M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

M2202

Analyse et méthodes numériques
Suites - Fonctions - Approximations

Aurélie Nemours (1954)

1 Plan

2 Rappels

3 Suites

4 Séries

Sans titre, Franois MORELLET, né en 1926

Egalités, inégalités

Egalités remarquables

Egalités, inégalités

Egalités remarquables

a et b sont des réels.

$$1)\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Egalités, inégalités

Egalités remarquables

a et b sont des réels.

$$1)\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$2)\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Egalités, inégalités

Egalités remarquables

a et b sont des réels.

$$
\begin{array}{l}
1)\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\
2)\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\
3)\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2
\end{array}
$$

Egalités, inégalités

Egalités remarquables

a et b sont des réels.

$$\begin{array}{rl} 1) & (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ 2) & (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ 3) & (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \end{array}$$

Formule du binôme

Egalités, inégalités

Egalités remarquables

a et b sont des réels.

$$1)\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$2)\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$3)\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Valeur absolue

Valeur absolue

Valeur absolue

Valeur absolue

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0,\ |a| = -a \text{ si } a \leq 0.$$

Valeur absolue

Valeur absolue

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0, \; |a| = -a \text{ si } a \leq 0.$$

Racine carrée

Valeur absolue

Valeur absolue

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0, \; |a| = -a \text{ si } a \leq 0.$$

Racine carrée

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Valeur absolue

Valeur absolue

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0,\ |a| = -a \text{ si } a \leq 0.$$

Racine carrée

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Inégalité

Valeur absolue

Valeur absolue

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0,\ |a| = -a \text{ si } a \leq 0.$$

Racine carrée

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Inégalité

$$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b \ (b \geq 0)$$

Valeur absolue

Valeur absolue

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0,\ |a| = -a \text{ si } a \leq 0.$$

Racine carrée

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Inégalité

$$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b \ (b \geq 0)$$

Inégalités triangulaires

Valeur absolue

Valeur absolue

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0,\ |a| = -a \text{ si } a \leq 0.$$

Racine carrée

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Inégalité

$$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b \ (b \geq 0)$$

Inégalités triangulaires

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

Valeur approchée

Valeur approchée

Valeur approchée

Valeur approchée

a, a' et ϵ sont des réels, $\epsilon > 0$.
a' est une valeur approchée de a par défaut à ϵ près si $a' \leq a < a' + \epsilon$.

Valeur approchée

Valeur approchée

a, a' et ϵ sont des réels, $\epsilon > 0$.
a' est une valeur approchée de a par défaut à ϵ près si $a' \leq a < a' + \epsilon$.
a' est une valeur approchée de a par excès à ϵ près si $a' - \epsilon < a \leq a'$.

Valeur approchée

Valeur approchée

a, a' et ϵ sont des réels, $\epsilon > 0$.
a' est une valeur approchée de a par défaut à ϵ près si $a' \leq a < a' + \epsilon$.
a' est une valeur approchée de a par excès à ϵ près si $a' - \epsilon < a \leq a'$.
a' est une valeur approchée de a à ϵ près si $a' - \epsilon < a < a' + \epsilon$.

Valeur approchée

Valeur approchée

a, a' et ϵ sont des réels, $\epsilon > 0$.
a' est une valeur approchée de a par défaut à ϵ près si $a' \leq a < a' + \epsilon$.
a' est une valeur approchée de a par excès à ϵ près si $a' - \epsilon < a \leq a'$.
a' est une valeur approchée de a à ϵ près si $a' - \epsilon < a < a' + \epsilon$.
Autre formulation : $|a - a'| < \epsilon$.

Valeur approchée

Exemple

Valeur approchée

Exemple

$\pi = 3,1415...$

Valeur approchée

Exemple

$\pi = 3,1415...$
$3,14$ est une valeur approchée de π par défaut à 10^{-2} près :
$3,14 \leq \pi < 3,14 + 10^{-2}$.

Valeur approchée

Exemple

$\pi = 3,1415...$

$3,14$ est une valeur approchée de π par défaut à 10^{-2} près :

$3,14 \leq \pi < 3,14 + 10^{-2}$.

$3,15$ est une valeur approchée de π par excès à 10^{-2} près :

$3,15 - 10^{-2} < \pi \leq 3,15$.

Valeur approchée

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Exemple

$\pi = 3,1415...$
$3,14$ est une valeur approchée de π par défaut à 10^{-2} près :
$3,14 \leq \pi < 3,14 + 10^{-2}$.
$3,15$ est une valeur approchée de π par excès à 10^{-2} près :
$3,15 - 10^{-2} < \pi \leq 3,15$.
$3,14$ est une valeur approchée de π à 10^{-2} près :
$3,14 - 10^{-2} < \pi < 3,14 + 10^{-2}$.

Partie entière

Définition

Partie entière

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Définition

Pour tout réel x, il existe un unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$.

Partie entière

Définition

Pour tout réel x, il existe un unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$.
n est appelé partie entière de x et noté $E(x)$ ou $[x]$.

Partie entière

Définition

Pour tout réel x, il existe un unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$.
n est appelé partie entière de x et noté $E(x)$ ou $[x]$.

Exemple

Partie entière

Définition

Pour tout réel x, il existe un unique entier n tel que $n \leq x < n+1$.
n est appelé partie entière de x et noté $E(x)$ ou $[x]$.

Exemple

$[3] = 3 : 3 \leq x < 3+1$.

Partie entière

Définition

Pour tout réel x, il existe un unique entier n tel que $n \leq x < n+1$.
n est appelé partie entière de x et noté $E(x)$ ou $[x]$.

Exemple

$[3] = 3 : 3 \leq x < 3+1.$
$[\pi] = 3 : 3 \leq \pi < 3+1.$

Partie entière

Définition

Pour tout réel x, il existe un unique entier n tel que $n \leq x < n+1$.
n est appelé partie entière de x et noté $E(x)$ ou $[x]$.

Exemple

$[3] = 3 : \ 3 \leq x < 3+1.$
$[\pi] = 3 : \ 3 \leq \pi < 3+1.$
$[-3] = -3 : \ -3 \leq x < -3+1.$

Partie entière

Définition

Pour tout réel x, il existe un unique entier n tel que $n \leq x < n+1$.
n est appelé partie entière de x et noté $E(x)$ ou $[x]$.

Exemple

$[3] = 3 : 3 \leq x < 3+1.$
$[\pi] = 3 : 3 \leq \pi < 3+1.$
$[-3] = -3 : -3 \leq x < -3+1.$
$[-\pi] = -4 : -4 \leq -\pi < -4+1.$

Majorant, minorant

Définition

Majorant, minorant

Définition

Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Majorant, minorant

Définition

Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Un majorant de $\mathcal{P}$ est un réel M tel que $\forall x \in \mathcal{P}\ x \leq M$.

Majorant, minorant

Définition

Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Un majorant de $\mathcal{P}$ est un réel M tel que $\forall x \in \mathcal{P}\ x \leq M$.
Dans ce cas, $\mathcal{P}$ est dite majorée.

Majorant, minorant

Définition

Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Un majorant de $\mathcal{P}$ est un réel M tel que $\forall x \in \mathcal{P}\ x \leq M$.
Dans ce cas, $\mathcal{P}$ est dite majorée.
Un minorant de $\mathcal{P}$ est un réel m tel que $\forall x \in \mathcal{P}\ m \leq x$.

Majorant, minorant

Définition

Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Un majorant de $\mathcal{P}$ est un réel M tel que $\forall x \in \mathcal{P}\ x \leq M$.
Dans ce cas, $\mathcal{P}$ est dite majorée.
Un minorant de $\mathcal{P}$ est un réel m tel que $\forall x \in \mathcal{P}\ m \leq x$.
Dans ce cas, $\mathcal{P}$ est dite minorée.

Majorant, minorant

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Définition

Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Un majorant de $\mathcal{P}$ est un réel M tel que $\forall x \in \mathcal{P}\ x \leq M$.
Dans ce cas, $\mathcal{P}$ est dite majorée.
Un minorant de $\mathcal{P}$ est un réel m tel que $\forall x \in \mathcal{P}\ m \leq x$.
Dans ce cas, $\mathcal{P}$ est dite minorée.
Si $\mathcal{P}$ est majorée et minorée, $\mathcal{P}$ est dite bornée.

Majorant, minorant

Définition

Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Un majorant de $\mathcal{P}$ est un réel M tel que $\forall x \in \mathcal{P}\ x \leq M$.
Dans ce cas, $\mathcal{P}$ est dite majorée.
Un minorant de $\mathcal{P}$ est un réel m tel que $\forall x \in \mathcal{P}\ m \leq x$.
Dans ce cas, $\mathcal{P}$ est dite minorée.
Si $\mathcal{P}$ est majorée et minorée, $\mathcal{P}$ est dite bornée.

Exemple

Majorant, minorant

Définition

Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Un majorant de $\mathcal{P}$ est un réel M tel que $\forall x \in \mathcal{P}\ x \leq M$.
Dans ce cas, $\mathcal{P}$ est dite majorée.
Un minorant de $\mathcal{P}$ est un réel m tel que $\forall x \in \mathcal{P}\ m \leq x$.
Dans ce cas, $\mathcal{P}$ est dite minorée.
Si $\mathcal{P}$ est majorée et minorée, $\mathcal{P}$ est dite bornée.

Exemple

$$\mathcal{P} = \left\{ \frac{1}{n}\ ,\ n > 0 \right\}$$

Majorant, minorant

Définition

Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Un majorant de $\mathcal{P}$ est un réel M tel que $\forall x \in \mathcal{P}\ x \leq M$.
Dans ce cas, $\mathcal{P}$ est dite majorée.
Un minorant de $\mathcal{P}$ est un réel m tel que $\forall x \in \mathcal{P}\ m \leq x$.
Dans ce cas, $\mathcal{P}$ est dite minorée.
Si $\mathcal{P}$ est majorée et minorée, $\mathcal{P}$ est dite bornée.

Exemple

$$\mathcal{P} = \left\{ \frac{1}{n}\ ,\ n > 0 \right\}$$

$\mathcal{P}$ est majorée par 1 et minorée par 0.

Majorant, minorant

Définition

Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Un majorant de $\mathcal{P}$ est un réel M tel que $\forall x \in \mathcal{P}\ x \leq M$.
Dans ce cas, $\mathcal{P}$ est dite majorée.
Un minorant de $\mathcal{P}$ est un réel m tel que $\forall x \in \mathcal{P}\ m \leq x$.
Dans ce cas, $\mathcal{P}$ est dite minorée.
Si $\mathcal{P}$ est majorée et minorée, $\mathcal{P}$ est dite bornée.

Exemple

$$\mathcal{P} = \left\{ \frac{1}{n}\ ,\ n > 0 \right\}$$

$\mathcal{P}$ est majorée par 1 et minorée par 0.
$\mathcal{P}$ est donc bornée.

Borne supérieure, borne inférieure

Définition

Borne supérieure, borne inférieure

Définition

Si l'ensemble des majorants de $\mathcal{P}$ admet un plus petit élément, il est appelé borne supérieure de $\mathcal{P}$.

Borne supérieure, borne inférieure

Définition

Si l'ensemble des majorants de $\mathcal{P}$ admet un plus petit élément, il est appelé borne supérieure de $\mathcal{P}$.
Notation : $\sup \mathcal{P}$.

