Método da Bisseção

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org

$$f(x) = 0$$

É possível garantir que essa equação tem solução?

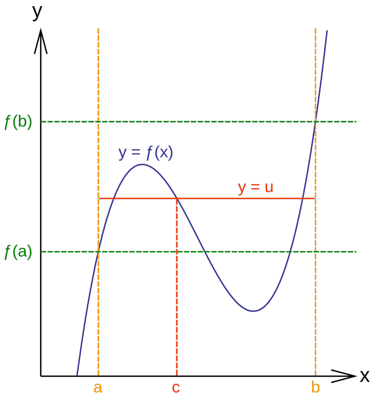
$$f(x) = 0$$

É possível garantir que essa equação tem solução?

Quando f é contínua, sim!

Teorema do valor intermediário

Se $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então para qualquer valor u entre $f(b)$ e $f(a)$ existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = u$.



Teorema de Bolzano:
Se f é uma função contínua e assume valores com sinais contrários nos extremos de um intervalo, então f tem raiz no interior desse intervalo.

Método da bisseção

É um *método numérico* para calcular uma *solução aproximada* para a equação $f(x) = 0$ num intervalo $[a, b]$, onde existe uma solução x^*.

Hipóteses:

$$f \in C[a, b] \quad \text{e} \quad f(a)\,f(b) < 0$$

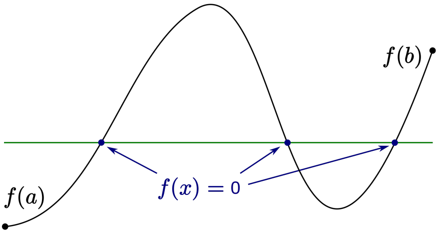


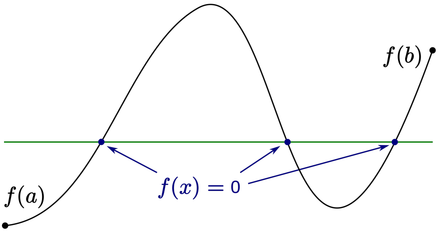
Figura obtida em https://en.wikipedia.org/wiki/Intermediate_value_theorem

Método da bisseção

É um *método numérico* para calcular uma *solução aproximada* para a equação $f(x) = 0$ num intervalo $[a, b]$, onde existe uma solução x^*.

Hipóteses:

$$f \in C[a, b] \quad \text{e} \quad f(a)\,f(b) < 0$$



Teorema de Bolzano $\Longrightarrow$ existe uma raiz $x^* \in (a, b)$

Figura obtida em https://en.wikipedia.org/wiki/Intermediate_value_theorem

Método da bisseção

Ideia do método:

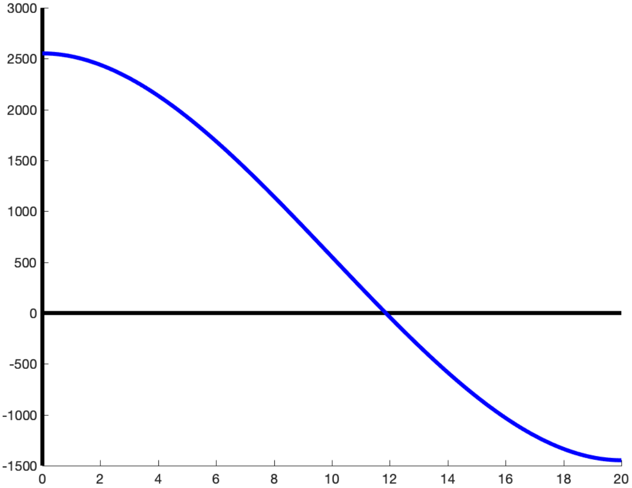
- Calcule o ponto médio de $[a, b]$, i.e., $x_m = (a + b)/2$;
- Com base no sinal de $f(x_m)$ verifique se

