# M1202

# Algèbre linéaire
# Espace vectoriel

Corpus hypercubus Salvador Dali (1954)

# Espace vectoriel

## Définition

Soit $(E, +)$ un groupe commutatif et $\mathbb{K}$ un corps commutatif.
$E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ s'il existe une loi de composition (multiplication externe par un scalaire)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

vérifiant

1. $\forall x \in E \ \forall y \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
2. $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall \mu \in \mathbb{K} \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
3. $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall \mu \in \mathbb{K} \quad (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
4. $\forall x \in E \quad 1x = x$

# Espace vectoriel

## Remarque

Les éléments de $E$ sont appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ scalaires.

## Règles de calcul

1. $\forall x \in E \quad 0x = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda 0 = 0$
3. $\lambda x = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $x = 0$
4. $\forall x \in E \quad (-1)x = -x$
5. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda(-x) = (-\lambda)x = -\lambda x$

# Espace vectoriel



## Démonstration

1. $(1+0)x = 1x + 0x = x + 0x$ et $(1+0)x = 1x = x$.
   On en déduit $x + 0x = x$ puis $-x + x + 0x = -x + x$ et $0x = 0$.
2. $\lambda 0 = \lambda(0x) = (\lambda.0)x = 0x = 0$.
3. $\lambda x = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $x = 0$ :
   1. Si $\lambda = 0$ ou $x = 0$ alors $\lambda x = 0$.
   2. Si $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0$ alors si $\lambda x = 0$ on a $\left(\frac{1}{\lambda}\right)\lambda x = 0$
      Or $\frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)x = 1x = x$.
      On a donc $x = 0$. Contradiction.
      On en déduit $\lambda x \neq 0$.
4. $(-1)x + 1x = (-1+1)x = 0x = 0$.
   On en déduit $(-1)x = -x$.
5. $\lambda(-x) + \lambda x = \lambda(-x + x) = \lambda 0 = 0$ et
   $(-\lambda)x + \lambda x = (-\lambda + \lambda)x = 0x = 0$.
   On en déduit $\lambda(-x) = (-\lambda)x = -\lambda x$.

## Exemple fondamental

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$.
En notant $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} = (x_i) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, on pose
$\forall x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ $\forall y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

1. $x + y = (x_i + y_i)$
2. $\lambda x = (\lambda x_i)$

# Espace vectoriel



## Démonstration

$\boxed{(E, +) \text{ est un groupe commutatif.}}$

1. Commutativité
   $\forall x \in E\ \forall y \in E\ x + y = (x_i) + (y_i) = (x_i + y_i) = (y_i + x_i) = y + x$
2. Associativité
   $\forall x \in E\ \forall y \in E\ \forall z \in E$
   $x + (y + z) = (x_i) + ((y_i) + (z_i)) = (x_i) + (y_i + z_i)$
   $= (x_i + (y_i + z_i)) = ((x_i + y_i) + z_i) = (x + y) + z$
3. Neutre
   En posant $0 = (0) = (0, 0, \cdots, 0)$,
   $\forall x \in E, x + 0 = (x_i) + (0) = (x_i + 0) = (x_i) = x$
4. Symétrique (opposé)
   $\forall x \in E\ x + (-x_i) = (x_i) + (-x_i) = (x_i + (-x_i)) = (0) = 0$

# Espace vectoriel

## Définitions

1. $-x = (-x_i)$
2. $y - x = y + (-x) = (y_i) + (-x_i) = (y_i + (-x_i)) = (y_i - x_i)$

# Espace vectoriel

## Démonstration

**Multiplication scalaire**

1. $\forall x \in E \ \forall y \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
   $\lambda(x+y) = \lambda(x_i + y_i) = (\lambda(x_i + y_i)) = (\lambda x_i + \lambda y_i)$
   $= (\lambda x_i) + (\lambda y_i) = \lambda(x_i) + \lambda(y_i) = \lambda x + \lambda y$
2. $\forall x \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall \mu \in \mathbb{R}$
   $(\lambda + \mu)x = (\lambda + \mu)(x_i) = ((\lambda + \mu)x_i) = (\lambda x_i + \mu x_i)$
   $= (\lambda x_i) + (\mu x_i) = \lambda x + \mu x$
3. $\forall x \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall \mu \in \mathbb{R}$
   $(\lambda\mu)x = (\lambda\mu)(x_i) = ((\lambda\mu)x_i) = (\lambda\mu x_i) = (\lambda(\mu x_i))$
   $= \lambda(\mu x)$
4. $\forall x \in E \quad 1x = 1(x_i) = (1x_i) = (x_i) = x$

# Espace vectoriel



## Notation

Les vecteurs $x = (x_i) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ peuvent être représentés par des matrices *lignes* ou *colonnes* :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

# Espace vectoriel



## Notation

Les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont notés $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont notés $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $(x, y, z \in \mathbb{R})$.

Les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ sont notés $\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, $(x, y, z, t \in \mathbb{R})$.

# Espace vectoriel



## Représentation graphique

Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque :

$V = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

en posant $\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une unité de longueur étant choisie, le plan est dit rapporté à un *repère orthonormé* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ou $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

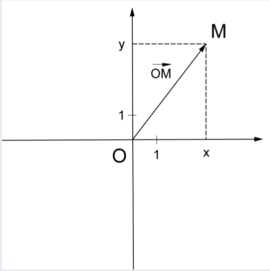
# Espace vectoriel

## Représentation graphique

Soit un vecteur $V = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ ou $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Soit $M$ le point de coordonnées $(x, y)$ :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ est un représentant du vecteur $V$.



### Addition de deux vecteurs - Relation de Chasles

On considère les vecteurs $U = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}$.

On a $U + V = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x + V_x \\ U_y + V_y \end{pmatrix}$.

# Espace vectoriel

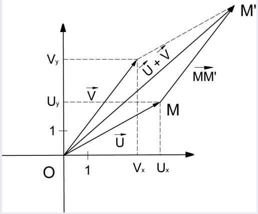
M1202
Algèbre
linéaire

Département
Informatique



## Représentation graphique : règle du parallélogramme

On pose $\overrightarrow{OM} = \vec{U}$ et $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$. $\vec{U} + \vec{V} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'}$.