Borne supérieure, borne inférieure

Définition

Si l'ensemble des majorants de $\mathcal{P}$ admet un plus petit élément, il est appelé borne supérieure de $\mathcal{P}$.
Notation : $\sup \mathcal{P}$.
Si l'ensemble des minorants de $\mathcal{P}$ admet un plus grand élément, il est appelé borne inférieure de $\mathcal{P}$.

Borne supérieure, borne inférieure

Définition

Si l'ensemble des majorants de $\mathcal{P}$ admet un plus petit élément, il est appelé borne supérieure de $\mathcal{P}$.
Notation : $\sup \mathcal{P}$.
Si l'ensemble des minorants de $\mathcal{P}$ admet un plus grand élément, il est appelé borne inférieure de $\mathcal{P}$.
Notation : $\inf \mathcal{P}$.

Borne supérieure, borne inférieure

Exemple

Borne supérieure, borne inférieure

Exemple

$$\mathcal{P} = \left\{ \frac{1}{n} \; , \; n > 0 \right\}.$$

Borne supérieure, borne inférieure

Exemple

$$\mathcal{P} = \left\{ \frac{1}{n} \ ,\ n > 0 \right\}.$$

$\sup \mathcal{P} = 1$ et $\inf \mathcal{P} = 0$.

Borne supérieure, borne inférieure

Exemple

$\mathcal{P} = \left\{ \frac{1}{n} \ , \ n > 0 \right\}$.

$\sup \mathcal{P} = 1$ et $\inf \mathcal{P} = 0$.

En effet, $\forall n > 0 \ \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1 \in \mathcal{P}$.

Borne supérieure, borne inférieure

Exemple

$\mathcal{P} = \left\{ \frac{1}{n} \ , \ n > 0 \right\}$.

$\sup \mathcal{P} = 1$ et $\inf \mathcal{P} = 0$.

En effet, $\forall n > 0 \ \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1 \in \mathcal{P}$.

$\forall n > 0 \ \frac{1}{n} \geq 0$: 0 est un minorant de $\mathcal{P}$.

Borne supérieure, borne inférieure

Exemple

$\mathcal{P} = \left\{ \dfrac{1}{n} \ , \ n > 0 \right\}$.

$\sup \mathcal{P} = 1$ et $\inf \mathcal{P} = 0$.

En effet, $\forall n > 0 \ \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{1} = 1 \in \mathcal{P}$.

$\forall n > 0 \ \dfrac{1}{n} \geq 0$: 0 est un minorant de $\mathcal{P}$.

Montrons que c'est le plus grand.

Borne supérieure, borne inférieure

Exemple

$\mathcal{P} = \left\{ \frac{1}{n} \text{ , } n > 0 \right\}$.

$\sup \mathcal{P} = 1$ et $\inf \mathcal{P} = 0$.

En effet, $\forall n > 0 \ \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1 \in \mathcal{P}$.

$\forall n > 0 \ \frac{1}{n} \geq 0$: 0 est un minorant de $\mathcal{P}$.

Montrons que c'est le plus grand.

Sinon, soit $\epsilon > 0$ un minorant de $\mathcal{P}$.

Borne supérieure, borne inférieure

Exemple

$\mathcal{P} = \left\{ \dfrac{1}{n} \ , \ n > 0 \right\}$.

$\sup \mathcal{P} = 1$ et $\inf \mathcal{P} = 0$.

En effet, $\forall n > 0 \ \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{1} = 1 \in \mathcal{P}$.

$\forall n > 0 \ \dfrac{1}{n} \geq 0$: 0 est un minorant de $\mathcal{P}$.

Montrons que c'est le plus grand.

Sinon, soit $\epsilon > 0$ un minorant de $\mathcal{P}$.

$\dfrac{1}{n} < \epsilon$ s'écrit $n > \dfrac{1}{\epsilon}$.

Borne supérieure, borne inférieure

Exemple

$\mathcal{P} = \left\{ \frac{1}{n} \;,\; n > 0 \right\}$.

$\sup \mathcal{P} = 1$ et $\inf \mathcal{P} = 0$.

En effet, $\forall n > 0 \; \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1 \in \mathcal{P}$.

$\forall n > 0 \; \frac{1}{n} \geq 0$: 0 est un minorant de $\mathcal{P}$.

Montrons que c'est le plus grand.

Sinon, soit $\epsilon > 0$ un minorant de $\mathcal{P}$.

$\frac{1}{n} < \epsilon$ s'écrit $n > \frac{1}{\epsilon}$.

On en déduit que si $n \geq \left[\frac{1}{\epsilon} \right] + 1$ alors $n > \frac{1}{\epsilon}$, $\frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$ et

$0 < \frac{1}{n} < \epsilon$.

Borne supérieure, borne inférieure

Exemple

$\mathcal{P} = \left\{ \frac{1}{n} \ , \ n > 0 \right\}$.

$\sup \mathcal{P} = 1$ et $\inf \mathcal{P} = 0$.

En effet, $\forall n > 0 \ \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1 \in \mathcal{P}$.

$\forall n > 0 \ \frac{1}{n} \geq 0$: 0 est un minorant de $\mathcal{P}$.

Montrons que c'est le plus grand.

Sinon, soit $\epsilon > 0$ un minorant de $\mathcal{P}$.

$\frac{1}{n} < \epsilon$ s'écrit $n > \frac{1}{\epsilon}$.

On en déduit que si $n \geq \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$ alors $n > \frac{1}{\epsilon}$, $\frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$ et

$0 < \frac{1}{n} < \epsilon$.

ϵ n'est donc pas un minorant.

Borne supérieure, borne inférieure

Propriétés

Borne supérieure, borne inférieure

Propriétés

Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure.

Borne supérieure, borne inférieure

Propriétés

Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure.
Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.

Borne supérieure, borne inférieure

Propriétés

Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure.
Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.

Exemple

Borne supérieure, borne inférieure

Propriétés

Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure.
Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.

Exemple

$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 < 2\}$

Variations d'une fonction

Fonction croissante, fonction décroissante

Variations d'une fonction

Fonction croissante, fonction décroissante

Une fonction f est dite croissante sur un intervalle I si $\forall u, v \in I$
$u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$.

Variations d'une fonction

Fonction croissante, fonction décroissante

Une fonction f est dite croissante sur un intervalle I si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$.
Une fonction f est dite décroissante sur un intervalle I si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$.

Variations d'une fonction

Fonction croissante, fonction décroissante

Une fonction f est dite croissante sur un intervalle I si $\forall u, v \in I$
$u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$.
Une fonction f est dite décroissante sur un intervalle I si $\forall u, v \in I$
$u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$.
Une fonction f est dite strictement croissante sur un intervalle I si $\forall u$,
$v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$.

Variations d'une fonction

Fonction croissante, fonction décroissante

Une fonction f est dite croissante sur un intervalle I si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$.
Une fonction f est dite décroissante sur un intervalle I si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$.
Une fonction f est dite strictement croissante sur un intervalle I si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$.
Une fonction f est dite strictement décroissante sur un intervalle I si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$.

Variations d'une fonction

Fonction croissante, fonction décroissante

Une fonction f est dite croissante sur un intervalle I si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$.
Une fonction f est dite décroissante sur un intervalle I si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$.
Une fonction f est dite strictement croissante sur un intervalle I si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$.
Une fonction f est dite strictement décroissante sur un intervalle I si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$.
Une fonction est dite monotone si elle est croissante ou décroissante, strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Variations d'une fonction

Fonction croissante, fonction décroissante

Une fonction f est dite croissante sur un intervalle I si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$.
Une fonction f est dite décroissante sur un intervalle I si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$.
Une fonction f est dite strictement croissante sur un intervalle I si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$.
Une fonction f est dite strictement décroissante sur un intervalle I si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$.
Une fonction est dite monotone si elle est croissante ou décroissante, strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
Soit c un réel. Une fonction f est dite constante sur un intervalle I si $\forall x \in I$ $f(x) = c$.

Propriétés

Exemple

Propriétés

Exemple

Soit $f(x) = x^2$.

Propriétés

Exemple

Soit $f(x) = x^2$.
$\forall u, v \in \mathbb{R}\ f(v) - f(u) = v^2 - u^2 = (v-u)(v+u)$.

Propriétés

Exemple

Soit $f(x) = x^2$.
$\forall u,\ v \in \mathbb{R}\ f(v) - f(u) = v^2 - u^2 = (v-u)(v+u)$.
Si $u < v$ alors $v - u > 0$ et

Propriétés

Exemple

Soit $f(x) = x^2$.
$\forall u, v \in \mathbb{R}\ f(v) - f(u) = v^2 - u^2 = (v-u)(v+u)$.
Si $u < v$ alors $v - u > 0$ et
- si $u \in]-\infty, 0[$ et $v \in]-\infty, 0]$ alors $v + u < 0$ et $f(v) - f(u) < 0$

Propriétés

Exemple

Soit $f(x) = x^2$.

$\forall u,\ v \in \mathbb{R}\ f(v) - f(u) = v^2 - u^2 = (v-u)(v+u)$.

Si $u < v$ alors $v - u > 0$ et

- si $u \in]-\infty, 0[$ et $v \in]-\infty, 0]$ alors $v + u < 0$ et $f(v) - f(u) < 0$

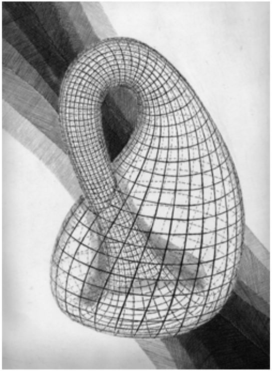
- si $u \in [0, +\infty[$ et $v \in]0, +\infty[$ alors $v + u > 0$ et $f(v) - f(u) > 0$

Propriétés

Exemple

Soit $f(x) = x^2$.
$\forall u,\ v \in \mathbb{R}\ f(v) - f(u) = v^2 - u^2 = (v-u)(v+u)$.
Si $u < v$ alors $v - u > 0$ et
- si $u \in]-\infty, 0[$ et $v \in]-\infty, 0]$ alors $v + u < 0$ et $f(v) - f(u) < 0$
- si $u \in [0, +\infty[$ et $v \in]0, +\infty[$ alors $v + u > 0$ et $f(v) - f(u) > 0$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.



Bouteille de Klein, Patrice Jeener, né en 1944

Suites

Définition d'une suite

Suites

Définition d'une suite

Une suite est une fonction réelle définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$.

Suites

Définition d'une suite

Une suite est une fonction réelle définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$.

Notations

Suites

Définition d'une suite

Une suite est une fonction réelle définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$.

Notations

Termes de la suite : $u(n) = u_n$

Suites

Définition d'une suite

Une suite est une fonction réelle définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$.

Notations

Termes de la suite : $u(n) = u_n$
Suite : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \geq 0} = (u_n)$

Suites

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Exemple 1

Suites

Exemple 1

(u_n) définie par $u_n = 2n + 3$ $(n \geq 0)$.

Suites

Exemple 1

(u_n) définie par $u_n = 2n + 3$ $(n \geq 0)$.
$u_0 = 3,\ u_1 = 5,\ u_2 = 7,\ u_3 = 9,\ \ldots$

Suites

Exemple 1

(u_n) définie par $u_n = 2n + 3$ $(n \geq 0)$.
$u_0 = 3,\ u_1 = 5,\ u_2 = 7,\ u_3 = 9,\ \ldots$

Exemple 2

Suites

Exemple 1

(u_n) définie par $u_n = 2n + 3$ $(n \geq 0)$.
$u_0 = 3, \ u_1 = 5, \ u_2 = 7, \ u_3 = 9, \ \ldots$

Exemple 2

(v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$.