$$x^* \in [a, x_m] \text{ ou } x^* \in [x_m, b];$$

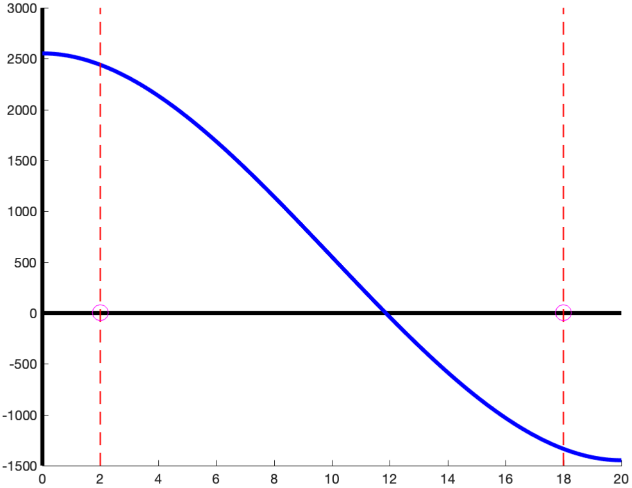
Se $f(x_m) = 0$ a raiz já foi encontrada!

- Repita o procedimento no subintervalo que contém a raiz, até obter uma aproximação com a tolerância desejada.

