

Método da Bissecção

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org



$$f(x) = 0$$

É possível garantir que essa equação tem solução?



$$f(x) = 0$$

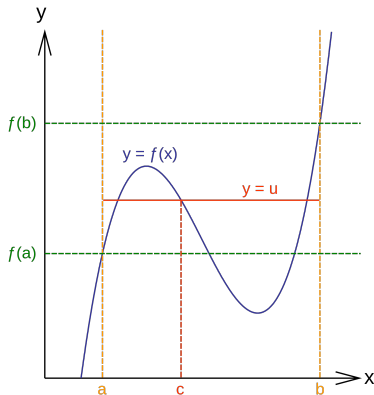
É possível garantir que essa equação tem solução?

Quando f é contínua, sim!



Teorema do valor intermediário

Se $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então para qualquer valor u entre $f(b)$ e $f(a)$ existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = u$.



Teorema de Bolzano:

Se f é uma **função contínua** e assume valores com **sinais contrários** nos extremos de um intervalo, então f tem **raiz** no interior desse intervalo.



Método da bisseção

É um *método numérico* para calcular uma *solução aproximada* para a equação $f(x) = 0$, num intervalo $[a, b]$ onde existe uma solução x^* .

Hipóteses:

$$f \in C[a, b] \quad \text{e} \quad f(a)f(b) < 0$$

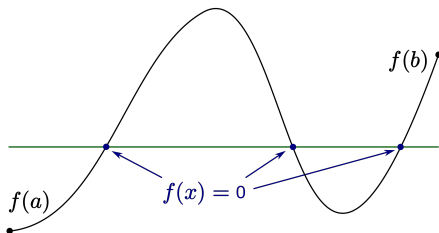


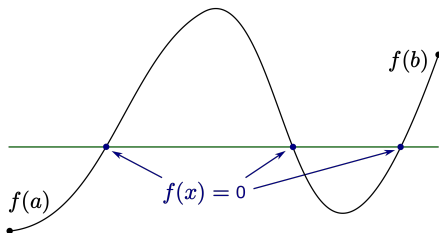
Figura obtida em https://en.wikipedia.org/wiki/Intermediate_value_theorem © ⓘ ⓘ ⓘ

Método da bisseção




É um *método numérico* para calcular uma *solução aproximada* para a equação $f(x) = 0$, num intervalo $[a, b]$ onde existe uma solução x^* .

Hipóteses:

$$f \in C[a, b] \quad \text{e} \quad f(a)f(b) < 0$$



Teorema de Bolzano \implies existe uma raiz $x^* \in (a, b)$

Figura obtida em https://en.wikipedia.org/wiki/Intermediate_value_theorem   



Método da bisseção

Ideia do método:

- Calcule o ponto médio de $[a, b]$, i.e., $x_m = (a + b)/2$
- Com base no sinal de $f(x_m)$ verifique se

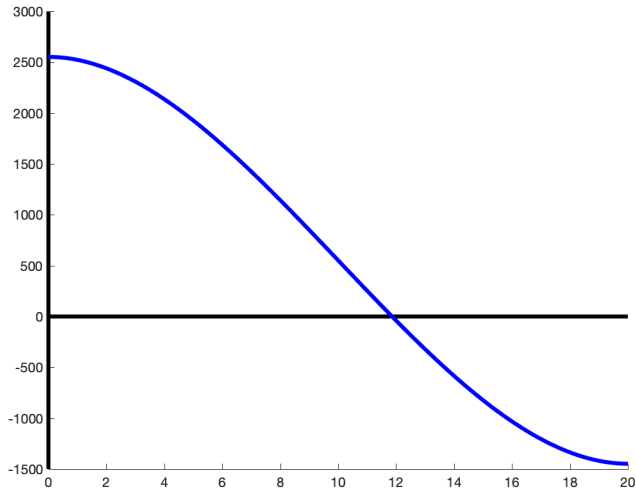
$$x^* \in [a, x_m] \text{ ou } x^* \in [x_m, b]$$

Se $f(x_m) = 0$ a raiz já foi encontrada!