Suites

Exemple 1

(u_n) définie par $u_n = 2n + 3$ $(n \geq 0)$.
$u_0 = 3,\ u_1 = 5,\ u_2 = 7,\ u_3 = 9,\ \ldots$

Exemple 2

(v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$.

$v_1 = 1,\ v_2 = \dfrac{1}{2},\ v_3 = \dfrac{1}{3},\ \ldots$

Suites

Exemple 3

Suites

Exemple 3

(w_n) définie par $w_0 = 1$, $w_n = w_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$.

Suites

Exemple 3

(w_n) définie par $w_0 = 1,\ w_n = w_{n-1} + \dfrac{1}{n!}\ (n \geq 1)$.

$w_1 = 1 + \dfrac{1}{1!},\ w_2 = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!},\ w_3 = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!},\ \ldots$

Suites

Exemple 3

(w_n) définie par $w_0 = 1,\ w_n = w_{n-1} + \dfrac{1}{n!}\ (n \geq 1)$.

$w_1 = 1 + \dfrac{1}{1!},\ w_2 = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!},\ w_3 = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!},\ \ldots$

Exemple 4

Suites

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Exemple 3

(w_n) définie par $w_0 = 1,\ w_n = w_{n-1} + \dfrac{1}{n!}\ (n \geq 1)$.

$w_1 = 1 + \dfrac{1}{1!},\ w_2 = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!},\ w_3 = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!},\ \dots$

Exemple 4

(F_n) définie par $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\ (n \geq 1)$.

Suites

Exemple 3

(w_n) définie par $w_0 = 1,\ w_n = w_{n-1} + \dfrac{1}{n!}\ (n \geq 1)$.

$w_1 = 1 + \dfrac{1}{1!},\ w_2 = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!},\ w_3 = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!},\ \ldots$

Exemple 4

(F_n) définie par $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\ (n \geq 1)$.

$F_2 = 0 + 1 = 1,\ F_3 = 1 + 1 = 2,\ F_4 = 1 + 2 = 3,\ F_5 = 2 + 3 = 5,\ \ldots$

Suite arithmétique

Quatre millions d'Américains sont au chômage en 1930, huit millions en 1931, 12 millions en 1932.

Définition

Suite arithmétique

Quatre millions d'Américains sont au chômage en 1930, huit millions en 1931, 12 millions en 1932.

Définition

a est un réel quelconque.

Suite arithmétique

Quatre millions d'Américains sont au chômage en 1930, huit millions en 1931, 12 millions en 1932.

Définition

a est un réel quelconque.
(u_n) est une suite arithmétique de raison a si pour tout $n \geq 0$
$u_{n+1} = u_n + a$.

Suite arithmétique

Quatre millions d'Américains sont au chômage en 1930, huit millions en 1931, 12 millions en 1932.

Définition

a est un réel quelconque.
(u_n) est une suite arithmétique de raison a si pour tout $n \geq 0$
$u_{n+1} = u_n + a$.
Remarque : une suite arithmétique est entièrement définie par u_0 et a.

Suite arithmétique

Quatre millions d'Américains sont au chômage en 1930, huit millions en 1931, 12 millions en 1932.

Définition

a est un réel quelconque.
(u_n) est une suite arithmétique de raison a si pour tout $n \geq 0$
$u_{n+1} = u_n + a$.
Remarque : une suite arithmétique est entièrement définie par u_0 et a.

Exemples

Suite arithmétique

Quatre millions d'Américains sont au chômage en 1930, huit millions en 1931, 12 millions en 1932.

Définition

a est un réel quelconque.
(u_n) est une suite arithmétique de raison a si pour tout $n \geq 0$
$u_{n+1} = u_n + a$.
Remarque : une suite arithmétique est entièrement définie par u_0 et a.

Exemples

(u_n) définie par $u_0 = 0$ et $a = 1$.

Suite arithmétique

Quatre millions d'Américains sont au chômage en 1930, huit millions en 1931, 12 millions en 1932.

Définition

a est un réel quelconque.
(u_n) est une suite arithmétique de raison a si pour tout $n \geq 0$
$u_{n+1} = u_n + a$.
Remarque : une suite arithmétique est entièrement définie par u_0 et a.

Exemples

(u_n) définie par $u_0 = 0$ et $a = 1$.
(u_n) définie par $u_0 = 4$ et $a = -2$.

Suite géométrique

M2202
Analyse et
méthodes
numériques

Département
Informatique
IUT de
Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Définition

Suite géométrique

Définition

a est un réel quelconque.

Suite géométrique

M2202
Analyse et
méthodes
numériques

Département
Informatique
IUT de
Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Définition

a est un réel quelconque.
(u_n) est une suite géométrique de raison a si pour tout $n \geq 0$
$u_{n+1} = a \times u_n$.

Suite géométrique

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Définition

a est un réel quelconque.
(u_n) est une suite géométrique de raison a si pour tout $n \geq 0$
$u_{n+1} = a \times u_n$.
Remarque : une suite géométrique est entièrement définie par u_0 et a.

Suite géométrique

Définition

a est un réel quelconque.
(u_n) est une suite géométrique de raison a si pour tout $n \geq 0$
$u_{n+1} = a \times u_n$.
Remarque : une suite géométrique est entièrement définie par u_0 et a.

Exemples

Suite géométrique

Définition

a est un réel quelconque.
(u_n) est une suite géométrique de raison a si pour tout $n \geq 0$
$u_{n+1} = a \times u_n$.
Remarque : une suite géométrique est entièrement définie par u_0 et a.

Exemples

(u_n) définie par $u_0 = 2$ et $a = 1$.

Suite géométrique

Définition

a est un réel quelconque.
(u_n) est une suite géométrique de raison a si pour tout $n \geq 0$
$u_{n+1} = a \times u_n$.
Remarque : une suite géométrique est entièrement définie par u_0 et a.

Exemples

(u_n) définie par $u_0 = 2$ et $a = 1$.
(u_n) définie par $u_0 = 4$ et $a = -2$.

Suite arithmético-géométrique

Définition

Suite arithmético-géométrique

Définition

a et b sont des réels quelconques ($a \neq 1$, $b \neq 0$).

Suite arithmético-géométrique

Définition

a et b sont des réels quelconques ($a \neq 1$, $b \neq 0$).
(u_n) est une suite arithmético-géométrique associée à a et b si pour tout $n \geq 0$ $u_{n+1} = a \times u_n + b$.

Suite arithmético-géométrique

Définition

a et b sont des réels quelconques ($a \neq 1$, $b \neq 0$).
(u_n) est une suite arithmético-géométrique associée à a et b si pour tout $n \geq 0$ $u_{n+1} = a \times u_n + b$.
Remarque : une suite arithmético-géométrique est entièrement définie par u_0, a et b.

Suite arithmético-géométrique

Définition

a et b sont des réels quelconques ($a \neq 1$, $b \neq 0$).
(u_n) est une suite arithmético-géométrique associée à a et b si pour tout $n \geq 0$ $u_{n+1} = a \times u_n + b$.
Remarque : une suite arithmético-géométrique est entièrement définie par u_0, a et b.

Exemples

Suite arithmético-géométrique

Définition

a et b sont des réels quelconques ($a \neq 1$, $b \neq 0$).
(u_n) est une suite arithmético-géométrique associée à a et b si pour tout $n \geq 0$ $u_{n+1} = a \times u_n + b$.
Remarque : une suite arithmético-géométrique est entièrement définie par u_0, a et b.

Exemples

(u_n) définie par $u_0 = 2$, $a = \frac{1}{2}$ et $b = 3$: $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3$.

Suite arithmético-géométrique

Définition

a et b sont des réels quelconques ($a \neq 1$, $b \neq 0$).
(u_n) est une suite arithmético-géométrique associée à a et b si pour tout $n \geq 0$ $u_{n+1} = a \times u_n + b$.
Remarque : une suite arithmético-géométrique est entièrement définie par u_0, a et b.

Exemples

(u_n) définie par $u_0 = 2$, $a = \frac{1}{2}$ et $b = 3$: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.
(u_n) définie par $u_0 = 0$, $a = -2$ et $b = 1$: $u_{n+1} = -2u_n + 1$.

Suite arithmético-géométrique

Expression de (u_n)

Suite arithmético-géométrique

Expression de (u_n)

On note α la solution de $x = ax + b$: $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.

Expression de (u_n)

On note α la solution de $x = ax + b$: $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.

On obtient alors

$$u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b(1-a)}{1-a} - \frac{b}{1-a}$$

Suite arithmético-géométrique

Expression de (u_n)

On note α la solution de $x = ax + b$: $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.

On obtient alors

$$u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b(1-a)}{1-a} - \frac{b}{1-a}$$

$$u_{n+1} - \alpha = au_n - \frac{ab}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right)$$

Suite arithmético-géométrique

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Expression de (u_n)

On note α la solution de $x = ax + b$: $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.

On obtient alors

$$u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b(1-a)}{1-a} - \frac{b}{1-a}$$

$$u_{n+1} - \alpha = au_n - \frac{ab}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right)$$

$$u_{n+1} - \alpha = a\left(u_n - \alpha\right)$$

Suite arithmético-géométrique

Expression de (u_n)

On note α la solution de $x = ax + b$: $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.

On obtient alors

$$u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b(1-a)}{1-a} - \frac{b}{1-a}$$

$$u_{n+1} - \alpha = au_n - \frac{ab}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right)$$

$$u_{n+1} - \alpha = a\left(u_n - \alpha\right)$$

La suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison a.

Suite arithmético-géométrique

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié

Plan
Rappels
Suites
Séries

Exemple

Suite arithmético-géométrique

Exemple

(u_n) définie par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$ et $u_0 = 2$.

Suite arithmético-géométrique

Exemple

(u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ et $u_0 = 2$.

$x = \frac{1}{2}x + 3$ conduit à $\alpha = 6$

Suite arithmético-géométrique

Exemple

(u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ et $u_0 = 2$.

$x = \frac{1}{2}x + 3$ conduit à $\alpha = 6$

et la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$ est géométrique de raison $a = \frac{1}{2}$: $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, $v_0 = u_0 - 6 = -4$.

Limite finie

M2202
Analyse et
méthodes
numériques

Département
Informatique
IUT de
Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Définition

Limite finie

Définition

On dit qu'une suite (u_n) admet le nombre L comme limite lorsque n tend vers l'infini si $\forall\epsilon > 0\ \exists N \geq 0\ \forall n > N\ |u_n - L| < \epsilon$.

Limite finie

Définition

On dit qu'une suite (u_n) admet le nombre L comme limite lorsque n tend vers l'infini si $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 0 \ \forall n > N \ |u_n - L| < \epsilon$.

Propriété 1

Limite finie

Définition

On dit qu'une suite (u_n) admet le nombre L comme limite lorsque n tend vers l'infini si $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \geq 0 \; \forall n > N \; |u_n - L| < \epsilon$.

Propriété 1

Si une suite (u_n) admet une limite L alors cette limite est unique.

Limite finie

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Définition

On dit qu'une suite (u_n) admet le nombre L comme limite lorsque n tend vers l'infini si $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 0\ \forall n > N\ |u_n - L| < \epsilon$.