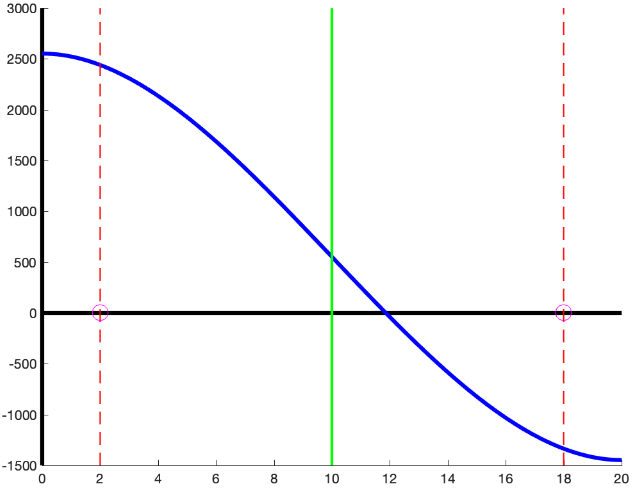
Método da bisseção



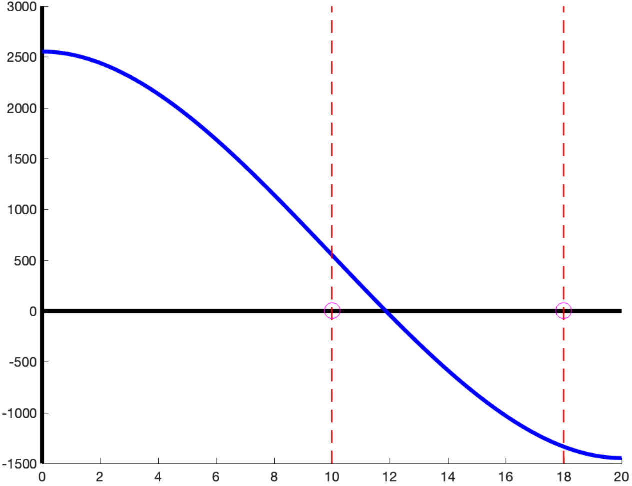
Método da bisseção



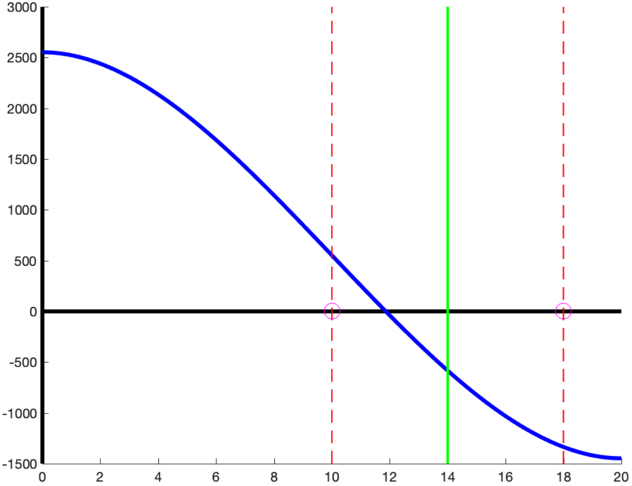
Método da bisseção



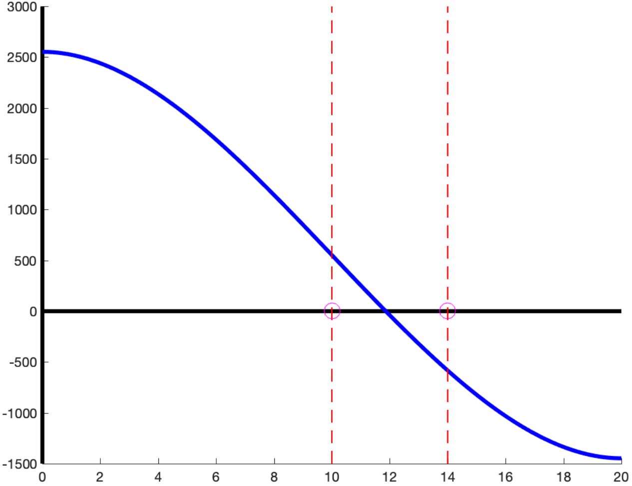
Método da bisseção



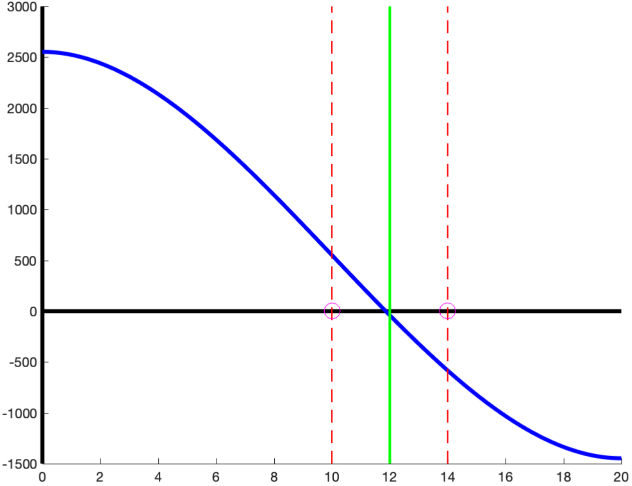
Método da bisseção



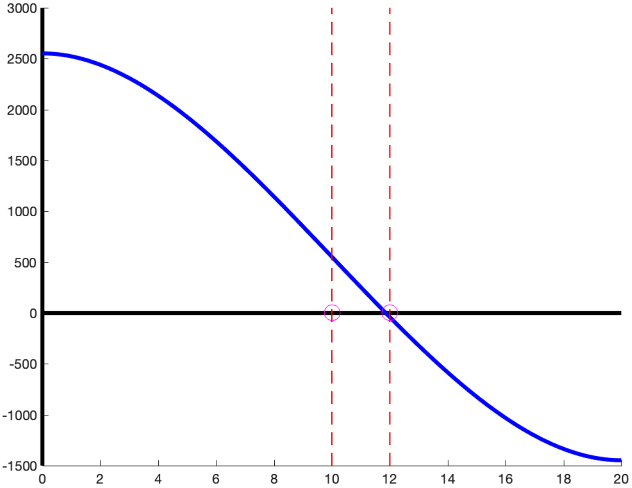
Método da bisseção



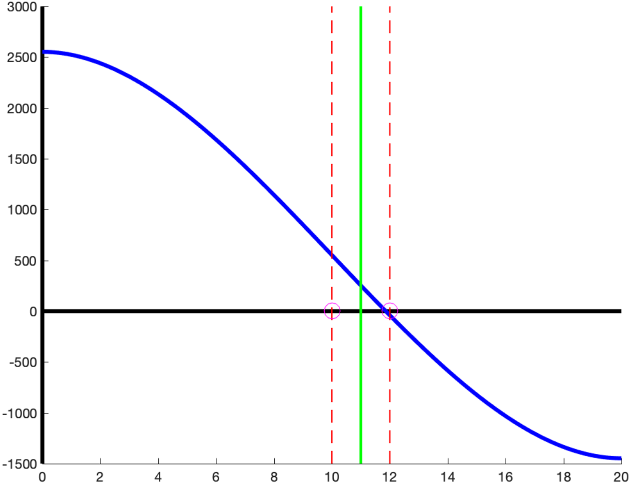
Método da bisseção



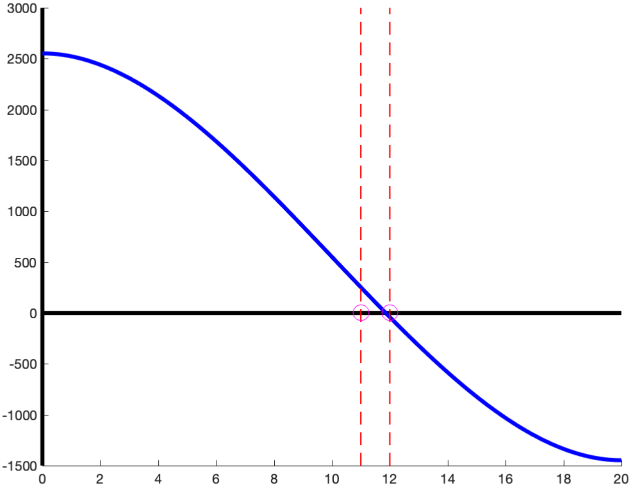
Método da bisseção



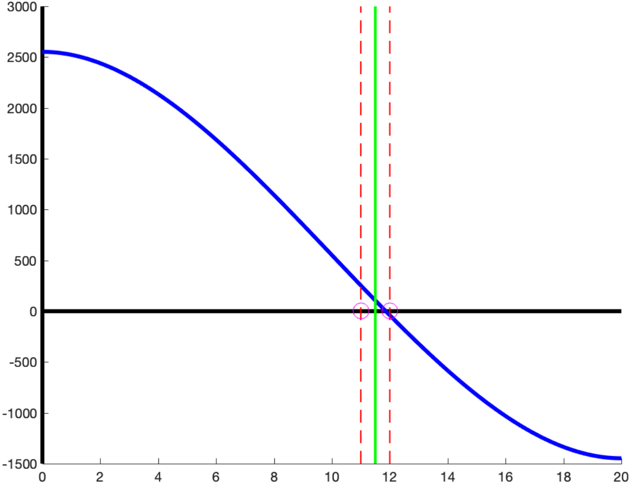
Método da bisseção



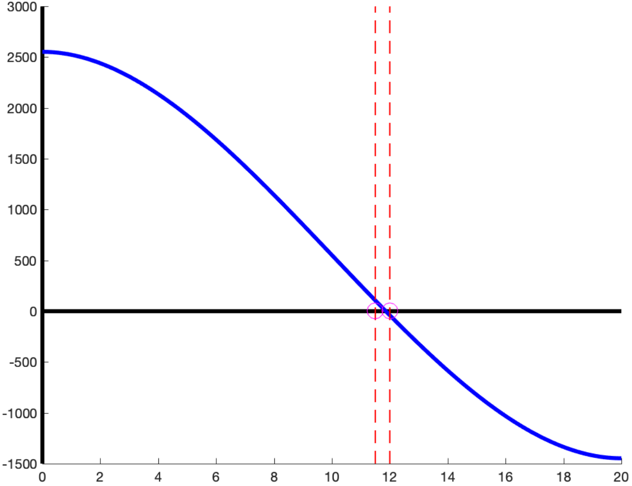
