Aproximação de Funções

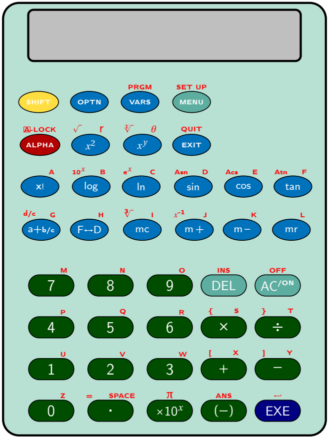
Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

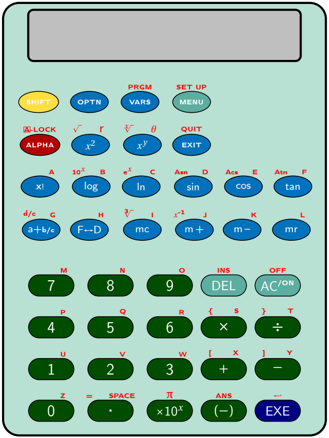
americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org

Como avaliar uma função em ponto flutuante?



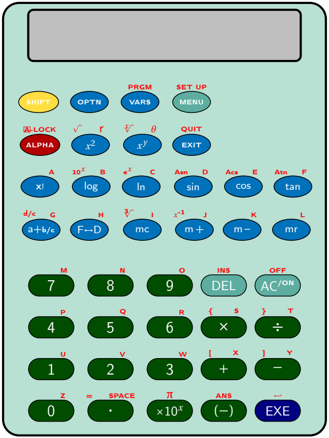
Como avaliar uma função em ponto flutuante?



- Ponto flutuante (4 operações):

$$+ \quad - \quad \times \quad /$$

Como avaliar uma função em ponto flutuante?



- Ponto flutuante (4 operações):

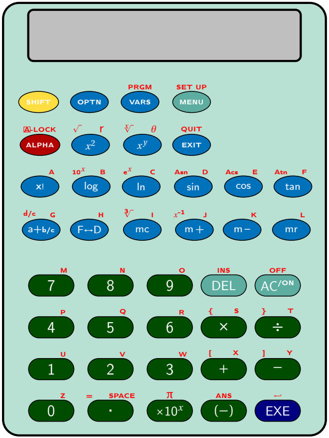
$$+ \quad - \quad \times \quad /$$

- Polinômios: **OK!**

$$3\,x^3 + 2\,x^2 + x + 1$$

```
3*x*x*x + 2*x*x + x + 1
```

Como avaliar uma função em ponto flutuante?



- Ponto flutuante (4 operações):

$$+ \quad - \quad \times \quad /$$

- Polinômios: **OK!**

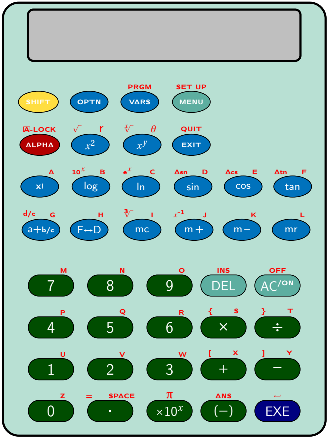
$$3\,x^3 + 2\,x^2 + x + 1$$

```
3*x*x*x + 2*x*x + x + 1
```

- E se a função não for polinomial?

  (e^x, $\sin x$, $\log x$ etc)

Como avaliar uma função em ponto flutuante?



- Ponto flutuante (4 operações):

$$+ \quad - \quad \times \quad /$$

- Polinômios: **OK!**

$$3\,x^3 + 2\,x^2 + x + 1$$

```
3*x*x*x + 2*x*x + x + 1
```

- E se a função não for polinomial?

  $(e^x,\ \sin x,\ \log x \text{ etc})$

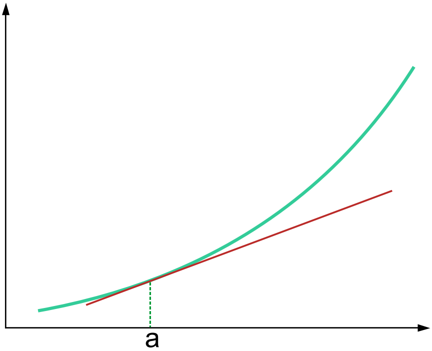
É preciso “polinomizar” a função!

Uma primeira abordagem: aproximação linear

Se x for "próximo" de a, podemos usar a *aproximação linear*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

caso a função f seja diferenciável em a.



