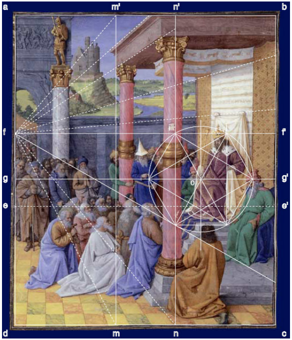
M1202

Algèbre linéaire
Calcul matriciel

Fuite de Pompée après la défaite de Pharsale Jean Fouquet (1420-1480)



La Clémence de Cyrus Enluminure de Jean Fouquet (1420-1480)

Matrices

Définition

$\mathbb{K}$ est un corps commutatif (par exemple $\mathbb{R}$).
m et n sont deux entiers naturels non nuls.
Une matrice de type (m, n) ou $m \times n$ est un tableau d'éléments $a_{ij} \in \mathbb{K}$ $(i = 1, 2, \ldots, m$ et $j = 1, 2, \ldots, n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & \mathbf{a_{1j}} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & \mathbf{a_{i-1j}} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ \mathbf{a_{i1}} & \cdots & \mathbf{a_{ij-1}} & \mathbf{a_{ij}} & \mathbf{a_{ij+1}} & \cdots & \mathbf{a_{in}} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & \mathbf{a_{i+1j}} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj-1} & \mathbf{a_{mj}} & a_{mj+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} est un terme ou coefficient de la matrice.
On note aussi $A = (a_{ij})$.

Matrices

Exemples

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ matrice de type $(2, 3)$

② $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ matrice de type $(3, 3)$

③ $A'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ matrice de type $(3, 1)$

Matrices

Egalité

Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $A' = (a'_{ij})$ sont dites égales si $a_{ij} = a'_{ij}$ quels que soient $i = 1, 2, \ldots, m$ et $j = 1, 2, \ldots, n$.

Notations

$A = A'$

Ensemble des matrices

L'ensemble des matrices de type (m, n) est noté $\mathcal{M}_{mn}$.

Matrices

M1202 Algèbre linéaire

Département Informatique

Plan

Matrices

Matrice d'une application linéaire

Multiplication

Déterminants

Propriétés

Compléments

Addition

On définit la matrice S de type (m,n) somme de $A=(a_{ij})$ et $A'=(a'_{ij})$ de type (m,n) par : $S=(s_{ij})=(a_{ij}+a'_{ij})$.

Exemples

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 \\ 3+4 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Matrices

Propriété

$(\mathcal{M}_{mn}, +)$ est un groupe commutatif.

Démonstration

- Commutativité
  $\forall A, A' \in \mathcal{M}_{mn}\ A + A' = (a_{ij}) + (a'_{ij}) = (a_{ij} + a'_{ij}) = (a'_{ij} + a_{ij}) = A' + A$
- Associativité
  $\forall A, A', A'' \in \mathcal{M}_{mn}\ A + (A' + A'') = (a_{ij}) + ((a'_{ij}) + (a''_{ij}))$
  $= (a_{ij}) + (a'_{ij} + a''_{ij}) = (a_{ij} + (a'_{ij} + a''_{ij})) = ((a_{ij} + a'_{ij}) + a''_{ij})$
  $= (A + A') + A''$

Matrices

Démonstration

- **Neutre**

  En posant $0 = (0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

  $\forall A \in \mathcal{M}_{mn}\ A + 0 = (a_{ij}) + (0) = (a_{ij} + 0) = (a_{ij}) = A$

- **Symétrique (opposé)**

  $\forall A \in \mathcal{M}_{mn}\ A + (-a_{ij}) = (a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} + (-a_{ij})) = (0) = 0$

Définitions

- $-A = (-a_{ij})$
- $A - A' = A + (-A') = (a_{ij}) + (-a'_{ij}) = (a_{ij} + (-a'_{ij})) = (a_{ij} - a'_{ij})$

Matrices

Multiplication par un scalaire

On définit la multiplication scalaire par
$\forall A \in \mathcal{M}_{mn},\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\quad \lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$

Exemples

① $3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.1 & 3.2 \\ 3.3 & 3.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

② $(-2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2).1 & (-2).2 & (-2).(-3) \\ (-2).4 & (-2).(-5) & (-2).6 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -8 & 10 & -12 \end{pmatrix}$

③ $2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 2.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Matrices

M1202 Algèbre linéaire

Département Informatique

Plan

Matrices

Matrice d'une application linéaire

Multiplication

Déterminants

Propriétés

Compléments

Propriété

$\mathcal{M}_{mn}$ muni de l'addition et de la multiplication scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Démonstration

- $\forall A, A' \in \mathcal{M}_{mn}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$
  $\lambda(A + A') = \lambda(a_{ij} + a'_{ij}) = (\lambda(a_{ij} + a'_{ij})) = (\lambda a_{ij} + \lambda a'_{ij})$
  $= (\lambda a_{ij}) + (\lambda a'_{ij}) = \lambda(a_{ij}) + \lambda(a'_{ij}) = \lambda A + \lambda A'$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{mn}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
  $(\lambda + \mu)A = (\lambda + \mu)(a_{ij}) = ((\lambda + \mu)a_{ij}) = (\lambda a_{ij} + \mu a_{ij})$
  $= (\lambda a_{ij}) + (\mu a_{ij}) = \lambda A + \mu A$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{mn}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
  $(\lambda\mu)A = (\lambda\mu)(a_{ij}) = ((\lambda\mu)a_{ij}) = (\lambda\mu a_{ij}) = (\lambda(\mu a_{ij})) = \lambda(\mu A)$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{mn}$ $\quad 1A = 1(a_{ij}) = (1a_{ij}) = (a_{ij}) = A$

Matrices

Propriété

$\dim \mathcal{M}_{mn} = m \times n$.

Démonstration

En posant $e_{kl} = (a_{ij})$ avec $a_{kl} = 1$ et $a_{ij} = 0$ si $i \neq k$ ou $j \neq l$, la suite de matrices (e_{kl}) est une suite libre et génératrice de $\mathcal{M}_{mn}$.

Matrices

Exemple

Dans $\mathcal{M}_{22}$, $e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$= a_{11} e_{11} + a_{12} e_{12} + a_{21} e_{21} + a_{22} e_{22}$.

Par ailleurs,

$a_{11} e_{11} + a_{12} e_{12} + a_{21} e_{21} + a_{22} e_{22} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$.

Matrices particulières

Matrice ligne

Une matrice de type $(1, n)$ est une matrice ligne.

