# M2202

## Analyse et méthodes numériques
## Suites - Fonctions - Approximations

Aurélie Nemours (1954)

Ligne indéterminée (1987) de Bernard Venet, né en 1941

# Limite

## Voisinage

# Limite



## Voisinage

Les fonctions sont des fonctions réelles de la variable réelle.
$\mathfrak{D}_f$ est le domaine de définition de f.

# Limite

## Voisinage

Les fonctions sont des fonctions réelles de la variable réelle.
$\mathfrak{D}_f$ est le domaine de définition de f.
Un voisinage d'un réel $a$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de centre $a$.

# Limite

## Voisinage

Les fonctions sont des fonctions réelles de la variable réelle.
$\mathfrak{D}_f$ est le domaine de définition de f.
Un voisinage d'un réel $a$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de centre $a$.
Un voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle du type $]A, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, A[$).

# Limite

## Voisinage

Les fonctions sont des fonctions réelles de la variable réelle.
$\mathfrak{D}_f$ est le domaine de définition de f.
Un voisinage d'un réel $a$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de centre $a$.
Un voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle du type $]A, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, A[$).

## Exemples

# Limite

## Voisinage

Les fonctions sont des fonctions réelles de la variable réelle.
$\mathfrak{D}_f$ est le domaine de définition de f.
Un voisinage d'un réel $a$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de centre $a$.
Un voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle du type $]A, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, A[$).

## Exemples

$]-1, 1[$ et $[-1, 1]$ sont des voisinages de 0.

# Limite



## Voisinage

Les fonctions sont des fonctions réelles de la variable réelle.
$\mathfrak{D}_f$ est le domaine de définition de f.
Un voisinage d'un réel $a$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de centre $a$.
Un voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle du type $]A,\ +\infty[$ (respectivement $]-\infty,\ A[$).

## Exemples

$]-1,\ 1[$ et $[-1,\ 1]$ sont des voisinages de 0.
$]0,\ +\infty[$ et $[0,\ +\infty[$ sont des voisinages de $+\infty$

# Limite

## Point adhérent

# Limite

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

## Point adhérent

Un réel $a$ est un point adhérent à une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert de centre $a$ rencontre $\mathcal{P}$.

# Limite

## Point adhérent

Un réel $a$ est un point adhérent à une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert de centre $a$ rencontre $\mathcal{P}$.
$+\infty$ (respectivement $-\infty$) est adhérent à une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$ si $\mathcal{P}$ n'est pas majorée (respectivement minorée).

# Limite

## Point adhérent

Un réel $a$ est un point adhérent à une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert de centre $a$ rencontre $\mathcal{P}$.
$+\infty$ (respectivement $-\infty$) est adhérent à une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$ si $\mathcal{P}$ n'est pas majorée (respectivement minorée).

## Exemples

# Limite

## Point adhérent

Un réel $a$ est un point adhérent à une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert de centre $a$ rencontre $\mathcal{P}$.
$+\infty$ (respectivement $-\infty$) est adhérent à une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$ si $\mathcal{P}$ n'est pas majorée (respectivement minorée).

## Exemples

1 est un point adhérent à $]-1,\ 1[$ et à $[-1,\ 1]$.

# Limite



## Point adhérent

Un réel $a$ est un point adhérent à une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert de centre $a$ rencontre $\mathcal{P}$.
$+\infty$ (respectivement $-\infty$) est adhérent à une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$ si $\mathcal{P}$ n'est pas majorée (respectivement minorée).

## Exemples

1 est un point adhérent à $]-1,\ 1[$ et à $[-1,\ 1]$.
Autre formulation : 1 est adhérent à $]-1,\ 1[$.

# Limite

## Point adhérent

Un réel $a$ est un point adhérent à une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert de centre $a$ rencontre $\mathcal{P}$.
$+\infty$ (respectivement $-\infty$) est adhérent à une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$ si $\mathcal{P}$ n'est pas majorée (respectivement minorée).

## Exemples

1 est un point adhérent à $]-1,\ 1[$ et à $[-1,\ 1]$.
Autre formulation : 1 est adhérent à $]-1,\ 1[$.
0 est adhérent à $\left\{\frac{1}{n}\quad n \geq 1\right\}$.

# Limite

## Point adhérent

Un réel $a$ est un point adhérent à une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert de centre $a$ rencontre $\mathcal{P}$.

$+\infty$ (respectivement $-\infty$) est adhérent à une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$ si $\mathcal{P}$ n'est pas majorée (respectivement minorée).

## Exemples

1 est un point adhérent à $]-1,\ 1[$ et à $[-1,\ 1]$.

Autre formulation : 1 est adhérent à $]-1,\ 1[$.

0 est adhérent à $\left\{\dfrac{1}{n} \quad n \geq 1\right\}$.

$+\infty$ est adhérent à $]0,\ +\infty[$.

# Limite



## Limite

# Limite

## Limite

Soit un intervalle $I$, $a$ et $L$ finis ou non, $a$ adhérent à $I$.

# Limite



## Limite

Soit un intervalle $I$, $a$ et $L$ finis ou non, $a$ adhérent à $I$.
On note $f$ une fonction définie sur $I$ :

# Limite



## Limite

Soit un intervalle $I$, $a$ et $L$ finis ou non, $a$ adhérent à $I$.
On note $f$ une fonction définie sur $I$ : $\mathfrak{D}_f = I$, sauf éventuellement en $a$.

# Limite



## Limite

Soit un intervalle $I$, $a$ et $L$ finis ou non, $a$ adhérent à $I$.
On note $f$ une fonction définie sur $I$ : $\mathfrak{D}_f = I$, sauf éventuellement en $a$.
On dit que $f$ ou $f(x)$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ si à chaque voisinage $V$ de $L$ on peut associer un voisinage $U$ de $a$ tel que l'on ait $f(x) \in V$ pour tout $x \in U \cap I$.

# Limite

## Limite

Soit un intervalle $I$, $a$ et $L$ finis ou non, $a$ adhérent à $I$.
On note $f$ une fonction définie sur $I$ : $\mathfrak{D}_f = I$, sauf éventuellement en $a$.
On dit que $f$ ou $f(x)$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ si à chaque voisinage $V$ de $L$ on peut associer un voisinage $U$ de $a$ tel que l'on ait $f(x) \in V$ pour tout $x \in U \cap I$.
On dit alors que $f$ admet $L$ pour limite en $a$.

# Limite

## Limite

Soit un intervalle $I$, $a$ et $L$ finis ou non, $a$ adhérent à $I$.
On note $f$ une fonction définie sur $I$ : $\mathfrak{D}_f = I$, sauf éventuellement en $a$.
On dit que $f$ ou $f(x)$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ si à chaque voisinage $V$ de $L$ on peut associer un voisinage $U$ de $a$ tel que l'on ait $f(x) \in V$ pour tout $x \in U \cap I$.
On dit alors que $f$ admet $L$ pour limite en $a$.

## Notation

# Limite

## Limite

Soit un intervalle $I$, $a$ et $L$ finis ou non, $a$ adhérent à $I$.
On note $f$ une fonction définie sur $I$ : $\mathfrak{D}_f = I$, sauf éventuellement en $a$.
On dit que $f$ ou $f(x)$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ si à chaque voisinage $V$ de $L$ on peut associer un voisinage $U$ de $a$ tel que l'on ait $f(x) \in V$ pour tout $x \in U \cap I$.
On dit alors que $f$ admet $L$ pour limite en $a$.

## Notation

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

# Limite $L$ en $a$ finis



## Limite sur une partie $\mathcal{E}$

# Limite $L$ en $a$ finis



**Limite sur une partie $\mathcal{E}$**

Soit $\mathcal{E}$ une partie d'un intervalle $I$, $a$ et $L$ finis ou non, $a$ adhérent à $\mathcal{E}$.

# Limite $L$ en $a$ finis



## Limite sur une partie $\mathcal{E}$

Soit $\mathcal{E}$ une partie d'un intervalle $I$, $a$ et $L$ finis ou non, $a$ adhérent à $\mathcal{E}$.
On note $f$ une fonction définie sur $I$ : $\mathcal{D}_f = I$, sauf éventuellement en $a$.

# Limite $L$ en $a$ finis



## Limite sur une partie $\mathcal{E}$

Soit $\mathcal{E}$ une partie d'un intervalle $I$, $a$ et $L$ finis ou non, $a$ adhérent à $\mathcal{E}$.
On note $f$ une fonction définie sur $I$ : $\mathcal{D}_f = I$, sauf éventuellement en $a$.
On dit que $f$ ou $f(x)$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ sur $\mathcal{E}$ si à chaque voisinage $V$ de $L$ on peut associer un voisinage $U$ de $a$ tel que l'on ait $f(x) \in V$ pour tout $x \in U \cap \mathcal{E}$.

# Limite $L$ en $a$ finis

## Limite sur une partie $\mathcal{E}$

Soit $\mathcal{E}$ une partie d'un intervalle $I$, $a$ et $L$ finis ou non, $a$ adhérent à $\mathcal{E}$.
On note $f$ une fonction définie sur $I$ : $\mathcal{D}_f = I$, sauf éventuellement en $a$.
On dit que $f$ ou $f(x)$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ sur $\mathcal{E}$ si à chaque voisinage $V$ de $L$ on peut associer un voisinage $U$ de $a$ tel que l'on ait $f(x) \in V$ pour tout $x \in U \cap \mathcal{E}$.
On dit alors que $f$ admet $L$ pour limite en $a$ sur $\mathcal{E}$.

# Limite $L$ en $a$ finis

## Limite sur une partie $\mathcal{E}$

Soit $\mathcal{E}$ une partie d'un intervalle $I$, $a$ et $L$ finis ou non, $a$ adhérent à $\mathcal{E}$.
On note $f$ une fonction définie sur $I$ : $\mathcal{D}_f = I$, sauf éventuellement en $a$.
On dit que $f$ ou $f(x)$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ sur $\mathcal{E}$ si à chaque voisinage $V$ de $L$ on peut associer un voisinage $U$ de $a$ tel que l'on ait $f(x) \in V$ pour tout $x \in U \cap \mathcal{E}$.
On dit alors que $f$ admet $L$ pour limite en $a$ sur $\mathcal{E}$.

## Notations particulières

# Limite $L$ en $a$ finis

## Limite sur une partie $\mathcal{E}$

Soit $\mathcal{E}$ une partie d'un intervalle $I$, $a$ et $L$ finis ou non, $a$ adhérent à $\mathcal{E}$.
On note $f$ une fonction définie sur $I$ : $\mathcal{D}_f = I$, sauf éventuellement en $a$.
On dit que $f$ ou $f(x)$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ sur $\mathcal{E}$ si à chaque voisinage $V$ de $L$ on peut associer un voisinage $U$ de $a$ tel que l'on ait $f(x) \in V$ pour tout $x \in U \cap \mathcal{E}$.
On dit alors que $f$ admet $L$ pour limite en $a$ sur $\mathcal{E}$.

## Notations particulières

$\mathcal{E} = \mathcal{D}_f = I$ : $\lim_{x \to a} f(x) = L$

# Limite $L$ en $a$ finis

## Limite sur une partie $\mathcal{E}$

Soit $\mathcal{E}$ une partie d'un intervalle $I$, $a$ et $L$ finis ou non, $a$ adhérent à $\mathcal{E}$.
On note $f$ une fonction définie sur $I$ : $\mathcal{D}_f = I$, sauf éventuellement en $a$.
On dit que $f$ ou $f(x)$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ sur $\mathcal{E}$ si à chaque voisinage $V$ de $L$ on peut associer un voisinage $U$ de $a$ tel que l'on ait $f(x) \in V$ pour tout $x \in U \cap \mathcal{E}$.
On dit alors que $f$ admet $L$ pour limite en $a$ sur $\mathcal{E}$.

## Notations particulières

$\mathcal{E} = \mathcal{D}_f = I$ : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

$\mathcal{E} = D_f - \{a\} = I - \{a\}$ : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = L$

# Limite $L$ en $a$ finis

## Limite sur une partie $\mathcal{E}$

Soit $\mathcal{E}$ une partie d'un intervalle $I$, $a$ et $L$ finis ou non, $a$ adhérent à $\mathcal{E}$.
On note $f$ une fonction définie sur $I$ : $\mathcal{D}_f = I$, sauf éventuellement en $a$.
On dit que $f$ ou $f(x)$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ sur $\mathcal{E}$ si à chaque voisinage $V$ de $L$ on peut associer un voisinage $U$ de $a$ tel que l'on ait $f(x) \in V$ pour tout $x \in U \cap \mathcal{E}$.
On dit alors que $f$ admet $L$ pour limite en $a$ sur $\mathcal{E}$.

## Notations particulières

$\mathcal{E} = \mathcal{D}_f = I$ : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

$\mathcal{E} = D_f - \{a\} = I - \{a\}$ : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = L$

$\mathcal{E} = \mathfrak{D}_f \cap ]a, +\infty[ = I \cap ]a, +\infty[$ : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = L$

# Limite $L$ en $a$ finis



## Limite sur une partie $\mathcal{E}$

Soit $\mathcal{E}$ une partie d'un intervalle $I$, $a$ et $L$ finis ou non, $a$ adhérent à $\mathcal{E}$.
On note $f$ une fonction définie sur $I$ : $\mathcal{D}_f = I$, sauf éventuellement en $a$.
On dit que $f$ ou $f(x)$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ sur $\mathcal{E}$ si à chaque voisinage $V$ de $L$ on peut associer un voisinage $U$ de $a$ tel que l'on ait $f(x) \in V$ pour tout $x \in U \cap \mathcal{E}$.
On dit alors que $f$ admet $L$ pour limite en $a$ sur $\mathcal{E}$.

## Notations particulières

$$\mathcal{E} = \mathcal{D}_f = I : \lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\mathcal{E} = D_f - \{a\} = I - \{a\} : \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = L$$

$$\mathcal{E} = \mathfrak{D}_f \cap ]a, +\infty[ = I \cap ]a, +\infty[ : \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = L$$

$$\mathcal{E} = \mathfrak{D}_f \cap ]-\infty, a[ = I \cap ]-\infty, a[ : \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = L$$

# Limite $L$ en $a$ finis



**Autre formulation : $\lim_{x \to a} f(x) = L$**

# Limite $L$ en $a$ finis



**Autre formulation : $\lim_{x \to a} f(x) = L$**

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

# Limite $L$ en $a$ finis



**Autre formulation : $\lim_{x \to a} f(x) = L$**

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple 1**

# Limite $L$ en $a$ finis



**Autre formulation : $\lim_{x \to a} f(x) = L$**

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple 1**

$f_1(x) = x^2$

# Limite $L$ en $a$ finis

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



**Autre formulation : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$**

$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0\quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple 1**

$f_1(x) = x^2$
$\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

# Limite $L$ en $a$ finis



**Autre formulation : $\lim_{x \to a} f(x) = L$**

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple 1**

$f_1(x) = x^2$

$\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

$\mathcal{E} = \mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}$

# Limite $L$ en $a$ finis

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

**Autre formulation : $\lim_{x \to a} f(x) = L$**

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \ |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple 1**

$f_1(x) = x^2$
$\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$
$\mathcal{E} = \mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}$
$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

# Limite $L$ en $a$ finis

## Autre formulation : $\lim_{x \to a} f(x) = L$

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

## Exemple 1

$f_1(x) = x^2$

$\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

$\mathcal{E} = \mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta = \sqrt{\epsilon} > 0 \; |x - 0| < \eta \Rightarrow |x^2 - 0| < \epsilon$

# Limite $L$ en $a$ finis

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



**Exemple 1 : $f_1(x) = x^2$**

# Limite $L$ en $a$ finis



**Exemple 1 : $f_1(x) = x^2$**

$$\lim_{x \to 0} f_1(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ |x - 0| < \eta \Rightarrow |f_1(x) - 0| < \epsilon$$

# Limite $L$ en $a$ finis



## Exemple 1 : $f_1(x) = x^2$

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = 0 \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists\eta > 0\ |x-0| < \eta \Rightarrow |f_1(x) - 0| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists\eta > 0\ \ -\eta < x < \eta \Rightarrow -\epsilon < f_1(x) < \epsilon$$

# Limite $L$ en $a$ finis

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

## Exemple 1 : $f_1(x) = x^2$

$\lim_{x\to 0} f_1(x) = 0 \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists\eta > 0\ |x - 0| < \eta \Rightarrow |f_1(x) - 0| < \epsilon$

$\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists\eta > 0\ \ -\eta < x < \eta \Rightarrow -\epsilon < f_1(x) < \epsilon$

$\forall\epsilon > 0\ \exists\eta = \sqrt{\epsilon} > 0\ \ -\eta < x < \eta \Rightarrow -\epsilon < f_1(x) < \epsilon$

# Limite $L$ en $a$ finis

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

## Exemple 1 : $f_1(x) = x^2$

$\lim_{x \to 0} f_1(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; |x - 0| < \eta \Rightarrow |f_1(x) - 0| < \epsilon$

$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; -\eta < x < \eta \Rightarrow -\epsilon < f_1(x) < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta = \sqrt{\epsilon} > 0 \; -\eta < x < \eta \Rightarrow -\epsilon < f_1(x) < \epsilon$

Cas particulier : $\epsilon = 0.05$ :

$-\sqrt{0.05} < x < \sqrt{0.05} \Rightarrow -0.05 < x^2 < 0.05$

# Limite $L$ en $a$ finis

## Exemple 1 : $f_1(x) = x^2$

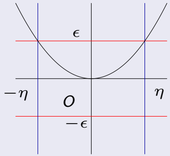
$\lim_{x \to 0} f_1(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0\ |x - 0| < \eta \Rightarrow |f_1(x) - 0| < \epsilon$

$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \ -\eta < x < \eta \Rightarrow -\epsilon < f_1(x) < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta = \sqrt{\epsilon} > 0\ \ -\eta < x < \eta \Rightarrow -\epsilon < f_1(x) < \epsilon$

Cas particulier : $\epsilon = 0.05$ :