Alguns exemplos de aproximação linear

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$

Alguns exemplos de aproximação linear

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$\boxed{e^x \approx 1 + x}$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$

Alguns exemplos de aproximação linear

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$\boxed{e^x \approx 1 + x}$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

$$\boxed{\sin x \approx x}$$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$

Alguns exemplos de aproximação linear

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$\boxed{e^x \approx 1 + x}$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

$$\boxed{\sin x \approx x}$$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$

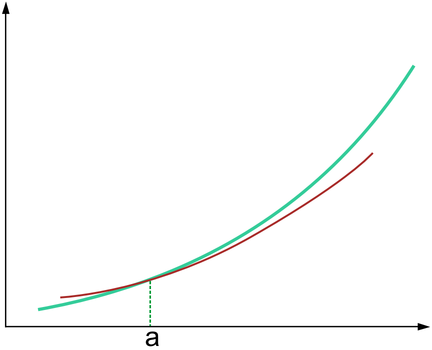
$$\boxed{\ln x \approx x - 1}$$

Uma segunda abordagem: aproximação quadrática

Se x for "próximo" de a, podemos usar a *aproximação quadrática*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{1}{2}\,f''(a)\,(x-a)^2$$

caso a função f seja duas vezes diferenciável em a.



Alguns exemplos de aproximação quadrática

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$

Alguns exemplos de aproximação quadrática

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$

Alguns exemplos de aproximação quadrática

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

$$\sin x \approx x$$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$

Alguns exemplos de aproximação quadrática

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

$$\sin x \approx x$$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$

$$\ln x \approx x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

Uma abordagem mais geral: aproximação de ordem k

Se x for "próximo" de a, podemos usar a *aproximação de ordem k*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

caso a função f seja k vezes diferenciável em a.

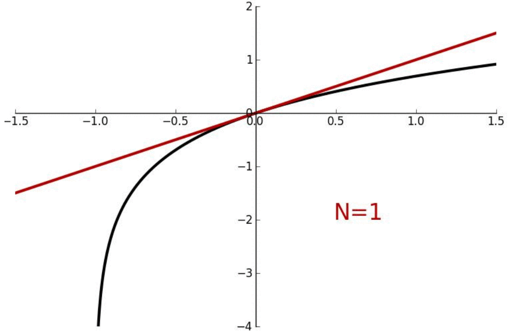


Figura obtida em: https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series

Uma abordagem mais geral: aproximação de ordem k

Se x for "próximo" de a, podemos usar a *aproximação de ordem k*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

caso a função f seja k vezes diferenciável em a.

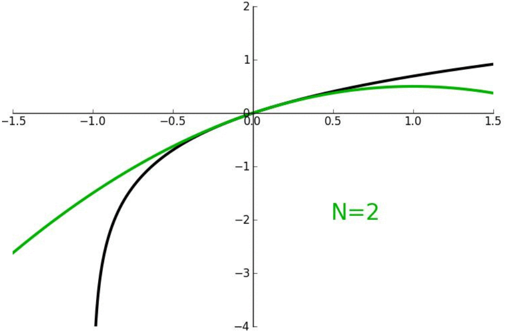


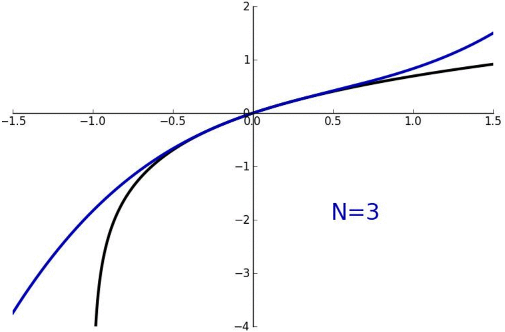
Figura obtida em: https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series

Uma abordagem mais geral: aproximação de ordem k

Se x for "próximo" de a, podemos usar a *aproximação de ordem k*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

caso a função f seja k vezes diferenciável em a.



Uma abordagem mais geral: aproximação de ordem k

Se x for "próximo" de a, podemos usar a *aproximação de ordem k*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

caso a função f seja k vezes diferenciável em a.

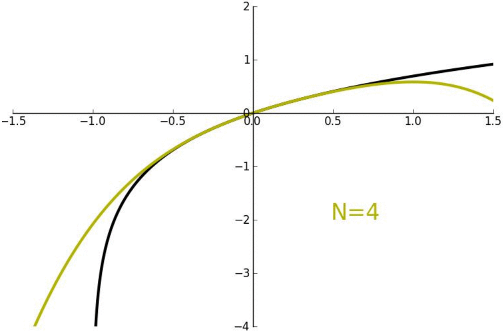


Figura obtida em: https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series

Uma abordagem mais geral: aproximação de ordem k

Se x for "próximo" de a, podemos usar a *aproximação de ordem k*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

caso a função f seja k vezes diferenciável em a.