# Sous-espace vectoriel



**Définition**

Une partie non vide $F$ d'un espace vectoriel $E$ sur $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si, munie de l'addition et de la multiplication par un scalaire induites, $F$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

**Propriété**

Une partie non vide $F$ d'un espace vectoriel $E$ sur $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si
$\forall x \in F \ \forall y \in F \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall \mu \in \mathbb{K} \ \lambda x + \mu y \in F$.

# Sous-espace vectoriel

## Démonstration

1. Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ alors $\forall x \in F$ $\forall y \in F$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\forall \mu \in \mathbb{K}$
   $\lambda x \in F$ et $\mu y \in F$, qui implique $\lambda x + \mu y \in F$.
2. Réciproquement, si $\forall x \in F$ $\forall y \in F$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\forall \mu \in \mathbb{K}$
   $\lambda x + \mu y \in F$ alors
   - $+$ est associative et commutative dans $E$ et donc dans $F$.
   - comme $F \neq \emptyset$, $\exists x \in F$ et $1x + (-1)x = 0 \in F$.
     De plus $\forall x \in F$ $0x + (-1)x = -x \in F$.
   - Les quatre propriétés sur la multiplication scalaire sont vraies dans $E$, donc dans $F$.

## Remarque

Pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$, $0 \in F$.

# Sous-espace vectoriel

## Exemples

1. $\{0\}$
2. $E$
3. Si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$ alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

## Démonstration

1. $0 \in F \cap G$ et $F \cap G$ non vide.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall \mu \in \mathbb{K}\ \forall x \in F \cap G\ \forall y \in F \cap G$ :
   - $x \in F$ et $y \in F$ donc $\lambda x + \mu y \in F$
   - $x \in G$ et $y \in G$ donc $\lambda x + \mu y \in G$

   On en déduit $\lambda x + \mu y \in F \cap G$.

### Combinaisons linéaires

Une combinaison linéaire d'une suite $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ de vecteurs de $E$ est un vecteur de la forme $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$ $(\lambda_i \in \mathbb{K})$.

### Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Une combinaison linéaire de $(x_1, x_2, x_3)$ est un vecteur de la forme $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$.

En particulier, $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

# Sous-espace vectoriel



## Ensemble des combinaisons linéaires

L'ensemble des combinaisons linéaires d'une suite $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ de vecteurs de $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$, appelé sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$.

## Notation

$Vect(x_1, x_2, \cdots, x_m)$.

## Démonstration

On note $F$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'une suite de vecteurs de $E$ $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$.
$F \neq \emptyset$ : $x_1 \in F$.
Soit $\lambda$ et $\lambda'$ deux scalaires.

$$\lambda \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i + \lambda' \sum_{i=1}^{m} \lambda'_i x_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda\lambda_i + \lambda'\lambda'_i) x_i \in F$$

# Suite liée, suite libre

## Définitions

Une suite de vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ est dite liée s'il existe des scalaires $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_m$ non tous nuls tels que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m = 0$.
On dit aussi que les vecteurs sont linéairement dépendants.
Si $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ n'est pas liée, la suite est dite libre et les vecteurs linéairement indépendants.

## Cas particuliers

Les vecteurs d'une suite liée de deux vecteurs sont dits colinénaires.
Les vecteurs d'une suite liée de trois vecteurs sont dits coplanaires.

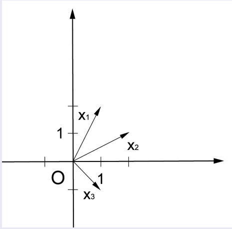
# Suite liée, suite libre



## Exemple

Les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont linéairement dépendants ou coplanaires :

$$x_1 - x_2 + x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



# Suite liée, suite libre



## Exemple

$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x_1 - x_2 + x_3 = 0$ donne $x_3 = -x_1 + x_2$.

$$\begin{aligned}
&Vect\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3(-x_1 + x_2),\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(\lambda_1 - \lambda_3)x_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)x_2,\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2,\quad \lambda_1', \lambda_2' \in \mathbb{R}\} \\
&= Vect\,(x_1,\ x_2)
\end{aligned}$$

# Suite liée, suite libre



## Exemple

La suite $(x_1, \ x_2)$ est libre :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1.1 + \lambda_2.2 = 0 \\ \lambda_1.2 + \lambda_2.1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \quad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \end{matrix} \quad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

# Suite liée, suite libre



## Propriété 1

Une suite de vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ est liée si et seulement si un des vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_m$ est une combinaison linéaire des autres.

## Démonstration

Si $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ est liée alors il existe une combinaison linéaire nulle $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{m-1} x_{m-1} + \lambda_m x_m = 0$ telle qu'un coefficient $\lambda_i$ soit non nul.
En supposant $\lambda_m \neq 0$, on a
$x_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} x_2 - \cdots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} x_{m-1}$.
Réciproquement, si $x_m = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{m-1} x_{m-1}$ alors $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{m-1} x_{m-1} - x_m = 0$ et la suite $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ est liée.

# Suite liée, suite libre



**Propriété 2**

Si $(y_1, y_2, \cdots, y_m, y_{m+1})$ est une suite de $m+1$ vecteurs combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_m$ alors la suite $(y_1, y_2, \cdots, y_m, y_{m+1})$ est liée.
Démonstration par récurrence sur $m$ (complément).

# Espace vectoriel de dimension finie



**Suite génératrice**

Si $E = Vect(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, alors on dit que $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ est une suite génératrice de $E$ et que les vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_m$ sont des générateurs de $E$ ou engendrent $E$.

**Base**

Une suite libre et génératrice est une base de $E$.

# Espace vectoriel de dimension finie



**Propriété**

Une suite $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ est une base de $E$ si et seulement si tout vecteur $x$ de $E$ s'écrit de manière unique sous la forme
$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$.
$\lambda_i$ est appelé i-ème coordonnée de $x$ dans la base $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$.

## Démonstration

1. Si $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ est une base de $E$, alors $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ est génératrice
   et pour tout $x$ de $E$, $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$.
   Supposons $x = \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \cdots + \lambda'_m x_m$.
   On a alors $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m = \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \cdots + \lambda'_m x_m$ et donc
   $(\lambda_1 - \lambda'_1)x_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)x_2 + \cdots + (\lambda_m - \lambda'_m)x_m = 0$.
   Comme $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ est libre, on en déduit
   $\forall i,\ \lambda_i - \lambda'_i = 0$ et donc $\lambda_i = \lambda'_i$.
2. Si tout vecteur $x$ de $E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$ alors $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ est génératrice.
   Par ailleurs, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m = 0 = 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_m$ implique $\forall i,\ \lambda_i = 0$. $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ est donc libre.