$-\sqrt{0.05} < x < \sqrt{0.05} \Rightarrow -0.05 < x^2 < 0.05$



# Limite $L$ en $a$ finis



**Exemple 2 : $f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$**

# Limite $L$ en $a$ finis



**Exemple 2 : $f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$**

$$f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

# Limite $L$ en $a$ finis

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



**Exemple 2 : $f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$**

$$f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$$
$$\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$$

# Limite $L$ en $a$ finis

**Exemple 2 : $f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$**

$f_2(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$

$\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\mathcal{E} = \mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}^*$

# Limite $L$ en $a$ finis



## Exemple 2 : $f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$

$f_2(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$

$\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\mathcal{E} = \mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$

# Limite $L$ en $a$ finis

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



**Exemple 2 : $f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$**

$$f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$$
$$\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$
$$\mathcal{E} = \mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}^*$$
$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$
$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta = \epsilon > 0 \; 0 < |x - 0| < \eta \Rightarrow |x \sin \frac{1}{x} - 0| < \epsilon$$

# Limite $L$ en $a$ finis



**Exemple 2 : $f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$**

$f_2(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$

$\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\mathcal{E} = \mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$

$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta = \epsilon > 0\ 0 < |x - 0| < \eta \Rightarrow |x \sin \dfrac{1}{x} - 0| < \epsilon$

En effet, $\forall x \neq 0\ |x \sin \dfrac{1}{x}| = |x||\sin \dfrac{1}{x}| \leq |x|$

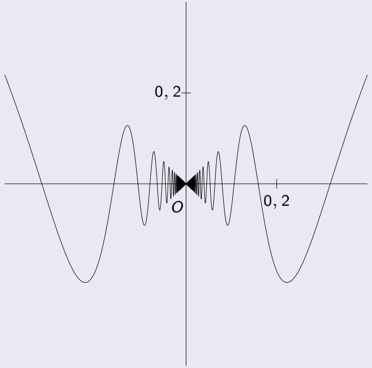
# Limite $L$ en $a$ finis



## $f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$

# Limite $L$ en $a$ finis

## $f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$



# Limite

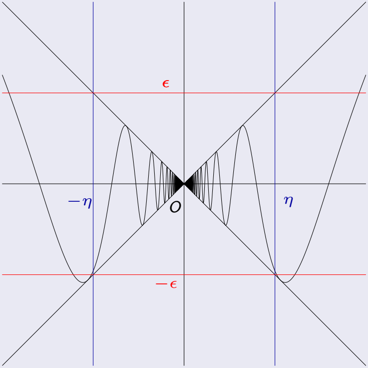


## $f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$

# Limite



## $f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$



# Limite $L$ en $a$ finis



**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = L$**

# Limite $L$ en $a$ finis

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = L$**

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \ 0 < |x - a| < \eta \ \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

# Limite $L$ en $a$ finis



**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = L$**

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \quad 0 < |x - a| < \eta \;\Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

**Exemple**

# Limite $L$ en $a$ finis



## Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = L$

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \quad 0 < |x - a| < \eta \; \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

## Exemple

$f_3(x) = x^2 \; (x \neq 0)$

# Limite $L$ en $a$ finis



**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = L$**

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \quad 0 < |x - a| < \eta \; \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple**

$f_3(x) = x^2 \; (x \neq 0) \; , \; f_3(0) = 1.$

# Limite $L$ en $a$ finis



## Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = L$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \ 0 < |x - a| < \eta \ \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

## Exemple

$f_3(x) = x^2 \ (x \neq 0) \ , \ f_3(0) = 1.$
$\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

# Limite $L$ en $a$ finis



## Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = L$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \quad 0 < |x - a| < \eta \ \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

## Exemple

$f_3(x) = x^2 \ (x \neq 0)$ , $f_3(0) = 1$.

$\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

$\mathcal{E} = ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

# Limite $L$ en $a$ finis

**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = L$**

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \ 0 < |x - a| < \eta \ \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

**Exemple**

$f_3(x) = x^2 \ (x \neq 0) \ , \ f_3(0) = 1.$
$\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$
$\mathcal{E} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f_3(x) = 0$

# Limite $L$ en $a$ finis

## Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = L$

$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0\quad 0 < |x-a| < \eta\ \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

## Exemple

$f_3(x) = x^2\ (x \neq 0)\ ,\ f_3(0) = 1.$
$\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$
$\mathcal{E} = ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f_3(x) = 0$
$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta = \sqrt{\epsilon} > 0\quad 0 < |x-0| < \eta\ \Rightarrow |f_3(x) - 0| < \epsilon$

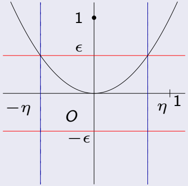
# Limite $L$ en $a$ finis



**Exemple :** $f_3(x) = x^2 \ (x \neq 0), \ f_3(0) = 1$

# Limite $L$ en $a$ finis

**Exemple :** $f_3(x) = x^2$ $(x \neq 0)$, $f_3(0) = 1$



# Limite $L$ en $a$ finis



**Exemple $f_3(x) = x^2$ $(x \neq 0)$, $f_3(0) = 1$**

# Limite $L$ en $a$ finis



**Exemple $f_3(x) = x^2$ $(x \neq 0)$, $f_3(0) = 1$**

Remarque :

# Limite $L$ en $a$ finis



**Exemple $f_3(x) = x^2 \ (x \neq 0),\ f_3(0) = 1$**

Remarque :

$\lim_{x \to a} f(x) \neq L$ si et seulement si

# Limite $L$ en $a$ finis



**Exemple $f_3(x) = x^2$ $(x \neq 0)$, $f_3(0) = 1$**

Remarque :

$\lim_{x \to a} f(x) \neq L$ si et seulement si

$\exists \epsilon > 0\ \forall \eta > 0\ \exists x\ (|x - a| < \eta)\ \wedge\ (|f(x) - L| \geq \epsilon)$

# Limite $L$ en $a$ finis

## Exemple $f_3(x) = x^2 \ (x \neq 0),\ f_3(0) = 1$

Remarque :

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$ si et seulement si

$\exists \epsilon > 0\ \forall \eta > 0\ \exists x\ (|x - a| < \eta)\ \wedge\ (|f(x) - L| \geq \epsilon)$

$\exists \epsilon = 0.5 > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x = 0\ (|x - 0| < \eta) \wedge (|f_3(x) - 0| \geq \epsilon)$

# Limite $L$ en $a$ finis

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Fonctions
- Limite
- Continuité
- Dérivation
- Formules de Taylor

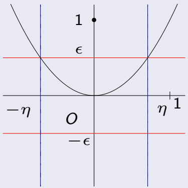
## Exemple $f_3(x) = x^2$ $(x \neq 0)$, $f_3(0) = 1$

Remarque :

$\lim_{x\to a} f(x) \neq L$ si et seulement si

$\exists \epsilon > 0\ \forall \eta > 0\ \exists x\ (|x-a| < \eta) \ \wedge\ (|f(x) - L| \geq \epsilon)$

$\exists \epsilon = 0.5 > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x = 0\ (|x - 0| < \eta) \wedge (|f_3(x) - 0| \geq \epsilon)$



# Limite $L$ en $a$ finis

**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$**

# Limite $L$ en $a$ finis



**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$**

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \quad 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

# Limite $L$ en $a$ finis



**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$**

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \quad 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$**

# Limite $L$ en $a$ finis



**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$**

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \quad 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$**

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \quad -\eta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

# Limite $L$ en $a$ finis



**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$**

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \quad 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$**

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \quad -\eta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple : $f_3(x) = x^2 \; (x \neq 0), \; f_3(0) = 1$**

# Limite $L$ en $a$ finis



**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$**

$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \ 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$**

$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \ -\eta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple : $f_3(x) = x^2\ (x \neq 0),\ f_3(0) = 1$**

$\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R}$

# Limite $L$ en $a$ finis



**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$**

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \;\; 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$**

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \;\; -\eta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple : $f_3(x) = x^2 \; (x \neq 0), \; f_3(0) = 1$**

$\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R}$
$\mathcal{E} = ]0, +\infty[$, puis $\mathcal{E} = ]-\infty, 0[$

# Limite $L$ en $a$ finis



**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$**

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \quad 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$**

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \quad -\eta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple : $f_3(x) = x^2 \ (x \neq 0), \ f_3(0) = 1$**

$\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R}$

$\mathcal{E} = ]0, +\infty[$, puis $\mathcal{E} = ]-\infty, 0[$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_3(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f_3(x) = 0$

# Limite $L$ en $a$ finis



**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$**

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \quad 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$**

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \quad -\eta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple : $f_3(x) = x^2 \ (x \neq 0), \ f_3(0) = 1$**

$\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R}$

$\mathcal{E} = ]0, +\infty[$, puis $\mathcal{E} = ]-\infty, 0[$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_3(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f_3(x) = 0$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta = \sqrt{\epsilon} > 0 \quad 0 < x < \eta \Rightarrow |x^2 - 0| < \epsilon$

# Limite $L$ en $a$ finis

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$**

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \quad 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$**

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \quad -\eta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple : $f_3(x) = x^2 \; (x \neq 0),\; f_3(0) = 1$**

$\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R}$

$\mathcal{E} = ]0, +\infty[$, puis $\mathcal{E} = ]-\infty, 0[$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_3(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f_3(x) = 0$

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta = \sqrt{\epsilon} > 0 \quad 0 < x < \eta \Rightarrow |x^2 - 0| < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; \eta = \sqrt{\epsilon} > 0 \quad -\eta < x < 0 \Rightarrow |x^2 - 0| < \epsilon$

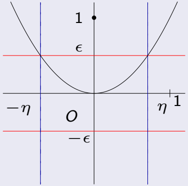
# Limite $L$ en $a$ finis



**Exemple $f_3(x) = x^2$ $(x \neq 0)$, $f_3(0) = 1$**

# Limite $L$ en $a$ finis

## Exemple $f_3(x) = x^2$ $(x \neq 0)$, $f_3(0) = 1$



# Limite $L$ finie en $a$ infini



**Autre formulation : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$**

# Limite $L$ finie en $a$ infini



**Autre formulation :** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

$\forall \epsilon > 0 \; \exists A > 0 \;\; x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

# Limite $L$ finie en $a$ infini



**Autre formulation : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$**

$\forall \epsilon > 0 \; \exists A > 0 \quad x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple : $f_4(x) = \dfrac{\sin x}{x}$**

# Limite $L$ finie en $a$ infini



**Autre formulation : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$**

$\forall \epsilon > 0 \ \exists A > 0 \ \ x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple : $f_4(x) = \dfrac{\sin x}{x}$**

$\mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R} - \{0\} = ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

# Limite $L$ finie en $a$ infini



**Autre formulation : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$**

$\forall \epsilon > 0 \; \exists A > 0 \quad x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple : $f_4(x) = \dfrac{\sin x}{x}$**

$\mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R} - \{0\} = ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f_4(x) = 0$

# Limite $L$ finie en $a$ infini

**Autre formulation : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$**

$\forall \epsilon > 0 \ \exists A > 0 \quad x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple : $f_4(x) = \dfrac{\sin x}{x}$**

$\mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R} - \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f_4(x) = 0$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists A = \dfrac{1}{\epsilon} > 0 \ x > A \Rightarrow |\dfrac{\sin x}{x} - 0| < \epsilon$

# Limite $L$ finie en $a$ infini

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



**Autre formulation : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$**

$\forall \epsilon > 0\ \exists A > 0\ \ x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple : $f_4(x) = \dfrac{\sin x}{x}$**

$\mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R} - \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f_4(x) = 0$

$\forall \epsilon > 0\ \exists A = \dfrac{1}{\epsilon} > 0\ x > A \Rightarrow |\dfrac{\sin x}{x} - 0| < \epsilon$

$\forall x \neq 0\ |\dfrac{\sin x}{x}| = \dfrac{|\sin x|}{|x|} \leq \dfrac{|1|}{|x|}.$

# Limite $L$ finie en $a$ infini



**Autre formulation : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$**

$\forall \epsilon > 0 \ \exists A > 0 \ \ x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

**Exemple : $f_4(x) = \dfrac{\sin x}{x}$**

$\mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R} - \{0\} = ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x) = 0$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists A = \dfrac{1}{\epsilon} > 0 \ x > A \Rightarrow |\dfrac{\sin x}{x} - 0| < \epsilon$

$\forall x \neq 0 \ |\dfrac{\sin x}{x}| = \dfrac{|\sin x|}{|x|} \leq \dfrac{|1|}{|x|}.$

Or $\dfrac{1}{|x|} < \epsilon \iff |x| > \dfrac{1}{\epsilon}.$

# Limite $L$ finie en $a$ infini

**Exemple : $f_4(x) = \dfrac{\sin x}{x}$**

# Limite $L$ finie en $a$ infini



**Exemple : $f_4(x) = \dfrac{\sin x}{x}$**

On en déduit $x > \dfrac{1}{\epsilon} \Rightarrow |f_4(x) - 0| < \epsilon$

# Limite $L$ finie en $a$ infini



**Exemple : $f_4(x) = \dfrac{\sin x}{x}$**

On en déduit $x > \dfrac{1}{\epsilon} \Rightarrow |f_4(x) - 0| < \epsilon$

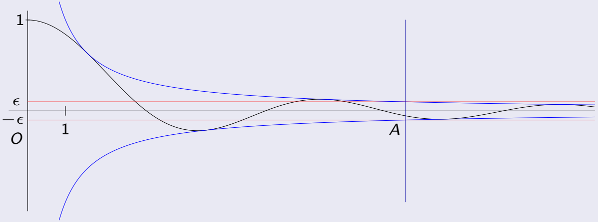
Cas particulier : $x > 10 \Rightarrow |f(x) - 0| < \dfrac{1}{10}$

# Limite $L$ finie en $a$ infini

## Exemple : $f_4(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

On en déduit $x > \dfrac{1}{\epsilon} \Rightarrow |f_4(x) - 0| < \epsilon$

Cas particulier : $x > 10 \Rightarrow |f(x) - 0| < \dfrac{1}{10}$



# Limite $L$ infinie en $a$ fini



**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$**

# Limite $L$ infinie en $a$ fini



**Autre formulation :** $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$

$\forall B > 0 \ \exists \eta > 0 \quad a - \eta < x < a \Rightarrow f(x) > B$

# Limite $L$ infinie en $a$ fini



**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$**

$\forall B > 0 \; \exists \eta > 0 \quad a - \eta < x < a \Rightarrow f(x) > B$

**Autre formulation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$**

# Limite $L$ infinie en $a$ fini



**Autre formulation :** $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$

$\forall B > 0 \ \exists \eta > 0 \quad a - \eta < x < a \Rightarrow f(x) > B$

**Autre formulation :** $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$

$\forall B > 0 \ \exists \eta > 0 \quad a < x < a + \eta \Rightarrow f(x) > B$

# Limite $L$ infinie en $a$ fini



**Exemple : $f_5(x) = \dfrac{1}{1-x}$**

# Limite $L$ infinie en $a$ fini

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



**Exemple : $f_5(x) = \dfrac{1}{1-x}$**

$\mathcal{D}_{f_5} = \mathbb{R} - \{1\}$

# Limite $L$ infinie en $a$ fini



**Exemple : $f_5(x) = \dfrac{1}{1-x}$**

$\mathcal{D}_{f_5} = \mathbb{R} - \{1\}$
$\mathcal{E} = ]-\infty, 1[$

# Limite $L$ infinie en $a$ fini



**Exemple : $f_5(x) = \dfrac{1}{1-x}$**

$\mathcal{D}_{f_5} = \mathbb{R} - \{1\}$

$\mathcal{E} = ]-\infty, 1[$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f_5(x) = +\infty$

# Limite $L$ infinie en $a$ fini



**Exemple : $f_5(x) = \dfrac{1}{1-x}$**

$\mathcal{D}_{f_5} = \mathbb{R} - \{1\}$

$\mathcal{E} = ]-\infty, 1[$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f_5(x) = +\infty$

$\forall B > 0 \ \exists \eta = \dfrac{1}{B} > 0 \ 1 - \eta < x < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-x} > B$

# Limite $L$ infinie en $a$ fini

**Exemple :** $f_5(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$\mathcal{D}_{f_5} = \mathbb{R} - \{1\}$

$\mathcal{E} = ]-\infty, 1[$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f_5(x) = +\infty$

$\forall B > 0 \ \exists \eta = \dfrac{1}{B} > 0 \ 1 - \eta < x < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-x} > B$

car $\dfrac{1}{1-x} > B \iff \dfrac{1}{B} > 1 - x \iff 1 - \dfrac{1}{B} < x$

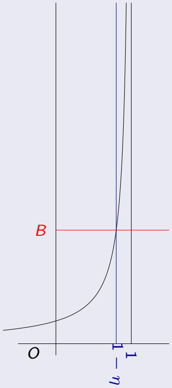
# Limite $L$ infinie en $a$ fini



**Exemple : $f_5(x) = \dfrac{1}{1-x}$**

# Limite $L$ infinie en $a$ fini

## Exemple : $f_5(x) = \dfrac{1}{1-x}$



# Limite $L$ infinie en $a$ infini



**Autre formulation :** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

# Limite $L$ infinie en $a$ infini



**Autre formulation : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$**

$\forall B > 0 \; \exists A > 0 \; x > A \Rightarrow f(x) > B$

# Limite $L$ infinie en $a$ infini



**Autre formulation : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$**

$\forall B > 0 \ \exists A > 0 \ x > A \Rightarrow f(x) > B$

**Exemple : $f_6(x) = 2x - 3$**

# Limite $L$ infinie en $a$ infini



**Autre formulation : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$**

$\forall B > 0 \; \exists A > 0 \; x > A \Rightarrow f(x) > B$

**Exemple : $f_6(x) = 2x - 3$**

$\mathcal{D}_{f_6} = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

# Limite $L$ infinie en $a$ infini



**Autre formulation : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$**

$\forall B > 0\ \exists A > 0\ x > A \Rightarrow f(x) > B$

**Exemple : $f_6(x) = 2x - 3$**

$\mathcal{D}_{f_6} = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_6(x) = +\infty$

# Limite $L$ infinie en $a$ infini

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Fonctions
- Limite
- Continuité
- Dérivation
- Formules de Taylor

**Autre formulation : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$**

$\forall B > 0\ \exists A > 0\ x > A \Rightarrow f(x) > B$

**Exemple : $f_6(x) = 2x - 3$**

$\mathcal{D}_{f_6} = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f_6(x) = +\infty$

$\forall B > 0\ \exists\ A = \dfrac{B+3}{2} > 0\ x > A \Rightarrow 2x - 3 > B$

# Limite $L$ infinie en $a$ infini



**Autre formulation : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$**

$\forall B > 0 \ \exists A > 0 \ x > A \Rightarrow f(x) > B$

**Exemple : $f_6(x) = 2x - 3$**

$\mathcal{D}_{f_6} = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f_6(x) = +\infty$

$\forall B > 0 \ \exists A = \dfrac{B+3}{2} > 0 \ x > A \Rightarrow 2x - 3 > B$

car $2x - 3 > B \iff x > \dfrac{B+3}{2}$

# Limite $L$ infinie en $a$ infini

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

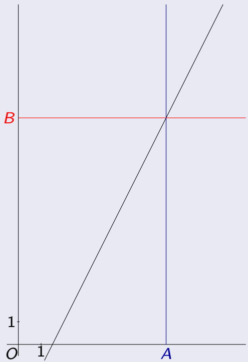


**Exemple : $f_6(x) = 2x - 3$**

# Limite $L$ infinie en $a$ infini



## Exemple : $f_6(x) = 2x - 3$



# Propriétés



### Propriété 1

# Propriétés

### Propriété 1

Si $f$ admet une limite, alors elle est unique.