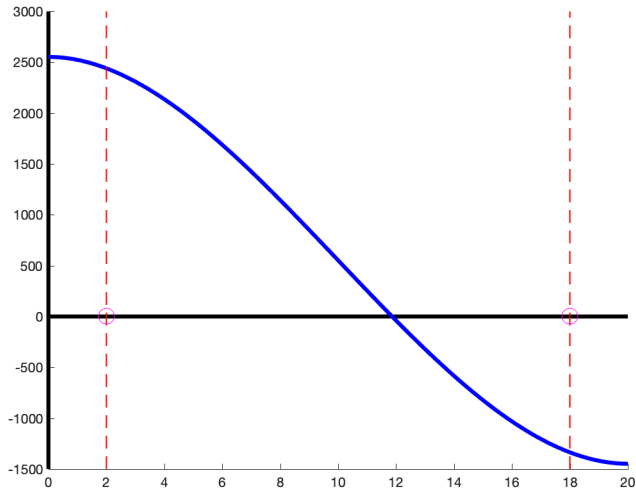
- Repita o procedimento no subintervalo que contém a raiz, até obter uma aproximação com a tolerância desejada



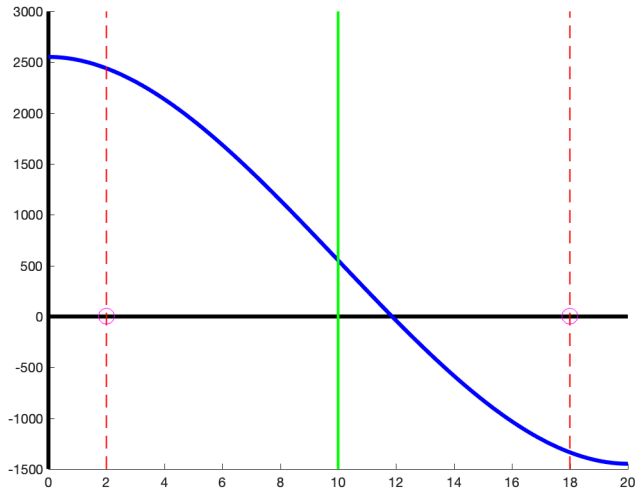
Método da bisseção



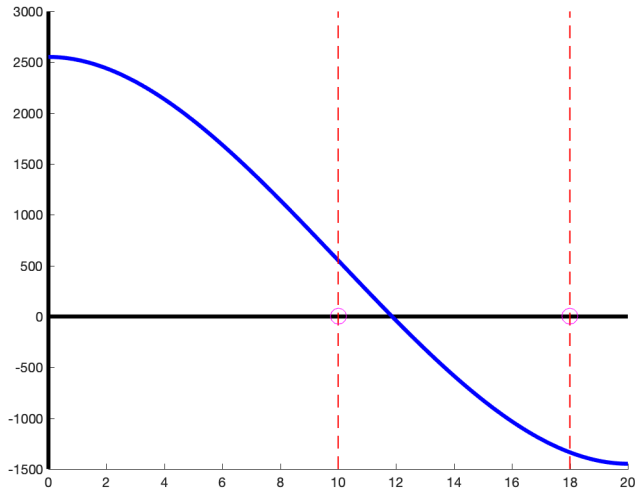
Método da bisseção



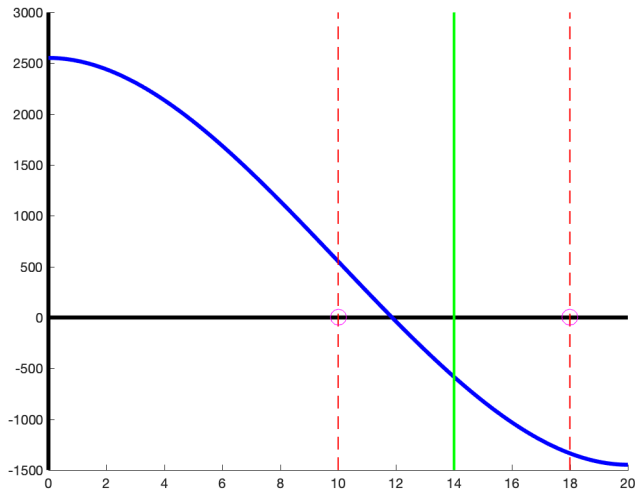
Método da bisseção



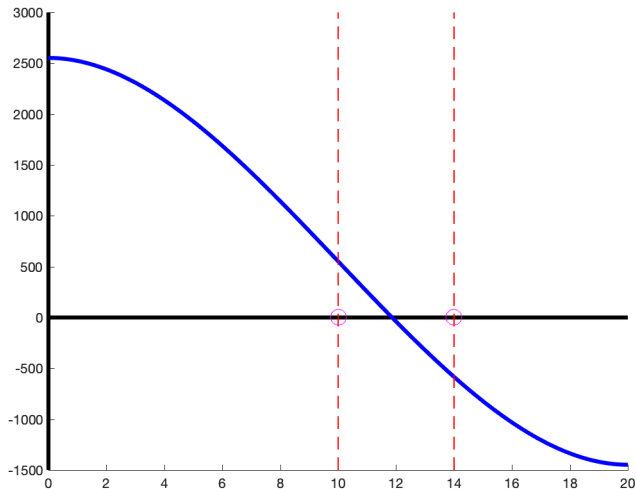
Método da bisseção



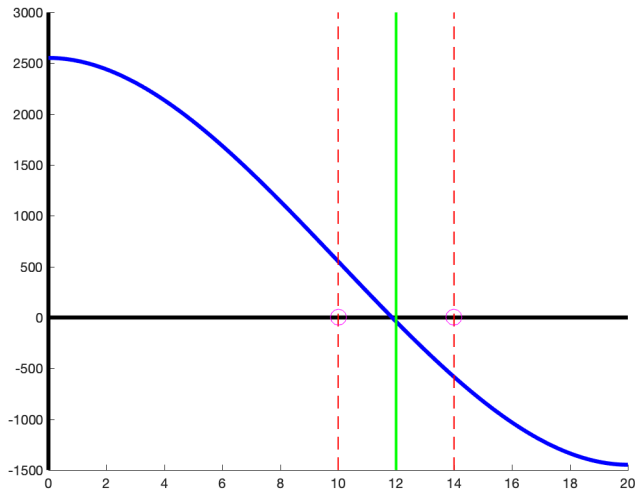
Método da bisseção