Método da bisseção



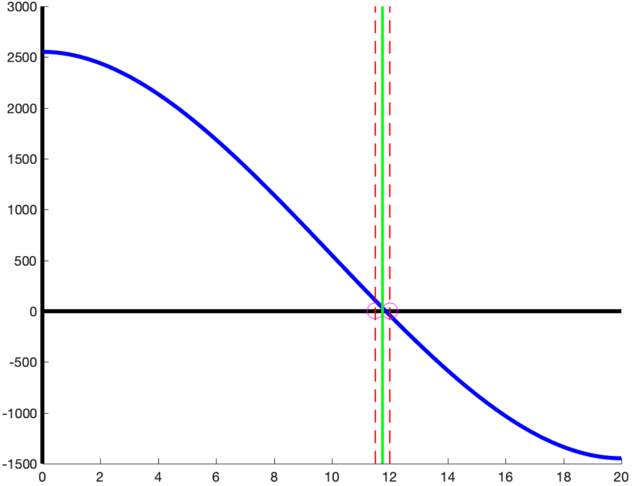
Método da bisseção



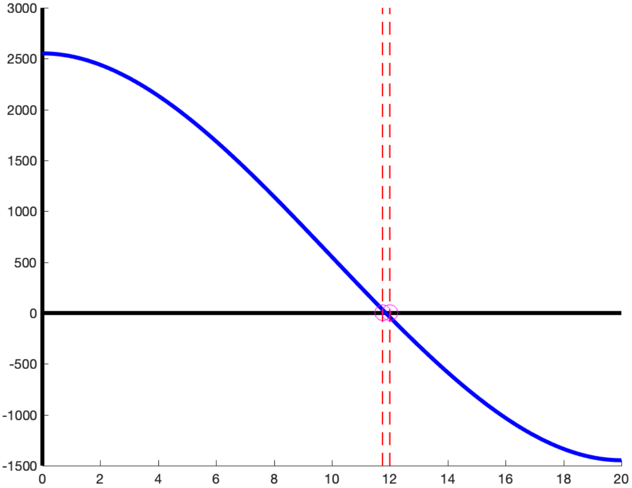
Método da bisseção



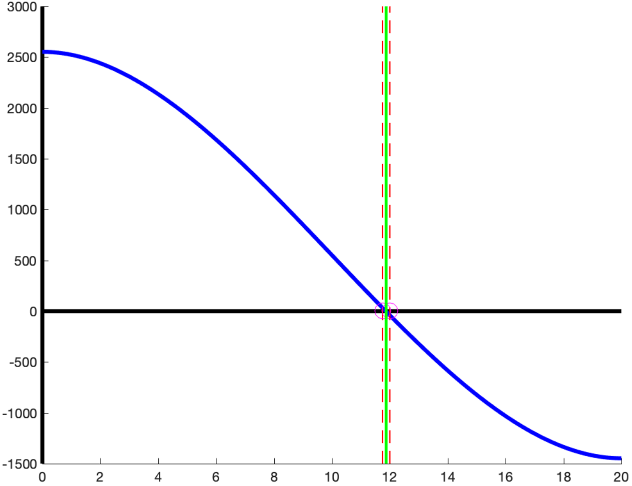
Método da bisseção



Método da bisseção



Método da bisseção



Algoritmo da bisseção

Input: f, $[a, b]$, and $\texttt{tol}$

$\texttt{iter} = 1$
$x_m = (a + b)/2$
$\texttt{Error} = |b - a|/2$
if $f(x_m) = 0$ **or** $\texttt{Error} < \texttt{tol}$ **then**
    return
end if
while $\texttt{Error} > \texttt{tol}$ **do**
    if $f(a)\,f(x_m) < 0$ **then**
        $b = x_m$
    else
        $a = x_m$
    end if
    $x_m = (a + b)/2$
    $\texttt{Error} = |b - a|/2$
    $\texttt{iter} = \texttt{iter} + 1$
end while
return

Output: x_m, $\texttt{iter}$

Implementação em GNU Octave

```
function [xm,iter] = bisection(f,a,b,tol)
    iter = 1;
      xm = 0.5*(a+b);
   Error = 0.5*abs(b-a);
   while Error > tol
      fprintf([' iter = %3d    ',...
               ' root = %.16f ',...
               'Error = %.16f \n'],iter,xm,Error);
      if f(a)*f(xm) < 0
         b = xm;
      else
         a = xm;
      end
         xm = 0.5*(a+b);
      Error = 0.5*abs(b-a);
       iter = iter + 1;
   end
end
```