# Propriétés

## Propriété 1

Si $f$ admet une limite, alors elle est unique.
Si $f$ est définie en $a$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

# Propriétés



## Propriété 1

Si $f$ admet une limite, alors elle est unique.

Si $f$ est définie en $a$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ existe si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.

# Propriétés

## Propriété 2

# Propriétés



## Propriété 2

$f$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ sur $\mathcal{E}$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)$ de $\mathcal{E}$ convergeant vers $a$, $f(u_n)$ tend vers $L$.

# Propriétés

## Propriété 2

$f$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ sur $\mathcal{E}$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)$ de $\mathcal{E}$ convergeant vers $a$, $f(u_n)$ tend vers $L$.

## Application

# Propriétés

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Fonctions
- Limite
- Continuité
- Dérivation
- Formules de Taylor

## Propriété 2

$f$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ sur $\mathcal{E}$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)$ de $\mathcal{E}$ convergeant vers $a$, $f(u_n)$ tend vers $L$.

## Application

S'il existe $(u_n)$ et $(v_n)$ tendant vers $a$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = L' \neq L$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.

# Propriétés



## Propriété 2

$f$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ sur $\mathcal{E}$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)$ de $\mathcal{E}$ convergeant vers $a$, $f(u_n)$ tend vers $L$.

## Application

S'il existe $(u_n)$ et $(v_n)$ tendant vers $a$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = L$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = L' \neq L$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ n'existe pas.

## Exemple

# Propriétés

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

## Propriété 2

$f$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ sur $\mathcal{E}$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)$ de $\mathcal{E}$ convergeant vers $a$, $f(u_n)$ tend vers $L$.

## Application

S'il existe $(u_n)$ et $(v_n)$ tendant vers $a$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = L' \neq L$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.

## Exemple

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n\pi) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

# Propriétés



## Propriété 2

$f$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ sur $\mathcal{E}$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)$ de $\mathcal{E}$ convergeant vers $a$, $f(u_n)$ tend vers $L$.

## Application

S'il existe $(u_n)$ et $(v_n)$ tendant vers $a$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = L$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = L' \neq L$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ n'existe pas.

## Exemple

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sin(n\pi) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin\left((4n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

On en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ n'existe pas.

# Opérations



## Limites finies

# Opérations



## Limites finies

Soit $\lim_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim_{x \to a} g(x) = L'$.

# Opérations



## Limites finies

Soit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L'$.

On a alors $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + L'$

# Opérations

## Limites finies

Soit $\lim_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim_{x \to a} g(x) = L'$.

On a alors $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + L'$

$\lim_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda L \ (\lambda \in \mathbb{R})$

# Opérations



## Limites finies

Soit $\lim_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim_{x \to a} g(x) = L'$.

On a alors $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + L'$

$\lim_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda L \ (\lambda \in \mathbb{R})$

$\lim_{x \to a} f(x) g(x) = LL'$

# Opérations



## Limites finies

Soit $\lim_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim_{x \to a} g(x) = L'$.

On a alors $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + L'$

$\lim_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda L \ (\lambda \in \mathbb{R})$

$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LL'$

$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{L'} \ (L' \neq 0)$

# Opérations



## Limites finies

Soit $\lim_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim_{x \to a} g(x) = L'$.

On a alors $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + L'$

$\lim_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda L \ (\lambda \in \mathbb{R})$

$\lim_{x \to a} f(x) g(x) = LL'$

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{L'} \ (L' \neq 0)$

$\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$

# Opérations



## Limites infinies

# Opérations

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

## Limites infinies

On généralise les résultats précédents à l'aide des règles de calcul :

# Opérations



## Limites infinies

On généralise les résultats précédents à l'aide des règles de calcul :
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

# Opérations



## Limites infinies

On généralise les résultats précédents à l'aide des règles de calcul :

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) - (+\infty) = -\infty$

# Opérations

## Limites infinies

On généralise les résultats précédents à l'aide des règles de calcul :

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) - (+\infty) = -\infty$

$\lambda(+\infty) = +\infty$ si $\lambda > 0$

# Opérations



## Limites infinies

On généralise les résultats précédents à l'aide des règles de calcul :

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) - (+\infty) = -\infty$

$\lambda(+\infty) = +\infty$ si $\lambda > 0$

$\lambda(+\infty) = -\infty$ si $\lambda < 0$

# Opérations

## Limites infinies

On généralise les résultats précédents à l'aide des règles de calcul :

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) - (+\infty) = -\infty$

$\lambda(+\infty) = +\infty$ si $\lambda > 0$

$\lambda(+\infty) = -\infty$ si $\lambda < 0$

## Composition

# Opérations

## Limites infinies

On généralise les résultats précédents à l'aide des règles de calcul :

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) - (+\infty) = -\infty$

$\lambda(+\infty) = +\infty$ si $\lambda > 0$

$\lambda(+\infty) = -\infty$ si $\lambda < 0$

## Composition

Soit $f$ une fonction définie sur une partie $\mathcal{E}$ et $g$ une fonction définie sur une partie $\mathcal{F}$ contenant $f(\mathcal{E})$.

# Opérations

## Limites infinies

On généralise les résultats précédents à l'aide des règles de calcul :

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) - (+\infty) = -\infty$

$\lambda(+\infty) = +\infty$ si $\lambda > 0$

$\lambda(+\infty) = -\infty$ si $\lambda < 0$

## Composition

Soit $f$ une fonction définie sur une partie $\mathcal{E}$ et $g$ une fonction définie sur une partie $\mathcal{F}$ contenant $f(\mathcal{E})$.

Si $f(x)$ tend vers $b$ (fini ou infini) lorsque $x$ tend vers $a$ (fini ou infini) et si $g(y)$ tend vers $c$ lorsque $y$ tend vers $b$,

# Opérations

## Limites infinies

On généralise les résultats précédents à l'aide des règles de calcul :
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
$(-\infty) - (+\infty) = -\infty$
$\lambda(+\infty) = +\infty$ si $\lambda > 0$
$\lambda(+\infty) = -\infty$ si $\lambda < 0$

## Composition

Soit $f$ une fonction définie sur une partie $\mathcal{E}$ et $g$ une fonction définie sur une partie $\mathcal{F}$ contenant $f(\mathcal{E})$.
Si $f(x)$ tend vers $b$ (fini ou infini) lorsque $x$ tend vers $a$ (fini ou infini) et si $g(y)$ tend vers $c$ lorsque $y$ tend vers $b$, alors $g(f(x))$ tend vers $c$ lorsque $x$ tend vers $a$.

# Limites usuelles

## Limites des fonctions de référence

# Limites usuelles



## Limites des fonctions de référence

$$\lim_{x \to 0+} x^{\alpha} = 0 \ (\alpha > 0)$$

# Limites usuelles



## Limites des fonctions de référence

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = 0 \ (\alpha > 0)$$
$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty \ (\alpha > 0)$$

# Limites usuelles



## Limites des fonctions de référence

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = 0 \ (\alpha > 0)$$
$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty \ (\alpha > 0)$$
$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = +\infty \ (\alpha < 0)$$

# Limites usuelles



## Limites des fonctions de référence

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = 0 \ (\alpha > 0)$$
$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty \ (\alpha > 0)$$
$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = +\infty \ (\alpha < 0)$$
$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0 \ (\alpha < 0)$$

# Limites usuelles

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

## Limites des fonctions de référence

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = 0 \ (\alpha > 0)$$
$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty \ (\alpha > 0)$$
$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = +\infty \ (\alpha < 0)$$
$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0 \ (\alpha < 0)$$
$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

# Limites usuelles



## Limites des fonctions de référence

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = 0 \ (\alpha > 0)$$
$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty \ (\alpha > 0)$$
$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = +\infty \ (\alpha < 0)$$
$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0 \ (\alpha < 0)$$
$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

# Limites usuelles



## Limites des fonctions de référence

$$\lim_{x\to 0+} x^{\alpha} = 0 \ (\alpha > 0)$$
$$\lim_{x\to +\infty} x^{\alpha} = +\infty \ (\alpha > 0)$$
$$\lim_{x\to 0+} x^{\alpha} = +\infty \ (\alpha < 0)$$
$$\lim_{x\to +\infty} x^{\alpha} = 0 \ (\alpha < 0)$$
$$\lim_{x\to +\infty} e^{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} e^{x} = 0$$
$$\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

# Limites usuelles



## Limites des fonctions de référence

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = 0 \ (\alpha > 0)$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty \ (\alpha > 0)$$

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = +\infty \ (\alpha < 0)$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0 \ (\alpha < 0)$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty$$

# Limites usuelles



## Limites des fonctions de référence

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = 0 \ (\alpha > 0)$$
$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty \ (\alpha > 0)$$
$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = +\infty \ (\alpha < 0)$$
$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0 \ (\alpha < 0)$$
$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty$$
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty$$

# Limites

## Exemples

# Limites



## Exemples

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

# Limites



## Exemples

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty + 0 = +\infty$$

# Limites

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

## Exemples

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty + 0 = +\infty$$

$\lim_{x\to\pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$ ($n$ entier naturel)

# Limites



## Exemples

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty + 0 = +\infty$$

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$ ($n$ entier naturel)

$$\lim_{x\to+\infty} (3x^2 - x - 3) = \lim_{x\to+\infty} (3x^2) = +\infty$$

# Limites

## Exemples

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty + 0 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_nx^n$ ($n$ entier naturel)

$\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2 - x - 3) = \lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3 + x^2 - x - 3) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3) = -\infty$

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

L'idée fixe, René MAGRITTE, (1898-1967)

# Continuité

## Définitions

# Continuité

## Définitions

$f$ est continue en un réel $a \in \mathcal{D}_f$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

# Continuité

## Définitions

$f$ est continue en un réel $a \in \mathcal{D}_f$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$f$ est continue sur $\mathcal{D}_f$ si $f$ est continue en chaque réel $a \in \mathcal{D}_f$.

# Continuité



## Définitions

$f$ est **continue** en un réel $a \in \mathcal{D}_f$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$f$ est continue sur $\mathcal{D}_f$ si $f$ est continue en chaque réel $a \in \mathcal{D}_f$.

## Exemples

# Continuité

## Définitions

$f$ est continue en un réel $a \in \mathcal{D}_f$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$f$ est continue sur $\mathcal{D}_f$ si $f$ est continue en chaque réel $a \in \mathcal{D}_f$.

## Exemples

Les fonctions de référence sont continues sur leur domaine de définition : $x^\alpha$, $e^x$, $\ln x$, $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, ...

# Continuité



## Définitions

$f$ est continue en un réel $a \in \mathcal{D}_f$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$f$ est continue sur $\mathcal{D}_f$ si $f$ est continue en chaque réel $a \in \mathcal{D}_f$.

## Exemples

Les fonctions de référence sont continues sur leur domaine de définition : $x^\alpha$, $e^x$, $\ln x$, $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, ...

$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$ : prolongement par continuité.

# Continuité



## Opérations

### Opérations

Soit $f$ et $g$ continues en un réel $a \in \mathfrak{D}_f$.

# Continuité



## Opérations

Soit $f$ et $g$ continues en un réel $a \in \mathfrak{D}_f$.
$f + g$, $\lambda f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ et $fg$ sont continues en $a$.

# Continuité



## Opérations

Soit $f$ et $g$ continues en un réel $a \in \mathfrak{D}_f$.
$f+g$, $\lambda f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ et $fg$ sont continues en $a$.
De plus, si $g(a) \neq 0$ alors, $\dfrac{f}{g}$ est aussi continue en $a$.

# Continuité



## Opérations

Soit $f$ et $g$ continues en un réel $a \in \mathfrak{D}_f$.
$f + g$, $\lambda f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ et $fg$ sont continues en $a$.
De plus, si $g(a) \neq 0$ alors, $\dfrac{f}{g}$ est aussi continue en $a$.
Si $f$ est continue en $a$ et $g$ est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en $a$.

# Propriétés

## Définitions

# Propriétés



## Définitions

Soit $f$ une fonction définie sur une partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}$.

# Propriétés



## Définitions

Soit $f$ une fonction définie sur une partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}$.
$f$ est dite bornée sur $\mathcal{E}$ si $f(\mathcal{E})$ est bornée.

# Propriétés



## Définitions

Soit $f$ une fonction définie sur une partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}$.
$f$ est dite bornée sur $\mathcal{E}$ si $f(\mathcal{E})$ est bornée.
On dit que $f$ admet un minimum absolu (respectivement maximum absolu) en $x_0$ sur $\mathcal{E}$ si $\forall x \in \mathcal{E}$ $f(x) \geq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \leq f(x_0)$).

# Propriétés

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

## Définitions

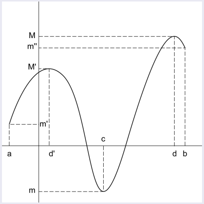
Soit $f$ une fonction définie sur une partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}$.
$f$ est dite bornée sur $\mathcal{E}$ si $f(\mathcal{E})$ est bornée.
On dit que $f$ admet un minimum absolu (respectivement maximum absolu) en $x_0$ sur $\mathcal{E}$ si $\forall x \in \mathcal{E}\ f(x) \geq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \leq f(x_0)$).
$f$ admet un minimum relatif (respectivement maximum relatif) en $x_0$ sur $\mathcal{E}$ s'il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que $\forall x \in \mathcal{E} \cap V\ f(x) \geq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \leq f(x_0)$).

# Propriétés



## Définitions

Soit $f$ une fonction définie sur une partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}$.
$f$ est dite bornée sur $\mathcal{E}$ si $f(\mathcal{E})$ est bornée.
On dit que $f$ admet un minimum absolu (respectivement maximum absolu) en $x_0$ sur $\mathcal{E}$ si $\forall x \in \mathcal{E}\ f(x) \geq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \leq f(x_0)$).
$f$ admet un minimum relatif (respectivement maximum relatif) en $x_0$ sur $\mathcal{E}$ s'il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que $\forall x \in \mathcal{E} \cap V\ f(x) \geq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \leq f(x_0)$).



# Propriétés



## Fonction continue sur un intervalle $[a, b]$

# Propriétés



**Fonction continue sur un intervalle $[a, b]$**

Soit $f$ continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$.

# Propriétés



**Fonction continue sur un intervalle $[a, b]$**

Soit $f$ continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$.
$f$ est bornée et admet sur $[a, b]$ un minimum absolu $m$ et un maximum absolu $M$ :

# Propriétés



**Fonction continue sur un intervalle $[a, b]$**

Soit $f$ continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$.
$f$ est bornée et admet sur $[a, b]$ un minimum absolu $m$ et un maximum absolu $M$ :
il existe $c$ et $d$ dans $[a, b]$ tels que

# Propriétés

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

## Fonction continue sur un intervalle $[a, b]$

Soit $f$ continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$.
$f$ est bornée et admet sur $[a, b]$ un minimum absolu $m$ et un maximum absolu $M$ :
il existe $c$ et $d$ dans $[a, b]$ tels que

$$f(c) = m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \text{ et } f(d) = M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

# Propriétés

## Exemple

# Propriétés



## Exemple

$f(x) = \cos x$ sur $\left[-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$

# Propriétés

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



## Exemple

$f(x) = \cos x$ sur $\left[-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$
$f$ admet

# Propriétés



## Exemple

$f(x) = \cos x$ sur $\left[-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$
$f$ admet
- un maximum absolu 1 en $-2\pi$, 0 et $2\pi$.

# Propriétés



## Exemple

$f(x) = \cos x$ sur $\left[-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$

$f$ admet

- un maximum absolu 1 en $-2\pi$, 0 et $2\pi$.
- un minimum absolu -1 en $-\pi$ et $\pi$.

# Propriétés



## Exemple

$f(x) = \cos x$ sur $\left[-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$
$f$ admet
- un maximum absolu 1 en $-2\pi$, 0 et $2\pi$.
- un minimum absolu -1 en $-\pi$ et $\pi$.
- un minimum relatif 0 en $-\dfrac{5}{2}\pi$ et $\dfrac{5}{2}\pi$.

# Propriétés

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

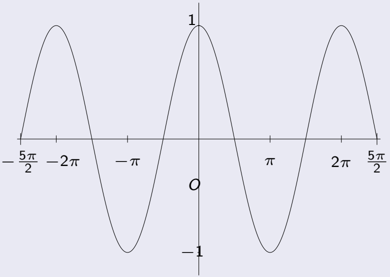
Formules de Taylor

## Exemple

$f(x) = \cos x$ sur $\left[-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$

$f$ admet

- un maximum absolu 1 en $-2\pi$, 0 et $2\pi$.
- un minimum absolu -1 en $-\pi$ et $\pi$.
- un minimum relatif 0 en $-\dfrac{5}{2}\pi$ et $\dfrac{5}{2}\pi$.



