

Decomposição Cholesky e outras Fatorações Matriciais

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org



@AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr



A decomposição LU de uma matriz simétrica não é simétrica!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_U$$



A decomposição LU de uma matriz simétrica não é simétrica!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_U$$

É possível simetrizar essa fatoração?



A decomposição LU de uma matriz simétrica não é simétrica!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_U$$

É possível simetrizar essa fatoração?

Existe um caso especial onde a resposta é afirmativa!



Simetrizando a fatoração LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A$$



Simetrizando a fatoração LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_U$$



Simetrizando a fatoração LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^T}$$



Simetrizando a fatoração LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A$$

=

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^T}$$



Simetrizando a fatoração LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{G^T}$$

Simetrizando a fatoração LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{G^T}$$

Essa simetrização é possível desde que a matriz simétrica também seja **positiva definida**, i.e., $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, para qualquer $\mathbf{x} \neq 0$.



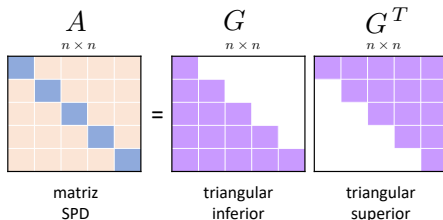
Fundamentação teórica

Teorema (existência e unicidade da fatoração Cholesky)

Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz **simétrica positiva definida (SPD)**, então ela admite uma única fatoração

$$A = G G^T,$$

onde $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz **triangular inferior com diagonal principal positiva**.



Vantagens da fatoração Cholesky

- Como a matriz do sistema é simétrica positiva definida, não é necessário usar nenhuma estratégia de pivotamento;
- Menor custo de memória para armazenar o sistema linear, em comparação a um sistema “cheio” não simétrico

$$\text{mem}(\text{sistema SPD}) = n(n+1)/2 + 2n$$

- Tempo de processamento duas vezes menor, em comparação à fatoração LU, para realizar a triangularização

$$\text{flops}(\text{Cholesky}) \sim \frac{1}{3} n^3$$



Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix}$$



Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$



Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21} g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31} g_{11} & g_{31} g_{21} + g_{32} g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$



Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21} g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31} g_{11} & g_{31} g_{21} + g_{32} g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$g_{11}^2 = 4$$



Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21} g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31} g_{11} & g_{31} g_{21} + g_{32} g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$g_{11}^2 = 4 \Rightarrow g_{11} = 2$$



Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21} g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31} g_{11} & g_{31} g_{21} + g_{32} g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 4 \Rightarrow g_{11} = 2 \\ g_{21} g_{11} &= 12 \end{aligned}$$



Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \\ g_{21} g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31} g_{11} & g_{31} g_{21} + g_{32} g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix} \quad \text{simétrica}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 4 \Rightarrow g_{11} = 2 \\ g_{21} g_{11} &= 12 \Rightarrow g_{21} = 6 \end{aligned}$$



Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21} g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31} g_{11} & g_{31} g_{21} + g_{32} g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 4 \Rightarrow g_{11} = 2 \\ g_{21} g_{11} &= 12 \Rightarrow g_{21} = 6 \\ g_{31} g_{11} &= -16 \end{aligned}$$



Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21} g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31} g_{11} & g_{31} g_{21} + g_{32} g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 4 \Rightarrow g_{11} = 2 \\ g_{21} g_{11} &= 12 \Rightarrow g_{21} = 6 \\ g_{31} g_{11} &= -16 \Rightarrow g_{31} = -8 \end{aligned}$$



Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21} g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31} g_{11} & g_{31} g_{21} + g_{32} g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 4 \Rightarrow g_{11} = 2 \\ g_{21} g_{11} &= 12 \Rightarrow g_{21} = 6 \\ g_{31} g_{11} &= -16 \Rightarrow g_{31} = -8 \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 &= 37 \end{aligned}$$



Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21} g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31} g_{11} & g_{31} g_{21} + g_{32} g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 4 \Rightarrow g_{11} = 2 \\ g_{21} g_{11} &= 12 \Rightarrow g_{21} = 6 \\ g_{31} g_{11} &= -16 \Rightarrow g_{31} = -8 \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 &= 37 \Rightarrow g_{22} = 1 \end{aligned}$$



Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21} g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31} g_{11} & g_{31} g_{21} + g_{32} g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 4 \Rightarrow g_{11} = 2 \\ g_{21} g_{11} &= 12 \Rightarrow g_{21} = 6 \\ g_{31} g_{11} &= -16 \Rightarrow g_{31} = -8 \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 &= 37 \Rightarrow g_{22} = 1 \\ g_{31} g_{21} + g_{32} g_{22} &= -43 \end{aligned}$$



Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21} g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31} g_{11} & g_{31} g_{21} + g_{32} g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 4 \Rightarrow g_{11} = 2 \\ g_{21} g_{11} &= 12 \Rightarrow g_{21} = 6 \\ g_{31} g_{11} &= -16 \Rightarrow g_{31} = -8 \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 &= 37 \Rightarrow g_{22} = 1 \\ g_{31} g_{21} + g_{32} g_{22} &= -43 \Rightarrow g_{32} = 5 \end{aligned}$$



Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \\ g_{21} g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31} g_{11} & g_{31} g_{21} + g_{32} g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix} \quad \text{simétrica}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 4 \Rightarrow g_{11} = 2 \\ g_{21} g_{11} &= 12 \Rightarrow g_{21} = 6 \\ g_{31} g_{11} &= -16 \Rightarrow g_{31} = -8 \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 &= 37 \Rightarrow g_{22} = 1 \\ g_{31} g_{21} + g_{32} g_{22} &= -43 \Rightarrow g_{32} = 5 \\ g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 &= 98 \end{aligned}$$



Como calcular a fatoração Cholesky?