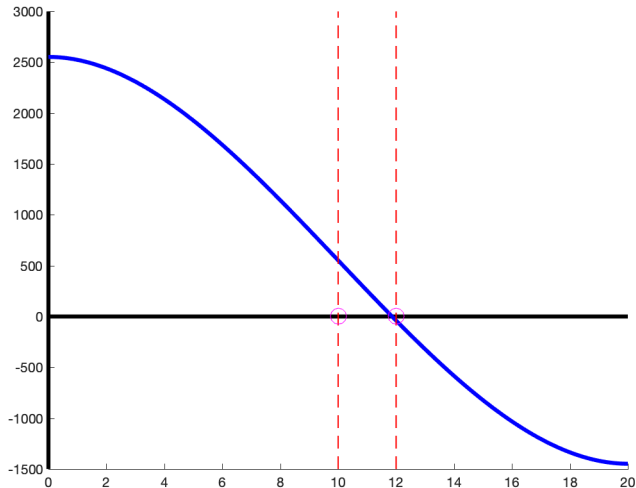
Método da biseção



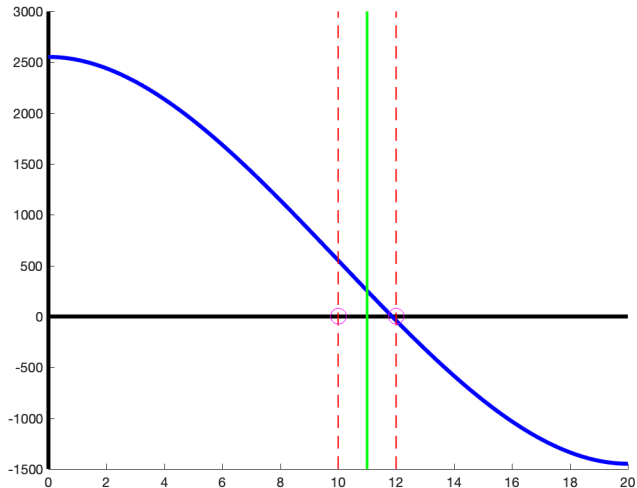
Método da bisseção



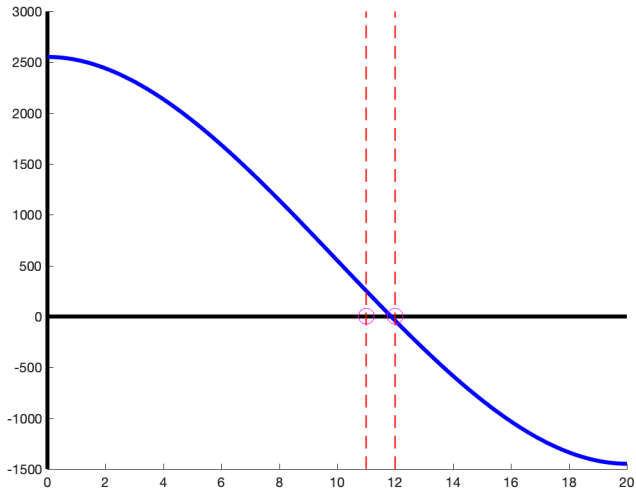
Método da bisseção



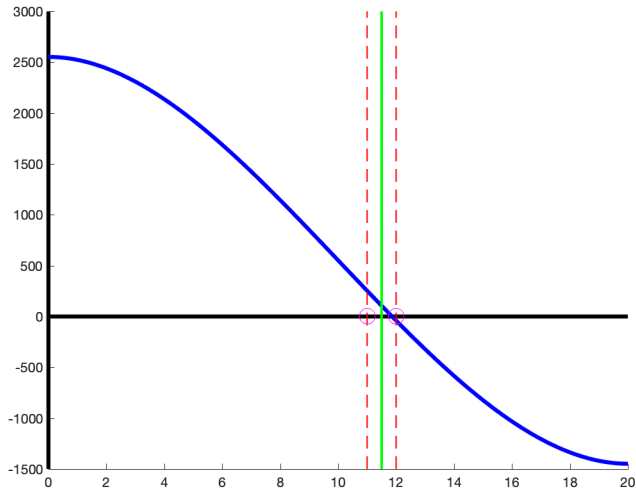
Método da biseção



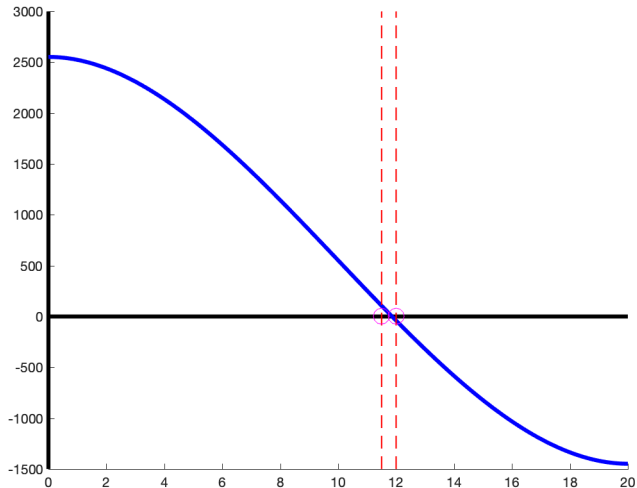
Método da bisseção



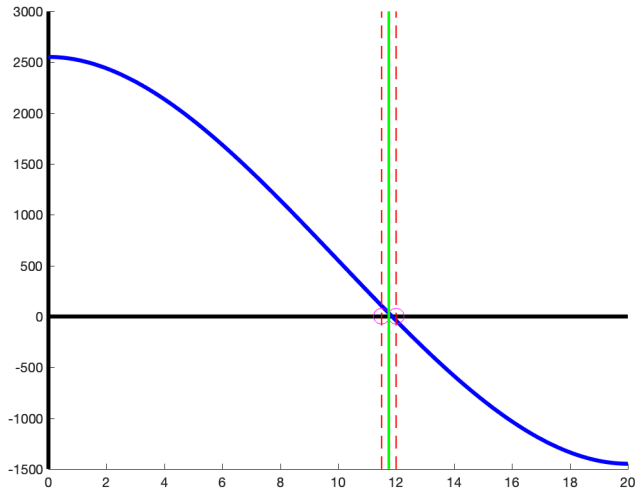
Método da bisseção



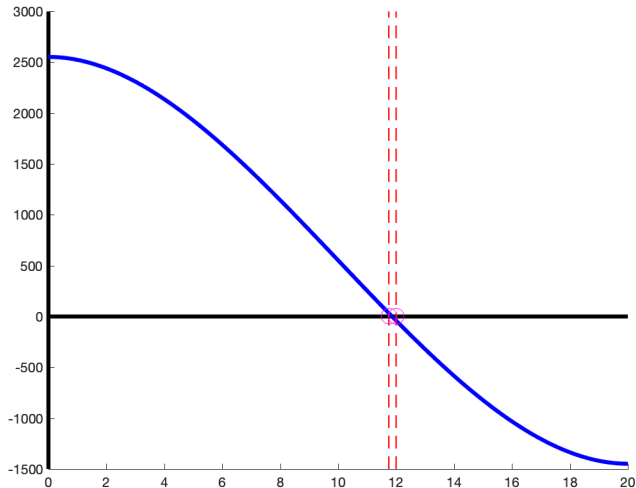
Método da bisseção



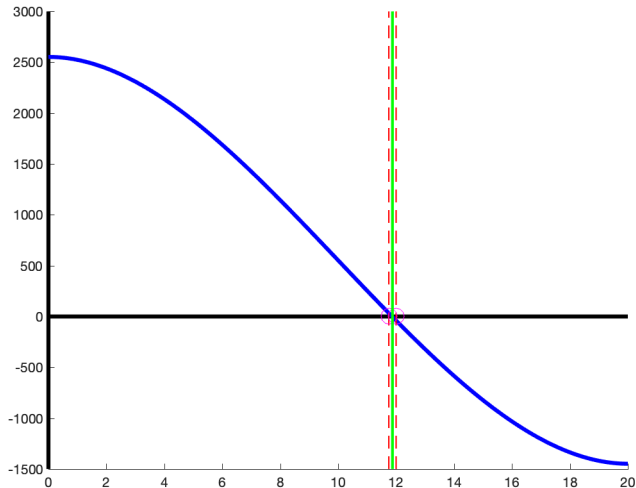
Método da bisseção



Método da bisseção



Método da bisseção



Algoritmo da biseção

Input: f , $[a, b]$, and tol

```
1: iter = 1
2:  $x_m = (a + b)/2$ 
3: Error =  $|b - a|/2$ 
4: if  $f(x_m) = 0$  or Error < tol then
5:   return
6: end if
7: while Error > tol do
8:   if  $f(a)f(x_m) < 0$  then
9:      $b = x_m$ 
10:  else
11:     $a = x_m$ 
12:  end if
13:   $x_m = (a + b)/2$ 
14:  Error =  $|b - a|/2$ 
15:  iter = iter + 1
16: end while
17: return
```

Output: x_m , iter



Implementação em GNU Octave

```
function [xm,iter] = bisection(f,a,b,tol)
    iter = 1;
    xm = 0.5*(a+b);
    Error = 0.5*abs(b-a);
    while Error > tol
        fprintf([' iter = %3d   ',...
                ' root = %.16f ',...
                'Error = %.16f \n'],iter,xm,Error);
        if f(a)*f(xm) < 0
            b = xm;
        else
            a = xm;
        end
        xm = 0.5*(a+b);
        Error = 0.5*abs(b-a);
        iter = iter + 1;
    end
    return
```