Propriété 1

Si une suite (u_n) admet une limite L alors cette limite est unique.

Notation

Limite finie

Définition

On dit qu'une suite (u_n) admet le nombre L comme limite lorsque n tend vers l'infini si $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 0 \ \forall n > N \ |u_n - L| < \epsilon$.

Propriété 1

Si une suite (u_n) admet une limite L alors cette limite est unique.

Notation

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = L$$

Limite finie

Autre libellé

Limite finie

Autre libellé

(u_n) converge vers L; (u_n) est convergente.

Limite finie

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Autre libellé

(u_n) converge vers L; (u_n) est convergente.
Une suite qui n'admet pas de limite L est dite divergente.

Limite finie

Autre libellé

(u_n) converge vers L; (u_n) est convergente.
Une suite qui n'admet pas de limite L est dite divergente.

Propriété 2

Limite finie

Autre libellé

(u_n) converge vers L; (u_n) est convergente.
Une suite qui n'admet pas de limite L est dite divergente.

Propriété 2

Une suite convergente est bornée : $\exists M > 0\ \forall n\ |u_n| \leq M$.

Limite finie

Autre libellé

(u_n) converge vers L; (u_n) est convergente.
Une suite qui n'admet pas de limite L est dite divergente.

Propriété 2

Une suite convergente est bornée : $\exists M > 0 \; \forall n \; |u_n| \leq M$.
Autre formulation : $-M \leq u_n \leq M$.

Limite finie

Exemple : $u_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{n} \quad (n \geq 1)$

Limite finie

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Exemple : $u_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{n} \quad (n \geq 1)$

$$|u_n - 1| = \left|1 + \frac{\cos(n)}{n} - 1\right| = \left|\frac{\cos(n)}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

Limite finie

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Exemple : $u_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{n}$ $(n \geq 1)$

$$|u_n - 1| = \left|1 + \frac{\cos(n)}{n} - 1\right| = \left|\frac{\cos(n)}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \text{ car } |\cos(n)| \leq 1.$$

Limite finie

Exemple : $u_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{n}$ $(n \geq 1)$

$$|u_n - 1| = \left|1 + \frac{\cos(n)}{n} - 1\right| = \left|\frac{\cos(n)}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \text{ car } |\cos(n)| \leq 1.$$

On en déduit que si $\dfrac{1}{n} < \epsilon$,

Limite finie

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Exemple : $u_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{n} \ (n \geq 1)$

$$|u_n - 1| = \left|1 + \frac{\cos(n)}{n} - 1\right| = \left|\frac{\cos(n)}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \text{ car } |\cos(n)| \leq 1.$$

On en déduit que si $\dfrac{1}{n} < \epsilon$, c'est-à-dire $n > \dfrac{1}{\epsilon}$,

Limite finie

Exemple : $u_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{n}$ $(n \geq 1)$

$|u_n - 1| = \left|1 + \dfrac{\cos(n)}{n} - 1\right| = \left|\dfrac{\cos(n)}{n}\right| \leq \left|\dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ car $|\cos(n)| \leq 1$.

On en déduit que si $\dfrac{1}{n} < \epsilon$, c'est-à-dire $n > \dfrac{1}{\epsilon}$, alors $|u_n - 1| < \epsilon$.

Limite finie

Exemple : $u_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{n}$ $(n \geq 1)$

$$|u_n - 1| = \left|1 + \frac{\cos(n)}{n} - 1\right| = \left|\frac{\cos(n)}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \text{ car } |\cos(n)| \leq 1.$$

On en déduit que si $\dfrac{1}{n} < \epsilon$, c'est-à-dire $n > \dfrac{1}{\epsilon}$, alors $|u_n - 1| < \epsilon$.

Il suffit de prendre $N = \left[\dfrac{1}{\epsilon}\right]$ et $n > N$ s'écrit $n \geq \left[\dfrac{1}{\epsilon}\right] + 1$.

Limite finie

Exemple : $u_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{n}$ $(n \geq 1)$

$$|u_n - 1| = \left|1 + \frac{\cos(n)}{n} - 1\right| = \left|\frac{\cos(n)}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \text{ car } |\cos(n)| \leq 1.$$

On en déduit que si $\dfrac{1}{n} < \epsilon$, c'est-à-dire $n > \dfrac{1}{\epsilon}$, alors $|u_n - 1| < \epsilon$.

Il suffit de prendre $N = \left[\dfrac{1}{\epsilon}\right]$ et $n > N$ s'écrit $n \geq \left[\dfrac{1}{\epsilon}\right] + 1$.

Cas particuliers :

Limite finie

Exemple : $u_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{n}$ $(n \geq 1)$

$|u_n - 1| = \left|1 + \dfrac{\cos(n)}{n} - 1\right| = \left|\dfrac{\cos(n)}{n}\right| \leq \left|\dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ car $|\cos(n)| \leq 1$.

On en déduit que si $\dfrac{1}{n} < \epsilon$, c'est-à-dire $n > \dfrac{1}{\epsilon}$, alors $|u_n - 1| < \epsilon$.

Il suffit de prendre $N = \left\lfloor \dfrac{1}{\epsilon} \right\rfloor$ et $n > N$ s'écrit $n \geq \left\lfloor \dfrac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1$.

Cas particuliers :

pour $\epsilon = 0.05$, $\dfrac{1}{\epsilon} = 20$, $N = \left\lfloor \dfrac{1}{\epsilon} \right\rfloor = 20$.

Limite finie

Exemple : $u_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{n}$ $(n \geq 1)$

$|u_n - 1| = \left|1 + \dfrac{\cos(n)}{n} - 1\right| = \left|\dfrac{\cos(n)}{n}\right| \leq \left|\dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ car $|\cos(n)| \leq 1$.

On en déduit que si $\dfrac{1}{n} < \epsilon$, c'est-à-dire $n > \dfrac{1}{\epsilon}$, alors $|u_n - 1| < \epsilon$.

Il suffit de prendre $N = \left[\dfrac{1}{\epsilon}\right]$ et $n > N$ s'écrit $n \geq \left[\dfrac{1}{\epsilon}\right] + 1$.

Cas particuliers :

pour $\epsilon = 0.05$, $\dfrac{1}{\epsilon} = 20$, $N = \left[\dfrac{1}{\epsilon}\right] = 20$.

pour $\epsilon = 0.03$, $\dfrac{1}{\epsilon} = 33,333...$, $N = \left[\dfrac{1}{\epsilon}\right] = 33$.

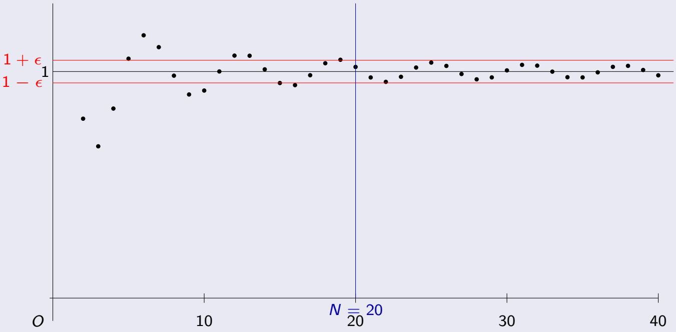
Limite finie

Exemple : $u_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{n} \quad (n \geq 1)$

Limite finie

Exemple : $u_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{n}$ $(n \geq 1)$

$\epsilon = 0.05$; $n \geq 21 \Rightarrow |u_n - 1| < \epsilon$.



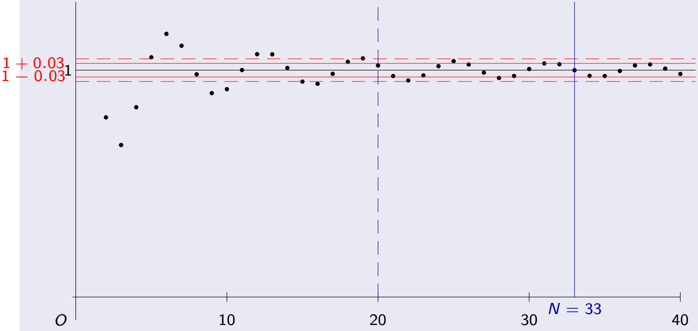
Limite finie

Exemple : $u_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{n} \quad (n \geq 1)$

Limite finie

Exemple : $u_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{n}$ $(n \geq 1)$

$\epsilon = 0.03$; $\forall n \geq 34$ $|u_n - 1| < 0.03$.



Limite finie

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Remarque

Limite finie

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Remarque

(u_n) est bornée.

Limite finie

Remarque

(u_n) est bornée.

$$\forall n \; |u_n| = \left|1 + \frac{\cos(n)}{n}\right| \leq 1 + \left|\frac{\cos(n)}{n}\right| \leq 1 + \frac{1}{1} = 2 : \; -2 \leq u_n \leq 2.$$

Suite croissante, décroissante

Définitions

Suite croissante, décroissante

Définitions

Une suite (u_n) est dite croissante si $\forall n \geq 0 \;\; u_n \leq u_{n+1}$.

Suite croissante, décroissante

Définitions

Une suite (u_n) est dite croissante si $\forall n \geq 0 \; u_n \leq u_{n+1}$.
Une suite (u_n) est dite décroissante si $\forall n \geq 0 \; u_n \geq u_{n+1}$.

Suite croissante, décroissante

Définitions

Une suite (u_n) est dite croissante si $\forall n \geq 0 \;\; u_n \leq u_{n+1}$.
Une suite (u_n) est dite décroissante si $\forall n \geq 0 \;\; u_n \geq u_{n+1}$.
Une suite (u_n) est dite strictement croissante si $\forall n \geq 0 \;\; u_n < u_{n+1}$.

Suite croissante, décroissante

Définitions

Une suite (u_n) est dite croissante si $\forall n \geq 0 \;\; u_n \leq u_{n+1}$.
Une suite (u_n) est dite décroissante si $\forall n \geq 0 \;\; u_n \geq u_{n+1}$.
Une suite (u_n) est dite strictement croissante si $\forall n \geq 0 \;\; u_n < u_{n+1}$.
Une suite (u_n) est dite strictement décroissante si $\forall n \geq 0 \;\; u_n > u_{n+1}$.

Suite croissante, décroissante

Exemple

Suite croissante, décroissante

Exemple

u_n définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$.

Suite croissante, décroissante

Exemple

u_n définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$.

$\forall n \geq 0 \; u_n \leq u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Suite croissante, décroissante

Exemple

u_n définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$.

$\forall n \geq 0$ $u_n \leq u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)!}$.

$u_1 = 1 + \dfrac{1}{1!}$, $u_2 = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!}$, $u_3 = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!}$, ...

Suite croissante, décroissante

Exemple

u_n définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$.

$\forall n \geq 0 \; u_n \leq u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$.

$u_1 = 1 + \frac{1}{1!}$, $u_2 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$, $u_3 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$, ...

Remarque

Suite croissante, décroissante

Exemple

u_n définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$.

$\forall n \geq 0 \ u_n \leq u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)!}$.

$u_1 = 1 + \dfrac{1}{1!}$, $u_2 = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!}$, $u_3 = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!}$, ...

Remarque

Dans les définitions, on peut remplacer $n \geq 0$ par $n \geq n_0$ (n_0 quelconque).