Exemples

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Matrices particulières

Matrice colonne

Une matrice de type $(m, 1)$ est une matrice colonne.

Exemples

① $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Matrices particulières

Matrice carrée

Une matrice de type (n, n) est une matrice carrée.

Exemples

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Notation

L'ensemble des matrices carrées type (n, n) est noté $\mathcal{M}_n$.

Matrices particulières

Matrice diagonale

Une matrice de type (n, n) est une matrice diagonale si tous ses éléments qui ne sont pas des éléments de la diagonale principale (de la forme a_{ii}) sont nuls.

Exemples

① $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Matrices particulières

Matrice scalaire

Une matrice de type (n, n) est une matrice scalaire si c'est une matrice diagonale dont tous les éléments de la diagonale principale sont égaux.

Exemples

① $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

La transposée d'une matrice (n, n) $A = (a_{ij})$ est la matrice ${}^tA = (a_{ji})$.

Exemples

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$: ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

② $A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$: ${}^tA' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Matrices particulières

Matrice symétrique

Une matrice de type (n, n) A est une matrice symétrique si ${}^tA = A$.

Exemples

① $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Vecteur ligne, vecteur colonne

Définition

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & \mathbf{a_{1j}} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & \mathbf{a_{i-1j}} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ \mathbf{a_{i1}} & \cdots & \mathbf{a_{ij-1}} & \mathbf{a_{ij}} & \mathbf{a_{ij+1}} & \cdots & \mathbf{a_{in}} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & \mathbf{a_{i+1j}} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj-1} & \mathbf{a_{mj}} & a_{mj+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Le vecteur i-ème ligne est la matrice ligne de coefficients ceux de la i-ème ligne.
Le vecteur j-ème colonne est la matrice colonne de coefficients ceux de la j-ème colonne.

Vecteur ligne, vecteur colonne

Exemple

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ est le vecteur première ligne de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

② $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est le vecteur deuxième colonne de cette matrice.

③ $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ est le vecteur deuxième colonne de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Matrice d'une application linéaire

Définition

Soit f une application linéaire de E de dimension m dans F de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_m)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ une base de F.
La matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est :

$Mat\,(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') =$

$$\begin{array}{cc}
\begin{matrix} f(e_1) & \cdots & f(e_{j-1}) & \mathbf{f(e_j)} & f(e_{j+1}) & \cdots & f(e_m) \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & \mathbf{a_{1j}} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1m} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & \mathbf{a_{i-1j}} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1m} \\
a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & \mathbf{a_{ij}} & a_{ij+1} & \cdots & a_{im} \\
a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & \mathbf{a_{i+1j}} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1m} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & \mathbf{a_{nj}} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nm}
\end{pmatrix}
&
\begin{matrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_{i-1} \\ e'_i \\ e'_{i+1} \\ \vdots \\ e'_n \end{matrix}
\end{array}$$

Le vecteur j-ème colonne est la matrice colonne de coefficients les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Matrice d'une application linéaire

Exemple

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$f(e_1) = e'_1 - e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(e_2) = 2e'_1 + e'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$f(e_3) = -e'_1 + 3e'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \color{red}{f(e_2)} & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \color{red}{2} & -1 \\ -1 & \color{red}{1} & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \end{array}$$

Matrice d'une application linéaire

Remarque

Une matrice de type (n, m) peut être vue comme la matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension m dans un espace vectoriel de dimension n.

Multiplication

Définition

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type (m, n) et $A' = (a'_{ij})$ une matrice de type (n, p).
On appelle produit de A et de A' la matrice de type (m, p) $P = (p_{ij})$ définie par

$$p_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} a'_{hj} = a_{i1} a'_{1j} + a_{i2} a'_{2j} + \ldots + a_{in} a'_{nj}$$

Remarque

Le produit n'est possible que si les types des matrices vérifient

$$(m, n) \times (n, p) = (m, p)$$

Multiplication

Algorithme ligne-colonne

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j} & \cdots & a_{i-1n} \\ \mathbf{a_{i1}} & \cdots & \mathbf{a_{ij}} & \cdots & \mathbf{a_{in}} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} & \cdots & \mathbf{a'_{1j}} & \cdots & a'_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{i-11} & \cdots & \mathbf{a'_{i-1j}} & \cdots & a'_{i-1p} \\ a'_{i1} & \cdots & \mathbf{a'_{ij}} & \cdots & a'_{ip} \\ a'_{i+11} & \cdots & \mathbf{a'_{i+1j}} & \cdots & a'_{i+1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{n1} & \cdots & \mathbf{a'_{nj}} & \cdots & a'_{np} \end{pmatrix}$$

$$p_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} a'_{hj} = a_{i1} a'_{1j} + a_{i2} a'_{2j} + \ldots + a_{in} a'_{nj}$$

Multiplication

M1202 Algèbre linéaire

Département Informatique

Algorithme ligne-colonne

① $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1.1+2.3+9.2 & 1.2+2.5+9.3 \\ 3.1+5.3+0.2 & 3.2+5.5+0.3 \\ 2.1+3.3+0.2 & 2.2+3.5+0.3 \\ 2.1+3.3+1.2 & 2.2+3.5+1.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 39 \\ 18 & 31 \\ 11 & 19 \\ 13 & 22 \end{pmatrix}$$

② $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0+0.0 & 0.1+0.(-1) \\ 1.0+1.0 & 1.1+1.(-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

③ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplication

Lien avec la composition

On note

- $dim\ E = m$, $dim\ F = n$, $dim\ G = p$
- $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires
- $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_m)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ et $\mathcal{B}'' = (e''_1, e''_2, \cdots, e''_p)$ des bases de E, F et G
- $$f(e_j) = \sum_{h=1}^{n} a'_{hj} e'_h \ (1 \leq j \leq m)$$
$$g(e'_h) = \sum_{i=1}^{p} a_{ih} e''_i \ (1 \leq h \leq n)$$
$$g \circ f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a''_{ij} e''_i \ (1 \leq j \leq m)$$

Multiplication

Lien avec la composition

On a :

$$g \circ f(e_j) = g\left(\sum_{h=1}^{n} a'_{hj} e'_h\right) = \sum_{h=1}^{n} a'_{hj} g(e'_h)$$

et donc

$$g \circ f(e_j) = \sum_{h=1}^{n} a'_{hj} \sum_{i=1}^{p} a_{ih} e''_i = \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} a_{ih} a'_{hj} e''_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{h=1}^{n} a_{ih} a'_{hj}\right) e''_i$$

puis $a''_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} a'_{hj}$

Conclusion

En notant $Mat\ (f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = (a'_{ij})$ et $Mat\ (g, \mathcal{B}', \mathcal{B}'') = (a_{ij})$, on a

$$\boxed{Mat\ (g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = Mat\ (g, \mathcal{B}', \mathcal{B}'') \times Mat\ (f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')}$$