# Espace vectoriel de dimension finie

## Théorème

Si $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est une base de $E$ alors toute autre base a également $n$ vecteurs.

## Démonstration

Soit $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ une autre base de $E$.
Si $m > n$ alors $(y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1})$ est liée car ses $n+1$ vecteurs sont combinaisons linéaires des $n$ vecteurs de $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
On en déduit que $(y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}, \cdots, y_m)$ est liée. Impossible.
Si $m < n$ alors $(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1})$ est liée car ses $m+1$ vecteurs sont combinaisons linéaires des $m$ vecteurs de $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$.
On en déduit que $(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ est liée. Impossible.
Conclusion : $m = n$.

# Espace vectoriel de dimension finie



## Propriété

Si $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est une base de $E$ alors toute suite libre de $n$ vecteurs de $E$ est une base de $E$.

## Démonstration

Soit $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ une suite libre de $E$ et $x$ un vecteur quelconque de $E$.
$(y_1, y_2, \cdots, y_n, x)$ est liée car les $n+1$ vecteurs sont combinaisons linéaires des $n$ vecteurs de $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
On en déduit qu'il existe une combinaison linéaire nulle
$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_n y_n + \lambda_{n+1} x = 0$ avec au moins l'un des $\lambda_i \neq 0$.
Si $\lambda_{n+1} = 0$ alors tous les $\lambda_i$ sont nuls puisque $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ est libre.
Impossible.
On a donc $\lambda_{n+1} \neq 0$ et $x = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} y_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}} y_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} y_n$.
$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ est donc génératrice.

# Espace vectoriel de dimension finie

M1202
Algèbre
linéaire

Département
Informatique

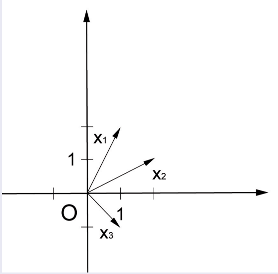


## Exemple

Soit $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$Vect\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = Vect\,(x_1,\ x_2)$ avec $(x_1, x_2)$ libre.

$(x_1, x_2)$ est donc une base de $Vect\,(x_1,\ x_2,\ x_3)$.



# Espace vectoriel de dimension finie

## Définition

Soit $E$ un espace vectoriel différent de $\{0\}$.
S'il existe une base de $E$ contenant $n$ éléments, $E$ est dit de dimension finie.
L'entier $n$ est appelé la dimension de $E$.

## Notation

$dim\ E = n$.

## Convention

$dim\ \{0\} = 0$.

# Espace vectoriel de dimension finie

## Exemple fondamental

$dim\ \mathbb{R}^n = n\ (n \geq 1)$.

## Démonstration

Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, on a $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$ avec $e_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ (1 en ième position).
$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est donc génératrice.
$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ s'écrit $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = 0$.
On a donc pour tout $i$ $\lambda_i = 0$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est libre.

# Espace vectoriel de dimension finie

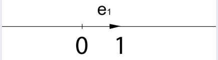


## Définition

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

## Exemples

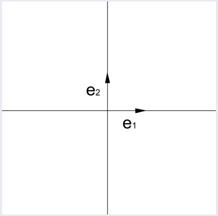
$dim\ \mathbb{R} = 1$
$\mathcal{B} = (e_1)$
$e_1 = 1$
Autre notation : $(\vec{\imath})$



# Espace vectoriel de dimension finie

## Exemples

$dim\ \mathbb{R}^2 = 2$
$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$
$e_1 = (1, 0)$
$e_2 = (0, 1)$
Autre notation : $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$



# Espace vectoriel de dimension finie



## Exemples

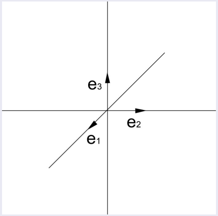
$dim\ \mathbb{R}^3 = 3$

$e_1 = (1, 0, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0)$

$e_3 = (0, 0, 1)$

Autre notation : $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$



# Espace vectoriel de dimension finie

M1202
Algèbre
linéaire

Département
Informatique

Plan

Espace vectoriel

Sous-espace vectoriel

Suite liée, suite libre

Espace vectoriel de dimension finie

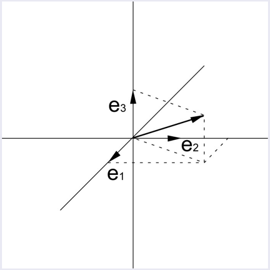
Application linéaire

Dimension des sous-espaces vectoriels

Compléments

## Représentation graphique

$V = (1, 2, 1) = (e_1 + 2e_2) + e_3$



# Espace vectoriel de dimension finie

## Remarque

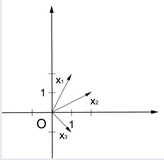
Un espace vectoriel

1. de dimension 1 est appelé une droite vectorielle
2. de dimension 2 est un plan vectoriel.

## Exemple

Soit $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$dim\ \ Vect\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = dim\ \ Vect\,(x_1,\ x_2) = 2.$



# Application linéaire



## Définitions

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Une application de $E$ dans $F$ est une application linéaire si

1. $\forall x \in E\ \forall y \in E\ f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall x \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Une application linéaire de $E$ dans $E$ est un endomorphisme de $E$.
L'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$ est noté : $\mathcal{L}(E, F)$.

# Application linéaire



## Exemples

1. Si $a$ est un réel quelconque : $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax$.
2. Si $a$ et $b$ sont des réels quelconques : $f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = ax + by$.
3. $f$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + y - z)$.

# Application linéaire



## Démonstration

Soient $a$ un réel quelconque et $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax$.

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ f(\lambda x) = a(\lambda x) = a\lambda x = \lambda a x = \lambda f(x)$

# Application linéaire



## Démonstration

Soient $a$ et $b$ deux réels et $f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = ax + by$.