# Propriétés

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



## Contre exemple

# Propriétés



## Contre exemple

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ sur $[0, 1[$

# Propriétés

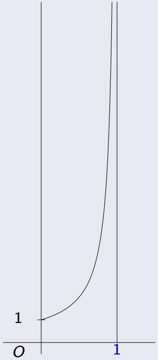
M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Fonctions
- Limite
- Continuité
- Dérivation
- Formules de Taylor

## Contre exemple

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ sur $[0, 1[$



# Propriétés

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



## Théorème des valeurs intermédiaires

# Propriétés



**Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle quelconque $I$, $m = \inf f(I)$ et $M = \sup f(I)$.

# Propriétés



**Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle quelconque $I$, $m = \inf f(I)$ et $M = \sup f(I)$.
$f$ prend toutes les valeurs de l'intervalle ouvert $]m, M[$.

# Propriétés

## Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle quelconque $I$, $m = \inf f(I)$ et $M = \sup f(I)$.
$f$ prend toutes les valeurs de l'intervalle ouvert $]m, M[$.

## Application

# Propriétés



**Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle quelconque $I$, $m = \inf f(I)$ et $M = \sup f(I)$.
$f$ prend toutes les valeurs de l'intervalle ouvert $]m, M[$.

**Application**

Si $f$ est continue sur un intervalle $I$ et s'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$,

# Propriétés

## Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle quelconque $I$, $m = \inf f(I)$ et $M = \sup f(I)$.
$f$ prend toutes les valeurs de l'intervalle ouvert $]m, M[$.

## Application

Si $f$ est continue sur un intervalle $I$ et s'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution comprise entre $a$ et $b$.

# Propriétés

**Exemple : équation $x^2 = \cos x$ sur $[0, 1]$**

# Propriétés



**Exemple : équation $x^2 = \cos x$ sur $[0, 1]$**

On pose $f(x) = x^2 - \cos x$ et on résoud l'équation $f(x) = 0$ sur $[0, 1]$.
$f(0) = 0^2 - \cos 0 = -1$

# Propriétés



**Exemple : équation $x^2 = \cos x$ sur $[0, 1]$**

On pose $f(x) = x^2 - \cos x$ et on résoud l'équation $f(x) = 0$ sur $[0, 1]$.

$f(0) = 0^2 - \cos 0 = -1$

$$f(1) = 1^2 - \cos 1 > 1 - cos\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$

# Propriétés

**Exemple : équation $x^2 = \cos x$ sur $[0,1]$**

On pose $f(x) = x^2 - \cos x$ et on résoud l'équation $f(x) = 0$ sur $[0,1]$.
$f(0) = 0^2 - \cos 0 = -1$

$$f(1) = 1^2 - \cos 1 > 1 - cos\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$

On en déduit l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0,1]$.

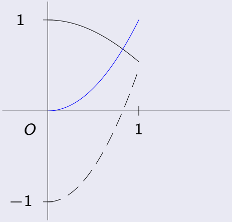
# Propriétés

## Exemple : équation $x^2 = \cos x$ sur $[0, 1]$

On pose $f(x) = x^2 - \cos x$ et on résoud l'équation $f(x) = 0$ sur $[0, 1]$.
$f(0) = 0^2 - \cos 0 = -1$

$f(1) = 1^2 - \cos 1 > 1 - cos\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0.$

On en déduit l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0, 1]$.



# Variations d'une fonction

## Fonction croissante, fonction décroissante

# Variations d'une fonction



## Fonction croissante, fonction décroissante

Une fonction $f$ est dite croissante sur un intervalle $I$ si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$.

# Variations d'une fonction



## Fonction croissante, fonction décroissante

Une fonction $f$ est dite croissante sur un intervalle $I$ si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$.
Une fonction $f$ est dite décroissante sur un intervalle $I$ si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$.

# Variations d'une fonction



## Fonction croissante, fonction décroissante

Une fonction $f$ est dite croissante sur un intervalle $I$ si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$.
Une fonction $f$ est dite décroissante sur un intervalle $I$ si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$.
Une fonction $f$ est dite strictement croissante sur un intervalle $I$ si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$.

# Variations d'une fonction



## Fonction croissante, fonction décroissante

Une fonction $f$ est dite croissante sur un intervalle $I$ si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$.
Une fonction $f$ est dite décroissante sur un intervalle $I$ si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$.
Une fonction $f$ est dite strictement croissante sur un intervalle $I$ si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$.
Une fonction $f$ est dite strictement décroissante sur un intervalle $I$ si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$.

# Variations d'une fonction



## Fonction croissante, fonction décroissante

Une fonction $f$ est dite croissante sur un intervalle $I$ si $\forall u,\ v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$.
Une fonction $f$ est dite décroissante sur un intervalle $I$ si $\forall u,\ v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$.
Une fonction $f$ est dite strictement croissante sur un intervalle $I$ si $\forall u,\ v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$.
Une fonction $f$ est dite strictement décroissante sur un intervalle $I$ si $\forall u,\ v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$.
Une fonction est dite monotone si elle est croissante ou décroissante, strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

# Variations d'une fonction

## Fonction croissante, fonction décroissante

Une fonction $f$ est dite croissante sur un intervalle $I$ si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$.
Une fonction $f$ est dite décroissante sur un intervalle $I$ si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$.
Une fonction $f$ est dite strictement croissante sur un intervalle $I$ si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$.
Une fonction $f$ est dite strictement décroissante sur un intervalle $I$ si $\forall u, v \in I$ $u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$.
Une fonction est dite monotone si elle est croissante ou décroissante, strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
Soit $c$ un réel. Une fonction $f$ est dite constante sur un intervalle $I$ si $\forall x \in I$ $f(x) = c$.

# Variations d'une fonction



## Exemple

# Variations d'une fonction



**Exemple**

Soit $f(x) = x^2$.

# Variations d'une fonction



**Exemple**

Soit $f(x) = x^2$.
$\forall u,\ v \in \mathbb{R}\ f(v) - f(u) = v^2 - u^2 = (v - u)(v + u)$.

# Variations d'une fonction

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



**Exemple**

Soit $f(x) = x^2$.
$\forall u, v \in \mathbb{R}$ $f(v) - f(u) = v^2 - u^2 = (v-u)(v+u)$.
Si $u < v$ alors $v - u > 0$ et

# Variations d'une fonction



## Exemple

Soit $f(x) = x^2$.
$\forall u,\ v \in \mathbb{R}\ f(v) - f(u) = v^2 - u^2 = (v - u)(v + u)$.
Si $u < v$ alors $v - u > 0$ et
- si $u \in ]-\infty, 0[$ et $v \in ]-\infty, 0]$ alors $v + u < 0$ et $f(v) - f(u) < 0$

# Variations d'une fonction

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

## Exemple

Soit $f(x) = x^2$.
$\forall u, v \in \mathbb{R}\ f(v) - f(u) = v^2 - u^2 = (v-u)(v+u)$.
Si $u < v$ alors $v - u > 0$ et
- si $u \in ]-\infty, 0[$ et $v \in ]-\infty, 0]$ alors $v + u < 0$ et $f(v) - f(u) < 0$
- si $u \in [0, +\infty[$ et $v \in ]0, +\infty[$ alors $v + u > 0$ et $f(v) - f(u) > 0$

# Variations d'une fonction

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



**Exemple**

Soit $f(x) = x^2$.
$\forall u,\ v \in \mathbb{R}\ f(v) - f(u) = v^2 - u^2 = (v-u)(v+u)$.
Si $u < v$ alors $v - u > 0$ et
- si $u \in ]-\infty, 0[$ et $v \in ]-\infty, 0]$ alors $v + u < 0$ et $f(v) - f(u) < 0$
- si $u \in [0, +\infty[$ et $v \in ]0, +\infty[$ alors $v + u > 0$ et $f(v) - f(u) > 0$

On en dduit que $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictment croissante sur $[0, +\infty[$.

# Variations d'une fonction



## Tableau de variations

# Variations d'une fonction



## Tableau de variations

Soit $f(x) = x^2$.

# Variations d'une fonction

## Tableau de variations

Soit $f(x) = x^2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

# Variations d'une fonction

## Propriétés

# Variations d'une fonction



**Propriétés**

Soient deux fonctions $f$ et $g$ croissantes sur un intervalle $I$.

# Variations d'une fonction

**Propriétés**

Soient deux fonctions $f$ et $g$ croissantes sur un intervalle $I$.
Alors

1. $f + g$ est croissante sur $I$.

# Variations d'une fonction



## Propriétés

Soient deux fonctions $f$ et $g$ croissantes sur un intervalle $I$.
Alors

1. $f + g$ est croissante sur $I$.
2. si $f \geq 0$ et $g \geq 0$, alors $f \times g$ est croissante sur $I$.

# Variations d'une fonction

**Propriétés**

Soient deux fonctions $f$ et $g$ croissantes sur un intervalle $I$.
Alors

1. $f + g$ est croissante sur $I$.
2. si $f \geq 0$ et $g \geq 0$, alors $f \times g$ est croissante sur $I$.

Remarque : résultats analogues pour la stricte croissance; la stricte décroissance.

# Variations d'une fonction

## Propriétés

# Variations d'une fonction



## Propriétés

Soient deux fonctions $f$ et $g$ décroissantes sur un intervalle $I$.

# Variations d'une fonction



## Propriétés

Soient deux fonctions $f$ et $g$ décroissantes sur un intervalle $I$.
Alors

1. $f + g$ est décroissante sur $I$.

# Variations d'une fonction



## Propriétés

Soient deux fonctions $f$ et $g$ décroissantes sur un intervalle $I$.
Alors

1. $f + g$ est décroissante sur $I$.
2. si $f \geq 0$ et $g \geq 0$, alors $f \times g$ est décroissante sur $I$.

# Variations d'une fonction



**Propriétés**

Soient deux fonctions $f$ et $g$ décroissantes sur un intervalle $I$.
Alors

1. $f + g$ est décroissante sur $I$.
2. si $f \geq 0$ et $g \geq 0$, alors $f \times g$ est décroissante sur $I$.

Remarque : résultats analogues pour la stricte croissance; la stricte décroissance.

# Variations d'une fonction



## Propriétés

# Variations d'une fonction



## Propriétés

Soient deux fonctions $f$ et $g$ croissantes sur les intervalles respectifs $I$ et $J$, $f(I) \subset J$.

# Variations d'une fonction



## Propriétés

Soient deux fonctions $f$ et $g$ croissantes sur les intervalles respectifs $I$ et $J$, $f(I) \subset J$.
Alors

1. si $f$ et $g$ sont toutes deux croissantes (respectivement toutes deux décroissantes) alors $g \circ f$ est croissante sur $I$.

# Variations d'une fonction



## Propriétés

Soient deux fonctions $f$ et $g$ croissantes sur les intervalles respectifs $I$ et $J$, $f(I) \subset J$.
Alors

1. si $f$ et $g$ sont toutes deux croissantes (respectivement toutes deux décroissantes) alors $g \circ f$ est croissante sur $I$.
2. si une des fonctions $f$, $g$ est croissante et l'autre décroissante alors $g \circ f$ est décroissante sur $I$.

# Variations d'une fonction



**Propriétés**

Soient deux fonctions $f$ et $g$ croissantes sur les intervalles respectifs $I$ et $J$, $f(I) \subset J$.
Alors

1. si $f$ et $g$ sont toutes deux croissantes (respectivement toutes deux décroissantes) alors $g \circ f$ est croissante sur $I$.
2. si une des fonctions $f$, $g$ est croissante et l'autre décroissante alors $g \circ f$ est décroissante sur $I$.

Remarque : résultats analogues pour la stricte croissance; la stricte décroissance.

# Variations d'une fonction

## Exemples

# Variations d'une fonction



## Exemples

Soient $f$, $g$ et $h$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 1$ et $h(x) = -x + 1$.

# Variations d'une fonction



## Exemples

Soient $f$, $g$ et $h$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 1$ et $h(x) = -x + 1$.

1. $f + g$ est croissante sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

# Variations d'une fonction

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



## Exemples

Soient $f$, $g$ et $h$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 1$ et $h(x) = -x + 1$.

1. $f + g$ est croissante sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.
2. $f + h$ est décroissante sur $\mathbb{R}_- = ]-\infty, 0]$.

# Variations d'une fonction



## Exemples

Soient $f$, $g$ et $h$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 1$ et $h(x) = -x + 1$.

1. $f + g$ est croissante sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.
2. $f + h$ est décroissante sur $\mathbb{R}_- = ]-\infty, 0]$.
3. $g \circ f$ est décroissante sur $\mathbb{R}_- = ]-\infty, 0]$, croissante sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, .

# Variations d'une fonction



## Exemples

Soient $f$, $g$ et $h$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 1$ et $h(x) = -x + 1$.

1. $f + g$ est croissante sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.
2. $f + h$ est décroissante sur $\mathbb{R}_- = ]-\infty, 0]$.
3. $g \circ f$ est décroissante sur $\mathbb{R}_- = ]-\infty, 0]$, croissante sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, .
4. $h \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}_- = ]-\infty, 0]$, décroissante sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

# Variations d'une fonction



## Exemples

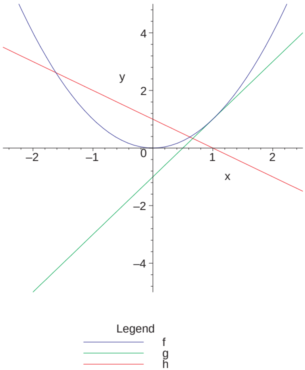
Soient $f$, $g$ et $h$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 1$ et $h(x) = -x + 1$.

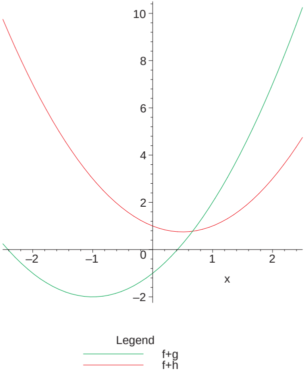
1. $f + g$ est croissante sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.
2. $f + h$ est décroissante sur $\mathbb{R}_- = ]-\infty, 0]$.
3. $g \circ f$ est décroissante sur $\mathbb{R}_- = ]-\infty, 0]$, croissante sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, .
4. $h \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}_- = ]-\infty, 0]$, décroissante sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

Remarque : pour le produit, s'assurer du signe des fonctions sur l'intervalle considéré.

# Variations d'une fonction

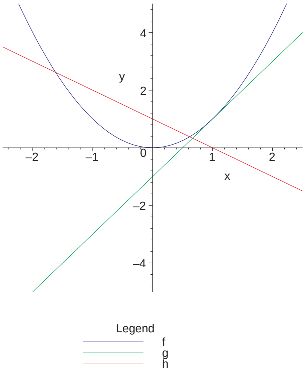


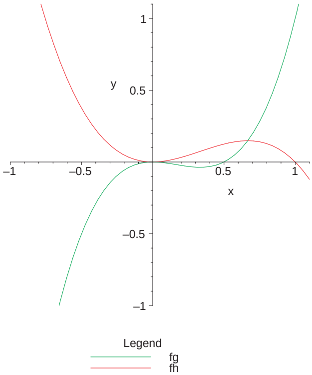


# Variations d'une fonction

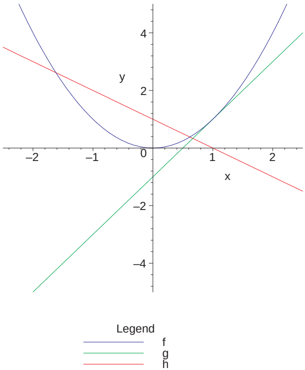


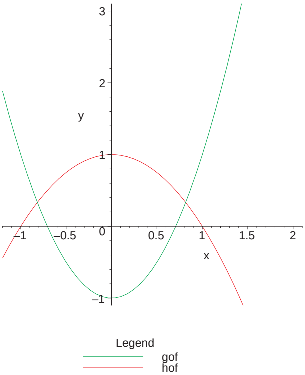


# Variations d'une fonction

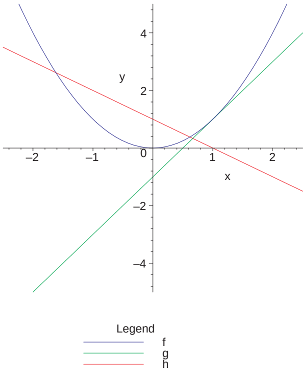


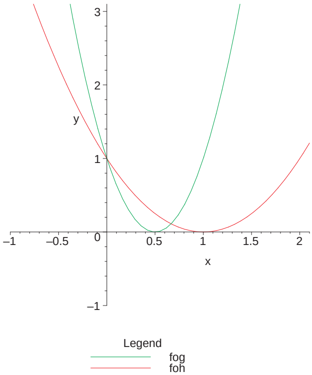


# Variations d'une fonction





# Propriétés

## Image d'un intervalle

# Propriétés



## Image d'un intervalle

L'image d'un intervalle quelconque $I$ par une fonction continue est un intervalle.

# Propriétés



## Image d'un intervalle

L'image d'un intervalle quelconque $I$ par une fonction continue est un intervalle.
Plus précisément :

# Propriétés

## Image d'un intervalle

L'image d'un intervalle quelconque $I$ par une fonction continue est un intervalle.

Plus précisément :

- L'image d'un intervalle fermé et borné $[a, b]$ est un intervalle fermé et borné.

# Propriétés



## Image d'un intervalle

L'image d'un intervalle quelconque $I$ par une fonction continue est un intervalle.
Plus précisément :
- L'image d'un intervalle fermé et borné $[a, b]$ est un intervalle fermé et borné.
- Si $f$ est continue et strictement monotone sur $I$ (fermé, ouvert ou semi-ouvert) d'extrémités $a$ et $b$,

# Propriétés



## Image d'un intervalle

L'image d'un intervalle quelconque $I$ par une fonction continue est un intervalle.

Plus précisément :

- L'image d'un intervalle fermé et borné $[a, b]$ est un intervalle fermé et borné.