$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21} g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31} g_{11} & g_{31} g_{21} + g_{32} g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 4 \Rightarrow g_{11} = 2 \\ g_{21} g_{11} &= 12 \Rightarrow g_{21} = 6 \\ g_{31} g_{11} &= -16 \Rightarrow g_{31} = -8 \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 &= 37 \Rightarrow g_{22} = 1 \\ g_{31} g_{21} + g_{32} g_{22} &= -43 \Rightarrow g_{32} = 5 \\ g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 &= 98 \Rightarrow g_{33} = 3 \end{aligned}$$



Para pensar em casa ...

Exercício computacional:

Pense num algoritmo eficiente (em termos de processamento e uso de memória) para implementar a fatoração Cholesky. Implemente esse algoritmo no ambiente GNU Octave. 



Experimento Computacional 1

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$



```
>> A = [4 12 -16; 12 37 -43; -16 -43 98]
>> G = chol(A)
>> A-G'*G
```

Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$



Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G G^T \mathbf{x} = \mathbf{b}$$



Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G \underbrace{G^T}_{\mathbf{y}} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$



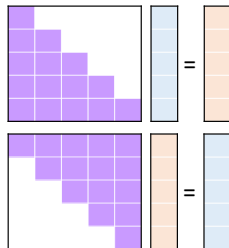
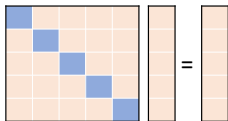
Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G \underbrace{G^T \mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} G\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ G^T \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$



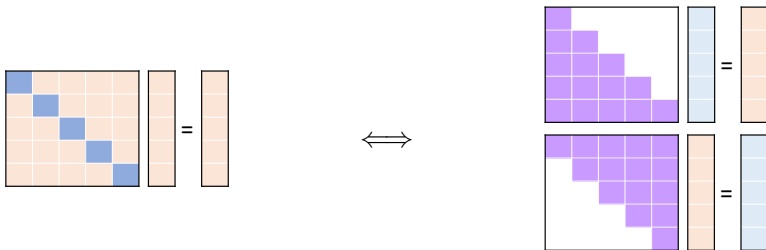
Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G \underbrace{G^T \mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} G\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ G^T \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$



Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

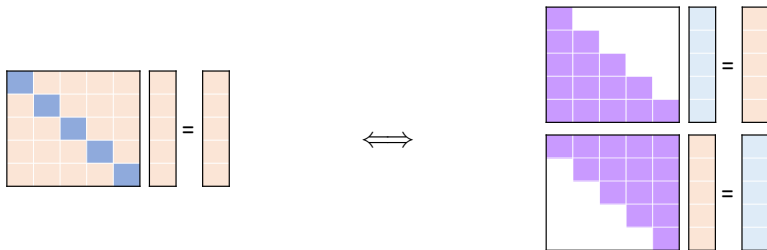
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G \underbrace{G^T \mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} G\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ G^T \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$



1. Calcular a fatoração $A = G G^T$;
2. Resolver por substituição progressiva $G\mathbf{y} = \mathbf{b}$;
3. Resolver por substituição regressiva $G^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G \underbrace{G^T \mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} G\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ G^T \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$



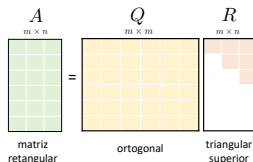
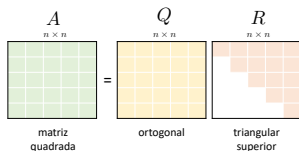
1. Calcular a fatoração $A = G G^T$;
2. Resolver por substituição progressiva $G\mathbf{y} = \mathbf{b}$;
3. Resolver por substituição regressiva $G^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

$$\text{flops}(\text{sistema via Cholesky}) \sim \frac{1}{3} n^3 + 2 n^2$$



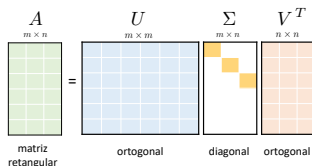
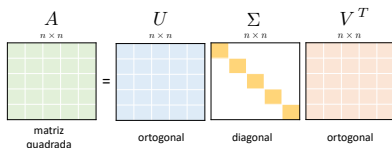
Outras fatorações matriciais

Decomposição QR



Uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita **ortogonal** se $Q Q^T = Q^T Q = I$, i.e., $Q^{-1} = Q^T$