Experimento computacional 1

$f(x) = x^2 - 2$

$[a, b] = [0, 2]$

```
>>  a=0.0; b=2.0; tol=1.0e-9;
>>  f = @(x) x^2-2;
>>  root = bisection(f,a,b,tol);
```

Experimento computacional 2

$f(x) = x^3 - 30\,x^2 + 2552$

$[a, b] = [0, 20]$

```
>> a=0.0; b=20.0; tol=1.0e-9;
>> f = @(x) x^3 - 30*x^2 + 2552;
>> root = bisection(f,a,b,tol);
```

Experimento computacional 3

$f(x) = \cos(x) \cosh(x) + 1$

$[a, b] = [0, 3]$

```
>> a=0.0; b=3.0; tol=1.0e-9;
>> f = @(x) cos(x)*cosh(x)+1;
>> root = bisection(f,a,b,tol);
```

Obs: $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$

Para pensar em casa ...

Exercício computacional:

A rotina `bisection.m` possui um *bug* que pode levar à uma falha crítica. Você consegue identificá-lo?

Exercício computacional:

Modifique a rotina `bisection.m` para corrigir o *bug* acima e previnir possíveis erros de entrada do usuário:

- intervalo que não contém raiz;
- tolerância não positiva.

Fundamentação teórica

Teorema (limite para o erro do método da bisseção)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ que muda de sinal no interior desse intervalo, e x^* uma raiz de f em (a, b).

O método da bisseção gera uma sequência de aproximações

$$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$$

tal que (para qualquer $n \in \mathbb{N}$):

$$|x^* - x_n| \leq \frac{|b-a|}{2^n}$$

Logo, $x_n \to x^*$ quando $n \to \infty$.

Fundamentação teórica

Teorema (limite para o erro do método da bisseção)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ que muda de sinal no interior desse intervalo, e x^* uma raiz de f em (a, b).

O método da bisseção gera uma sequência de aproximações

$$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$$

tal que (para qualquer $n \in \mathbb{N}$):

$$|x^* - x_n| \leq \frac{|b-a|}{2^n}$$

Logo, $x_n \to x^*$ quando $n \to \infty$.

Pense numa demonstração para esse teorema.

Número máximo de iterações até a "convergência"

Para que o método da bisseção produza uma aproximação tal que $|x^* - x_n| < \texttt{tol}$, basta escolher n de forma que

$$\frac{|b-a|}{2^n} < \texttt{tol}.$$

Número máximo de iterações até a "convergência"

Para que o método da bisseção produza uma aproximação tal que $|x^* - x_n| < \texttt{tol}$, basta escolher n de forma que

$$\frac{|b-a|}{2^n} < \texttt{tol}.$$

Assim sendo, o *número máximo de iterações até a "convergência"* é

$$n^* = \texttt{ceil}\left(\log_2\left(\frac{|b-a|}{\texttt{tol}}\right)\right).$$

Obs: $\texttt{ceil}(\pi) = 4$.

Número máximo de iterações até a "convergência"

Para que o método da bisseção produza uma aproximação tal que $|x^* - x_n| < \texttt{tol}$, basta escolher n de forma que

$$\frac{|b-a|}{2^n} < \texttt{tol}.$$

Assim sendo, o *número máximo de iterações até a "convergência"* é

$$n^* = \texttt{ceil}\left(\log_2\left(\frac{|b-a|}{\texttt{tol}}\right)\right).$$

Note que esse critério depende apenas de $[a, b]$ e $\texttt{tol}$, sendo independente do computador utilizado.

Obs: $\texttt{ceil}(\pi) = 4$.

Características do método da bisseção

- ☺ Simples e fácil de implementar
- ☺ Seguro e robusto (não falha)
- ☺ Convergência garantida (teorema)
- ☺ Requer apenas a continuidade de f
- ☹ Convergência extremamente lenta
- ☹ Difícil de generalizar para várias variáveis

Como citar esse material?

A. Cunha, *Método da Bisseção*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2020.