- Si $f$ est continue et strictement monotone sur $I$ (fermé, ouvert ou semi-ouvert) d'extrémités $a$ et $b$, alors l'image $f(I)$ est un intervalle de même nature que $I$ d'extrémités $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$.

# Propriétés



## Image d'un intervalle

L'image d'un intervalle quelconque $I$ par une fonction continue est un intervalle.
Plus précisément :
- L'image d'un intervalle fermé et borné $[a, b]$ est un intervalle fermé et borné.
- Si $f$ est continue et strictement monotone sur $I$ (fermé, ouvert ou semi-ouvert) d'extrémités $a$ et $b$, alors l'image $f(I)$ est un intervalle de même nature que $I$ d'extrémités $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to b} f(x)$.

$f$ prend toutes les valeurs de l'intervalle ouvert $]m, M[$.

# Propriétés

## Continuité de la bijection réciproque

# Propriétés

## Continuité de la bijection réciproque

Soit $f$ une fonction continue et strictement croissante (respectivement décroissante ) sur un intervalle $I$.

# Propriétés

## Continuité de la bijection réciproque

Soit $f$ une fonction continue et strictement croissante (respectivement décroissante ) sur un intervalle $I$.
Alors $f$ est une bijection de $I$ sur $f(I)$ et sa bijection réciproque est continue et strictement croissante (respectivement décroissante) de $f(I)$ sur $I$.

# Propriétés



## Continuité de la bijection réciproque

Soit $f$ une fonction continue et strictement croissante (respectivement décroissante ) sur un intervalle $I$.
Alors $f$ est une bijection de $I$ sur $f(I)$ et sa bijection réciproque est continue et strictement croissante (respectivement décroissante) de $f(I)$ sur $I$.

## Exemple

# Propriétés

## Continuité de la bijection réciproque

Soit $f$ une fonction continue et strictement croissante (respectivement décroissante ) sur un intervalle $I$.
Alors $f$ est une bijection de $I$ sur $f(I)$ et sa bijection réciproque est continue et strictement croissante (respectivement décroissante) de $f(I)$ sur $I$.

## Exemple

$f(x) = x^2$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ et $f^{-1}$ est continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

# Propriétés

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

## Continuité de la bijection réciproque

Soit $f$ une fonction continue et strictement croissante (respectivement décroissante ) sur un intervalle $I$.
Alors $f$ est une bijection de $I$ sur $f(I)$ et sa bijection réciproque est continue et strictement croissante (respectivement décroissante) de $f(I)$ sur $I$.

## Exemple

$f(x) = x^2$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ et $f^{-1}$ est continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
Notation : $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

# Propriétés



## Représentation graphique de la réciproque

# Propriétés



**Représentation graphique de la réciproque**

Les représentation graphiques de $f$ et de $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice en repère orthonormé.

# Propriétés



### Représentation graphique de la réciproque

Les représentation graphiques de $f$ et de $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice en repère orthonormé.

### Démonstration

# Propriétés



## Représentation graphique de la réciproque

Les représentation graphiques de $f$ et de $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice en repère orthonormé.

## Démonstration

$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)),\ x \in \mathcal{D}_f\}$

# Propriétés



## Représentation graphique de la réciproque

Les représentation graphiques de $f$ et de $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice en repère orthonormé.

## Démonstration

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)),\ x \in \mathcal{D}_f\}$$
$$\mathcal{C}_f = \left\{\left(f^{-1}(y), y\right),\ y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}\right\}$$

# Propriétés



## Représentation graphique de la réciproque

Les représentation graphiques de $f$ et de $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice en repère orthonormé.

## Démonstration

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x))\,,\ x \in \mathcal{D}_f\}$$
$$\mathcal{C}_f = \left\{\left(f^{-1}(y), y\right)\,,\ y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}\right\}$$
$$\mathcal{C}_{f^{-1}} = \left\{\left(y, f^{-1}(y)\right)\,,\ x \in \mathcal{D}_{f^{-1}}\right\}$$

# Propriétés

## Exemple

# Propriétés

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



## Exemple

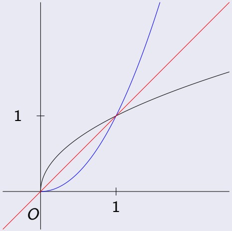
$f(x) = x^2 \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

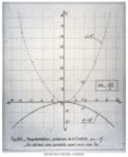
# Propriétés



## Exemple

$f(x) = x^2 \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$





Bernard Venet, né en 1941

# Nombre dérivé

## Définition

# Nombre dérivé



## Définition

Soit $I$ un intervalle voisinage du réel $a$ et $f$ une fonction définie sur $I$.

# Nombre dérivé



## Définition

Soit $I$ un intervalle voisinage du réel $a$ et $f$ une fonction définie sur $I$.
On dit que $f$ est dérivable au point $a$ si l'application définie sur $I - \{a\}$
$x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite lorsque $x$ tend vers $a$.

# Nombre dérivé



## Définition

Soit $I$ un intervalle voisinage du réel $a$ et $f$ une fonction définie sur $I$.
On dit que $f$ est dérivable au point $a$ si l'application définie sur $I - \{a\}$
$x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite lorsque $x$ tend vers $a$.
La limite est appelée dérivée de f en $a$.

# Nombre dérivé

## Définition

Soit $I$ un intervalle voisinage du réel $a$ et $f$ une fonction définie sur $I$.
On dit que $f$ est dérivable au point $a$ si l'application définie sur $I - \{a\}$
$x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite lorsque $x$ tend vers $a$.
La limite est appelée dérivée de f en $a$.

## Notation

# Nombre dérivé



## Définition

Soit $I$ un intervalle voisinage du réel $a$ et $f$ une fonction définie sur $I$.
On dit que $f$ est dérivable au point $a$ si l'application définie sur $I - \{a\}$
$x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite lorsque $x$ tend vers $a$.
La limite est appelée dérivée de f en $a$.

## Notation

$f'(a)$ ou $\dfrac{df}{dx}(a)$.

# Nombre dérivé



## Définition

Soit $I$ un intervalle voisinage du réel $a$ et $f$ une fonction définie sur $I$.
On dit que $f$ est dérivable au point $a$ si l'application définie sur $I - \{a\}$
$x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite lorsque $x$ tend vers $a$.
La limite est appelée dérivée de f en $a$.

## Notation

$f'(a)$ ou $\dfrac{df}{dx}(a)$.

## Fonction dérivée

# Nombre dérivé

## Définition

Soit $I$ un intervalle voisinage du réel $a$ et $f$ une fonction définie sur $I$.
On dit que $f$ est dérivable au point $a$ si l'application définie sur $I - \{a\}$
$x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite lorsque $x$ tend vers $a$.
La limite est appelée dérivée de f en $a$.

## Notation

$f'(a)$ ou $\dfrac{df}{dx}(a)$.

## Fonction dérivée

Si $f$ est dérivable sur $I$ alors $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de $f$ ou dérivée de $f$.

# Fonction dérivée



**Exemple 1**

# Fonction dérivée



**Exemple 1**

$f(x) = \alpha x + \beta$

# Fonction dérivée

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Fonctions
- Limite
- Continuité
- **Dérivation**
- Formules de Taylor

## Exemple 1

$f(x) = \alpha x + \beta$

$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{\alpha x + \beta - (\alpha a + \beta)}{x - a} = \dfrac{\alpha(x - a)}{x - a} = \alpha \to \alpha$ lorsque $x \to a$ :

# Fonction dérivée



## Exemple 1

$f(x) = \alpha x + \beta$

$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{\alpha x + \beta - (\alpha a + \beta)}{x - a} = \dfrac{\alpha(x - a)}{x - a} = \alpha \to \alpha$ lorsque $x \to a$ :

$f'(a) = \alpha$

# Fonction dérivée



## Exemple 1

$f(x) = \alpha x + \beta$

$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{\alpha x + \beta - (\alpha a + \beta)}{x - a} = \dfrac{\alpha(x - a)}{x - a} = \alpha \to \alpha$ lorsque $x \to a$ :

$f'(a) = \alpha$

$\forall x \in \mathbb{R} \ (\alpha x + \beta)' = \alpha$

# Fonction dérivée



## Exemple 1

$f(x) = \alpha x + \beta$

$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{\alpha x + \beta - (\alpha a + \beta)}{x - a} = \dfrac{\alpha(x - a)}{x - a} = \alpha \to \alpha$ lorsque $x \to a$ :

$f'(a) = \alpha$

$\forall x \in \mathbb{R}\ (\alpha x + \beta)' = \alpha$

## Exemple 2

# Fonction dérivée



## Exemple 1

$f(x) = \alpha x + \beta$

$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{\alpha x + \beta - (\alpha a + \beta)}{x - a} = \dfrac{\alpha(x - a)}{x - a} = \alpha \to \alpha$ lorsque $x \to a$ :

$f'(a) = \alpha$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $(\alpha x + \beta)' = \alpha$

## Exemple 2

$f(x) = x^2$

# Fonction dérivée



## Exemple 1

$f(x) = \alpha x + \beta$

$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{\alpha x + \beta - (\alpha a + \beta)}{x - a} = \dfrac{\alpha(x - a)}{x - a} = \alpha \to \alpha$ lorsque $x \to a$ :

$f'(a) = \alpha$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $(\alpha x + \beta)' = \alpha$

## Exemple 2

$f(x) = x^2$

$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = \dfrac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a \to 2a$ lorsque $x \to a$ :

# Fonction dérivée

## Exemple 1

$f(x) = \alpha x + \beta$

$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{\alpha x + \beta - (\alpha a + \beta)}{x - a} = \dfrac{\alpha(x - a)}{x - a} = \alpha \to \alpha$ lorsque $x \to a$ :

$f'(a) = \alpha$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $(\alpha x + \beta)' = \alpha$

## Exemple 2

$f(x) = x^2$

$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = \dfrac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a \to 2a$ lorsque $x \to a$ :

$f'(a) = 2a$

# Fonction dérivée

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

## Exemple 1

$f(x) = \alpha x + \beta$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\alpha x + \beta - (\alpha a + \beta)}{x - a} = \frac{\alpha(x - a)}{x - a} = \alpha \to \alpha \text{ lorsque } x \to a :$$

$f'(a) = \alpha$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $(\alpha x + \beta)' = \alpha$

## Exemple 2

$f(x) = x^2$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a \to 2a \text{ lorsque } x \to a :$$

$f'(a) = 2a$

$\forall x \in \mathbb{R}$

# Fonction dérivée

## Exemple 1

$f(x) = \alpha x + \beta$

$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{\alpha x + \beta - (\alpha a + \beta)}{x - a} = \dfrac{\alpha(x - a)}{x - a} = \alpha \to \alpha$ lorsque $x \to a$ :

$f'(a) = \alpha$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $(\alpha x + \beta)' = \alpha$

## Exemple 2

$f(x) = x^2$

$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = \dfrac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a \to 2a$ lorsque $x \to a$ :

$f'(a) = 2a$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $(x^2)' = 2x$

# Fonction dérivée

## Dérivée à gauche, dérivée à droite

# Fonction dérivée

## Dérivée à gauche, dérivée à droite

Soit $f$ une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle $[a, b]$.

# Fonction dérivée

## Dérivée à gauche, dérivée à droite

Soit $f$ une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle $[a, b]$.
La dérivée à droite (respectivement à gauche) de $f$ en $a$, notée $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$) est la limite, si elle existe de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque $x$ tend vers $a$ par valeurs supérieures (respectivement inférieures).

# Fonction dérivée

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

## Dérivée à gauche, dérivée à droite

Soit $f$ une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle $[a, b]$.
La dérivée à droite (respectivement à gauche) de $f$ en $a$, notée $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$) est la limite, si elle existe de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque $x$ tend vers $a$ par valeurs supérieures (respectivement inférieures).

## Remarques

# Fonction dérivée

## Dérivée à gauche, dérivée à droite

Soit $f$ une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle $[a, b]$.
La dérivée à droite (respectivement à gauche) de $f$ en $a$, notée $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$) est la limite, si elle existe de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque $x$ tend vers $a$ par valeurs supérieures (respectivement inférieures).

## Remarques

- $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

# Fonction dérivée



## Dérivée à gauche, dérivée à droite

Soit $f$ une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle $[a, b]$.
La dérivée à droite (respectivement à gauche) de $f$ en $a$, notée $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$) est la limite, si elle existe de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque $x$ tend vers $a$ par valeurs supérieures (respectivement inférieures).

## Remarques

- $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
- Si $f$ est dérivable en $a$ alors $f$ est continue en $a$.

# Fonction dérivée

## Dérivée à gauche, dérivée à droite

Soit $f$ une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle $[a, b]$.
La dérivée à droite (respectivement à gauche) de $f$ en $a$, notée $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$) est la limite, si elle existe de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque $x$ tend vers $a$ par valeurs supérieures (respectivement inférieures).

## Remarques

- $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
- Si $f$ est dérivable en $a$ alors $f$ est continue en $a$.
Mais la réciproque est fausse.

# Fonction dérivée

## Dérivée à gauche, dérivée à droite

Soit $f$ une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle $[a, b]$.
La dérivée à droite (respectivement à gauche) de $f$ en $a$, notée $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$) est la limite, si elle existe de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque $x$ tend vers $a$ par valeurs supérieures (respectivement inférieures).

## Remarques

- $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
- Si $f$ est dérivable en $a$ alors $f$ est continue en $a$.
Mais la réciproque est fausse.
Exemple : $f(x) = |x|$.

# Fonction dérivée

## Dérivée à gauche, dérivée à droite

Soit $f$ une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle $[a, b]$.
La dérivée à droite (respectivement à gauche) de $f$ en $a$, notée $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$) est la limite, si elle existe de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque $x$ tend vers $a$ par valeurs supérieures (respectivement inférieures).

## Remarques

- $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
- Si $f$ est dérivable en $a$ alors $f$ est continue en $a$.
Mais la réciproque est fausse.
Exemple : $f(x) = |x|$.
$f(x) = -x$ pour $x \leq 0$ et $f(x) = x$ pour $x \geq 0$.

# Fonction dérivée

## Dérivée à gauche, dérivée à droite

Soit $f$ une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle $[a, b]$.
La dérivée à droite (respectivement à gauche) de $f$ en $a$, notée $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$) est la limite, si elle existe de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque $x$ tend vers $a$ par valeurs supérieures (respectivement inférieures).

## Remarques

- $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
- Si $f$ est dérivable en $a$ alors $f$ est continue en $a$.

Mais la réciproque est fausse.
Exemple : $f(x) = |x|$.
$f(x) = -x$ pour $x \leq 0$ et $f(x) = x$ pour $x \geq 0$.
$f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$: $f$ n'est pas dérivable.

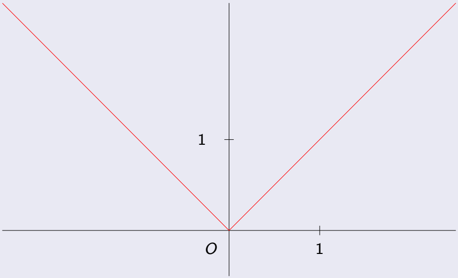
# Fonction dérivée



**Exemple :** $f(x) = |x|$

# Fonction dérivée

## Exemple : $f(x) = |x|$



# Tangente



## Interprétation graphique

# Tangente

## Interprétation graphique

Si $f$ est dérivable en $a$, la droite d'équation

# Tangente



## Interprétation graphique

Si $f$ est dérivable en $a$, la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

dans le plan muni d'un repère est la tangente à la courbe $C_f$ représentant $f$ au point de coordonnées $(a, f(a))$.

# Tangente



## Interprétation graphique

Si $f$ est dérivable en $a$, la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

dans le plan muni d'un repère est la tangente à la courbe $C_f$ représentant $f$ au point de coordonnées $(a, f(a))$.
$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $C_f$ au point d'abscisse $a$.

# Tangente

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Fonctions
- Limite
- Continuité
- Dérivation
- Formules de Taylor

## Interprétation graphique

Si $f$ est dérivable en $a$, la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

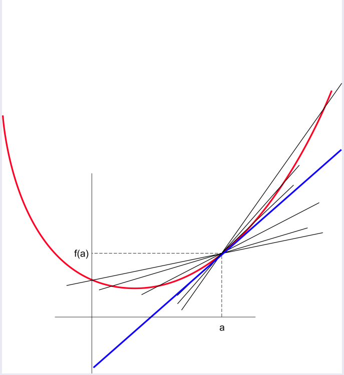
dans le plan muni d'un repère est la tangente à la courbe $C_f$ représentant $f$ au point de coordonnées $(a, f(a))$.
$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $C_f$ au point d'abscisse $a$.
$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le coefficient directeur de la sécante passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ $(x \neq a)$.

# Tangente

## Interprétation graphique

# Tangente

## Interprétation graphique



# Demi-tangente



## Dérivée à droite, à gauche

# Demi-tangente



## Dérivée à droite, à gauche

Si $f$ admet seulement une dérivée à droite en $a$, la demi-droite d'équation $y = f(a) + f_d'(a)(x - a)$ avec $x \geq a$ est la demi-tangente à droite à la représentation graphique de $f$ au point de coordonnées $(a, f(a))$.

# Demi-tangente

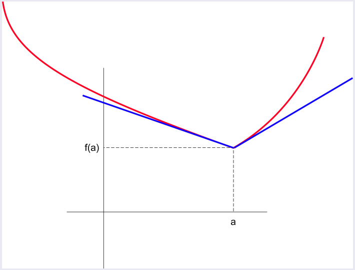
## Dérivée à droite, à gauche

Si $f$ admet seulement une dérivée à droite en $a$, la demi-droite d'équation $y = f(a) + f'_d(a)(x - a)$ avec $x \geq a$ est la demi-tangente à droite à la représentation graphique de $f$ au point de coordonnées $(a, f(a))$.
On définit de même la demi-tangente à gauche.

# Demi-tangente

## Dérivée à droite, à gauche

Si $f$ admet seulement une dérivée à droite en $a$, la demi-droite d'équation $y = f(a) + f'_d(a)(x - a)$ avec $x \geq a$ est la demi-tangente à droite à la représentation graphique de $f$ au point de coordonnées $(a, f(a))$.
On définit de même la demi-tangente à gauche.