Multiplication

Exemple

On note :
$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$,
$\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$ avec $e_1' = (1,0)$ et $e_2' = (0,1)$.
Soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (2x+y-z, 3x-4y)$
et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(e_1') = 1$ et $g(e_2') = 2$.
Remarque : dans $\mathbb{R}$, $e_1 = 1$ et $\mathcal{B}'' = (e_1) = (1)$.
$f(e_1) = (2,3)$, $f(e_2) = (1,-4)$ et $f(e_3) = (-1,0)$.
$Mat\ (g \circ f, \mathcal{B}, \mathfrak{B}'') = Mat\ (g, \mathcal{B}', \mathcal{B}'') \times Mat\ (f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$
$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -7 & -1 \end{pmatrix}$

Multiplication

Expression matricielle d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de E dans F.
$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_m)$ est une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ est une base de F.

On note $A = Mat\,(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j$

On a $Y = f(X) = f\left(\sum_{j=1}^{m} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i$

et donc $Y = f(X) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j e'_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right) e'_i$.

On en déduit : $\boxed{Y = AX}$

Multiplication

Exemple 1

$g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ avec $A = Mat\,(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \begin{pmatrix} 8 & -7 & -1 \end{pmatrix}$,
$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}''$ bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$.

$$\forall\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$Y = f(X) = \begin{pmatrix} 8 & -7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (8x - 7y - z) = 8x - 7y - z.$$

Multiplication

Exemple 2

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avec $A = Mat\ (f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

avec $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$\forall\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$Y = f(X) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y - z \\ y + z \\ 2x + y + 3z \end{pmatrix}.$$

Multiplication

Remarque

Pour toute matrice (n, m) $A = (a_{ij})$, l'application f qui à tout vecteur $X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_m e_m$ associe le vecteur $Y = f(X) = AX = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \cdots + x'_n e'_n$ est linéaire et $A = Mat\ (f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_m)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$.

Multiplication

Propriété

Pour tout scalaire λ et toutes les matrices A, A', A'' pour lesquelles les opérations suivantes sont définies :

1. $A(A'A'') = (AA')A''$ (associativité)
2. $A(A' + A'') = (AA') + (AA'') = AA' + AA''$ (distributivité à gauche)
3. $(A' + A'')A = (A'A) + (A''A) = A'A + A''A$ (distributivité à droite)
4. $(\lambda A)A' = \lambda(AA') = \lambda AA' = A(\lambda A')$

Multiplication

M1202
Algèbre
linéaire

Département
Informatique

Remarque

La multiplication des matrices n'est pas commutative.

Contre-exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplication

Exemple

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right) \\
&= 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Multiplication

Autre calcul

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplication

Matrice unité

On appelle matrice unité I_n la matrice de type (n, n) définie par

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sur la diagonale principale, tous les éléments sont égaux à 1, tous les autres sont nuls.

Multiplication

Exemples

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque

$I_n = Mat\ (id_{\mathbb{K}^n}, \mathcal{B}, \mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ base quelconque de $\mathbb{K}^n$.

Multiplication

Propriété

Si A est une matrice (m, n) alors $AI_n = A$ et $I_mA = A$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplication

Matrices carrées inversibles

Une matrice carrée A de type (n, n) est inversible s'il existe une matrice carrée A' telle que $AA' = A'A = I_n$.

Remarques et notation

Si A' existe, A' est unique et notée A^{-1}.
A^{-1} est l'inverse de A.

Démonstration

$AA' = A'A = I_n$ et $AA'' = A''A = I_n$
impliquent $A''(AA') = A''I_n = A''$.
Or $A''(AA') = (A''A)A' = I_nA' = A'$. Donc $A' = A''$.

Multiplication

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplication

Contre-exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\forall A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ $AA' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit $\forall A' \ AA' \neq I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et que A n'est pas inversible.

Multiplication

Propriété 1

Une matrice carrée A de type (n, n) est inversible si et seulement si $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ telle que $A = Mat\,(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ ($\mathcal{B}$ base de $\mathbb{K}^n$) est un automorphisme (application linéaire bijective).

Démonstration

- Si $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ alors il existe une application linéaire g telle que $f \circ g = g \circ f = id_{\mathbb{K}^n}$ et f est bijective.
- Si f est bijective , alors $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{K}^n}$ et il existe une matrice A' telle que $AA' = A'A = I_n$.

Remarque

$A^{-1} = Mat\,(f^{-1}, \mathcal{B}, \mathcal{B})$

Multiplication

Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et f l'application linéaire telle que $A = Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

On a alors

- $Im\, f = Vect\,(f(e_1), f(e_2)) = \mathbb{R}^2$: f est donc surjective.
- $dim\, Ker\, f = dim\, \mathbb{R}^2 - dim\, Im\, f = 2 - 2 = 0$: f est donc injective et donc bijective.

Conclusion : A est inversible.

Multiplication

Exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire telle que $A = Mat\,(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$.
On a alors $f(e_2) = 0 \Rightarrow Ker\, f \neq \{0\} \Rightarrow f$ non injective donc non bijective.
Conclusion : A n'est pas inversible.

Remarque

Soit f une application linéaire définie par $A = Mat\,(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$.
On dit que A est la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

Multiplication

Propriété 2

Une matrice carrée A de type (n, n) est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

- Si f est bijective, alors f est injective et $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$ est une suite libre de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et donc une base.
- Si $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$ est une base de $\mathbb{K}^n$ alors $f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = 0$ implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.
  On en déduit que $Ker\, f = \{0\}$ et que f est injective.
  $dim\, Im\, f = dim\, \mathbb{K}^n - dim\, Ker\, f = n$.
  On en déduit que $Im\, f = \mathbb{K}^n$ et que f est surjective.

Multiplication

Exemple 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible :

la suite des vecteurs colonnes est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible :

la suite des vecteurs colonnes est liée.

Multiplication

Remarque

$(\mathcal{M}_n, +, \times)$ est un anneau non commutatif.

Matrice de passage

Matrice de passage

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} e'_1 & \cdots & e'_{j-1} & \mathbf{e'_j} & e'_{j+1} & \cdots & e'_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & \mathbf{a_{1j}} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & \mathbf{a_{i-1j}} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & \mathbf{a_{ij}} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & \mathbf{a_{i+1j}} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & \mathbf{a_{nj}} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_{i-1} \\ e_i \\ e_{i+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

Le vecteur j-ème colonne est la matrice colonne de coordonneés de e'_j dans la base $\mathcal{B}$.