1. $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \forall \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

   $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$

   $= a(x+x') + b(y+y') = ax + by + ax' + by'$

   $= f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

2. $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

   $f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = a(\lambda x) + b(\lambda y)$

   $= \lambda(ax + by) = \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

# Application linéaire

## Propriétés

1. $f$ est linéaire si et seulement si pour tous scalaires $\lambda$, $\mu$ et tous vecteurs $x$, $y$ de $E$ : $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.
2. Une application linéaire de $E$ dans $F$ est entièrement définie par l'image des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel $E$.

# Application linéaire



## Démonstration

1. Propriété 1
   1. Si $f$ est linéaire alors pour tous scalaires $\lambda$, $\mu$ et tous vecteurs $x$, $y$ de $E$ :
      $f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.
   2. Si pour tous scalaires $\lambda$, $\mu$ et tous vecteurs $x$, $y$ de $E$ :
      $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$
      alors pour $\lambda = \mu = 1$ : $f(x + y) = f(x) + f(y)$
      et pour $\mu = 0$ : $f(\lambda x + 0y) = \lambda f(x) + 0f(y)$, c'est-à-dire $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
2. Propriété 2
   Soit $\mathcal{B} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une base de $E$ et
   $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$.
   On a $f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n)$
   $= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$.

# Matrice d'une application linéaire

M1202 Algèbre linéaire

Département Informatique



## Définition

Soit $f$ une application linéaire de $E$ de dimension $m$ dans $F$ de dimension $n$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_m)$ une base de $E$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ une base de $F$.
La matrice de $f$ relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est :
$Mat\ (f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') =$

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc}
f(e_1) & \cdots & f(e_{j-1}) & \mathbf{f(e_j)} & f(e_{j+1}) & \cdots & f(e_m)
\end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & \mathbf{a_{1j}} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1m} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & \mathbf{a_{i-1j}} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1m} \\
a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & \mathbf{a_{ij}} & a_{ij+1} & \cdots & a_{im} \\
a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & \mathbf{a_{i+1j}} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1m} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & \mathbf{a_{nj}} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nm}
\end{array}\right) &
\begin{array}{c}
e'_1 \\ \vdots \\ e'_{i-1} \\ e'_i \\ e'_{i+1} \\ \vdots \\ e'_n
\end{array}
\end{array}$$

Le vecteur j-ème colonne est la matrice colonne de coefficients les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

# Matrice d'une application linéaire



## Exemple

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.
Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$f(e_1) = e'_1 - e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(e_2) = 2e'_1 + e'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$f(e_3) = -e'_1 + 3e'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \color{red}{f(e_2)} & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \color{red}{2} & -1 \\ -1 & \color{red}{1} & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \end{array}$$

# Notation matricielle



## Définition

De manière générale, on peut définir de $m$ vecteurs de $E$ de dimension $n$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ :

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} V_1 & \cdots & V_{j-1} & \mathbf{V_j} & V_{j+1} & \cdots & V_m \end{array} & \\ \left( \begin{array}{ccccccc} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & \mathbf{a_{1j}} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & \mathbf{a_{i-1j}} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1m} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & \mathbf{a_{ij}} & a_{ij+1} & \cdots & a_{im} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & \mathbf{a_{i+1j}} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & \mathbf{a_{nj}} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nm} \end{array} \right) & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_{i-1} \\ e_i \\ e_{i+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

Le vecteur j-ème colonne $V_j$ est la matrice colonne de coefficients les coordonnées de $V_j$ dans la base $\mathcal{B}$.

# Noyau d'une application linéaire



## Définition

Le noyau d'une application linéaire $f$ de $E$ dans $F$ est l'ensemble noté $Ker\, f$ des vecteurs de $E$ dont l'image est le vecteur nul de $F$.

## Notation

$Ker\, f = \{x,\ f(x) = 0\}$

## Propriétés

1. $Ker\, f$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
2. $f$ est injective si et seulement si $Ker\, f = \{0\}$.

# Noyau d'une application linéaire



**Démonstration**

1. Pour tous $\lambda$, $\mu$ dans $\mathbb{K}$ et $x$, $y$ dans $Ker\, f$,
$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = 0$.
2. $f$ est injective si et seulement si $Ker\, f = \{0\}$
    1. Si f est injective alors $f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = f(0) \Rightarrow x = 0$.
    2. Si $Ker\, f = \{0\}$ alors $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0$
    $\Rightarrow f(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0$.

# Noyau d'une application linéaire

## Exemple

Soit $f$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x+2y+z, 2x+y-z)$.
Détermination de $Ker\, f = \{X \in \mathbb{R}^3,\ f(X) = 0\}$ :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} x+2y=-z \\ 2x+y=z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 \\ L_2-2L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y & = & -z \\ -3y & = & z+2z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y & = & -z \\ y & = & -z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z-2y \\ y & = & -z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-z+2z \\ y=-z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & -z \end{array} \right.$$

$$Ker\, f = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}$$

# Noyau d'une application linéaire



## Exemple

$$Ker\ f = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}$$

$Ker\ f = Vect\,(v_1)$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0.$

$Ker\ f \neq \{0\}$
$f$ n'est donc pas injective.
Remarque : $\dim\ Ker\ f = 1.$

# Image d'une application linéaire

## Définition

L'image d'une application linéaire $f$ de $E$ dans $F$ est l'ensemble des images de $E$ par $f$.

## Notation

$f(E) = \{f(x),\ x \in E\}$ ou $Im\, f$

## Propriété

$f(E)$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

## Démonstration

Pour tous $\lambda$, $\mu$ dans $\mathbb{K}$ et $f(x)$, $f(y)$ dans $f(E)$,
$\lambda f(x) + \mu f(y) = f(\lambda x + \mu y) \in f(E)$.

# Image d'une application linéaire



**Exemple**

Soit $f$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par
$f(X) = f(x,y,z) = (x+2y+z, 2x+y-z)$.
Détermination de $f\left(\mathbb{R}^3\right) = \{f(X), X \in \mathbb{R}^3\}$ :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x+y-z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

# Image d'une application linéaire



## Exemple

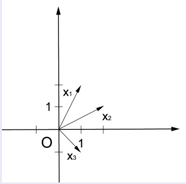
$$f\left(\mathbb{R}^3\right) = \left\{ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= Vect\left(x_1,\ x_2,\ x_3\right)$$

$$= Vect\left(x_1,\ x_2\right) \text{ avec } x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Remarque : $\dim\ f\left(\mathbb{R}^3\right) = 2.$



# Image d'une application linéaire

## Définitions

Une application linéaire bijective de $E$ dans $F$ est un isomorphisme.
On dit alors que $E$ et $F$ sont isomorphes.
Notation : $E \simeq F$.
Si $F = E$ alors l'isomorhisme $f$ est appelé un automorphisme de $E$.