Decomposição SVD



Experimento Computacional 2

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix}$$



```
> > A = [4 12 -16; 12 37 -43; -16 -43 98]
> > [Q,R] = qr(A)
> > A-Q*R
> > [U,Sigma,V] = svd(A)
> > A-U*Sigma*V'
```

Outras estratégias de solução para sistemas lineares



Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR



Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$



Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ QR\mathbf{x} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$



Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ QR\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ R\mathbf{x} &= Q^T\mathbf{b} \end{aligned}$$



Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ QR\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ R\mathbf{x} &= Q^T\mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} R & \mathbf{x} & Q^T & \mathbf{b} \\ n \times n & n \times 1 & n \times n & n \times 1 \end{matrix}$$

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ QR\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ R\mathbf{x} &= Q^T\mathbf{b} \end{aligned}$$

The diagram shows the equation $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$ with matrix dimensions indicated above each term:

- R is $n \times n$ (represented by an orange square with a diagonal band).
- \mathbf{x} is $n \times 1$ (represented by a green vertical rectangle).
- Q^T is $n \times n$ (represented by a yellow square).
- \mathbf{b} is $n \times 1$ (represented by a gray vertical rectangle).

The equation is shown as $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$ with an equals sign between the two sides.

Decomposição SVD

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ QR\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ R\mathbf{x} &= Q^T\mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} R & \mathbf{x} & Q^T & \mathbf{b} \\ n \times n & n \times 1 & n \times n & n \times 1 \end{matrix}$$

Decomposição SVD

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ QR\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ R\mathbf{x} &= Q^T\mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} R & \mathbf{x} & Q^T & \mathbf{b} \\ n \times n & n \times 1 & n \times n & n \times 1 \end{matrix}$$

Decomposição SVD

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ U\Sigma V^T\mathbf{x} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ QR\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ R\mathbf{x} &= Q^T\mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} R & \mathbf{x} & Q^T & \mathbf{b} \\ n \times n & n \times 1 & n \times n & n \times 1 \end{matrix}$$

Decomposição SVD

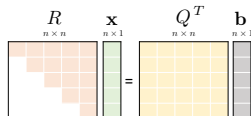
$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ U\Sigma V^T\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \Sigma V^T\mathbf{x} &= U^T\mathbf{b} \end{aligned}$$



Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ QR\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ R\mathbf{x} &= Q^T \mathbf{b} \end{aligned}$$



Decomposição SVD

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ U\Sigma V^T \mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \Sigma V^T \mathbf{x} &= U^T \mathbf{b} \\ V^T \mathbf{x} &= \Sigma^{-1} U^T \mathbf{b} \end{aligned}$$



Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ QR\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ R\mathbf{x} &= Q^T \mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} R & \mathbf{x} & Q^T & \mathbf{b} \\ n \times n & n \times 1 & n \times n & n \times 1 \end{matrix}$$

Decomposição SVD

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ U\Sigma V^T \mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \Sigma V^T \mathbf{x} &= U^T \mathbf{b} \\ V^T \mathbf{x} &= \Sigma^{-1} U^T \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= V \Sigma^{-1} U^T \mathbf{b} \end{aligned}$$



Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ QR\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ R\mathbf{x} &= Q^T\mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} R & \mathbf{x} & Q^T & \mathbf{b} \\ n \times n & n \times 1 & n \times n & n \times 1 \end{matrix}$$

Decomposição SVD

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ U\Sigma V^T\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \Sigma V^T\mathbf{x} &= U^T\mathbf{b} \\ V^T\mathbf{x} &= \Sigma^{-1}U^T\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= V\Sigma^{-1}U^T\mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} \mathbf{x} & V & \Sigma^{-1} & U^T & \mathbf{b} \\ n \times 1 & n \times n & n \times n & n \times n & n \times 1 \end{matrix}$$

Comparação entre alguns métodos diretos

fatoração	flops	estabilidade	custo
LU	$\sim \frac{2}{3} n^3$	★	1 × \$
LUP	$\sim \frac{2}{3} n^3$	★★	1 × \$
Cholesky	$\sim \frac{1}{3} n^3$	★★★	1/2 × \$
QR	$\sim \frac{4}{3} n^3$	★★★★	2 × \$
SVD	$\sim 13n^3$	★★★★★	20 × \$



Como resolver sistemas lineares no GNU Octave?

Resolver um sistema linear no GNU Octave é tão simples quanto

$$x = A \setminus b$$

O comando “\” (backslash) é um atalho para chamar um algoritmo bem robusto para solução de sistemas lineares. Tal algoritmo faz uma análise prévia da estrutura da matriz A , para então usar a melhor técnica de solução disponível para o sistema em questão.



```
> > A = [4 12 -16; 12 37 -43; -16 -43 98]
> > b = [1; 1; 1]
> > x = A \ b
```



Como citar esse material?

A. Cunha, *Decomposição Cholesky e outras Fatorações Matriciais*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.



Essas notas de aula podem ser compartilhadas nos termos da licença Creative Commons BY-NC-ND 3.0, com propósitos exclusivamente educacionais.