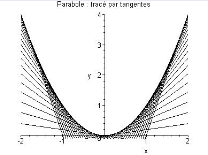


# Tangente

**Exemple : $f(x) = x^2$**

# Tangente

## Exemple : $f(x) = x^2$



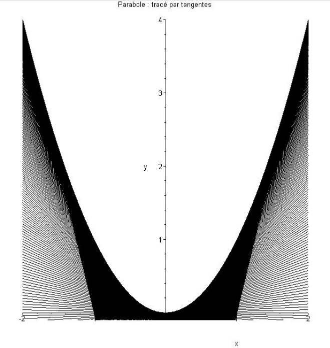
# Tangente

**Exemple : $f(x) = x^2$**

# Tangente



## Exemple : $f(x) = x^2$



# Dérivée d'ordre $n$

## Dérivées successives

# Dérivée d'ordre $n$



## Dérivées successives

Si la fonction $f'$ est définie sur un voisinage de $a$ et admet elle-même une dérivée en $a$, cette dérivée est appelée dérivée seconde de $f$ en $a$ et notée $f''(a)$ ou $\frac{d^2f}{dx^2}(a)$.

# Dérivée d'ordre $n$



## Dérivées successives

Si la fonction $f'$ est définie sur un voisinage de $a$ et admet elle-même une dérivée en $a$, cette dérivée est appelée dérivée seconde de $f$ en $a$ et notée $f''(a)$ ou $\frac{d^2 f}{dx^2}(a)$.

Par récurrence, on définit la dérivée d'ordre $n$ en $a$ notée $f^{(n)}(a)$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}(a)$,

# Dérivée d'ordre $n$



## Dérivées successives

Si la fonction $f'$ est définie sur un voisinage de $a$ et admet elle-même une dérivée en $a$, cette dérivée est appelée dérivée seconde de $f$ en $a$ et notée $f''(a)$ ou $\frac{d^2f}{dx^2}(a)$.

Par récurrence, on définit la dérivée d'ordre $n$ en $a$ notée $f^{(n)}(a)$ ou $\frac{d^nf}{dx^n}(a)$, dérivée en $a$, si elle existe, de la fonction $f^{(n-1)}(a)$ $(n \geq 1)$.

# Dérivée d'ordre $n$

## Dérivées successives

Si la fonction $f'$ est définie sur un voisinage de $a$ et admet elle-même une dérivée en $a$, cette dérivée est appelée dérivée seconde de $f$ en $a$ et notée $f''(a)$ ou $\frac{d^2f}{dx^2}(a)$.

Par récurrence, on définit la dérivée d'ordre $n$ en $a$ notée $f^{(n)}(a)$ ou $\frac{d^nf}{dx^n}(a)$, dérivée en $a$, si elle existe, de la fonction $f^{(n-1)}(a)$ $(n \geq 1)$.

Convention : $f^{(0)} = f$

# Dérivée d'ordre $n$



## Dérivées successives

Si la fonction $f'$ est définie sur un voisinage de $a$ et admet elle-même une dérivée en $a$, cette dérivée est appelée dérivée seconde de $f$ en $a$ et notée $f''(a)$ ou $\frac{d^2f}{dx^2}(a)$.

Par récurrence, on définit la dérivée d'ordre $n$ en $a$ notée $f^{(n)}(a)$ ou $\frac{d^nf}{dx^n}(a)$, dérivée en $a$, si elle existe, de la fonction $f^{(n-1)}(a)$ $(n \geq 1)$.

Convention : $f^{(0)} = f$

On définit de même la dérivée à droite (respectivement à gauche) d'ordre $n$.

# Dérivée d'ordre $n$

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



## Dérivées successives

Si la fonction $f'$ est définie sur un voisinage de $a$ et admet elle-même une dérivée en $a$, cette dérivée est appelée dérivée seconde de $f$ en $a$ et notée $f''(a)$ ou $\frac{d^2f}{dx^2}(a)$.
Par récurrence, on définit la dérivée d'ordre $n$ en $a$ notée $f^{(n)}(a)$ ou $\frac{d^nf}{dx^n}(a)$, dérivée en $a$, si elle existe, de la fonction $f^{(n-1)}(a)$ $(n \geq 1)$.
Convention : $f^{(0)} = f$
On définit de même la dérivée à droite (respectivement à gauche) d'ordre $n$.

## Exemple : $f(x) = x^2$

# Dérivée d'ordre $n$

## Dérivées successives

Si la fonction $f'$ est définie sur un voisinage de $a$ et admet elle-même une dérivée en $a$, cette dérivée est appelée dérivée seconde de $f$ en $a$ et notée $f''(a)$ ou $\frac{d^2 f}{dx^2}(a)$.
Par récurrence, on définit la dérivée d'ordre $n$ en $a$ notée $f^{(n)}(a)$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}(a)$, dérivée en $a$, si elle existe, de la fonction $f^{(n-1)}(a)$ $(n \geq 1)$.
Convention : $f^{(0)} = f$
On définit de même la dérivée à droite (respectivement à gauche) d'ordre $n$.

## Exemple : $f(x) = x^2$

$f(x) = f^{(0)}(x) = x^2$

# Dérivée d'ordre $n$



## Dérivées successives

Si la fonction $f'$ est définie sur un voisinage de $a$ et admet elle-même une dérivée en $a$, cette dérivée est appelée dérivée seconde de $f$ en $a$ et notée $f''(a)$ ou $\frac{d^2 f}{dx^2}(a)$.

Par récurrence, on définit la dérivée d'ordre $n$ en $a$ notée $f^{(n)}(a)$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}(a)$, dérivée en $a$, si elle existe, de la fonction $f^{(n-1)}(a)$ $(n \geq 1)$.

Convention : $f^{(0)} = f$

On définit de même la dérivée à droite (respectivement à gauche) d'ordre $n$.

## Exemple : $f(x) = x^2$

$f(x) = f^{(0)}(x) = x^2$

$f'(x) = f^{(1)}(x) = 2x$

# Dérivée d'ordre $n$

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Fonctions
- Limite
- Continuité
- **Dérivation**
- Formules de Taylor

## Dérivées successives

Si la fonction $f'$ est définie sur un voisinage de $a$ et admet elle-même une dérivée en $a$, cette dérivée est appelée dérivée seconde de $f$ en $a$ et notée $f''(a)$ ou $\frac{d^2 f}{dx^2}(a)$.

Par récurrence, on définit la dérivée d'ordre $n$ en $a$ notée $f^{(n)}(a)$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}(a)$, dérivée en $a$, si elle existe, de la fonction $f^{(n-1)}(a)$ $(n \geq 1)$.

Convention : $f^{(0)} = f$

On définit de même la dérivée à droite (respectivement à gauche) d'ordre $n$.

## Exemple : $f(x) = x^2$

$f(x) = f^{(0)}(x) = x^2$
$f'(x) = f^{(1)}(x) = 2x$
$f''(x) = f^{(2)}(x) = 2$

# Dérivée d'ordre $n$

## Dérivées successives

Si la fonction $f'$ est définie sur un voisinage de $a$ et admet elle-même une dérivée en $a$, cette dérivée est appelée dérivée seconde de $f$ en $a$ et notée $f''(a)$ ou $\frac{d^2 f}{dx^2}(a)$.

Par récurrence, on définit la dérivée d'ordre $n$ en $a$ notée $f^{(n)}(a)$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}(a)$, dérivée en $a$, si elle existe, de la fonction $f^{(n-1)}(a)$ $(n \geq 1)$.

Convention : $f^{(0)} = f$

On définit de même la dérivée à droite (respectivement à gauche) d'ordre $n$.

## Exemple : $f(x) = x^2$

$f(x) = f^{(0)}(x) = x^2$

$f'(x) = f^{(1)}(x) = 2x$

$f''(x) = f^{(2)}(x) = 2$

$f'''(x) = f^{(3)}(x) = f^{(n)}(x) = 0$ $(n \geq 3)$.

# Dérivée d'ordre $n$



## Fonction de classe $C^n$

# Dérivée d'ordre $n$



## Fonction de classe $C^n$

On dit que $f$ est de classe $C^n$ sur l'intervalle $I$ si la dérivée $f^{(n)}(x)$ existe en tout réel $x$ de $I$ et si la fonction dérivée d'ordre $n$ $f^{(n)}(x)$ est continue sur $I$.

# Dérivée d'ordre $n$



## Fonction de classe $C^n$

On dit que $f$ est de classe $C^n$ sur l'intervalle $I$ si la dérivée $f^{(n)}(x)$ existe en tout réel $x$ de $I$ et si la fonction dérivée d'ordre $n$ $f^{(n)}(x)$ est continue sur $I$. On dit que $f$ est de classe $C^\infty$ si $f^{(n)}(x)$ existe quel que soit $n \geq 0$.

# Dérivée d'ordre $n$



## Fonction de classe $C^n$

On dit que $f$ est de classe $C^n$ sur l'intervalle $I$ si la dérivée $f^{(n)}(x)$ existe en tout réel $x$ de $I$ et si la fonction dérivée d'ordre $n$ $f^{(n)}(x)$ est continue sur $I$. On dit que $f$ est de classe $C^\infty$ si $f^{(n)}(x)$ existe quel que soit $n \geq 0$.

## Exemple

# Dérivée d'ordre $n$



## Fonction de classe $C^n$

On dit que $f$ est de classe $C^n$ sur l'intervalle $I$ si la dérivée $f^{(n)}(x)$ existe en tout réel $x$ de $I$ et si la fonction dérivée d'ordre $n$ $f^{(n)}(x)$ est continue sur $I$. On dit que $f$ est de classe $C^\infty$ si $f^{(n)}(x)$ existe quel que soit $n \geq 0$.

## Exemple

$f(x) = x^2$ est de classe $C^\infty$.

# Dérivée



## Dérivées usuelles

# Dérivée



## Dérivées usuelles

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \; \alpha' = 0$

# Dérivée



## Dérivées usuelles

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \alpha' = 0$

$x' = 1$

# Dérivée

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



## Dérivées usuelles

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \; \alpha' = 0$

$x' = 1$

$x^2{}' = 2x$

# Dérivée

## Dérivées usuelles

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \alpha' = 0$

$x' = 1$

${x^2}' = 2x$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = {x^{-1}}' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

# Dérivée

## Dérivées usuelles

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \alpha' = 0$

$x' = 1$

$x^{2\prime} = 2x$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = x^{-1\prime} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

# Dérivée

## Dérivées usuelles

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \alpha' = 0$

$x' = 1$

$x^{2\prime} = 2x$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = x^{-1\prime} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

# Dérivée

## Dérivées usuelles

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \alpha' = 0$

$x' = 1$

$x^{2\prime} = 2x$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = x^{-1\prime} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

$(e^x)' = e^x$

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Fonctions
- Limite
- Continuité
- **Dérivation**
- Formules de Taylor

# Dérivée

## Dérivées usuelles

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \alpha' = 0$

$x' = 1$

$x^2{}' = 2x$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = x^{-1}{}' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$(e^x)' = e^x$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

# Dérivée



## Dérivées usuelles

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \alpha' = 0$

$x' = 1$

$x^{2\prime} = 2x$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = x^{-1\prime} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$

$(e^x)' = e^x$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$(\cos x)' = -\sin x$

# Dérivée

## Dérivées usuelles

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \alpha' = 0$

$x' = 1$

$x^{2\,\prime} = 2x$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = x^{-1\,\prime} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\sin x)' = \cos x$

# Dérivée

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



## Dérivées usuelles

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \alpha' = 0$

$x' = 1$

$x^{2\prime} = 2x$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = x^{-1\prime} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{cos^2 x}$

# Dérivée

## Opérations

# Dérivée



## Opérations

$(f+g)' = f' + g'$

# Dérivée

## Opérations

$(f+g)' = f' + g'$

$(\lambda f)' = \lambda f'$

# Dérivée



## Opérations

$(f+g)' = f' + g'$
$(\lambda f)' = \lambda f'$
$(fg)' = f'g + fg'$

# Dérivée

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



## Opérations

$(f+g)' = f' + g'$

$(\lambda f)' = \lambda f'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ (g ne s'annulant pas)

# Dérivée



## Opérations

$(f+g)' = f' + g'$

$(\lambda f)' = \lambda f'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (g ne s'annulant pas)

$(g \circ f)'(x) = g(f(x))'(x) = g'(f(x)).f'(x)$

# Dérivée

## Opérations

$(f+g)' = f' + g'$

$(\lambda f)' = \lambda f'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (g ne s'annulant pas)

$(g \circ f)'(x) = g(f(x))'(x) = g'(f(x)).f'(x)$

$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

# Dérivée

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Fonctions
- Limite
- Continuité
- Dérivation
- Formules de Taylor

## Opérations

$(f+g)' = f' + g'$

$(\lambda f)' = \lambda f'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (g ne s'annulant pas)

$(g \circ f)'(x) = g(f(x))'(x) = g'(f(x)).f'(x)$

$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

avec $f(x) = y$, $y = f^{-1}(x)$ et $f'(x) \neq 0$.

# Dérivée

## Exemples

# Dérivée



## Exemples

$$(\cos x + e^x)' = (\cos x)' + (e^x)' = -\sin x + e^x$$

# Dérivée

## Exemples

$(\cos x + e^x)' = (\cos x)' + (e^x)' = -\sin x + e^x$

$(3 \sin x)' = 3(\sin x)' = 3 \cos x$

# Dérivée



## Exemples

$$(\cos x + e^x)' = (\cos x)' + (e^x)' = -\sin x + e^x$$
$$(3\sin x)' = 3(\sin x)' = 3\cos x$$
$$(x\ln x)' = x'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x.\frac{1}{x} = \ln x + 1 \ (x > 0)$$

# Dérivée



## Exemples

$(\cos x + e^x)' = (\cos x)' + (e^x)' = -\sin x + e^x$

$(3\sin x)' = 3(\sin x)' = 3\cos x$

$(x\ln x)' = x'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x.\dfrac{1}{x} = \ln x + 1 \ (x > 0)$

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

# Dérivée

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

## Exemples

$(\cos x + e^x)' = (\cos x)' + (e^x)' = -\sin x + e^x$

$(3\sin x)' = 3(\sin x)' = 3\cos x$

$(x\ln x)' = x'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x.\dfrac{1}{x} = \ln x + 1 \ (x > 0)$

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1.(x-1) - (x+1).1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \ (x \neq 1)$$

# Dérivée

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

## Exemples

$(\cos x + e^x)' = (\cos x)' + (e^x)' = -\sin x + e^x$

$(3 \sin x)' = 3(\sin x)' = 3 \cos x$

$(x \ln x)' = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x.\dfrac{1}{x} = \ln x + 1 \ (x > 0)$

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1.(x-1) - (x+1).1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \ (x \neq 1)$$

$\cos(x^2)' = \cos'(x^2).x^2{}' = -\sin(x^2).2x = -2x \sin(x^2)$

# Dérivée



## Exemples

$(\cos x + e^x)' = (\cos x)' + (e^x)' = -\sin x + e^x$

$(3\sin x)' = 3(\sin x)' = 3\cos x$

$(x \ln x)' = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x.\dfrac{1}{x} = \ln x + 1 \ (x > 0)$

$\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)' = \dfrac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{1.(x-1) - (x+1).1}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2} \ (x \neq 1)$

$\cos(x^2)' = \cos'(x^2).x^{2'} = -\sin(x^2).2x = -2x\sin(x^2)$

$f(x) = x^2 = y$

# Dérivée

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

## Exemples

$(\cos x + e^x)' = (\cos x)' + (e^x)' = -\sin x + e^x$

$(3 \sin x)' = 3(\sin x)' = 3 \cos x$

$(x \ln x)' = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x.\dfrac{1}{x} = \ln x + 1 \ (x > 0)$

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1.(x-1) - (x+1).1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \ (x \neq 1)$$

$\cos(x^2)' = \cos'(x^2).x^{2\prime} = -\sin(x^2).2x = -2x\sin(x^2)$

$f(x) = x^2 = y \ f^{-1}(y) = \sqrt{y} = x$

# Dérivée

## Exemples

$$(\cos x + e^x)' = (\cos x)' + (e^x)' = -\sin x + e^x$$

$$(3\sin x)' = 3(\sin x)' = 3\cos x$$

$$(x\ln x)' = x'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x.\frac{1}{x} = \ln x + 1 \ (x > 0)$$

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1.(x-1) - (x+1).1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \ (x \neq 1)$$

$$\cos(x^2)' = \cos'(x^2).x^{2\prime} = -\sin(x^2).2x = -2x\sin(x^2)$$

$$f(x) = x^2 = y \ f^{-1}(y) = \sqrt{y} = x$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

# Dérivée

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



## Exemples

$(\cos x + e^x)' = (\cos x)' + (e^x)' = -\sin x + e^x$

$(3 \sin x)' = 3(\sin x)' = 3 \cos x$

$(x \ln x)' = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x.\dfrac{1}{x} = \ln x + 1 \; (x > 0)$

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1.(x-1) - (x+1).1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \; (x \neq 1)$$

$\cos(x^2)' = \cos'(x^2).x^{2\prime} = -\sin(x^2).2x = -2x \sin(x^2)$

$f(x) = x^2 = y \;\; f^{-1}(y) = \sqrt{y} = x$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

On en déduit $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \; (x > 0)$.

# Dérivée



**Exemple : $f(x) = \cos x + e^x$**

# Dérivée



**Exemple : $f(x) = \cos x + e^x$**

$f'(x) = -\sin x + e^x$

# Dérivée

**Exemple : $f(x) = \cos x + e^x$**

$f'(x) = -\sin x + e^x$
En particulier $f'(0) = -\sin 0 + e^0 = 0 + 1 = 1$.