# Image d'une application linéaire

## Propriété

$f^{-1}$ est un isomorphisme.

## Démonstration

$f$ est bijective, donc $f^{-1}$ existe et est bijective.
Soit $y_1$ et $y_2$ deux vecteurs quelconques de $F$.
Il existe $x_1$ et $x_2$ dans $E$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$ et donc $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$.
On a donc $y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$.
On en déduit $f^{-1}(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 = f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)$.
Par ailleurs, soit $\lambda$ un scalaire quelconque : $\lambda y_1 = \lambda f(x_1) = f(\lambda x_1)$.
On en déduit $f^{-1}(\lambda y_1) = \lambda x_1 = \lambda f^{-1}(y_1)$.

# Image d'une application linéaire



## Exemple 1

Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = e_1 + e_2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$. $f$ est définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(xe_1 + ye_2) = xf(e_1) + yf(e_2) = x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc par $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x+y \end{pmatrix}$.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

$f$ est donc injective.

$f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = xe_1 + ye_2$ s'écrit $\begin{cases} \lambda_2 = x \\ \lambda_1 + \lambda_2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = x \\ \lambda_1 = y - x \end{cases}$

$f$ est surjective et donc bijective.

# Image d'une application linéaire

## Exemple 1

$f^{-1}$ est définie par

$f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-x \\ x \end{pmatrix}$ ou $f^{-1}(e_1) = -e_1 + e_2$ et $f^{-1}(e_2) = e_1$.

Remarque : $f\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R}^2$.

# Image d'une application linéaire



**Exemple 2**

$f$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(X) = f(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + y - z)$ n'est pas injective, donc pas bijective.

# Image d'une application linéaire



## Image d'une suite libre par une application linéaire injective

L'image d'une suite libre par une application linéaire injective est une suite libre.

## Démonstration

Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ une suite libre de $E$ et $f$ une application linéaire injective.
$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_m f(x_m) = 0$
s'écrit $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m) = 0$.
Comme f est injective, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m = 0$.
Comme $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ est libre, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$.

# Dimension des sous-espaces vectoriels



## Propriété

Soit $E$ un espace vectoriel et $n$ un entier positif. Si toutes les suites de $n+1$ vecteurs sont liées alors $E$ est un espace vectoriel de dimension finie et $dim\ E \leq n$.

## Démonstration

On note $m$ le plus petit entier tel que toutes les suites de $m+1$ vecteurs sont liées ($m \leq n$).
Si $m = 0$, alors $E = \{0\}$ et $dim\ E \leq n$.
Sinon, $m \geq 1$ et il existe une suite $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ libre telle que pour tout vecteur $x$ de $E$ $(x_1, x_2, \cdots, x_m, x)$ est liée.
On en déduit que $x$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$.
$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ est donc une suite génératrice et donc une base de $E$ : $dim\ E = m \leq n$.

# Dimension des sous-espaces vectoriels

M1202 Algèbre linéaire

Département Informatique



## Théorème

Un sous-espace vectoriel $F$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie est de dimension finie et $dim\ F \leq dim\ E$.
Cas particulier : si $dim\ F = dim\ E$ alors $F = E$.

## Démonstration

On note $dim\ E = n$.
Toute suite de $n+1$ vecteurs de $F$ est une suite de $n+1$ vecteurs de $E$ : elle est donc liée (les vecteurs sont combinaisons linéaires des $n$ vecteurs d'une base de $E$).
On en déduit $dim\ F \leq n$.
Si $dim\ F = n$, alors il existe une base $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $F$ qui est aussi une base de $E$ (suite libre de $n$ éléments) : $E \subset Vect(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F$.
Comme $F \subset E$, on a $F = E$.

# Dimension des sous-espaces vectoriels



**Exemple**

Soit $f$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x+2y+z, 2x+y-z)$.
$dim\ f\left(\mathbb{R}^3\right) = 2$.
Donc $f\left(\mathbb{R}^3\right) = \mathbb{R}^2$.

**Propriété**

Soit $E$ un espace vectoriel ayant $n$ générateurs.
$E$ est de dimension finie et $dim\ E \leq n$.

**Démonstration**

Tout vecteur de $E$ s'écrit comme combinaison linéaire des $n$ générateurs.
Donc toute suite de $n+1$ vecteurs est liée et $dim\ E \leq n$.

# Dimension des sous-espaces vectoriels



### Rang d'une suite finie de vecteurs

Le rang $r$ d'une suite finie $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $n$ vecteurs d'un espace vectoriel est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

### Propriétés

1. $r \leq n$.
2. $r$ est le nombre maximum d'éléments des suites libres qui peuvent être extraites de la suite.
   On peut extraire de la suite une base de l'espace vectoriel engendré.

# Dimension des sous-espaces vectoriels

## Démonstration

Si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ alors $r = 0$.
Sinon, on note $m$ le nombre maximum de vecteurs des suites libres extraites de $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
Il existe donc une suite libre de $m$ vecteurs.
On peut supposer que $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ est une suite libre.
La suite est aussi génératrice de $Vect(x_1, x_2, \cdots, x_m)$.
C'est donc une base de cet espace vectoriel et
$dim\, Vect(x_1, x_2, \cdots, x_m) = m$.
$Vect(x_1, x_2, \cdots, x_m) \subset Vect(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
On va montrer $Vect(x_1, x_2, \cdots, x_n) \subset Vect(x_1, x_2, \cdots, x_m)$.
Si $m = n$, il n'y a rien à montrer.
Sinon, pout tout $i$, $m + 1 \leq i \leq n$, la suite $(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_i)$ est liée et $x_i$ est une combinaison linéaire de $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$.
On en déduit $Vect(x_1, x_2, \cdots, x_n) \subset Vect(x_1, x_2, \cdots, x_m)$,
puis $r = m$.