Suite croissante, décroissante

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan
Rappels
Suites
Séries

Exemple : $u_0 = 1,\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}\ (n \geq 1)$

Suite croissante, décroissante

Exemple : $u_0 = 1,\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}\ (n \geq 1)$

Suite croissante, décroissante

Exemple

Suite croissante, décroissante

Exemple

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \; (n \geq 0)$$

Suite croissante, décroissante

Exemple

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \ (n \geq 0)$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{n!}\right)$$

Suite croissante, décroissante

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Rappels
- Suites
- Séries

Exemple

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \ (n \geq 0)$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{n!}\right)$$

$$= u_n + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!}$$

Suite croissante, décroissante

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Rappels
- Suites
- Séries

Exemple

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \ (n \geq 0)$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{n!}\right)$$

$$= u_n + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{n+1} - 1\right) = \frac{-(n-1)}{(n+1)!} \leq 0 \text{ pour } n \geq 1.$$

Suite croissante, décroissante

Exemple

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \ (n \geq 0)$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{n!}\right)$$

$$= u_n + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{n+1} - 1\right) = \frac{-(n-1)}{(n+1)!} \leq 0 \text{ pour } n \geq 1.$$

$\forall n \geq 1 \ v_n \geq v_{n+1}$ mais $v_0 < v_1$

Suite croissante, décroissante

Exemple

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \ (n \geq 0)$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{n!}\right)$$

$$= u_n + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{n+1} - 1\right) = \frac{-(n-1)}{(n+1)!} \leq 0 \text{ pour } n \geq 1.$$

$\forall n \geq 1 \ v_n \geq v_{n+1}$ mais $v_0 < v_1$

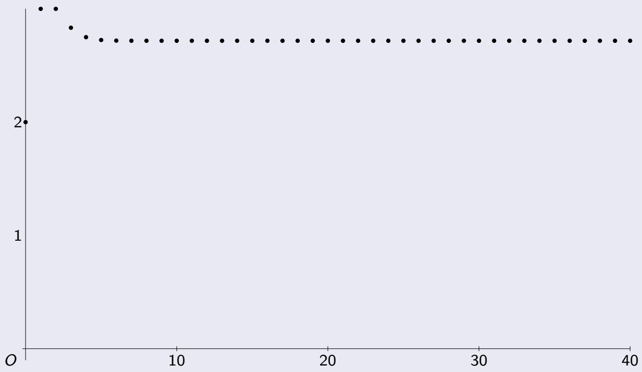
$v_0 = 2$, $v_1 = 3$, $v_2 = 3$, $v_3 \approx 2.833$, $v_4 \approx 2.750$, ...

Suite croissante, décroissante

Exemple : $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ $(n \geq 0)$

Suite croissante, décroissante

Exemple : $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 0)$



Suite croissante majorée, décroissante minorée

Théorème

Suite croissante majorée, décroissante minorée

Théorème

Une suite croissante et majorée est convergente.

Suite croissante majorée, décroissante minorée

Théorème

Une suite croissante et majorée est convergente.
Une suite décroissante et minorée est convergente.

Suite croissante majorée, décroissante minorée

Démonstration

Suite croissante majorée, décroissante minorée

Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante et majorée.

Suite croissante majorée, décroissante minorée

Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante et majorée.
$u(\mathbb{N}) = \{u_n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré : $u(\mathbb{N})$ admet une borne supérieure $M = \sup u(\mathbb{N})$.

Suite croissante majorée, décroissante minorée

Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante et majorée.
$u(\mathbb{N}) = \{u_n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré : $u(\mathbb{N})$ admet une borne supérieure $M = \sup u(\mathbb{N})$.
$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 0 \ M - \epsilon < u_N \leq M$.

Suite croissante majorée, décroissante minorée

Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante et majorée.
$u(\mathbb{N}) = \{u_n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré : $u(\mathbb{N})$ admet une borne supérieure $M = \sup u(\mathbb{N})$.
$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 0 \ M - \epsilon < u_N \leq M$.
Comme (u_n) est croissante, $\forall n > N \ M - \epsilon < u_N \leq u_n \leq M$.

Suite croissante majorée, décroissante minorée

Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante et majorée.
$u(\mathbb{N}) = \{u_n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré : $u(\mathbb{N})$ admet une borne supérieure $M = \sup u(\mathbb{N})$.
$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 0 \ M - \epsilon < u_N \leq M$.
Comme (u_n) est croissante, $\forall n > N \ M - \epsilon < u_N \leq u_n \leq M$.
On en déduit $\forall n > N \ M - \epsilon < u_n < M + \epsilon$ et $|u_n - M| < \epsilon$.

Suite croissante majorée, décroissante minorée

Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante et majorée.
$u(\mathbb{N}) = \{u_n \ , \ \ n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré : $u(\mathbb{N})$ admet une borne supérieure $M = \sup u(\mathbb{N})$.
$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 0 \ \ M - \epsilon < u_N \leq M$.
Comme (u_n) est croissante, $\forall n > N \ \ M - \epsilon < u_N \leq u_n \leq M$.
On en déduit $\forall n > N \ \ M - \epsilon < u_n < M + \epsilon$ et $|u_n - M| < \epsilon$.
Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = M$.

Suite croissante majorée, décroissante minorée

Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$

Suite croissante majorée, décroissante minorée

Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$

$\forall n \geq 1 \; 2^{n-1} \leq n!$

Suite croissante majorée, décroissante minorée

Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 1,\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}\ (n \geq 1)$

$\forall n \geq 1\ 2^{n-1} \leq n!$

Récurrence : $2^{1-1} \leq 1!$

Suite croissante majorée, décroissante minorée

Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$

$\forall n \geq 1 \; 2^{n-1} \leq n!$

Récurrence : $2^{1-1} \leq 1!$

Si pour $n \geq 1$ $2^{n-1} \leq n!$ alors $2 \times 2^{n-1} \leq (n+1) \times n!$ $(n+1 \geq 2)$

Suite croissante majorée, décroissante minorée

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$

$\forall n \geq 1 \; 2^{n-1} \leq n!$

Récurrence : $2^{1-1} \leq 1!$

Si pour $n \geq 1 \; 2^{n-1} \leq n!$ alors $2 \times 2^{n-1} \leq (n+1) \times n!$ $(n+1 \geq 2)$

On en déduit $\forall n \geq 1 \; \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

Suite croissante majorée, décroissante minorée

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$

$\forall n \geq 1 \ 2^{n-1} \leq n!$

Récurrence : $2^{1-1} \leq 1!$

Si pour $n \geq 1 \ 2^{n-1} \leq n!$ alors $2 \times 2^{n-1} \leq (n+1) \times n!$ $(n+1 \geq 2)$

On en déduit $\forall n \geq 1 \ \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

et $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} \leq 1 + \dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Suite croissante majorée, décroissante minorée

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Rappels
- Suites
- Séries

Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$

$\forall n \geq 1\ 2^{n-1} \leq n!$

Récurrence : $2^{1-1} \leq 1!$

Si pour $n \geq 1$ $2^{n-1} \leq n!$ alors $2 \times 2^{n-1} \leq (n+1) \times n!$ $(n+1 \geq 2)$

On en déduit $\forall n \geq 1$ $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

et $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} \leq 1 + \dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Or $\dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}} \leq 2$

(récurrence pour $n \geq 1$).

Suite croissante majorée, décroissante minorée

Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$

$\forall n \geq 1 \; 2^{n-1} \leq n!$

Récurrence : $2^{1-1} \leq 1!$

Si pour $n \geq 1 \; 2^{n-1} \leq n!$ alors $2 \times 2^{n-1} \leq (n+1) \times n!$ $(n+1 \geq 2)$

On en déduit $\forall n \geq 1 \; \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

et $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} \leq 1 + \dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Or $\dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}} \leq 2$

(récurrence pour $n \geq 1$).

Conclusion : $\forall n \geq 0 \; u_n \leq 1 + 2 = 3$ et (u_n) est majorée.

Suite croissante majorée, décroissante minorée

Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$

$\forall n \geq 1 \; 2^{n-1} \leq n!$

Récurrence : $2^{1-1} \leq 1!$

Si pour $n \geq 1 \; 2^{n-1} \leq n!$ alors $2 \times 2^{n-1} \leq (n+1) \times n!$ $(n+1 \geq 2)$

On en déduit $\forall n \geq 1 \; \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

et $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} \leq 1 + \dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Or $\dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}} \leq 2$

(récurrence pour $n \geq 1$).

Conclusion : $\forall n \geq 0 \; u_n \leq 1 + 2 = 3$ et (u_n) est majorée.

On en déduit que (u_n) est croissante et majorée donc convergente.

Suite croissante majorée, décroissante minorée

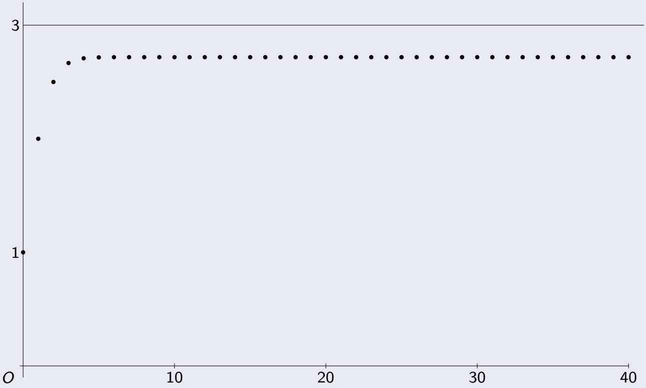
Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$

Remarque 1 : $\forall n \geq 0 \; 1 \leq u_n \leq 3$.

Suite croissante majorée, décroissante minorée

Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$

Remarque 1 : $\forall n \geq 0 \ 1 \leq u_n \leq 3$.



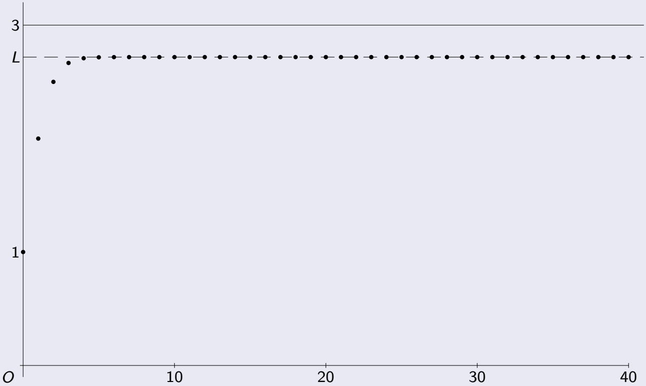
Suite croissante majorée, décroissante minorée

Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$

Suite croissante majorée, décroissante minorée

Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$

Remarque 2 : u_n est une valeur approchée par défaut de la limite L.