Matrice de passage

Remarques

1. $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible.
2. Inversement toute matrice inversible peut être vue comme une matrice de passage.

Matrice de passage

Propriété

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées d'un vecteur V donné dans $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$: $X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de ce vecteur V dans $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$:
$X' = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \cdots + x'_n e'_n$.
On a $\boxed{X = PX'}$ avec $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$
et donc $\boxed{X' = P^{-1}X}$ avec $\boxed{P^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}}$.

Démonstration

$$
\begin{array}{ccc}
 & id_{\mathbb{K}^n} & \\
E & \rightarrow & E \\
\mathcal{B}' & P & \mathcal{B} \\
{\color{red}X'} & & PX' \\
 & & {\color{red}X}
\end{array}
$$

$P = Mat\ (id_{\mathbb{K}^n}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$
D'où $id_{\mathbb{K}^n}(V) = V$ s'écrit $PX' = X$.
Comme les vecteurs colonnes forment une base de E, P est inversible et $PX' = X$ donne $P^{-1}PX' = P^{-1}X$ et donc $I_nX' = P^{-1}X$.
Comme $(id_{\mathbb{K}^n})^{-1} = id_{\mathbb{K}^n}$, $\boxed{P^{-1} = P^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}}$.

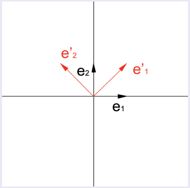
Matrice de passage

Exemple

$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

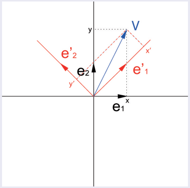


Matrice de passage

Exemple

Soit V un vecteur de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Les coordonnées X' de V dans $\mathcal{B}'$ vérifient $X = PX'$ et donc $X' = P^{-1}X$ c'est-à-dire $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \\ -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \end{pmatrix}$.

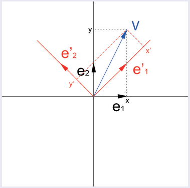


Matrice de passage

Cas particulier 1

Les coordonnées de e'_1 dans $\mathcal{B}$ sont $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tandis que dans $\mathcal{B}'$ ce sont $X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

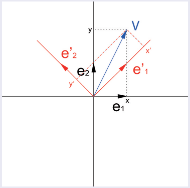
Vérification: $X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



Matrice de passage

Cas particulier 2

Les coordonnées de $V = e_1 + 2e_2$ dans $\mathcal{B}$ sont $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, tandis que dans $\mathcal{B}'$ ce sont $X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.



Matrice de passage

Propriété 1

Soit $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E.
$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$

Démonstration

$$\begin{array}{cccc} id_{\mathbb{K}^n} : & E & \to & E \\ & \mathcal{B}'' & P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} & \mathcal{B} \\ & {\color{red}X''} & & P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} X'' \\ & & & \\ & & & {\color{red}X} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & id_{\mathbb{K}^n} & & id_{\mathbb{K}^n} & \\ id_{\mathbb{K}^n} : & E & \to & E & \to & E \\ & \mathcal{B}'' & P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} & \mathcal{B}' & P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} & \mathcal{B} \\ & {\color{red}X''} & & P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} X'' & & P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} X'' \\ & & & & & \\ & & & & & {\color{red}X} \end{array}$$

Matrice de passage

Remarque

En écrivant $I_n = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ et $I_n = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, on retrouve $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'^{-1}} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$

Multiplication

Propriété 2

Soit $E \to E$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, , \cdots, e'_n)$ deux bases de E, $A = Mat\,(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$, $A' = Mat\,(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$, $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}$$

Démonstration

$$\begin{array}{ccccc} & & f & & \\ f: & E & \to & E \\ & \mathcal{B}' & A' & \mathcal{B}' \\ & X' & & A'X' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & id_{\mathbb{K}^n} & & f & & id_{\mathbb{K}^n} & \\ f: & E & \to & E & \to & E & \to & E \\ & \mathcal{B}' & P & \mathcal{B} & A & \mathcal{B} & P^{-1} & \mathcal{B}' \\ & X' & & PX' & & APX' & & P^{-1}APX' \\ & & & X & & AX & & \end{array}$$

Multiplication

Exemple

$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$ avec $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = e_1$.

$$A = Mat\,(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A' = Mat\,(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}') = P^{-1}AP$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Multiplication

Exemple

Soit V un vecteur de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Les coordonnées de $f(V)$ dans $\mathcal{B}$ sont

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Soit ${\color{red}X'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les coordonnées de V dans $\mathfrak{B}'$.

Les coordonnées de $f(V)$ dans $\mathcal{B}'$ sont

$${\color{red}Y'} = AX' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -y' \end{pmatrix}.$$

Multiplication

Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice est le rang de ses vecteurs colonnes, c'est-à-dire la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes.

Exemples

Le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est 2 (A est inversible).

Le rang de $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est 2.

Remarque

A' n'est pas inversible.

Complément : matrice inversible

Propriété

Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

1. S'il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}_n$ telle que $AA' = I_n$ alors A est inversible et $A' = A^{-1}$.
2. S'il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}_n$ telle que $A'A = I_n$ alors A est inversible et $A' = A^{-1}$.

Déterminant de n vecteurs

Définition 1

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Une application $f : E^n \to \mathbb{R}$ est dite forme multilinéaire si, pour chaque $j = 1, 2, \dots, n$ et pour toute suite de vecteurs $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ de E^n, l'application $f_j : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_j(X) = f(V_1, V_2, \dots, V_{j-1}, X, V_{j+1}, V_n)$$

est linéaire.

Définition 2

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Une forme multilinéaire $f : E^n \to \mathbb{R}$ est dite alternée si pour tout $j = 1, 2, \dots, n$ et $k \neq j$, on a :
$f(V_1, V_2, \dots, V_{j-1}, V_k, V_{j+1}, \dots, V_{k-1}, V_j, V_{k+1}, \dots, V_n)$
$= -f(V_1, V_2, \dots, V_{j-1}, V_j, V_{j+1}, \dots, V_{k-1}, V_k, V_{k+1}, \dots, V_n)$.

Déterminant de n vecteurs

Remarque

f est alternée si et seulement si pour tous j et k tels que $j \neq k$
$f(V_1, V_2, \ldots, V_{j-1}, V_j, V_{j+1}, \ldots, V_{k-1}, V_j, V_{k+1}, \ldots, V_n) = 0$.