# Dimension des sous-espaces vectoriels



## Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le rang $r$ de $(x_1, x_2, x_3)$ vérifie $r \leq 3$.

On a : $x_3 = x_1 + x_2$ et donc $r \leq 2$.

Par ailleurs, $(x_1, x_2)$ est une suite libre :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Le rang de $(x_1, x_2, x_3)$ est donc $r = 2$.

$dim\ Vect(x_1, x_2, x_3) = 2$.

# Dimension des sous-espaces vectoriels



## Remarques

1. $Vect(x_1, x_2, x_3) = Vect(x_1, x_2)$.
   $(x_1, x_2)$ est une base de $Vect(x_1, x_2)$.
2. Soit $f : Vect(x_1, x_2) \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1) = e_1$ et $f(x_2) = e_2$, $(e_1, e_2)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = 0$
   $\Rightarrow \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ : $f$ est injective.
   $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$ : $f$ est surjective.
   On en déduit $Vect(x_1, x_2, x_3) \simeq \mathbb{R}^2$.

# Nature de $\mathcal{S} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ et de $Vect\,(\mathcal{S})$



Toute suite contenant le vecteur nul est liée.

On suppose que la suite $\mathcal{S} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ne contient pas le vecteur nul.

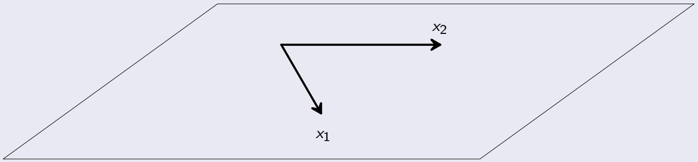
## Nature de $\mathcal{S} = (x_1)$ dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$

La suite $\mathcal{S} = (x_1)$ est libre et $dim\,Vect\,(x_1) = 1$ (droite vectorielle).


Cas particulier : dans $\mathbb{R}$, $Vect\,(x_1) = \mathbb{R}$.

## Nature de $\mathcal{S} = (x_1, x_2)$ dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$

La suite $\mathcal{S} = (x_1, x_2)$ est libre et *dim Vect* $(x_1, x_2) = 2$ (plan vectoriel).




Cas particulier : dans $\mathbb{R}^2$, $Vect\,(x_1, x_2) = \mathbb{R}^2$.

# Nature de $\mathcal{S} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et de $Vect(\mathcal{S})$



## Nature de $\mathcal{S} = (x_1, x_2)$ dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$

La suite $\mathcal{S} = (x_1, x_2)$ est liée et $dim\, Vect(x_1, x_2) = 1$ (droite vectorielle).
Les vecteurs sont colinéaires.

# Nature de $\mathcal{S} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ et de $Vect(\mathcal{S})$

M1202
Algèbre linéaire

Département Informatique



## Remarque

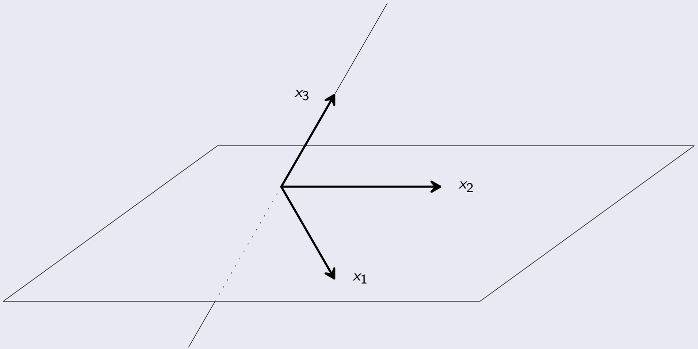
$x_1$ et $x_2$ sont des vecteurs non nuls.
Si $(x_1, x_2)$ est liée alors il existe $\lambda_1$ et $\lambda_2$ non tous deux nuls tels que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$. Supposons $\lambda_1 \neq 0$.
On en déduit $x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2$, $\lambda_2 \neq 0$ (sinon $x_1 = 0$) et $x_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_1$.
Réciproquement, s'il existe $\lambda_1$ tel que $x_2 = \lambda_1 x_1$ ou $\lambda_2$ tel que $x_1 = \lambda_2 x_2$ alors $(x_1, x_2)$ est liée.
On en déduit :

1. $(x_1, x_2)$ est liée si et seulement si il existe $\lambda_1$ et $\lambda_2$ tels que $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ et $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$.
2. $(x_1, x_2)$ est liée si et seulement si il existe $\lambda_1$ tel que $x_2 = \lambda_1 x_1$ ou $\lambda_2$ tel que $x_1 = \lambda_2 x_2$.
3. $(x_1, x_2)$ est liée si et seulement si les coordonnées de $x_1$ et $x_2$ dans une base de $\mathbb{R}^n$ sont proportionnelles.

# Nature de $\mathcal{S} = (x_1, x_2, ..., x_m)$ et de $Vect(\mathcal{S})$

## Nature de $\mathcal{S} = (x_1, x_2, x_3)$ dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$

La suite $\mathcal{S} = (x_1, x_2, x_3)$ est libre et $dim\, Vect(x_1, x_2, x_3) = 3$.



# Nature de $\mathcal{S} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et de $Vect\,(\mathcal{S})$

M1202
Algèbre
linéaire

Département
Informatique



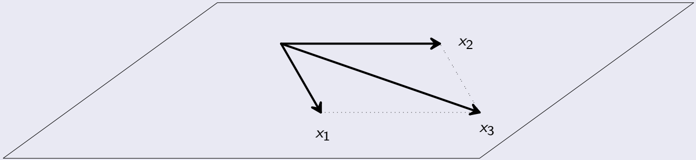
**Nature de $\mathcal{S} = (x_1, x_2, x_3)$ dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$**

Cas particulier : dans $\mathbb{R}^3$, $Vect\,(x_1, x_2, x_3) = \mathbb{R}^3$.

# Nature de $\mathcal{S} = (x_1, x_2, ..., x_m)$ et de $Vect\,(\mathcal{S})$

## Nature de $\mathcal{S} = (x_1, x_2, x_3)$ dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$

La suite $\mathcal{S} = (x_1, x_2, x_3)$ est liée et il existe une suite libre de deux vecteurs, par exemple $(x_1, x_2)$ :
$dim\ Vect\,(x_1, x_2, x_3) = 2$ (plan vectoriel).
Les vecteurs sont coplanaires.