Experimento computacional 1

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$[a, b] = [0, 2]$$



```
>> a=0.0; b=2.0; tol=1.0e-9;  
>> f = @(x) x^2-2;  
>> root = bisection(f,a,b,tol);
```



Experimento computacional 2

$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552$$

$$[a, b] = [0, 20]$$



```
>> a=0.0; b=20.0; tol=1.0e-9;  
>> f = @(x) x^3 - 30*x^2 + 2552;  
>> root = bisection(f,a,b,tol);
```



Experimento computacional 3

$$f(x) = \cos(x) \cosh(x) + 1$$

$$[a, b] = [0, 3]$$




```
>> a=0.0; b=3.0; tol=1.0e-9;  
>> f = @(x) cos(x)*cosh(x)+1;  
>> root = bisection(f,a,b,tol);
```

Obs: $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$




Para pensar em casa ...

Exercício computacional:

A rotina `bisection.m` possui um *bug* que pode levar à uma falha crítica. Você consegue identificá-lo? 

Exercício computacional:

Modifique a rotina `bisection.m` para corrigir o *bug* acima e prevenir possíveis erros de entrada do usuário:

- intervalo que não contém raiz;
- tolerância não positiva. 



Fundamentação teórica

Teorema (limite para o erro do método da bisseção)

Seja f uma **função contínua** em $[a, b]$ que **muda de sinal** no interior desse intervalo, e x^* uma raiz de f em (a, b) .

O **método da bisseção** gera uma **sequência de aproximações**

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

tal que (para qualquer $n \in \mathbb{N}$):

$$|x^* - x_n| \leq \frac{|b - a|}{2^n}$$

Logo, $x_n \rightarrow x^*$ quando $n \rightarrow \infty$.



Fundamentação teórica

Teorema (limite para o erro do método da bisseção)

Seja f uma **função contínua** em $[a, b]$ que **muda de sinal** no interior desse intervalo, e x^* uma raiz de f em (a, b) .

O **método da bisseção** gera uma **sequência de aproximações**

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

tal que (para qualquer $n \in \mathbb{N}$):

$$|x^* - x_n| \leq \frac{|b - a|}{2^n}$$

Logo, $x_n \rightarrow x^*$ quando $n \rightarrow \infty$.

Pense numa demonstração para esse teorema.



Número de iterações até a “convergência”

Para que o método da bisseção produza uma aproximação tal que $|x^* - x_n| < \text{tol}$ basta escolher n de forma que

$$\frac{|b - a|}{2^n} < \text{tol}.$$



Número de iterações até a “convergência”

Para que o método da bisseção produza uma aproximação tal que $|x^* - x_n| < \text{tol}$ basta escolher n de forma que

$$\frac{|b - a|}{2^n} < \text{tol}.$$

Assim sendo, o *número de iterações até a “convergência”* é

$$n^* = \text{floor} \left(\log_2 \left(\frac{|b - a|}{\text{tol}} \right) \right).$$

Obs: $\text{floor}(\pi) = 3$.



Número de iterações até a “convergência”

Para que o método da bisseção produza uma aproximação tal que $|x^* - x_n| < \text{tol}$ basta escolher n de forma que

$$\frac{|b - a|}{2^n} < \text{tol}.$$

Assim sendo, o *número de iterações até a “convergência”* é

$$n^* = \text{floor} \left(\log_2 \left(\frac{|b - a|}{\text{tol}} \right) \right).$$

Note que esse critério depende apenas de $[a, b]$ e tol , sendo independente do computador utilizado.

Obs: $\text{floor}(\pi) = 3$.



Características do método da bisseção

- ☺ Simples e fácil de implementar
- ☺ Seguro e robusto (não falha)
- ☺ Convergência garantida (teorema)
- ☺ Requer apenas a continuidade de f
- ☹ Convergência extremamente lenta
- ☹ Difícil de generalizar para várias variáveis



Como citar esse material?

A. Cunha, *Método da Bissecção*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2020.

Essas notas de aula podem ser compartilhadas nos termos da licença Creative Commons BY-NC-ND 3.0, com propósitos exclusivamente educacionais.