Démonstration

- Si f est alternée, alors
$f(V_1, V_2, \ldots, V_{j-1}, V_j, V_{j+1}, \ldots, V_{k-1}, V_j, V_{k+1}, \ldots, V_n) =$
$-f(V_1, V_2, \ldots, V_{j-1}, V_j, V_{j+1}, \ldots, V_{k-1}, V_j, V_{k+1}, \ldots, V_n)$.
On en déduit
$2f(V_1, V_2, \ldots, V_{j-1}, V_j, V_{j+1}, \ldots, V_{k-1}, V_j, V_{k+1}, \ldots, V_n) = 0$.

Démonstration

- Si pour tout j $f(V_1, V_2, \ldots, V_{j-1}, V_j, V_{j+1}, \ldots, V_{k-1}, V_j, V_{k+1}, \ldots, V_n) = 0$,
alors on a
$f(V_1, V_2, \ldots, V_{j-1}, V_j + V_k, V_{j+1}, \ldots, V_{k-1}, V_j + V_k, V_{k+1}, \ldots, V_n) = 0$
et donc
$f(V_1, V_2, \ldots, V_{j-1}, V_j, V_{j+1}, \ldots, V_{k-1}, V_j + V_k, V_{k+1}, \ldots, V_n) +$
$f(V_1, V_2, \ldots, V_{j-1}, V_k, V_{j+1}, \ldots, V_{k-1}, V_j + V_k, V_{k+1}, \ldots, V_n) = 0$
puis
$f(V_1, V_2, \ldots, V_{j-1}, V_j, V_{j+1}, \ldots, V_{k-1}, V_j, V_{k+1}, \ldots, V_n) +$
$f(V_1, V_2, \ldots, V_{j-1}, V_j, V_{j+1}, \ldots, V_{k-1}, V_k, V_{k+1}, \ldots, V_n) +$
$f(V_1, V_2, \ldots, V_{j-1}, V_k, V_{j+1}, \ldots, V_{k-1}, V_j, V_{k+1}, \ldots, V_n) +$
$f(V_1, V_2, \ldots, V_{j-1}, V_k, V_{j+1}, \ldots, V_{k-1}, V_k, V_{k+1}, \ldots, V_n) = 0.$
On obtient alors
$f(V_1, V_2, \ldots, V_{j-1}, V_j, V_{j+1}, \ldots, V_{k-1}, V_k, V_{k+1}, \ldots, V_n) +$
$f(V_1, V_2, \ldots, V_{j-1}, V_k, V_{j+1}, \ldots, V_{k-1}, V_j, V_{k+1}, \ldots, V_n) = 0.$

Déterminant de n vecteurs

Théorème 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
Il existe une seule forme multilinéaire $f : E^n \to \mathbb{R}$ alternée telle que $f(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$.

Notation

$$f(V_1, V_2, \dots, V_n) = det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

avec $V_j = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n}$

Déterminant de n vecteurs

M1202
Algèbre
linéaire

Département
Informatique

Plan

Matrices

Matrice d'une application linéaire

Multiplication

Déterminants

Propriétés

Compléments

Démonstration

La démonstration se fait par récurrence.

Pour $\boxed{n = 2}$,

$$
\begin{aligned}
& f(V_1, V_2) = f(a_{11}e_1 + a_{21}e_2, a_{12}e_1 + a_{22}e_2) \\
& = a_{11}f(e_1, a_{12}e_1 + a_{22}e_2) + a_{21}f(e_2, a_{12}e_1 + a_{22}e_2) \\
& = a_{11}a_{12}f(e_1, e_1) + a_{11}a_{22}f(e_1, e_2) + a_{21}a_{12}f(e_2, e_1) + a_{21}a_{22}f(e_2, e_2) \\
& = a_{11}a_{22}f(e_1, e_2) + a_{21}a_{12}f(e_2, e_1) \\
& = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})f(e_1, e_2) \\
& = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \\
& = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Déterminant de n vecteurs

M1202 Algèbre linéaire

Département Informatique

Démonstration

Pour $\boxed{n=3}$, $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$

$V_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + a_{3j}e_3$

$f(V_1,V_2,V_3) = f(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3, V_2, V_3)$

$= a_{11}f(e_1,V_2,V_3) + a_{21}f(e_2,V_2,V_3) + a_{31}f(e_3,V_2,V_3)$

$f(e_1,V_2,V_3) = f(e_1,V_2',V_3')$ avec $V_2' = a_{22}e_2 + a_{32}e_3$ et $V_3' = a_{23}e_2 + a_{33}e_3$

$f(e_1,e_2,e_3) = 1$

donc $g(V_2',V_3') = f(e_1,V_2',V_3') = det_{(e_2,e_3)}(V_2',V_3') = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$f(e_2,V_2,V_3) = f(e_2,V_2',V_3')$ avec $V_2' = a_{12}e_1 + a_{32}e_3$ et $V_3' = a_{13}e_1 + a_{33}e_3$

$f(e_2,e_1,e_3) = -1$ donc

$g(V_2',V_3') = f(e_2,V_2',V_3') = -det_{(e_1,e_3)}(V_2',V_3') = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$f(e_3,V_2,V_3) = f(e_3,V_2',V_3')$ avec $V_2' = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$ et $V_3' = a_{13}e_1 + a_{23}e_2$

$f(e_3,e_1,e_2) = 1$ donc

$g(V_2',V_3') = f(e_3,V_2',V_3') = det_{(e_1,e_2)}(V_2',V_3') = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

Déterminant de n vecteurs

Démonstration

On en déduit

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \mathbf{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \mathbf{a_{21}} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \mathbf{a_{31}} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Déterminant de n vecteurs

Exemple 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 . \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 5 . \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 . \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1.1 - 5.2 + 2.3 = -3$$

Déterminant de n vecteurs

Généralisation : développement suivant la colonne j

$$det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \ldots, V_n)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & \mathbf{a_{1j}} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & \mathbf{a_{i-1j}} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ \mathbf{a_{i1}} & \cdots & \mathbf{a_{ij-1}} & \mathbf{a_{ij}} & \mathbf{a_{ij+1}} & \cdots & \mathbf{a_{in}} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & \mathbf{a_{i+1j}} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & \mathbf{a_{nj}} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Déterminant de n vecteurs

Généralisation : développement suivant la colonne j

Autre écriture : $det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det\ A_{ij}$

où A_{ij} est la matrice de type $(n-1, n-1)$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne dans la matrice $A = \left(a_{ij}\right)$.