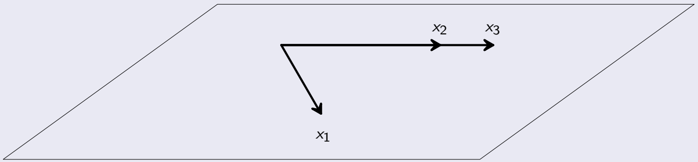


# Nature de $\mathcal{S} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et de $Vect(\mathcal{S})$



## Nature de $\mathcal{S} = (x_1, x_2, x_3)$ dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$

Autre cas :



# Nature de $\mathcal{S} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et de $Vect(\mathcal{S})$



## Nature de $\mathcal{S} = (x_1, x_2, x_3)$ dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$

La suite $\mathcal{S} = (x_1, x_2, x_3)$ est liée et il n'existe pas de suite libre de deux vecteurs : $dim\ Vect(x_1, x_2, x_3) = 1$ (droite vectorielle).
Les vecteurs sont colinéaires.

# Sous-espaces supplémentaires



## Définition

Deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ d'un espace vectoriel $E$ sont dits supplémentaires si tout vecteur de $E$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $F$ et d'un vecteur de $G$ :
$\forall x \in E, \exists! \ (y, z) \ x = y + z$.

## Notation

$E = F \oplus G$.

## Propriété

Soit $E$ de dimension finie.
$E = F \oplus G$ si et seulement si $dim\, F + dim\ G = dim\, E$ et $F \cap G = \{0\}$.

# Sous-espaces supplémentaires

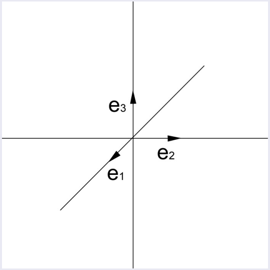
M1202 Algèbre linéaire

Département Informatique



## Exemple

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
$\mathbb{R}^3 = Vect(e_1, e_2) \oplus Vect(e_3)$ :
$dim\ Vect(e_1, e_2) = 2$ : $(e_1, e_2)$ une suite libre,
$dim\ Vect(e_3) = 1$ : $e_1 \neq 0$
et donc $dim\ Vect(e_1, e_2) + dim\ Vect(e_3) = 2 + 1 = dim\ \mathbb{R}^3$.
De plus, $(x\ y\ 0) = (0\ 0\ z) \Rightarrow x = y = z = 0$.



# Sous-espaces supplémentaires

## Démonstration

1. Si $E = F \oplus G$ alors soit $(y_1, y_2, \cdots, y_p)$ une base de $F$ et $(z_1, z_2, \cdots, z_q)$ une base de $G$.
Tout vecteur $x$ de $E$ s'écrit de manière unique
$x = (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_p y_p) + (\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \cdots + \mu_q z_q)$
$= \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_p y_p + \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \cdots + \mu_q z_q$.
On en déduit que $(y_1, y_2, \cdots, y_p, z_1, z_2, \cdots, z_q)$ est une base de $E$ comportant $dim\ F + dim\ G$ vecteurs.
Soit $x \in F \cap G$. On a $0 = 0 + 0 = x + (-x)$.
L'unicité implique $x = 0$.

# Sous-espaces supplémentaires



## Démonstration

2. Réciproque Si $dim\ F + dim\ G = dim\ E$ et $F \cap G = \{0\}$ alors en notant $(y_1, y_2, \cdots, y_p)$ une base de $F$ et $(z_1, z_2, \cdots, z_q)$ une base de $G$, la suite $(y_1, y_2, \cdots, y_p, z_1, z_2, \cdots, z_q)$ est une partie libre de $E$ :
$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_p y_p + \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \cdots + \mu_q z_q = 0$ implique
$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_p y_p = -(\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \cdots + \mu_q z_q)$.
On a donc $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_p y_p \in F \cap G$ et
$-(\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \cdots + \mu_q z_q) \in F \cap G$.
On en déduit que $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_p y_p = 0$
et $\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \cdots + \mu_q z_q = 0$
et donc que tous les $\lambda_i$ et $\mu_i$ sont nuls.
Comme $(y_1, y_2, \cdots, y_p, z_1, z_2, \cdots, z_q)$ est libre et contient
$dim\ F + dim\ G = dim\ E$ vecteurs, il s'agit d'une base de $E$ et $E = F \oplus G$.

# Sous-espaces supplémentaires

M1202 Algèbre linéaire

Département Informatique



## Théorème de la base incomplète

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$.
Pour toute suite libre $(y_1, y_2, \cdots, y_p)$ de $E$ $(p \leq n)$, il existe $q = n - p$ vecteurs $z_1$, $z_2$, $\cdots$, $z_q$ tels que $(y_1, y_2, \cdots, y_p, z_1, z_2, \cdots, z_q)$ soit une base de $E$.

## Remarque

Cela signifie que tout sous-espace vectoriel de $E$ admet un sous-espace supplémentaire.

# Sous-espaces supplémentaires



## Démonstration (récurrence sur $q$)

1. Si $q = 0$ $(p = n)$ alors $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ est une base de $E$.
2. Sinon, on suppose que toute suite libre $(y_1, y_2, \cdots, y_p)$ $(p \leq n$, $q = n - p \geq 0)$ peut être complétée en une base de $E$.

Soit $(y_1, y_2, \cdots, y_{p-1})$ une suite libre de $E$ $(q = n - p + 1)$.
On a $p - 1 \leq n - 1$ donc $Vect(y_1, y_2, \cdots, y_{p-1}) \neq E$.
Il existe donc $y_p \in E$, $y_p \notin Vect(y_1, y_2, \cdots, y_{p-1})$ tel que $(y_1, y_2, \cdots, y_{p-1}, y_p)$ soit libre.
En effet, soit $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_{p-1} y_{p-1} + \lambda_p y_p = 0$.
Si $\lambda_p \neq 0$ alors $y_p \in Vect(y_1, y_2, \cdots, y_{p-1})$.
Donc $\lambda_p = 0$ et tous les $\lambda_i$ sont nuls.
D'après l'hypothèse de récurrence, on peut compléter $(y_1, y_2, \cdots, y_{p-1}, y_p)$ en une base de $E$ avec $q = n - p$ vecteurs $z_1$, $z_2$, $\cdots$, $z_q$.