# Dérivée

## Exemple : $f(x) = \cos x + e^x$

$f'(x) = -\sin x + e^x$
En particulier $f'(0) = -\sin 0 + e^0 = 0 + 1 = 1$.
Equation de la tangente au point d'abscise 0 et d'ordonnée $f(0) = 2$:

# Dérivée

## Exemple : $f(x) = \cos x + e^x$

$f'(x) = -\sin x + e^x$
En particulier $f'(0) = -\sin 0 + e^0 = 0 + 1 = 1$.
Equation de la tangente au point d'abscise 0 et d'ordonnée $f(0) = 2$:
$y = f(0) + f'(0).(x - 0) = 2 + 1.x = x + 2$

# Dérivée

## Exemple : $f(x) = \cos x + e^x$

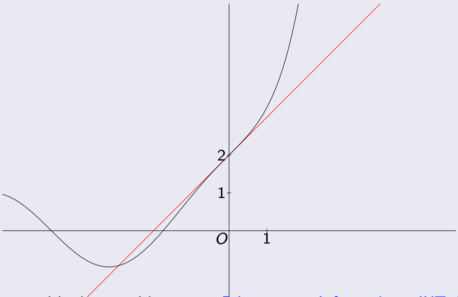
$f'(x) = -\sin x + e^x$
En particulier $f'(0) = -\sin 0 + e^0 = 0 + 1 = 1$.
Equation de la tangente au point d'abscise 0 et d'ordonnée $f(0) = 2$:
$y = f(0) + f'(0).(x - 0) = 2 + 1.x = x + 2$

$$\boxed{y = x + 2}$$

# Dérivée

## Exemple : $f(x) = \cos x + e^x$

$f'(x) = -\sin x + e^x$
En particulier $f'(0) = -\sin 0 + e^0 = 0 + 1 = 1.$
Equation de la tangente au point d'abscise 0 et d'ordonnée $f(0) = 2$:
$y = f(0) + f'(0).(x - 0) = 2 + 1.x = x + 2$
$\boxed{y = x + 2}$



# Différentielle



## Fonction différentiable

# Différentielle

## Fonction différentiable

Une fonction $f$ définie sur un voisinage de $a$ est dite différentiable en $a$

# Différentielle

## Fonction différentiable

Une fonction $f$ définie sur un voisinage de $a$ est dite différentiable en $a$ s'il existe un voisinage $V$ de $a$, un réel $\alpha$ et une fonction $\epsilon$ définie sur $V$ tendant vers 0 en $a$ tels que

# Différentielle



## Fonction différentiable

Une fonction $f$ définie sur un voisinage de $a$ est dite différentiable en $a$ s'il existe un voisinage $V$ de $a$, un réel $\alpha$ et une fonction $\epsilon$ définie sur $V$ tendant vers 0 en $a$ tels que $f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$ pour tout $x \in V$.

# Différentielle



## Fonction différentiable

Une fonction $f$ définie sur un voisinage de $a$ est dite différentiable en $a$ s'il existe un voisinage $V$ de $a$, un réel $\alpha$ et une fonction $\epsilon$ définie sur $V$ tendant vers 0 en $a$ tels que $f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$ pour tout $x \in V$.

## Propriété

# Différentielle



## Fonction différentiable

Une fonction $f$ définie sur un voisinage de $a$ est dite différentiable en $a$ s'il existe un voisinage $V$ de $a$, un réel $\alpha$ et une fonction $\epsilon$ définie sur $V$ tendant vers 0 en $a$ tels que $f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$ pour tout $x \in V$.

## Propriété

$f$ est différentiable en $a$ si et seulement si $f$ est dérivable en $a$.

# Différentielle



## Fonction différentiable

Une fonction $f$ définie sur un voisinage de $a$ est dite différentiable en $a$ s'il existe un voisinage $V$ de $a$, un réel $\alpha$ et une fonction $\epsilon$ définie sur $V$ tendant vers 0 en $a$ tels que $f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$ pour tout $x \in V$.

## Propriété

$f$ est différentiable en $a$ si et seulement si $f$ est dérivable en $a$.
De plus $\alpha = f'(a)$.

# Différentielle



## Fonction différentiable

Une fonction $f$ définie sur un voisinage de $a$ est dite différentiable en $a$ s'il existe un voisinage $V$ de $a$, un réel $\alpha$ et une fonction $\epsilon$ définie sur $V$ tendant vers 0 en $a$ tels que $f(x) = f(a) + \alpha(x - a) + (x - a)\epsilon(x)$ pour tout $x \in V$.

## Propriété

$f$ est différentiable en $a$ si et seulement si $f$ est dérivable en $a$.
De plus $\alpha = f'(a)$.

## Remarque

# Différentielle

## Fonction différentiable

Une fonction $f$ définie sur un voisinage de $a$ est dite différentiable en $a$ s'il existe un voisinage $V$ de $a$, un réel $\alpha$ et une fonction $\epsilon$ définie sur $V$ tendant vers 0 en $a$ tels que $f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$ pour tout $x \in V$.

## Propriété

$f$ est différentiable en $a$ si et seulement si $f$ est dérivable en $a$.
De plus $\alpha = f'(a)$.

## Remarque

En posant $h = x - a$, soit $x = a + h$, on obtient

# Différentielle

## Fonction différentiable

Une fonction $f$ définie sur un voisinage de $a$ est dite différentiable en $a$ s'il existe un voisinage $V$ de $a$, un réel $\alpha$ et une fonction $\epsilon$ définie sur $V$ tendant vers 0 en $a$ tels que $f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$ pour tout $x \in V$.

## Propriété

$f$ est différentiable en $a$ si et seulement si $f$ est dérivable en $a$.
De plus $\alpha = f'(a)$.

## Remarque

En posant $h = x - a$, soit $x = a + h$, on obtient
$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\epsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ pour tout $h$ tel que $a + h \in V$.

# Différentielle



## Différentielle

# Différentielle



## Différentielle

L'application linéaire $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \mapsto f'(a)h$ est appelée différentielle de $f$ en $a$ et notée : $df_a$.

# Différentielle



## Différentielle

L'application linéaire $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \mapsto f'(a)h$ est appelée différentielle de $f$ en $a$ et notée : $df_a$.
On a donc $df_a(h) = f'(a)h$.

# Différentielle



## Différentielle

L'application linéaire $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \mapsto f'(a)h$ est appelée différentielle de $f$ en $a$ et notée : $df_a$.
On a donc $df_a(h) = f'(a)h$.

## Exemple

# Différentielle



## Différentielle

L'application linéaire $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \mapsto f'(a)h$ est appelée différentielle de $f$ en $a$ et notée : $df_a$.
On a donc $df_a(h) = f'(a)h$.

## Exemple

$f(x) = x$ (identité de $\mathbb{R}$, $id_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$).

# Différentielle



## Différentielle

L'application linéaire $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \mapsto f'(a)h$ est appelée différentielle de $f$ en $a$ et notée : $df_a$.
On a donc $df_a(h) = f'(a)h$.

## Exemple

$f(x) = x$ (identité de $\mathbb{R}$, $id_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$).
$\forall a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = 1$ et donc $df_a = f = id_{\mathbb{R}}$.

# Différentielle

## Différentielle

L'application linéaire $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \mapsto f'(a)h$ est appelée différentielle de $f$ en $a$ et notée : $df_a$.
On a donc $df_a(h) = f'(a)h$.

## Exemple

$f(x) = x$ (identité de $\mathbb{R}$, $id_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$).
$\forall a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = 1$ et donc $df_a = f = id_{\mathbb{R}}$.

## Notations

# Différentielle



## Différentielle

L'application linéaire $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \mapsto f'(a)h$ est appelée différentielle de $f$ en $a$ et notée : $df_a$.
On a donc $df_a(h) = f'(a)h$.

## Exemple

$f(x) = x$ (identité de $\mathbb{R}$, $id_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$).
$\forall a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = 1$ et donc $df_a = f = id_{\mathbb{R}}$.

## Notations

$d\, id_{\mathbb{R}} = dx$ avec $dx(h) = h$.

# Différentielle

## Différentielle

L'application linéaire $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \mapsto f'(a)h$ est appelée différentielle de $f$ en $a$ et notée : $df_a$.
On a donc $df_a(h) = f'(a)h$.

## Exemple

$f(x) = x$ (identité de $\mathbb{R}$, $id_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$).
$\forall a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = 1$ et donc $df_a = f = id_{\mathbb{R}}$.

## Notations

$d\, id_{\mathbb{R}} = dx$ avec $dx(h) = h$.
Pour toute fonction $f$ :

# Différentielle



## Différentielle

L'application linéaire $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \mapsto f'(a)h$ est appelée différentielle de $f$ en $a$ et notée : $df_a$.
On a donc $df_a(h) = f'(a)h$.

## Exemple

$f(x) = x$ (identité de $\mathbb{R}$, $id_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$).
$\forall a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = 1$ et donc $df_a = f = id_{\mathbb{R}}$.

## Notations

$d\, id_{\mathbb{R}} = dx$ avec $dx(h) = h$.
Pour toute fonction $f$ :
$df_a = f'(a)dx$ ou $df = f'(a)dx$ ou encore $\boxed{df = f'(x)\, dx}$.

# Différentielle

## Exemple

# Différentielle



**Exemple**

$f(x) = \sin x \,:\; df = f'(x)dx = \cos x \, dx$

# Différentielle

## Exemple

$f(x) = \sin x \ : \ df = f'(x)dx = \cos x \, dx$

## Interprétation graphique

# Différentielle

## Exemple

$f(x) = \sin x \,:\; df = f'(x)dx = \cos x \, dx$

## Interprétation graphique

Equation de la tangente au point d'abscisse $a$ dans le repère d'origine $O(0,0)$ : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

# Différentielle



## Exemple

$f(x) = \sin x \,:\, df = f'(x)dx = \cos x \, dx$

## Interprétation graphique

Equation de la tangente au point d'abscisse $a$ dans le repère d'origine $O(0,0) \,:\, y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Equation de la tangente dans le repère d'origine $A(a, f(a)) \,:\, Y = f'(a)h$.

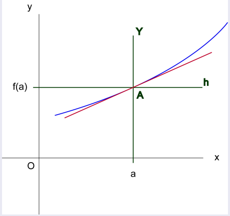
# Différentielle

## Exemple

$f(x) = \sin x$ : $df = f'(x)dx = \cos x \, dx$

## Interprétation graphique

Equation de la tangente au point d'abscisse $a$ dans le repère d'origine $O(0,0)$ : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Equation de la tangente dans le repère d'origine $A(a, f(a))$ : $Y = f'(a)h$.



# Théorème de Rolle

## Théorème préliminaire

# Théorème de Rolle

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



**Théorème préliminaire**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et admettant en un réel $x_0$ intérieur à $I$ un extremum relatif (maximum ou minimum).

# Théorème de Rolle



**Théorème préliminaire**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et admettant en un réel $x_0$ intérieur à $I$ un extremum relatif (maximum ou minimum).
Si $f'(x_0)$ existe alors $f'(x_0) = 0$.

# Théorème de Rolle

### Théorème préliminaire

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et admettant en un réel $x_0$ intérieur à $I$ un extremum relatif (maximum ou minimum).
Si $f'(x_0)$ existe alors $f'(x_0) = 0$.

### Théorème de Rolle

# Théorème de Rolle



**Théorème préliminaire**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et admettant en un réel $x_0$ intérieur à $I$ un extremum relatif (maximum ou minimum).
Si $f'(x_0)$ existe alors $f'(x_0) = 0$.

**Théorème de Rolle**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.

# Théorème de Rolle

## Théorème préliminaire

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et admettant en un réel $x_0$ intérieur à $I$ un extremum relatif (maximum ou minimum).
Si $f'(x_0)$ existe alors $f'(x_0) = 0$.

## Théorème de Rolle

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

# Théorème de Rolle



## Interprétation graphique

# Théorème de Rolle



## Interprétation graphique

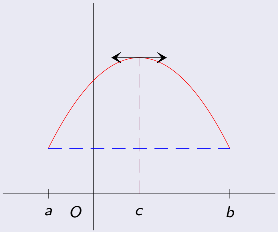
Il existe un point de la représentation graphique de $f$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

# Théorème de Rolle



## Interprétation graphique

Il existe un point de la représentation graphique de $f$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.



# Théorème des accroissements finis

**Théorème**

# Théorème des accroissements finis



**Théorème**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

# Théorème des accroissements finis



**Théorème**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

# Théorème des accroissements finis



**Théorème**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

**Démonstration**

# Théorème des accroissements finis



## Théorème

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

## Démonstration

On applique le théorème de Rolle à
$g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

# Théorème des accroissements finis

## Interprétation graphique

# Théorème des accroissements finis



## Interprétation graphique

Il existe un point de la représentation graphique de $f$ où la tangente est parallèle à la droite passant par $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

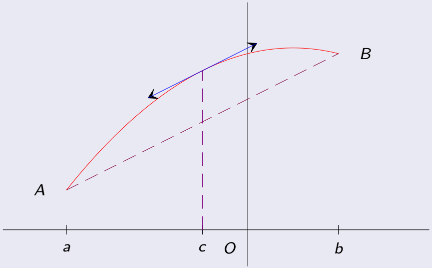
# Théorème des accroissements finis



## Interprétation graphique

Il existe un point de la représentation graphique de $f$ où la tangente est parallèle à la droite passant par $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



# Inégalité des accroissements finis



**Théorème**

# Inégalité des accroissements finis

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Fonctions
- Limite
- Continuité
- **Dérivation**
- Formules de Taylor

### Théorème

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

# Inégalité des accroissements finis



**Théorème**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Si $\forall x \in ]a, b[ \; m \leq f'(x) \leq M$

# Inégalité des accroissements finis



**Théorème**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Si $\forall x \in ]a, b[\ m \leq f'(x) \leq M$ alors $m \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$.

# Fonction monotone, fonction strictement monotone

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

**Théorème**

# Fonction monotone, fonction strictement monotone



**Théorème**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et dérivable en tout réel intérieur à $I$. Pour que f soit croissante (respectivement décroissante) il faut et il suffit que

# Fonction monotone, fonction strictement monotone



## Théorème

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et dérivable en tout réel intérieur à $I$. Pour que f soit croissante (respectivement décroissante) il faut et il suffit que $f'$ soit positive (respectivement négative).

# Fonction monotone, fonction strictement monotone



## Théorème

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et dérivable en tout réel intérieur à $I$. Pour que f soit croissante (respectivement décroissante) il faut et il suffit que $f'$ soit positive (respectivement négative).

Pour que $f$ soit constante, il faut et il suffit que $f'$ soit la fonction nulle.

# Fonction monotone, fonction strictement monotone



**Théorème**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et dérivable en tout réel intérieur à $I$. Pour que f soit croissante (respectivement décroissante) il faut et il suffit que $f'$ soit positive (respectivement négative).
Pour que $f$ soit constante, il faut et il suffit que $f'$ soit la fonction nulle.

**Partie dense**

# Fonction monotone, fonction strictement monotone

## Théorème

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et dérivable en tout réel intérieur à $I$. Pour que f soit croissante (respectivement décroissante) il faut et il suffit que $f'$ soit positive (respectivement négative).
Pour que $f$ soit constante, il faut et il suffit que $f'$ soit la fonction nulle.

## Partie dense

On dit qu'une partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}$ est dense dans un intervalle $I$ si tout réel de $I$ est adhérent à $\mathcal{E}$.

# Fonction monotone, fonction strictement monotone

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



**Théorème**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et dérivable en tout réel intérieur à $I$. Pour que f soit croissante (respectivement décroissante) il faut et il suffit que $f'$ soit positive (respectivement négative).
Pour que $f$ soit constante, il faut et il suffit que $f'$ soit la fonction nulle.

**Partie dense**

On dit qu'une partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}$ est dense dans un intervalle $I$ si tout réel de $I$ est adhérent à $\mathcal{E}$.

**Condition nécessaire et suffisante**

# Fonction monotone, fonction strictement monotone



## Théorème

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et dérivable en tout réel intérieur à $I$. Pour que f soit croissante (respectivement décroissante) il faut et il suffit que $f'$ soit positive (respectivement négative).
Pour que $f$ soit constante, il faut et il suffit que $f'$ soit la fonction nulle.

## Partie dense

On dit qu'une partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}$ est dense dans un intervalle $I$ si tout réel de $I$ est adhérent à $\mathcal{E}$.

## Condition nécessaire et suffisante

Soit $f$ une fonction croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle $I$ et dérivable en tout réel intérieur à $I$.

# Fonction monotone, fonction strictement monotone



## Théorème

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et dérivable en tout réel intérieur à $I$. Pour que f soit croissante (respectivement décroissante) il faut et il suffit que $f'$ soit positive (respectivement négative).
Pour que $f$ soit constante, il faut et il suffit que $f'$ soit la fonction nulle.

## Partie dense

On dit qu'une partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}$ est dense dans un intervalle $I$ si tout réel de $I$ est adhérent à $\mathcal{E}$.

## Condition nécessaire et suffisante

Soit $f$ une fonction croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle $I$ et dérivable en tout réel intérieur à $I$.
$f$ est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) si et seulement si l'ensemble des réels $x \in I$ tels que $f'(x) \neq 0$ est dense dans $I$.

# Fonction monotone, fonction strictement monotone

## Exemple

# Fonction monotone, fonction strictement monotone



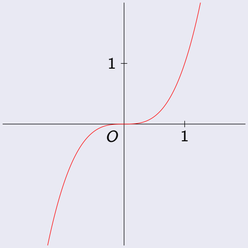
## Exemple

La fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ : $x \mapsto x^3$.

# Fonction monotone, fonction strictement monotone

## Exemple

La fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ : $x \mapsto x^3$.



# Variations d'une fonction



## Tableau de variations

# Variations d'une fonction



## Tableau de variations

Soit $f(x) = x^2$.

# Variations d'une fonction



## Tableau de variations

Soit $f(x) = x^2$.
On a $f'(x) > 0$ pour $x > 0$ et $f'(x) < 0$ pour $x < 0$

# Variations d'une fonction

## Tableau de variations

Soit $f(x) = x^2$.
On a $f'(x) > 0$ pour $x > 0$ et $f'(x) < 0$ pour $x < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

# Formules de Taylor



## Formule de Taylor - Lagrange

# Formules de Taylor



## Formule de Taylor - Lagrange

Soit $n$ un entier naturel, $f$ une fonction de classe $C^n$ sur l'intervalle $[a, b]$ et admettant sur $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n + 1$.