Déterminant de n vecteurs

Exemple 1 : autre développement

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}.2.\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}.1.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}.0.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (-2).(-1) + 1.(-5) - 0.(-12) = -3$$

Déterminant de n vecteurs

Exemple 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}.9.\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + (-1)^{4+3}.1.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Déterminant de n vecteurs

Remarque : déterminant d'ordre 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Déterminant de n vecteurs

M1202
Algèbre
linéaire

Département
Informatique

Exemple 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1.1.1 + 5.0.3 + 2.3.2) - (2.1.3 + 0.3.1 + 5.2.1)$$
$$= 13 - 16 = -3.$$

Déterminant de n vecteurs

Exemple 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+3}.9.\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}.0 + (-1)^{3+3}.0 + (-1)^{4+3}.1.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 9\,(9+20+6-(6+10+18)) - 1\,(10+4+9-(10+3+12))$$

$$= 9(35-34) - (23-25) = 9+2 = 11.$$

Déterminant de n vecteurs

Remarques

On obtient de la même manière :
si f est une forme multilinéaire alternée telle que $f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 0$, alors $f = 0$ sur E^n.

Corollaire

Deux formes multilinéaires alternées f et g vérifiant $f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = g(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ sont égales : $f = g$.

Démonstration

On montre $f - g = 0$.

Déterminant de matrice

Définition

Soient $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ une matrice de type (n, n) et

$V_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, V_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ les vecteurs colonnes de A.

On appelle déterminant de la matrice A le déterminant de ses vecteurs colonnes $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ par rapport la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Déterminant de matrice

Notation

$$det\ A = \left| \ a_{ij} \ \right| = det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \ldots, V_n)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}|$$

Déterminant de matrice

Exemple

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

Autre définition

Autre définition

En posant $V_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, on a

$$det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n) = det_{\mathcal{B}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i2} e_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{in} e_i \right)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} det_{\mathcal{B}}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}).$$

$det_{\mathcal{B}}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$ est non nul si et seulement si $i_1, i_2, \dots, i_n$ sont tous différents, c'est-à-dire si $i_1 = \sigma(1), \dots, i_n = \sigma(n)$ avec σ permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$.

On a donc $det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n)$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} det_{\mathcal{B}}(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

avec S_n ensemble de toutes les permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Autre définition

Transposition

On appelle transposition de $\{1, 2, \ldots, n\}$ une permutation τ échangeant deux entiers j et k : $\tau(i) = i$ si $i \neq j$ et $i \neq k$, $\tau(j) = k$ et $\tau(k) = j$.

Propriété 1

Si τ est une transposition, $\tau \circ \tau = id$ et $\tau^{-1} = \tau$.

Propriété 2

Si $n \geq 2$, toute permutation est la composée de transpositions.

Autre définition

Démonstration par récurrence sur n

- $n = 2$:
  les permutations de $\{1, 2\}$ sont la transposition τ échangeant 1 et 2 ainsi que l'identité $id = \tau \circ \tau$:
  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Autre définition

Démonstration par récurrence sur n

- On suppose que pour un entier $n \geq 2$ toute permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ est la composée de transpositions.
  Soit σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$.
  - Si $\sigma(n+1) = n+1$ alors la restriction de σ à $\{1, 2, \ldots, n\}$ est la composée de transpositions.
    On complète la définition de chacune des transpositions τ par $\tau(n+1) = n+1$ et σ est bien la composée de transpositions.
  - Sinon, on note $\sigma(n+1) = k$, $k \leq n$.
    On définit la transposition τ de $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ par $\tau(k) = n+1$.
    On en déduit $\tau \circ \sigma(n+1) = \tau(k) = n+1$ et donc $\tau \circ \sigma$ est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ telle que $\tau \circ \sigma(n+1) = n+1$.
    On est ramené au cas précédent et $\tau \circ \sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_N$.
    On a alors $\tau \circ \tau \circ \sigma = \tau \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_N$ et donc $\sigma = \tau \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_N$.

Autre définition

Exemple

Ecrivons $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ comme composée de transpositions.

$\tau_{13} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et donc $\tau_{12} \circ \tau_{13} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = id$

On a alors $\tau_{12} \circ \tau_{12} \circ \tau_{13} \circ \sigma = \tau_{12} \circ id$ soit $\tau_{13} \circ \sigma = \tau_{12}$

puis $\tau_{13} \circ \tau_{13} \circ \sigma = \tau_{13} \circ \tau_{12}$

et $id \circ \sigma = \tau_{13} \circ \tau_{12}$.

Conclusion : $\sigma = \tau_{13} \circ \tau_{12}$

Autre définition

M1202
Algèbre
linéaire

Département
Informatique

Plan

Matrices

Matrice d'une application linéaire

Multiplication

Déterminants

Propriétés

Compléments

Remarque

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\tau_{12} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\tau_{23} \circ \tau_{12} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = id$

et donc $\sigma = \tau_{12} \circ \tau_{23} = \tau_{13} \circ \tau_{12}$ (non unicité)

Autre définition

Nouvelle écriture du déterminant

Pour toute transposition τ de $\{1, 2, \dots, n\}$:
$det_{\mathcal{B}}(e_{\tau(1)}, e_{\tau(2)}, \dots, e_{\tau(n)}) = -1$.
Pour toute permutation σ, il existe donc un entier N tel que
$det_{\mathcal{B}}\left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}\right) = (-1)^N$.
On note $\epsilon(\sigma) = (-1)^N$ et $\epsilon(\sigma)$ est appelé la signature de σ.
On a donc

$$det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n)$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} det_{\mathcal{B}}(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \epsilon(\sigma) det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

et donc $\boxed{det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}}$

Autre définition

Exemple

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Autre définition

Corollaire

$det\ {}^tA = det\ A$

Démonstration

$$det\ A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

$$det\ {}^tA = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Or $a_{i\sigma(i)} = a_{\sigma^{-1}(i)i}$ et l'application $\sigma \rightarrow \sigma' = \sigma^{-1}$ est une bijection.

$$det\ {}^tA = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \dots a_{\sigma^{-1}(n)n} = det\ A$$

Autre définition

Conséquence : développement suivant une ligne

Développement suivant la colonne j

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\ det\ A_{ij}$$

Développement suivant la ligne i

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\ det\ A_{ij}$$

avec $$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} est la matrice de type (n, n) obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne dans la matrice $A = (a_{ij})$.

