

Documents autorisés : cours, TD, notes manuscrites. **Durée :** 1h 30.

Barème indicatif sur 40 : 2+3+2+4+3+2+5+2+4+3+2+6+2

Exercice 1

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E .

On a $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap \overline{B} = \{1, 6\}$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \{0, 7\}$.

En déduire les ensembles B et E .

Exercice 2

Écrire la table de vérité de $(A \wedge B) \cup (\overline{A} \wedge C)$ (reproduire et compléter le tableau suivant).

| A | B | C | \overline{A} | $A \wedge B$ | $\overline{A} \wedge C$ | $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge C)$ |
|-----|-----|-----|----------------|--------------|-------------------------|---|
| 0 | 0 | 0 | | | | |
| 0 | 0 | 1 | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | |
| 0 | 1 | 1 | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 1 | 1 | 0 | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | |

Exercice 3

L'ensemble de référence est \mathbb{N} .

1. Reproduire et compléter le tableau suivant

| n | $3^n - 2$ |
|-----|-----------|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |

2. Préciser la valeur de vérité de :

$$\exists n \geq 2 \quad \exists m \quad 3^n = 2 + m^2.$$

Expliquer.

Source : Revue Le petit vert APMEP 514 Mai-Juin 2015

Exercice 4

On note \mathfrak{R} la relation définie dans $\{1, 2, 3\}$ par la matrice booléenne A :

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

\mathfrak{R} est-elle

1. réflexive,
2. symétrique,
3. antisymétrique,
4. transitive ?

Expliquer.

Exercice 5

n est un entier naturel quelconque.

En utilisant la formule du binôme, développer et réduire

1. $(n+1)^6$,
2. $(n-1)^6$,
3. $(n+1)^6 + (n-1)^6$.

Exercice 6

Démontrer par récurrence : $\forall n \geq 1 \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

Exercice 7

1. Décomposer le nombre 2 560 en produit de facteurs premiers.
2. En déduire
 - (a) le nombre de diviseurs positifs de 2 560.
 - (b) l'écriture de 2 560 en base 2, en base 8, puis en base 16.

Exercice 8

On note $(F_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ($n \geq 1$).

Théorème admis : *Si F_n est premier alors n est premier.*

1. Ecrire la réciproque de : *Si F_n est premier alors n est premier.*

2. Est-ce que cette réciproque est vraie pour $n \geq 3$?

Expliquer.

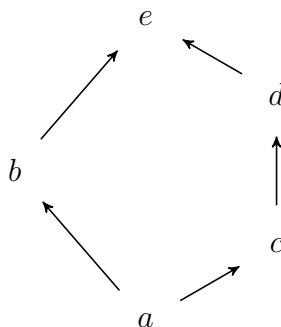
Indication : Écrire l'égalité de la division de $F_{19} = 4181$ par 37 et conclure.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| F_n | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 | 233 | 377 | 610 | 987 | 1597 | 2584 | 4181 |

Source : <http://images.math.cnrs.fr>

Exercice 9

On considère le treillis (E, \leq) avec $E = \{a, b, c, d, e\}$:



1. Reproduire et compléter le tableau suivant.

| | | | | | |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | a | b | c | d | e |
| $x \wedge b$ | | | | | |
| $x \vee b$ | | | | | |

2. En déduire les éventuels compléments de b . Expliquer.

3. Préciser les éléments suivants (reproduire et compléter le tableau) :

| | |
|-----------------------|----------------------------------|
| $d \wedge (b \vee c)$ | $(d \wedge b) \vee (d \wedge c)$ |
| | |

4. En déduire (en justifiant) si le treillis est

(a) distributif,

(b) une algèbre de Boole.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n + (-1)^n$.

1. Préciser $f(f(n))$.
2. En déduire que f est une bijection. Expliquer.
3. Préciser f^{-1} .

Exercice 11

On effectue la pagination d'un livre à partir de la page 1 et on compte le nombre de caractères utilisés.

On a utilisé 1803 caractères pour numéroter les pages. Combien le livre a-t-il de pages ?

Exercice 12

1. Appliquer l'algorithme d'Euclide étendu à 903 et 633.
2. En déduire $PGCD(903, 633)$, ainsi qu'une décomposition de Bezout :
 $PGCD(903, 633) = 903u + 633v$.
3. Résoudre $903x + 633y = 6$ dans \mathbb{Z}^2 .
4. Est-ce que $\overline{633}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/903\mathbb{Z}$?
Si oui, préciser $\overline{633}^{-1}$.
5. Est-ce que $\overline{633}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/902\mathbb{Z}$?
Si oui, préciser $\overline{633}^{-1}$.

Exercice 13

Si un nombre s'écrit avec $N = 101$ chiffres en base 10, combien en faudra-t-il en base 2 ?

Indications :

1. $\log_2 10 \approx 3,321928094887362$
2. Le nombre de chiffres en base b d'un nombre x écrit en base 10 est $\lceil \log_b x \rceil$.