Suite croissante majorée, décroissante minorée

$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ $(n \geq 0)$

Suite croissante majorée, décroissante minorée

$v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}\ (n \geq 0)$

$(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Suite croissante majorée, décroissante minorée

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \; (n \geq 0)$$

$(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

$\forall n \geq 0 \; u_n \geq u_0 = 1.$

Suite croissante majorée, décroissante minorée

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \ (n \geq 0)$$

$(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
$\forall n \geq 0 \ u_n \geq u_0 = 1.$
On en déduit $\forall n \geq 1 \ v_n = u_n + \dfrac{1}{n!} \geq 1.$

Suite croissante majorée, décroissante minorée

$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ $(n \geq 0)$

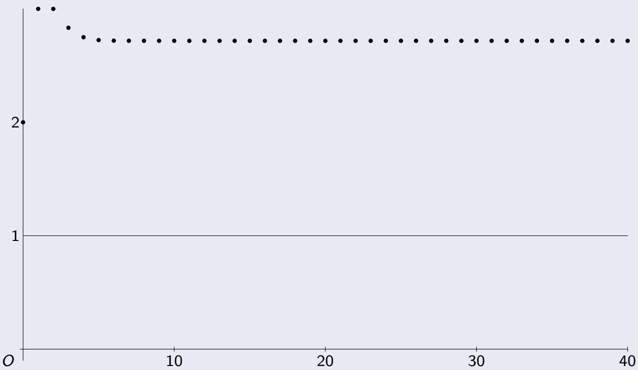
$(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
$\forall n \geq 0$ $u_n \geq u_0 = 1$.
On en déduit $\forall n \geq 1$ $v_n = u_n + \frac{1}{n!} \geq 1$.
$(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée et donc convergente.

Suite croissante majorée, décroissante minorée

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \ (n \geq 1)$$

Suite croissante majorée, décroissante minorée

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \; (n \geq 1)$$



Suite récurrente

Définition

Suite récurrente

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $u_0 \in I$.

Suite récurrente

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $u_0 \in I$.
La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)$ est dite suite récurrente.

Suite récurrente

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Rappels
- Suites
- Séries

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $u_0 \in I$.
La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)$ est dite suite récurrente.

Exemple

Suite récurrente

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $u_0 \in I$.
La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)$ est dite suite récurrente.

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3,\ u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)$$

Suite récurrente

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $u_0 \in I$.
La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)$ est dite suite récurrente.

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3,\ u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3\ (u_0 = 2).$$

Suite récurrente

Limite d'une suite récurrente convergente

Suite récurrente

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Limite d'une suite récurrente convergente

Si la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers L et si f est continue en L alors $f(L) = L$.

Suite récurrente

Limite d'une suite récurrente convergente

Si la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers L et si f est continue en L alors $f(L) = L$.
L est donc solution de l'équation $f(x) = x$.

Suite récurrente

Limite d'une suite récurrente convergente

Si la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers L et si f est continue en L alors $f(L) = L$.
L est donc solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple

Suite récurrente

Limite d'une suite récurrente convergente

Si la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers L et si f est continue en L alors $f(L) = L$.
L est donc solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3, \; u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)$$

Suite récurrente

Limite d'une suite récurrente convergente

Si la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers L et si f est continue en L alors $f(L) = L$.
L est donc solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple

$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ $(u_0 = 2)$.

Suite récurrente

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Limite d'une suite récurrente convergente

Si la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers L et si f est continue en L alors $f(L) = L$.
L est donc solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple

$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ $(u_0 = 2)$.

f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Suite récurrente

Limite d'une suite récurrente convergente

Si la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers L et si f est continue en L alors $f(L) = L$.
L est donc solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple

$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ $(u_0 = 2)$.

f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = x$ a pour unique solution : $x = 6$: si (u_n) est convergente alors la limite est $L = 6$.

Suite récurrente

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Exemple

Suite récurrente

Exemple

En posant $v_n = u_n - 6$, on a obtenu : (v_n) est la suite géométrique de raison $a = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -4$.

Suite récurrente

Exemple

En posant $v_n = u_n - 6$, on a obtenu : (v_n) est la suite géométrique de raison $a = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -4$.

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n, \; v_0 = -4.$$

Suite récurrente

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Exemple

En posant $v_n = u_n - 6$, on a obtenu : (v_n) est la suite géométrique de raison $a = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -4$.

$v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n, \ v_0 = -4.$

On en déduit $\forall n \geq 0, \ v_n = -4 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n.$

Suite récurrente

Exemple

En posant $v_n = u_n - 6$, on a obtenu : (v_n) est la suite géométrique de raison $a = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -4$.

$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n, \; v_0 = -4$.

On en déduit $\forall n \geq 0, \; v_n = -4 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Comme la raison $a = \frac{1}{2}$ vérifie $-1 < a < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Suite récurrente

Exemple

En posant $v_n = u_n - 6$, on a obtenu : (v_n) est la suite géométrique de raison $a = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -4$.

$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n, \; v_0 = -4.$

On en déduit $\forall n \geq 0, \; v_n = -4 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Comme la raison $a = \frac{1}{2}$ vérifie $-1 < a < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

On en déduit que (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$.

Suite récurrente

Exemple : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 3 \; (u_0 = 2)$

Suite récurrente

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

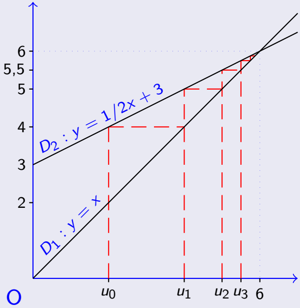
Plan

Rappels

Suites

Séries

Exemple : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \ (u_0 = 2)$



Suite récurrente

Autre exemple

Suite récurrente

Autre exemple

$u_{n+1} = 2u_n - 1$ $(u_0 = 2)$.

Suite récurrente

Autre exemple

$u_{n+1} = 2u_n - 1$ $(u_0 = 2)$.

$f(x) = 2x - 1$

Suite récurrente

Autre exemple

$u_{n+1} = 2u_n - 1$ $(u_0 = 2)$.
$f(x) = 2x - 1$: $x = 2x - 1$ a pour solution $x = 1$.

Suite récurrente

Autre exemple

$u_{n+1} = 2u_n - 1$ $(u_0 = 2)$.
$f(x) = 2x - 1$: $x = 2x - 1$ a pour solution $x = 1$.
Mais (u_n) est divergente.

Suite récurrente

Autre exemple

$u_{n+1} = 2u_n - 1$ $(u_0 = 2)$.
$f(x) = 2x - 1$: $x = 2x - 1$ a pour solution $x = 1$.
Mais (u_n) est divergente.

En effet, $v_n = u_n - 1$ vérifie $v_{n+1} = 2v_n$ $(v_0 = 1)$: $v_n = 2^n$ $(n \geq 0)$ suite géométrique divergente.

$u_n = 2^n + 1$ $(n \geq 0)$

Suite récurrente

Autre exemple : $u_{n+1} = 2u_n - 1$ ($u_0 = 2$)

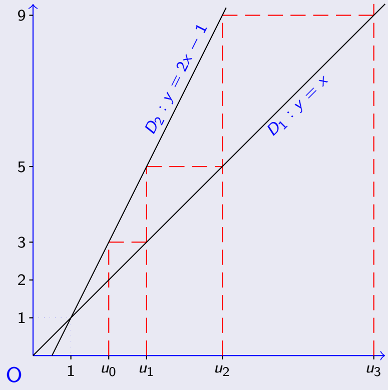
Suite récurrente

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié

- Plan
- Rappels
- Suites
- Séries

Autre exemple : $u_{n+1} = 2u_n - 1$ $(u_0 = 2)$



Limite infinie

Définition

Limite infinie

Définition

On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ ou admet comme limite $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini si $\forall A > 0\ \exists N \geq 0\ n > N \Rightarrow u_n > A$

Limite infinie

Définition

On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ ou admet comme limite $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini si $\forall A > 0\ \exists N \geq 0\ n > N \Rightarrow u_n > A$

Notation

Limite infinie

Définition

On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ ou admet comme limite $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini si $\forall A > 0 \ \exists N \geq 0 \ n > N \Rightarrow u_n > A$

Notation

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Limite infinie

Définition

On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ ou admet comme limite $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini si $\forall A > 0\ \exists N \geq 0\ n > N \Rightarrow u_n > A$

Notation

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Définition

Limite infinie

Définition

On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ ou admet comme limite $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini si $\forall A > 0\ \exists N \geq 0\ n > N \Rightarrow u_n > A$

Notation

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Définition

On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $-\infty$ ou admet comme limite $-\infty$ lorsque n tend vers l'infini si $\forall A < 0\ \exists N \geq 0\ n > N \Rightarrow u_n < A$

Limite infinie

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Définition

On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ ou admet comme limite $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini si $\forall A > 0 \ \exists N \geq 0 \ n > N \Rightarrow u_n > A$

Notation

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Définition

On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $-\infty$ ou admet comme limite $-\infty$ lorsque n tend vers l'infini si $\forall A < 0 \ \exists N \geq 0 \ n > N \Rightarrow u_n < A$

Notation

Limite infinie

Définition

On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ ou admet comme limite $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini si $\forall A > 0\ \exists N \geq 0\ n > N \Rightarrow u_n > A$

Notation

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Définition

On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $-\infty$ ou admet comme limite $-\infty$ lorsque n tend vers l'infini si $\forall A < 0\ \exists N \geq 0\ n > N \Rightarrow u_n < A$

Notation

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

Limite infinie

Exemple : $u_n = n^2 + \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$

Limite infinie

Exemple : $u_n = n^2 + \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$

$u_n > A$ s'écrit $n^2 + \dfrac{1}{n} > A$.

Il suffit donc d'avoir $n^2 > A$ c'est-à-dire $n > \sqrt{A}$ pour obtenir $n^2 + \dfrac{1}{n} > A$.

Limite infinie

Exemple : $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$

$u_n > A$ s'écrit $n^2 + \frac{1}{n} > A$.

Il suffit donc d'avoir $n^2 > A$ c'est-à-dire $n > \sqrt{A}$ pour obtenir $n^2 + \frac{1}{n} > A$.

On en déduit que si $n > \sqrt{A}$ alors $n^2 + \frac{1}{n} > A$.

Limite infinie

Exemple : $u_n = n^2 + \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$

$u_n > A$ s'écrit $n^2 + \dfrac{1}{n} > A$.

Il suffit donc d'avoir $n^2 > A$ c'est-à-dire $n > \sqrt{A}$ pour obtenir $n^2 + \dfrac{1}{n} > A$.

On en déduit que si $n > \sqrt{A}$ alors $n^2 + \dfrac{1}{n} > A$.

Il suffit de prendre $N = \left[\sqrt{A}\right]$.

Limite infinie

Exemple : $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$

$u_n > A$ s'écrit $n^2 + \frac{1}{n} > A$.

Il suffit donc d'avoir $n^2 > A$ c'est-à-dire $n > \sqrt{A}$ pour obtenir $n^2 + \frac{1}{n} > A$.

On en déduit que si $n > \sqrt{A}$ alors $n^2 + \frac{1}{n} > A$.

Il suffit de prendre $N = \left[\sqrt{A}\right]$.

Cas particuliers :

Limite infinie

Exemple : $u_n = n^2 + \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$

$u_n > A$ s'écrit $n^2 + \dfrac{1}{n} > A$.

Il suffit donc d'avoir $n^2 > A$ c'est-à-dire $n > \sqrt{A}$ pour obtenir $n^2 + \dfrac{1}{n} > A$.

On en déduit que si $n > \sqrt{A}$ alors $n^2 + \dfrac{1}{n} > A$.

Il suffit de prendre $N = \left[\sqrt{A}\right]$.

Cas particuliers :

- pour $A = 10$, $\sqrt{A} = 3,...$, $N = \left[\sqrt{A}\right] = 3$.

Limite infinie

Exemple : $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$

$u_n > A$ s'écrit $n^2 + \dfrac{1}{n} > A$.