Autre définition

Exemple

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 0 & 17 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 + 0 + (-1)^{2+4}.1.\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 + 0 + 0 - (20 + 72 + 0) = -68$$

Propriétés

Indépendance linéaire

Pour toute base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel de dimension n $det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \ldots, V_n) = 0$ si et seulement si la suite $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ est liée.

Propriétés

M1202 Algèbre linéaire

Département Informatique

Démonstration

- Si $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ est liée, alors un des vecteurs V_j s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs.
  En supposant qu'il s'agisse de V_1, on a $V_1 = \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 + \ldots + \lambda_n V_n$.
  $det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \ldots, V_n) = det_{\mathcal{B}}(\lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 + \ldots + \lambda_n V_n, V_2, \ldots, V_n)$
  $= \lambda_2 det_{\mathcal{B}}(V_2, V_2, \ldots, V_n) + \lambda_3 det_{\mathcal{B}}(V_3, V_2, V_3, \ldots, V_n) + \ldots +$
  $\lambda_n det_{\mathcal{B}}(V_n, V_2, \ldots, V_n) = 0$.
- Si $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ est libre, alors $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ est une base de E.
  On a, en posant $e_j = a_{1j} V_1 + a_{2j} V_2 + \ldots a_{nj} V_n$:
  $$det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n} det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \ldots, V_n).$$
  Si $det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \ldots, V_n) = 0$ alors $det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 0$.
  Impossible car $det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$.
  Donc $det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \ldots, V_n) \neq 0$.

Propriétés

Corollaires :

$det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n) \neq 0$ si et seulement si la suite $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ est libre.
Une matrice A est inversible si et seulement si $det\ A \neq 0$.

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

En posant $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, la suite (V_1, V_2, V_3) est libre et la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est donc inversible.

Propriétés

Changement de base

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ deux bases de E, espace vectoriel de dimension n. On a :

$$det_{\mathcal{B}'}(V_1, V_2, \ldots, V_n) = \frac{det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \ldots, V_n)}{det_{\mathcal{B}}(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)}$$

Démonstration

Les deux membres sont des formes multilinéaires alternées qui prennent la même valeur sur la base $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$. Elles sont donc égales.

Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.
Il existe une constante $C(f)$ telle que pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E on ait :

$$det_{\mathcal{B}}(f(V_1), f(V_2), \dots, f(V_n)) = C(f)\ det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n)$$

pour toute suite $(V_1, V_2, \dots, V_n)$.

Définition

$C(f)$ est appelé le déterminant de f et noté $det\, f$.

Déterminant d'un endomorphisme

Démonstration

S'il existe, $C(f) = det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$.
$det_{\mathcal{B}}(f(V_1), f(V_2), \ldots, f(V_n))$ et
$det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))\ det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ sont des formes multilinéaires alternées prenant la même valeur en $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
Elles sont donc égales.
De plus,

$$\begin{aligned} det_{\mathcal{B}'}(f(V_1), f(V_2), \ldots, f(V_n)) &= \frac{det_{\mathcal{B}}(f(V_1), f(V_2), \ldots, f(V_n))}{det_{\mathcal{B}}(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)} \\ &= \frac{C(f)\ det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \ldots, V_n)}{det_{\mathcal{B}}(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)} \\ &= C(f)\ det_{\mathcal{B}'}(V_1, V_2, \ldots, V_n) \end{aligned}$$

Déterminant d'un endomorphisme

Corollaire 1

Si f et g sont des endomorphismes alors $det\,(g \circ f) = det\, g \times det\, f$.

$det\,(g \circ f) = det_{\mathcal{B}}(g\,(f(e_1))\,, g\,(f(e_2))\,, \dots, g\,(f(e_n)))$

$= det\, g \times det_{\mathcal{B}}\,(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) = det\, g \times det\, f$

Corollaire 2

Un endomorphisme f est un automorphisme si et seulement si $det\, f \neq 0$.

f est un automorphisme si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une base

si et seulement si $det_{\mathcal{B}}\,(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) \neq 0$.

Corollaire 3

Si A et B sont des matrices carrées, alors $det\, AB = det\, A\, det\, B$.

Corollaire 4

Pour que A soit inversible, il faut et il suffit que $det\, A \neq 0$.

On a alors $det\, A^{-1} = \dfrac{1}{det\, A}$

$det\, A\, det\, A^{-1} = det\, AA^{-1} = det\, I_n = 1$

Inverse de matrice

Corollaire 5

Si A est une matrice carrée inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A}\,{}^{t}B$$

avec $B = ((-1)^{i+j} det\ A_{ij})$, où A_{ij} est la matrice obtenue en supprimant dans A la i-ème ligne et la j-ème colonne.
Démonstration en complément.

Inverse de matrice

Exemple 1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversible : $det\, A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$

$B = \begin{pmatrix} +d & -c \\ -b & +a \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\,{}^{t}B = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Inverse de matrice

Exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est inversible : } det\, A = -3 \neq 0.$$

$$B = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 3 & 12 & -9 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\,{}^{t}B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 12 \\ -2 & 4 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -4 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 3 \end{pmatrix}$$

Waterfall Escher (1961)

Complément 1 : corollaire 5 (démonstration)

Corollaire 5

Si A est une matrice carrée inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A}\ {}^{t}B$$

avec $B = ((-1)^{i+j} det\ A_{ij})$, où A_{ij} est la matrice obtenue en supprimant dans A la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Démonstration

En notant ${}^{t}B = (b'_{ij}) = ((-1)^{j+i} det\ A_{ji})$ et ${}^{t}B\ A = (c_{ij})$, on a

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} b'_{ih} a_{hj} = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+i} det\ A_{hi} a_{hj}$$

- Si $i = j$ alors $c_{ii} = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+j} det\ A_{hj} a_{hj} = det\ A.$

  Il s'agit du développement suivant la colonne j.

Complément 1 : corollaire 5 (démonstration)

Démonstration

- Sinon

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+i} a_{hj} det A_{hi} = 0$$

Il s'agit du développement de *det A* suivant la colonne *i* de la matrice *A* qui contient les éléments de la colonne *j*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \mathbf{a_{1j}} & \cdots & \mathbf{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & \mathbf{a_{i-1j}} & \cdots & \mathbf{a_{i-1j}} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & \mathbf{a_{ij}} & \cdots & \mathbf{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & \cdots & \mathbf{a_{i+1j}} & \cdots & \mathbf{a_{i+1j}} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \mathbf{a_{nj}} & \cdots & \mathbf{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Complément 1 : corollaire 5 (démonstration)

Démonstration

Conclusion :

$$
{}^{t}B\ A = \begin{pmatrix} det\ A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & det\ A & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & det\ A \end{pmatrix} = det\ A\ .\ I_n
$$

Complément 2 : orientation d'un espace vectoriel

M1202 Algèbre linéaire

Département Informatique

Plan

Matrices

Matrice d'une application linéaire

Multiplication

Déterminants

Propriétés

Compléments

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ des bases de E.
Soit $\mathfrak{E}$ l'ensemble des bases de E et $\mathfrak{R}$ la relation définie sur $\mathfrak{E}$ par

$$\mathcal{B} \;\mathfrak{R}\; \mathcal{B}' \text{ si et seulement si } det_{\mathcal{B}}(e'_1, e'_2, \cdots, e'_n) = det\ P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} > 0$$

Propriétés

1. $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.
2. $\mathfrak{E}/\mathfrak{R}$ contient deux classes d'équivalence.