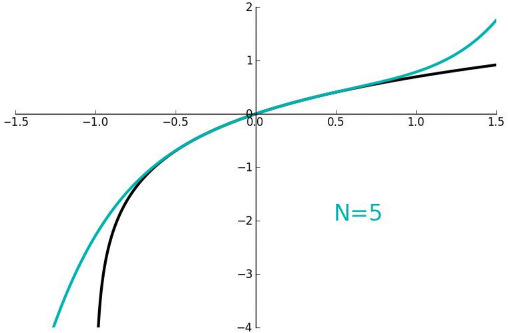


Figura obtida em: https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series

Alguns exemplos de aproximação de ordem k

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$

Alguns exemplos de aproximação de ordem k

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$

Alguns exemplos de aproximação de ordem k

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!}x^k,\ k \text{ ímpar}$$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$

Alguns exemplos de aproximação de ordem k

- $f(x) = e^x$ e $a = 0$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$$

- $f(x) = \sin x$ e $a = 0$

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!}x^k, \ k \text{ ímpar}$$

- $f(x) = \ln x$ e $a = 1$

$$\ln x \approx x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$$

Experimento computacional 1

```
clc; clear

f = @(x) exp(x);
x = -2:0.1:2; y = f(x);
Nx = length(x); k = 5;

T = zeros(k+1,Nx); T(1,:) = ones(1,Nx);
for n=2:k+1
    T(n,:) = T(n-1,:) + x.^(n-1) / factorial(n-1);
end

plot(x,y,'-k','linewidth',3);
hold on
for n=1:k+1
    plot(x,T(n,:),'linewidth',1.5);
end
hold off
set(gca,'fontsize', 22)
```

Experimento computacional 2

```
clc; clear

syms x

f = exp(x);
a = 0;

taylor(f, x, a, 'order', 6)
```

```
ans =

x^5/120 + x^4/24 + x^3/6 + x^2/2 + x + 1
```

Fundamentação teórica para essas aproximações

Teorema (Fórmula de Taylor)

Se f é uma função $k+1$ vezes diferenciável em (a, x), então

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k + Erro(x, a)$$

onde o erro da aproximação é dado por

$$Erro(x, a) = \frac{f^{k+1}(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$$

para $\xi \in (a, x)$.

Essa equação é conhecida como *fórmula de Taylor*.

Interpretando a fórmula de Taylor

Para uma função duas vezes diferenciável, temos

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)\,(x-a)}_{\textit{aproximação linear}} + \underbrace{\frac{1}{2}\, f''(\xi)\,(x-a)^2}_{\textit{erro}}$$

para $\xi \in (a, x)$.

- O erro da aproximação linear é proporcional ao quadrado da distância entre x e a, i.e., $Erro(x, a) \sim (x-a)^2$
- A constante de proporcionalidade depende da segunda derivada de f, i.e., $Erro(x, a)/(x-a)^2 = constante(f'')$

Algumas observações

- Existem muitas outras técnicas para aproximar uma função por um polinômio (Hermite, Legrende etc). Cada uma usa um tipo diferente de base para construir o aproximante;
- A aproximação de Taylor é a técnica mais simples do ponto de vista conceitual, mas em geral é a mais lenta (precisa de mais termos para ter uma boa aproximação);
- Mesmo sendo lenta, Taylor é a técnica mais utilizada para se desenvolver teorias de aproximação em física e outras áreas;
- Em geral, calculadoras e ambientes de computação científica (e.g. GNU Octave) usam uma técnica chamada aproximação de Padé, que utiliza funções racionais (razão entre polinômios).

Para pensar em casa ...

Exercício teórico:

Considere a função $f(x) = \cos x$ e o ponto $a = 0$.

- Calcule a aproximação linear de f em torno de a
- Calcule a aproximação quadrática de f em torno de a
- Calcule a aproximação de ordem k de f em torno de a
- Quais são os respectivos erros de aproximação?

Exercício computacional:

Implemente no GNU Octave uma rotina computacional que calcule o valor de $f(x) = \cos x$ com pelo menos 5 casas decimais de precisão.

Como citar esse material?

A. Cunha, *Aproximação de Funções*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.