)

- $(125,0)_{10}$

$$125 = 64 + 56 + 5$$

Um exemplo em base octal ($\beta = 8$)

- $(125,0)_{10}$

$$125 = 64 + 56 + 5$$

$$125 = 1 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 5 \times 8^0$$

Um exemplo em base octal ($\beta = 8$)

- $(125,0)_{10}$

$$125 = 64 + 56 + 5$$

$$125 = 1 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 5 \times 8^0$$

Um exemplo em base octal ($\beta = 8$)

- $(125,0)_{10}$

$$125 = 64 + 56 + 5$$

$$125 = 1 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 5 \times 8^0$$

$$(125,0)_{10} = (175,0)_8$$

Para pensar em casa ...

Exercício Teórico:

Encontre a representação decimal do número $x = (111,\overline{01})_2$.

Exercício Teórico:

Qual a representação do número $x = (12,20)_4$ na base $\beta = 3$?

Exercício Teórico:

Existe alguma base na qual $8/7 = 1,\overline{142857}$ admita uma representação finita?

Como citar esse material?

A. Cunha, *Representação Binária de Números Reais*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2020.