Complément 2 : orientation d'un espace vectoriel

Démonstration

1. $\mathfrak{R}$ est réflexive : $\forall \mathcal{B} \in \mathfrak{E}$ $det\ P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = 1 > 0$.
2. $\mathfrak{R}$ est symétrique : $\forall \mathcal{B}, \mathcal{B}' \in \mathfrak{E}$ $det\ P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} > 0 \Rightarrow det\ P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{det\ P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}} > 0$.
3. $\mathfrak{R}$ est transitive :
   $det\ P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} > 0$ et
   $det\ P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} > 0 \Rightarrow det\ P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = det\ P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = det\ P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\ det\ P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} > 0$.
4. Une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ étant fixée, $\mathcal{B} \in \overline{\mathcal{B}}$ et
   $det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \cdots, e_n) = det\ P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = 1 > 0$.
   $\mathcal{B}' = (-e_1, e_2, \cdots, e_n) \notin \overline{\mathcal{B}}$:
   $det_{\mathcal{B}}(-e_1, e_2, \cdots, e_n) = -det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \cdots, e_n) = -1$.
   Soit $\mathcal{B}''$ une base, $\mathcal{B}'' \notin \overline{\mathcal{B}}$.
   On a $det\ P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = det\ P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = \frac{detP_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}}{detP_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}} = \frac{detP_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}}{-1} > 0$.
   On a donc $\mathcal{B}'' \in \overline{\mathcal{B}'}$.

Complément 2 : orientation d'un espace vectoriel

Définitions

Deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation si et seulement si $det_{\mathcal{B}}(e'_1, e'_2, \cdots, e'_n) > 0$.
E est orienté par le choix d'une des deux classes d'équivalence qui peut passer par le choix d'un représentant : une base $\mathcal{B}$ alors dite positive ou directe.
Toute base ayant la même orientation est également dite positive ou directe et toute base n'ayant pas la même orientation est dite négative ou indirecte.

Complément 2 : orientation d'un espace vectoriel

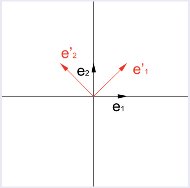
M1202 Algèbre linéaire
Département Informatique

Plan
Matrices
Matrice d'une application linéaire
Multiplication
Déterminants
Propriétés
Compléments

Exemple 1

On choisit la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ pour orienter $\mathbb{R}^2$.

- Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ avec $e'_1 = e_1 + e_2$ et $e'_2 = -e_1 + e_2$.
  $det_{\mathcal{B}}(e'_1, e'_2) = det\, P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0.$
  On en déduit que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ est une base directe ou positive de $\mathbb{R}^2$.
- Soit $\mathcal{B}'' = (e_2, e_1)$.
  $det_{\mathcal{B}}(e_2, e_1) = -det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2)$.
  $\mathcal{B}'' = (e_2, e_1)$ est donc une base indirecte ou négative.



Complément 2 : orientation d'un espace vectoriel

Exemple 2

$E = \mathbb{R}^3$.

On choisit la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ pour orienter $\mathbb{R}^3$.

- Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec $e'_1 = e_1 + 5e_2 + 2e_3$, $e'_2 = 2e_1 + e_2$ et $e'_3 = 3e_1 + 3e_2 + e_3$.

  $$det_{\mathcal{B}}(e'_1, e'_2, e'_3) = detP_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0.$$

  On en déduit que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base indirecte ou négative de $\mathbb{R}^3$.

- Soit $\mathcal{B}'' = (e_3, e_1, e_2)$.

  $det_{\mathcal{B}}(e_3, e_1, e_2) = -det_{\mathcal{B}}(e_1, e_3, e_2) = -(-det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3)) = 1 > 0$.

  $\mathcal{B}'' = (e_3, e_1, e_2)$ est donc une base directe ou positive.

Fuite de Pompée après la défaite de Pharsale Jean Fouquet (1420-1480)

Complément 3 : représentation matricielle d'une relation binaire

Matrice booléenne

La matrice booléenne d'une relation binaire $\mathfrak{R}$ sur un ensemble à n éléments est la matrice $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre n telle que $a_{ij} = 1$ si $i\mathfrak{R}j$, 0 sinon.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & \text{n} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \cdots \\ i \\ \cdots \\ n \end{array} &
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Complément 3 : représentation matricielle d'une relation binaire

Exemple

$|$ dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 1 & \color{blue}{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \color{blue}{0} & 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

Complément 3 : représentation matricielle d'une relation binaire

Opérations booléennes

L'addition booléenne $\vee$ ou $+$ est définie par
$0 \vee 0 = 0$ et $0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1$.
La multiplication booléenne $\wedge$ ou . ou encore $\times$ est définie par
$0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0$ et $1 \wedge 1 = 1$.
En notant $A = (a_{ij})$ et $A' = \left(a'_{ij}\right)$ deux matrices booléennes, on définit :
$A \vee A' = (s_{ij})$ par $s_{ij} = a_{ij} \vee a'_{ij}$
$A \wedge A' = (p_{ij})$ par $p_{ij} = \left(a_{i1} \wedge a'_{1j}\right) \vee \left(a_{i2} \wedge a'_{2j}\right) \vee \ldots \vee \left(a_{in} \wedge a'_{nj}\right)$
Autre définition : $A \wedge A' = (p_{ij})$ avec $p_{ij} = a_{ij} \wedge a'_{ij}$
Autres notations : $A \vee A' = A + A'$ et $A \wedge A' = A.A' = A \times A' = AA'$.

Complément 3 : représentation matricielle d'une relation binaire

Opérations booléennes : exemples

En prenant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on obtient :

$$A \vee B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \vee 1 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Complément 3 : représentation matricielle d'une relation binaire

Opérations booléennes : exemples

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$