Il suffit donc d'avoir $n^2 > A$ c'est-à-dire $n > \sqrt{A}$ pour obtenir $n^2 + \dfrac{1}{n} > A$.

On en déduit que si $n > \sqrt{A}$ alors $n^2 + \dfrac{1}{n} > A$.

Il suffit de prendre $N = \left[\sqrt{A}\right]$.

Cas particuliers :

- pour $A = 10$, $\sqrt{A} = 3, ...,$ $N = \left[\sqrt{A}\right] = 3$.

$n \geq 4 \Rightarrow u_n > 10$

Limite infinie

Exemple : $u_n = n^2 + \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$

$u_n > A$ s'écrit $n^2 + \dfrac{1}{n} > A$.

Il suffit donc d'avoir $n^2 > A$ c'est-à-dire $n > \sqrt{A}$ pour obtenir $n^2 + \dfrac{1}{n} > A$.

On en déduit que si $n > \sqrt{A}$ alors $n^2 + \dfrac{1}{n} > A$.

Il suffit de prendre $N = \left[\sqrt{A}\right]$.

Cas particuliers :

- pour $A = 10$, $\sqrt{A} = 3, \ldots$, $N = \left[\sqrt{A}\right] = 3$.

$n \geq 4 \Rightarrow u_n > 10$

- pour $A = 20$, $\sqrt{A} = 4, \ldots$, $N = \left[\sqrt{A}\right] = 4$.

Limite infinie

Exemple : $u_n = n^2 + \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$

$u_n > A$ s'écrit $n^2 + \dfrac{1}{n} > A$.

Il suffit donc d'avoir $n^2 > A$ c'est-à-dire $n > \sqrt{A}$ pour obtenir $n^2 + \dfrac{1}{n} > A$.

On en déduit que si $n > \sqrt{A}$ alors $n^2 + \dfrac{1}{n} > A$.

Il suffit de prendre $N = \left[\sqrt{A}\right]$.

Cas particuliers :

- pour $A = 10$, $\sqrt{A} = 3, \ldots$, $N = \left[\sqrt{A}\right] = 3$.

$n \geq 4 \Rightarrow u_n > 10$

- pour $A = 20$, $\sqrt{A} = 4, \ldots$, $N = \left[\sqrt{A}\right] = 4$.

$n \geq 5 \Rightarrow u_n > 20$

Limite infinie

Exemple : $u_n = n^2 + \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$

Limite infinie

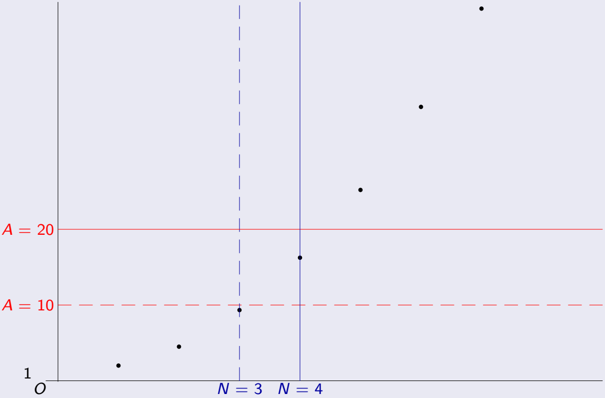
Exemple : $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$

Limite infinie

Exemple : $u_n = n^2 + \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$

Limite infinie

Exemple : $u_n = n^2 + \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$



Limite infinie

Suite croissante non majorée

Limite infinie

Suite croissante non majorée

Une suite croissante non majorée diverge vers l'infini.

Limite infinie

Suite croissante non majorée

Une suite croissante non majorée diverge vers l'infini.

Démonstration

$\forall A > 0\ \exists N\ u_N > A.$

Limite infinie

Suite croissante non majorée

Une suite croissante non majorée diverge vers l'infini.

Démonstration

$\forall A > 0\ \exists N\ u_N > A.$

$\forall n > N\ u_n \geq u_N > A.$

Limite infinie

Exemple

Limite infinie

Exemple

(F_n) définie par $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\ (n \geq 1)$.

Limite infinie

Exemple

(F_n) définie par $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\ (n \geq 1)$.
$F_2 = 0 + 1 = 1,\ F_3 = 1 + 1 = 2,\ F_4 = 1 + 2 = 3,\ F_5 = 2 + 3 = 5,$
$F_6 = 3 + 5 = 8...$

Limite infinie

Exemple

(F_n) définie par $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ $(n \geq 1)$.
$F_2 = 0 + 1 = 1,\ F_3 = 1 + 1 = 2,\ F_4 = 1 + 2 = 3,\ F_5 = 2 + 3 = 5,$
$F_6 = 3 + 5 = 8$...
$\forall n \geq 5\ F_n \geq n$ (récurrence).

Limite infinie

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

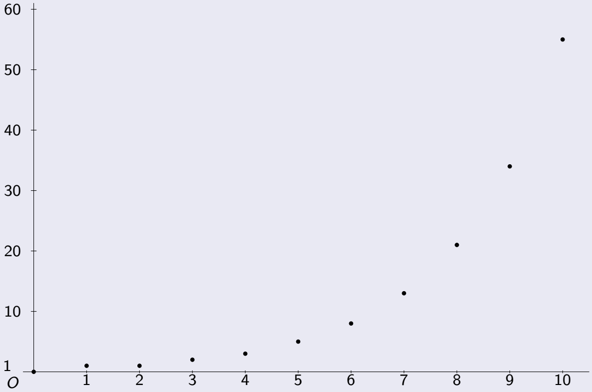
Suites

Séries

Exemple : $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\ (n \geq 1)$

Limite infinie

Exemple : $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\ (n \geq 1)$

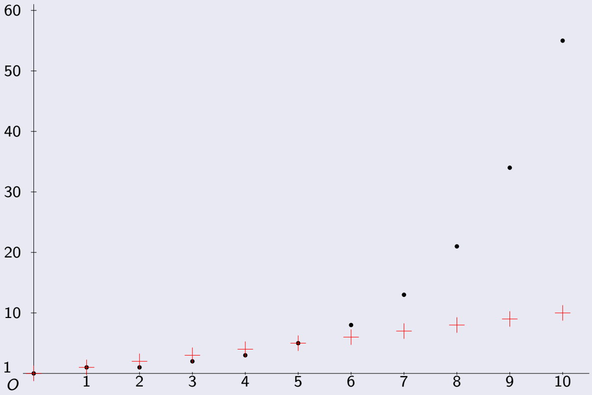


Limite infinie

Exemple : $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\ (n \geq 1)$

Limite infinie

Exemple : $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\ (n \geq 1)$



Opérations

Limite finie

Opérations

Limite finie

Si (u_n) et (v_n) ont pour limite L et L' ($L, L' \in \mathbb{R}$) alors

Opérations

Limite finie

Si (u_n) et (v_n) ont pour limite L et L' (L, $L' \in \mathbb{R}$) alors

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = L + L'$$

Opérations

Limite finie

Si (u_n) et (v_n) ont pour limite L et L' $(L,\ L' \in \mathbb{R})$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = L + L'$$

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda u_n = \lambda L \ (\lambda \in \mathbb{R})$$

Opérations

Limite finie

Si (u_n) et (v_n) ont pour limite L et L' (L, $L' \in \mathbb{R}$) alors

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = L + L'$$

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda u_n = \lambda L \ (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n v_n) = LL'$$

Opérations

Limite finie

Si (u_n) et (v_n) ont pour limite L et L' (L, $L' \in \mathbb{R}$) alors

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = L + L'$$

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda u_n = \lambda L \; (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n v_n) = LL'$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{L'} \; (L' \neq 0)$$

Opérations

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Limite infinie

$$Si \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \; et \; \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty \; alors \; \lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$$

Opérations

Limite infinie

$$Si \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \; et \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty \; alors \lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$$

$$Si \lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \; et \lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty \; alors \lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = -\infty$$

Opérations

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Limite infinie

$$Si \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \ et \ \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \ alors \ \lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$$

$$Si \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \ et \ \lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty \ alors \ \lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$$

$$Si \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \ et \ \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \ alors \ \lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$$

Opérations

Limite infinie

$$Si \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \; et \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty \; alors \lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$$

$$Si \lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \; et \lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty \; alors \lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = -\infty$$

$$Si \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \; et \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty \; alors \lim_{n \to +\infty} (u_n v_n) = +\infty$$

$$Si \lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \; et \lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty \; alors \lim_{n \to +\infty} (u_n v_n) = +\infty$$

Opérations

M2202 Analyse et méthodes numériques
Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Rappels
- Suites
- Séries

Limite infinie

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \ et \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \ alors \lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$$

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \ et \lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty \ alors \lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$$

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \ et \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \ alors \lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$$

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \ et \lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty \ alors \lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$$

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \ et \lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty \ alors \lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = -\infty$$

Opérations

Limite infinie

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \; et \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \; alors \lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$$

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \; et \lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty \; alors \lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = -\infty$$

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \; et \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \; alors \lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = +\infty$$

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \; et \lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty \; alors \lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = +\infty$$

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \; et \lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty \; alors \lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = -\infty$$

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty \; alors \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$$

Opérations

Limite finie et limite infinie

Opérations

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Limite finie et limite infinie

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = L > 0 \ et \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \ alors \lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$$

Opérations

Limite finie et limite infinie

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = L > 0 \ et \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \ alors \lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$$

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = L < 0 \ et \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \ alors \lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = -\infty$$

Suites de référence

Suites convergeant vers 0

Suites de référence

Suites convergeant vers 0

$$\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (\alpha > 0)$$

Suites de référence

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Suites convergeant vers 0

$$\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (\alpha > 0)$$

$$(a^n) \quad (-1 < a < 1)$$

Suites de référence

Suites convergeant vers 0

$$\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (\alpha > 0)$$

$$(a^n) \quad (-1 < a < 1)$$

Suites divergeant vers ∞

Suites de référence

Suites convergeant vers 0

$$\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (\alpha > 0)$$

$$(a^n) \quad (-1 < a < 1)$$

Suites divergeant vers ∞

$$(n^\alpha) \quad (\alpha > 0)$$

Suites de référence

Suites convergeant vers 0

$$\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (\alpha > 0)$$

$$(a^n) \quad (-1 < a < 1)$$

Suites divergeant vers ∞

$$(n^\alpha) \quad (\alpha > 0)$$

$$(a^n) \quad (a > 1)$$

Suites de référence

Suites convergeant vers 0

$$\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (\alpha > 0)$$

$$(a^n) \quad (-1 < a < 1)$$

Suites divergeant vers ∞

$$(n^\alpha) \quad (\alpha > 0)$$

$$(a^n) \quad (a > 1)$$

$$(n!)$$

Suites de référence

Exemples

Suites de référence

Exemples

$$\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Suites de référence

Exemples

$$\left(\frac{1}{n}\right),\ \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ \left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\left(n^{\frac{1}{2}}\right)=\left(\sqrt{n}\right),\ (n),\ (2^n)$$

Comparaisons

M2202
Analyse et
méthodes
numériques

Département
Informatique
IUT de
Saint-Dié

Plan
Rappels
Suites
Séries

Propriété 1

Comparaisons

Propriété 1

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = L \;, \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = L' \;\; et \;\; \forall n \geq 0 \;\; u_n \leq v_n \;\; alors \;\; L \leq L'$$