# Formules de Taylor



## Formule de Taylor - Lagrange

Soit $n$ un entier naturel, $f$ une fonction de classe $C^n$ sur l'intervalle $[a, b]$ et admettant sur $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n + 1$.
Alors il existe un réel $c \in ]a, b[$ tel que :

# Formules de Taylor



## Formule de Taylor - Lagrange

Soit $n$ un entier naturel, $f$ une fonction de classe $C^n$ sur l'intervalle $[a, b]$ et admettant sur $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n+1$.
Alors il existe un réel $c \in ]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

# Formules de Taylor



## Formule de Taylor - Lagrange

Soit $n$ un entier naturel, $f$ une fonction de classe $C^n$ sur l'intervalle $[a, b]$ et admettant sur $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n+1$.
Alors il existe un réel $c \in ]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

# Formules de Taylor



## Formule de Taylor - Lagrange

Soit $n$ un entier naturel, $f$ une fonction de classe $C^n$ sur l'intervalle $[a, b]$ et admettant sur $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n+1$.
Alors il existe un réel $c \in ]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

## Autre notation

# Formules de Taylor



## Formule de Taylor - Lagrange

Soit $n$ un entier naturel, $f$ une fonction de classe $C^n$ sur l'intervalle $[a,b]$ et admettant sur $]a,b[$ une dérivée d'ordre $n+1$.
Alors il existe un réel $c \in ]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

## Autre notation

$c = a + \theta(b-a)$ avec $0 < \theta < 1$.

# Formules de Taylor

## Formule de Taylor - Mac Laurin

## Formule de Taylor - Mac Laurin

On pose $a = 0$ et $b = x$ :

# Formules de Taylor



## Formule de Taylor - Mac Laurin

On pose $a = 0$ et $b = x$ :

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

# Formules de Taylor



## Formule de Taylor - Mac Laurin

On pose $a = 0$ et $b = x$ :

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

$$f(x) =$$

$$f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0)+\frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

# Formules de Taylor

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

- Plan
- Fonctions
- Limite
- Continuité
- Dérivation
- Formules de Taylor

## Formule de Taylor - Mac Laurin

On pose $a = 0$ et $b = x$ :

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

$$f(x) =$$

$$f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

## Exemple

# Formules de Taylor

## Formule de Taylor - Mac Laurin

On pose $a = 0$ et $b = x$ :

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

$$f(x) =$$

$$f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

## Exemple

Pour tout entier naturel $n$ et tout réel $x$, il existe $\theta \in ]0, 1[$ tel que :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

# Formules de Taylor

## Formule de Taylor - Young

# Formules de Taylor

## Formule de Taylor - Young

Soit $f$ une fonction définie sur un voisinage d'un réel $a$ et telle que $f^{(n)}(a)$ existe.

# Formules de Taylor



## Formule de Taylor - Young

Soit $f$ une fonction définie sur un voisinage d'un réel $a$ et telle que $f^{(n)}(a)$ existe.
Il existe une fonction $\epsilon(x)$ définie sur un voisinage de $a$ qui tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $a$ et qui vérifie :

# Formules de Taylor



## Formule de Taylor - Young

Soit $f$ une fonction définie sur un voisinage d'un réel $a$ et telle que $f^{(n)}(a)$ existe.
Il existe une fonction $\epsilon(x)$ définie sur un voisinage de $a$ qui tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $a$ et qui vérifie :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x)$$

# Formules de Taylor



## Formule de Taylor - Young

Soit $f$ une fonction définie sur un voisinage d'un réel $a$ et telle que $f^{(n)}(a)$ existe.
Il existe une fonction $\epsilon(x)$ définie sur un voisinage de $a$ qui tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $a$ et qui vérifie :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x)$$

$$f(x) =$$

$$f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x)$$

# Formules de Taylor

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



## Formule de Taylor - Young

Soit $f$ une fonction définie sur un voisinage d'un réel $a$ et telle que $f^{(n)}(a)$ existe.
Il existe une fonction $\epsilon(x)$ définie sur un voisinage de $a$ qui tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $a$ et qui vérifie :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x)$$

$$f(x) =$$

$$f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x)$$

## Cas particulier : $a = 0$

# Formules de Taylor



## Formule de Taylor - Young

Soit $f$ une fonction définie sur un voisinage d'un réel $a$ et telle que $f^{(n)}(a)$ existe.
Il existe une fonction $\epsilon(x)$ définie sur un voisinage de $a$ qui tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $a$ et qui vérifie :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x)$$

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x)$$

## Cas particulier : $a = 0$

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + x^n \epsilon(x)$$

# Formules de Taylor

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



## Formule de Taylor - Young

Soit $f$ une fonction définie sur un voisinage d'un réel $a$ et telle que $f^{(n)}(a)$ existe.
Il existe une fonction $\epsilon(x)$ définie sur un voisinage de $a$ qui tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $a$ et qui vérifie :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x)$$

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x)$$

## Cas particulier : $a = 0$

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + x^n \epsilon(x)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \epsilon(x)$$

# Formules de Taylor

## Exemple

# Formules de Taylor

## Exemple

Pour tout entier naturel $n$ et tout réel $x$:

# Formules de Taylor



## Exemple

Pour tout entier naturel $n$ et tout réel $x$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

# Formules de Taylor



## Développement de Taylor

# Formules de Taylor



## Développement de Taylor

Soit $f$ une fonction admettant une dérivée d'ordre $n$ en $a$.

# Formules de Taylor



## Développement de Taylor

Soit $f$ une fonction admettant une dérivée d'ordre $n$ en $a$.
On appelle développement de Taylor d'ordre $n$ de $f$ en $a$ la fonction

# Formules de Taylor



## Développement de Taylor

Soit $f$ une fonction admettant une dérivée d'ordre $n$ en $a$.
On appelle développement de Taylor d'ordre $n$ de $f$ en $a$ la fonction

$$P_n(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

# Formules de Taylor



## Développement de Taylor

Soit $f$ une fonction admettant une dérivée d'ordre $n$ en $a$.
On appelle développement de Taylor d'ordre $n$ de $f$ en $a$ la fonction

$$P_n(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

# Formules de Taylor

## Développement de Taylor

Soit $f$ une fonction admettant une dérivée d'ordre $n$ en $a$.
On appelle développement de Taylor d'ordre $n$ de $f$ en $a$ la fonction

$$P_n(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

## Cas particulier : $a = 0$

# Formules de Taylor

## Développement de Taylor

Soit $f$ une fonction admettant une dérivée d'ordre $n$ en $a$.
On appelle développement de Taylor d'ordre $n$ de $f$ en $a$ la fonction

$$P_n(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

## Cas particulier : $a = 0$

$$P_n(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

# Formules de Taylor

## Exemple : $f(x) = e^x$

# Formules de Taylor



**Exemple : $f(x) = e^x$**

$P_1(x) = 1 + x$

# Formules de Taylor



**Exemple : $f(x) = e^x$**

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

# Formules de Taylor

**Exemple : $f(x) = e^x$**

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

# Formules de Taylor

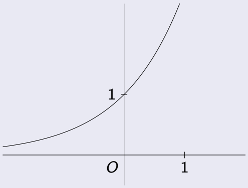


## Exemple : $f(x) = e^x$

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$



# Formules de Taylor

**Exemple : $f(x) = e^x$**

# Formules de Taylor



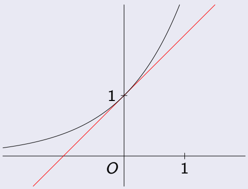
**Exemple : $f(x) = e^x$**

$P_1(x) = 1 + x$

# Formules de Taylor

**Exemple : $f(x) = e^x$**

$P_1(x) = 1 + x$



# Formules de Taylor

**Exemple : $f(x) = e^x$**

# Formules de Taylor



**Exemple : $f(x) = e^x$**

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

# Formules de Taylor

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Fonctions

Limite

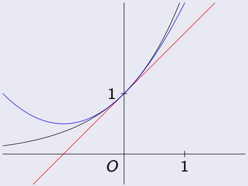
Continuité

Dérivation

Formules de Taylor

## Exemple : $f(x) = e^x$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$



**Exemple : $f(x) = e^x$**

# Formules de Taylor



**Exemple : $f(x) = e^x$**

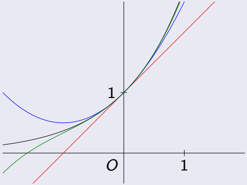
$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

# Formules de Taylor



## Exemple : $f(x) = e^x$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$



# Fonctions de référence

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



## Exemples

# Fonctions de référence

## Exemples

La formule de Taylor-Young permet les formules suivantes au voisinage de 0 avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$ :

# Fonctions de référence



## Exemples

La formule de Taylor-Young permet les formules suivantes au voisinage de 0 avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$ :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

# Fonctions de référence



## Exemples

La formule de Taylor-Young permet les formules suivantes au voisinage de 0 avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$ :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$$

# Fonctions de référence



## Exemples

La formule de Taylor-Young permet les formules suivantes au voisinage de 0 avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$ :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \epsilon(x)$$

# Fonctions de référence



## Exemples

La formule de Taylor-Young permet les formules suivantes au voisinage de 0 avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$ :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \epsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + x^n \epsilon(x)$$

# Fonctions de référence



## Exemples

La formule de Taylor-Young permet les formules suivantes au voisinage de 0 avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$ :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \epsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + x^n \epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \epsilon(x)$$

# Notation de Landau



## Définition

# Notation de Landau



## Définition

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies dans un voisinage $V$ de $a$ ($a$ peut ne pas appartenir à $V$ si $f$ ou $g$ non définies en $a$).

# Notation de Landau

## Définition

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies dans un voisinage $V$ de $a$ ($a$ peut ne pas appartenir à $V$ si $f$ ou $g$ non définies en $a$). $f$ est négligeable devant $g$ s'il existe une fonction $\epsilon$ définie sur $V$ telle que $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$ et $\forall x \in V$ $f(x) = \epsilon(x)g(x)$.

# Notation de Landau



## Définition

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies dans un voisinage $V$ de $a$ ($a$ peut ne pas appartenir à $V$ si $f$ ou $g$ non définies en $a$). $f$ est négligeable devant $g$ s'il existe une fonction $\epsilon$ définie sur $V$ telle que $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0$ et $\forall x \in V$ $f(x) = \epsilon(x) g(x)$.

Notation : $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$.

# Notation de Landau

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



## Définition

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies dans un voisinage $V$ de $a$ ($a$ peut ne pas appartenir à $V$ si $f$ ou $g$ non définies en $a$). $f$ est négligeable devant $g$ s'il existe une fonction $\epsilon$ définie sur $V$ telle que $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$ et $\forall x \in V$ $f(x) = \epsilon(x)g(x)$.

Notation : $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$.

Si $g$ ne s'annule pas sur un voisinage de $a$, alors $f \underset{a}{=} o(g)$ si et seulement si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

# Notation de Landau



## Définition

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies dans un voisinage $V$ de $a$ ($a$ peut ne pas appartenir à $V$ si $f$ ou $g$ non définies en $a$). $f$ est négligeable devant $g$ s'il existe une fonction $\epsilon$ définie sur $V$ telle que $\lim\limits_{x\to a} \epsilon(x) = 0$ et $\forall x \in V$ $f(x) = \epsilon(x)g(x)$.

Notation : $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

Si $g$ ne s'annule pas sur un voisinage de $a$, alors $f \underset{a}{=} o(g)$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Notation de Edmund Landau : mathématicien allemand (1877-1938).

# Notation de Landau



## Exemples

# Notation de Landau



## Exemples

- $x^3 \underset{x \to 0}{=} o\left(x^2\right)$

# Notation de Landau



## Exemples

- $x^3 \underset{x \to 0}{=} o\left(x^2\right)$
  $x^3 = x.x^2$ avec $\lim_{x \to 0} x = 0$

# Notation de Landau



## Exemples

- $x^3 \underset{x \to 0}{=} o\left(x^2\right)$
  $x^3 = x.x^2$ avec $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2 \epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.

# Notation de Landau

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié

- Plan
- Fonctions
- Limite
- Continuité
- Dérivation
- Formules de Taylor

## Exemples

- $x^3 \underset{x \to 0}{=} o\left(x^2\right)$

  $x^3 = x.x^2$ avec $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2 \epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.

  On peut écrire : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ quand $x$ tend vers 0.

# Notation de Landau

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



## Exemples

- $x^3 \underset{x \to 0}{=} o\left(x^2\right)$

  $x^3 = x.x^2$ avec $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.

  On peut écrire : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ quand $x$ tend vers 0.

  $e^x - (1 + x + \dfrac{x^2}{2})$ est négligeable devant $x^2$.

# Notation de Landau

## Exemples

- $x^3 \underset{x \to 0}{=} o\left(x^2\right)$

  $x^3 = x.x^2$ avec $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0.$

  On peut écrire : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ quand $x$ tend vers 0.

  $e^x - (1 + x + \dfrac{x^2}{2})$ est négligeable devant $x^2$.

- $x^2 \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^3\right)$

# Notation de Landau

## Exemples

- $x^3 \underset{x \to 0}{=} o\left(x^2\right)$
  $x^3 = x.x^2$ avec $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.
  On peut écrire : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ quand $x$ tend vers 0.
  $e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})$ est négligeable devant $x^2$.
- $x^2 \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^3\right)$
  $x^2 = \frac{1}{x}.x^3$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

# Domination

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié



## Définition

# Domination

## Définition

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies dans un voisinage $V$ de $a$ ($a$ peut ne pas appartenir à $V$ si $f$ ou $g$ non définies en $a$).

# Domination



## Définition

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies dans un voisinage $V$ de $a$ ($a$ peut ne pas appartenir à $V$ si $f$ ou $g$ non définies en $a$). $f$ est dominée par $g$ s'il existe une constante $K$ telle que $\forall x \in V$ $|f(x)| \leq K|g(x)|$.

# Domination

## Définition

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies dans un voisinage $V$ de $a$ ($a$ peut ne pas appartenir à $V$ si $f$ ou $g$ non définies en $a$). $f$ est dominée par $g$ s'il existe une constante $K$ telle que $\forall x \in V$ $|f(x)| \leq K|g(x)|$.

Notation : $f \underset{a}{=} O(g)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$.

# Domination



## Définition

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies dans un voisinage $V$ de $a$ ($a$ peut ne pas appartenir à $V$ si $f$ ou $g$ non définies en $a$). $f$ est dominée par $g$ s'il existe une constante $K$ telle que $\forall x \in V$ $|f(x)| \leq K|g(x)|$.

Notation : $f \underset{a}{=} O(g)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$.

Si $g$ ne s'annule pas sur un voisinage de $a$, alors $f \underset{a}{=} O(g)$ si et seulement si $\dfrac{f}{g}$ bornée au voisinage de $a$.

# Notation de Landau

## Exemples

# Notation de Landau



## Exemples

- $x^2 + x^3 \underset{x \to 0}{=} O\left(x^2\right)$

# Notation de Landau



## Exemples

- $x^2 + x^3 \underset{x \to 0}{=} O\left(x^2\right)$
  $\left|x^2 + x^3\right| \leq \left|x^2\right| + \left|x^3\right| \leq 2\left|x^2\right|$

# Notation de Landau



## Exemples

- $x^2 + x^3 \underset{x \to 0}{=} O\left(x^2\right)$
  $\left|x^2 + x^3\right| \leq \left|x^2\right| + \left|x^3\right| \leq 2\left|x^2\right|$ $\left(\left|x^3\right| \leq \left|x^2\right| \text{ sur } [-1; 1]\right)$

# Notation de Landau

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié



## Exemples

- $x^2 + x^3 \underset{x \to 0}{=} O\left(x^2\right)$
  $\left|x^2 + x^3\right| \leq \left|x^2\right| + \left|x^3\right| \leq 2\left|x^2\right|$ ($\left|x^3\right| \leq \left|x^2\right|$ sur $[-1;1]$)
- $x^2 + x^3 \underset{x \to +\infty}{=} O\left(x^3\right)$

# Notation de Landau



## Exemples

- $x^2 + x^3 \underset{x \to 0}{=} O\left(x^2\right)$
  $\left|x^2 + x^3\right| \leq \left|x^2\right| + \left|x^3\right| \leq 2\left|x^2\right| \; \left(\left|x^3\right| \leq \left|x^2\right| \text{ sur } [-1;1]\right)$
- $x^2 + x^3 \underset{x \to +\infty}{=} O\left(x^3\right)$
  $\left|x^2 + x^3\right| \leq \left|x^2\right| + \left|x^3\right| \leq 2\left|x^3\right|$

# Notation de Landau



## Exemples

- $x^2 + x^3 \underset{x \to 0}{=} O\left(x^2\right)$
  $\left|x^2 + x^3\right| \leq \left|x^2\right| + \left|x^3\right| \leq 2\left|x^2\right|$ $\left(\left|x^3\right| \leq \left|x^2\right| \text{ sur } [-1;1]\right)$
- $x^2 + x^3 \underset{x \to +\infty}{=} O\left(x^3\right)$
  $\left|x^2 + x^3\right| \leq \left|x^2\right| + \left|x^3\right| \leq 2\left|x^3\right|$ $\left(\left|x^2\right| \leq \left|x^3\right| \text{ pour } |x| \geq 1\right)$

# Réécritures avec les notations de Landau

## Fonctions de référence

# Réécritures avec les notations de Landau



## Fonctions de référence

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

# Réécritures avec les notations de Landau



## Fonctions de référence

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

# Réécritures avec les notations de Landau



## Fonctions de référence

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

# Réécritures avec les notations de Landau



## Fonctions de référence

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$$

# Réécritures avec les notations de Landau



## Fonctions de référence

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$$

# Réécritures avec les notations de Landau



## Fonctions de référence

# Réécritures avec les notations de Landau



## Fonctions de référence

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O\left(x^{n+1}\right)$$

# Réécritures avec les notations de Landau



## Fonctions de référence

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O\left(x^{n+1}\right)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O\left(x^{2n+2}\right)$$

# Réécritures avec les notations de Landau



## Fonctions de référence

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

# Réécritures avec les notations de Landau



## Fonctions de référence

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$(1+x)^\alpha =$$

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

# Réécritures avec les notations de Landau



## Fonctions de référence

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$(1+x)^\alpha =$$

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$