Comparaisons

Propriété 1

$$Si \lim_{n \to +\infty} u_n = L \ , \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = L' \ et \ \forall n \geq 0 \ u_n \leq v_n \ alors \ L \leq L'$$

Propriété 2

Comparaisons

Propriété 1

$$Si \lim_{n \to +\infty} u_n = L \ , \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = L' \ et \ \forall n \geq 0 \ u_n \leq v_n \ alors \ L \leq L'$$

Propriété 2

$$Si \lim_{n \to +\infty} u_n = L \ et \ \forall n \geq 0 \ u_n \leq M \ alors \ L \leq M$$

Comparaisons

Propriété 1

$$Si \lim_{n \to +\infty} u_n = L \ , \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = L' \ et \ \forall n \geq 0 \ u_n \leq v_n \ alors \ L \leq L'$$

Propriété 2

$$Si \lim_{n \to +\infty} u_n = L \ et \ \forall n \geq 0 \ u_n \leq M \ alors \ L \leq M$$

Exemple

Comparaisons

Propriété 1

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = L \ , \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = L' \ et \ \forall n \geq 0 \ u_n \leq v_n \ alors \ L \leq L'$$

Propriété 2

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = L \ et \ \forall n \geq 0 \ u_n \leq M \ alors \ L \leq M$$

Exemple

u_n définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$:

Comparaisons

Propriété 1

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = L \;,\; \lim_{n\to+\infty} v_n = L' \; et \; \forall n \geq 0 \; u_n \leq v_n \; alors \; L \leq L'$$

Propriété 2

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = L \; et \; \forall n \geq 0 \; u_n \leq M \; alors \; L \leq M$$

Exemple

u_n définie par $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(n \geq 1)$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq 3$$

Comparaisons

Définition

Comparaisons

Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si

Comparaisons

Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si

$$1)\ \forall n \geq 0\ \ u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$$

Comparaisons

Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si

$$1)\ \forall n \geq 0\ \ u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$$

$$2)\ \lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

Comparaisons

Propriété

Comparaisons

Propriété

1. Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite L.

Comparaisons

Propriété

1. Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite L.
2. $\forall n \geq 0 \ u_n \leq L \leq v_n$.

Comparaisons

Propriété

1. Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite L.
2. $\forall n \geq 0 \; u_n \leq L \leq v_n$.

Exemple

Comparaisons

Propriété

1. Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite L.
2. $\forall n \geq 0 \ u_n \leq L \leq v_n$.

Exemple

$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n!} \ (u_0 = 1) \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

Comparaisons

Propriété

1. Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite L.
2. $\forall n \geq 0 \ u_n \leq L \leq v_n$.

Exemple

$u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(u_0 = 1)$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.

$\forall n \geq 0 \ u_n \leq u_{n+1}$

Comparaisons

Propriété

1. Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite L.
2. $\forall n \geq 0\ u_n \leq L \leq v_n$.

Exemple

$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n!}$ $(u_0 = 1)$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.
$\forall n \geq 0\ u_n \leq u_{n+1}$
$\forall n \geq 1\ v_n \geq v_{n+1}$

Comparaisons

Propriété

1. Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite L.
2. $\forall n \geq 0 \ u_n \leq L \leq v_n$.

Exemple

$u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(u_0 = 1)$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.

$\forall n \geq 0 \ u_n \leq u_{n+1}$

$\forall n \geq 1 \ v_n \geq v_{n+1}$

$\forall n \geq 0 \ v_n = u_n + \dfrac{1}{n!} \geq u_n$

Comparaisons

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Rappels
- Suites
- Séries

Propriété

1. Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite L.
2. $\forall n \geq 0 \; u_n \leq L \leq v_n$.

Exemple

$u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(u_0 = 1)$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.

$\forall n \geq 0 \; u_n \leq u_{n+1}$

$\forall n \geq 1 \; v_n \geq v_{n+1}$

$\forall n \geq 0 \; v_n = u_n + \dfrac{1}{n!} \geq u_n$

$v_n - u_n = \dfrac{1}{n!} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Comparaisons

Propriété

1. Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite L.
2. $\forall n \geq 0 \; u_n \leq L \leq v_n$.

Exemple

$u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(u_0 = 1)$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.

$\forall n \geq 0 \; u_n \leq u_{n+1}$

$\forall n \geq 1 \; v_n \geq v_{n+1}$

$\forall n \geq 0 \; v_n = u_n + \dfrac{1}{n!} \geq u_n$

$v_n - u_n = \dfrac{1}{n!} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

$u_0 = 1, \; v_0 = 2; \; u_1 = 2, \; v_1 = 3; \; u_2 = 2,5, \; v_2 = 3;$

Comparaisons

Propriété

1. Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite L.
2. $\forall n \geq 0 \ u_n \leq L \leq v_n$.

Exemple

$u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(u_0 = 1)$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.

$\forall n \geq 0 \ u_n \leq u_{n+1}$

$\forall n \geq 1 \ v_n \geq v_{n+1}$

$\forall n \geq 0 \ v_n = u_n + \dfrac{1}{n!} \geq u_n$

$v_n - u_n = \dfrac{1}{n!} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

$u_0 = 1, \ v_0 = 2; \ u_1 = 2, \ v_1 = 3; \ u_2 = 2,5, \ v_2 = 3;$

$u_3 \approx 2,666, \ v_3 \approx 2,833; \ u_4 \approx 2,708, \ v_4 \approx 2,750;$

Comparaisons

Propriété

1. Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite L.
2. $\forall n \geq 0 \; u_n \leq L \leq v_n$.

Exemple

$u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$ $(u_0 = 1)$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.
$\forall n \geq 0 \; u_n \leq u_{n+1}$
$\forall n \geq 1 \; v_n \geq v_{n+1}$
$\forall n \geq 0 \; v_n = u_n + \dfrac{1}{n!} \geq u_n$
$v_n - u_n = \dfrac{1}{n!} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
$u_0 = 1,\ v_0 = 2;\ u_1 = 2,\ v_1 = 3;\ u_2 = 2,5,\ v_2 = 3;$
$u_3 \approx 2,666,\ v_3 \approx 2,833;\ u_4 \approx 2,708,\ v_4 \approx 2,750;$
$u_5 \approx 2,716,\ v_5 \approx 2,725;\ u_6 \approx 2,718,\ v_6 \approx 2,719$

Comparaisons

Propriété

Comparaisons

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié

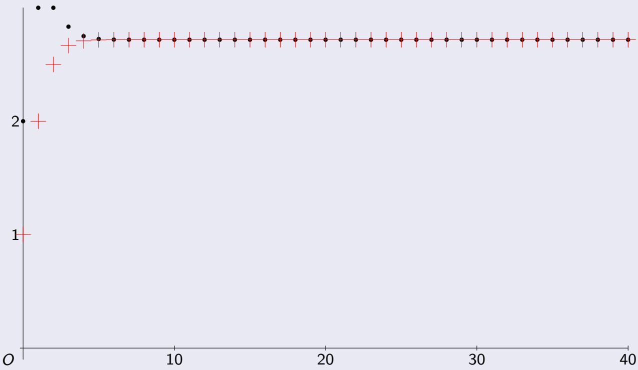
Plan

Rappels

Suites

Séries

Propriété



Taupensky de Janet Parke, artiste américaine

Séries

Définition

Séries

Définition

Soit une suite (u_n) $(n \geq 0)$.

Séries

Définition

Soit une suite (u_n) $(n \geq 0)$.
La suite (S_n) définie par

Séries

Définition

Soit une suite (u_n) $(n \geq 0)$.
La suite (S_n) définie par

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Séries

Définition

Soit une suite (u_n) $(n \geq 0)$.
La suite (S_n) définie par

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

est appelée série de terme général u_n.

Séries

Notation

Séries

Notation

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Séries

Notation

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Définitions

Séries

Notation

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Définitions

Si la suite (S_n) est convergente et admet la limite S lorsque n tend vers l'infini

Séries

Notation

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Définitions

Si la suite (S_n) est convergente et admet la limite S lorsque n tend vers l'infini alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est dite convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S$.

Séries

Notation

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Définitions

Si la suite (S_n) est convergente et admet la limite S lorsque n tend vers l'infini alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est dite convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S$.

Sinon, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est dite divergente.

Séries

Exemple 1

Séries

Exemple 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

Séries

Exemple 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

$$\forall n \geq 1 \ S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Séries

Exemple 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

$\forall n \geq 1 \; S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

et $1 - \dfrac{1}{2^n} \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

Séries

Exemple 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

$\forall n \geq 1 \; S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

et $1 - \dfrac{1}{2^n} \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ est convergente

Séries

M2202
Analyse et
méthodes
numériques

Département
Informatique
IUT de
Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Exemple 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

$\forall n \geq 1 \; S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

et $1 - \dfrac{1}{2^n} \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ est convergente et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1$$

Exemple 1

Séries

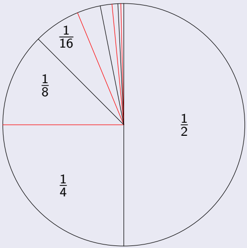
Exemple 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

Séries

Exemple 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$



Exemple 2

Séries

Exemple 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots$$

Séries

Exemple 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots$$

$\forall n \geq 0 \; S_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n \geq n.$

Séries

Exemple 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots$$

$\forall n \geq 0 \; S_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n \geq n.$

(S_n) est donc croissante non majorée et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n$ est divergente.

Annexe

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié

Plan

Rappels

Suites

Séries

Irrationnalité de e

Annexe

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Rappels
- Suites
- Séries

Irrationnalité de e

$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ $(n \geq 0)$ est croissante et convergente vers e.

Annexe

Irrationnalité de e

$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ $(n \geq 0)$ est croissante et convergente vers e.

$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ $(n \geq 0)$ est décroissante et convergente vers e.

Annexe

Irrationnalité de e

$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ $(n \geq 0)$ est croissante et convergente vers e.

$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ $(n \geq 0)$ est décroissante et convergente vers e.

De plus, $u_n < e < u_n + \frac{1}{n!}$.

Annexe

Irrationnalité de e

$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ $(n \geq 0)$ est croissante et convergente vers e.

$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ $(n \geq 0)$ est décroissante et convergente vers e.

De plus, $u_n < e < u_n + \frac{1}{n!}$.

On suppose $e = \frac{p}{q}$.

Annexe

Irrationnalité de e

$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ $(n \geq 0)$ est croissante et convergente vers e.

$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ $(n \geq 0)$ est décroissante et convergente vers e.

De plus, $u_n < e < u_n + \frac{1}{n!}$.

On suppose $e = \frac{p}{q}$.

$q!u_q < q!\frac{p}{q} < q!u_q + 1$

Annexe

Irrationnalité de e

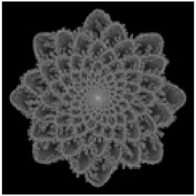
$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ $(n \geq 0)$ est croissante et convergente vers e.

$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ $(n \geq 0)$ est décroissante et convergente vers e.

De plus, $u_n < e < u_n + \frac{1}{n!}$.

On suppose $e = \frac{p}{q}$.

$q!u_q < q!\frac{p}{q} < q!u_q + 1$ avec $q!\frac{p}{q}$, $q!u_q$ et $q!u_q + 1$ entiers.


Aggregation 35 de Andy Lomas, artiste américain