# Sous-espaces supplémentaires



## Remarque

En adaptant la démonstration, on peut montrer que les $q$ vecteurs peuvent être pris dans une base de $E$, en particulier la base canonique.

## Propriété

$f$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$ (de dimensions finies) si et seulement si $dim\, E = dim\, F$ et $Ker\, f = \{0\}$.
Démonstration en complément.

# Sous-espaces supplémentaires



**Théorème**

Si $f$ est une application linéaire de $E$ de dimension finie dans $F$ alors
$dim\,E = dim\,f(E) + dim\,Ker\,f$.

# Sous-espaces supplémentaires



## Démonstration

Si $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est une base de $E$ alors $(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n))$ est une partie génératrice de $f(E)$ qui est donc de dimension finie.
D'après le théorème de la base incomplète, $Ker\, f$ admet un sous-espace vectoriel supplémentaire $G$ : $E = Ker\ f \oplus G$.
On a alors $dim\, Ker\, f + dim\, G = dim\, E$ et $Ker\, f \cap G = \{0\}$.
Tout vecteur $x$ de $E$ s'écrit donc $x = y + z$ avec $y \in Ker\, f$ et $z \in G$.
On en déduit $f(x) = f(y+z) = f(y) + f(z) = f(z)$ et donc $f(E) = f(G)$.
En notant $f_G$ la restriction de $f$ à $G$, $Ker\, f_G = Ker\, f \cap G = \{0\}$.
En effet, pour tout vecteur $z \in G$ $f_G(z) = 0 \Rightarrow f(z) = 0$
$\Rightarrow z \in Ker\, f \cap G = \{0\}$.
$f$ est donc un isomorphisme de $G$ sur $f(G)$ et donc $dim\, G = dim\ f(G)$.
Comme $f(G) = f(E)$, on a $dim\, f(E) + dim\ Ker\ f = dim\, E$.

# Rang d'une application linéaire

## Définition

Le rang d'une application linéaire $f$ de $E$ de dimension finie dans $F$ est la dimension de $f(E)$.

## Notation

$r(f)$

# Rang d'une application linéaire



## Remarques

1. Si $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est une base de $E$ alors le rang de $f$ est le rang de la suite $(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n))$.
2. Si le rang de $f$ est $dim\, E$ alors $dim\, Ker\, f = 0$ et $f$ est injective. $f$ est donc un isomorphisme de $E$ sur $f(E)$.
3. Deux espaces vectoriels de même dimension sont isomorphes (il suffit d'associer les vecteurs des bases de $E$ et de $F$ entre eux).
4. $dim\, E = dim\, f(E) + dim\, Ker\, f$ s'écrit aussi $dim\, E = r(f) + dim\, Ker\, f$.

## Exemple

Soit $f$ de $\mathbb{R}^3$ muni de la base $(e_1, e_2, e_3)$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base $(e'_1, e'_2)$ définie par $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$f(X) = f(x, y, z) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$

et $f\left(\mathbb{R}^3\right) = Vect\,(f(e_1),\ f(e_2),\ f(e_3))$.

Or $Vect\,(f(e_1),\ f(e_2),\ f(e_3)) = Vect\,(f(e_1),\ f(e_2))$ et $(f(e_1),\ f(e_2))$ libre.

On en déduit $r(f) = 2$.

# Rang d'une application linéaire

## Opérations

1. Si $f$ et $g$ sont des applications linéaires de $E$ dans $F$ et $\lambda$ un scalaire alors $f+g$ et $\lambda f$ sont des applications linéaires de $E$ dans $F$.
2. Si $f$ est une application linéaire de $E$ dans $F$ et $g$ une application linéaire de $F$ dans $G$ alors $g \circ f$ est une applications linéaires de $E$ dans $G$.

# Rang d'une application linéaire

M1202 Algèbre linéaire

Département Informatique



## Exemple

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\mathfrak{B}' = (e_1', e_2')$.
Soit $f$ définie par $f(e_1) = e_2'$, $f(e_2) = e_1'$, $f(e_3) = e_1' + e_2'$
et $g$ définie par $g(e_1') = e_1 - e_2$ et $g(e_2') = e_1 + e_2 + e_3$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B} & & \mathcal{B}' & & \mathcal{B} \end{array}$$

$g \circ f$ est définie par $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{g \circ f} & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B} & & \mathcal{B} \end{array}$

et $g \circ f(e_1) = g\left(f(e_1)\right) = g(e_2') = e_1 + e_2 + e_3$,
$g \circ f(e_2) = g\left(f(e_2)\right) = g(e_1') = e_1 - e_2$
$g \circ f(e_3) = g\left(f(e_3)\right) = g(e_1' + e_2') = g(e_1') + g(e_2') = e_1 - e_2 + e_1 + e_2 + e_3$
$= 2e_1 + e_3$.

# Hyperplan



## Définition

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ ($n \geq 1$).
Un hyperplan est un sous-espace vectoriel $H$ de $E$ de dimension $n-1$.

## Propriété

Un hyperplan $H$ est caractérisé par une équation du type
$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$ avec $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, ..., 0)$.
Cela signifie : $H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n),\ a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0\}$.

Remarques : un hyperplan a une équation de ce type et inversement toute équation de ce type est celle d'un hyperplan.
Démonstration : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et formule du rang $dim\ Ker\ f = dim\ \mathbb{R}^n - dim\ Im\ f = n - 1$.

# Hyperplan



## Exemple 1

Un hyperplan $H$ de $\mathbb{R}^2$ est une droite vectorielle et a une équation du type $ax + by = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
$(x, y) \in H$ si et seulement si $ax + by = 0$.
Exemple :
la droite vectorielle $D$ d'équation $2x + 3y = 0$.
$D = Vect\,(V)$ avec $V = (-3, 2)$.

# Hyperplan

## Exemple 2

Un hyperplan $H$ de $\mathbb{R}^3$ est un plan vectoriel et a une équation du type $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
$(x, y, z) \in H$ si et seulement si $ax + by + cz = 0$.
Exemple :
le plan vectoriel $P$ d'équation $x + 2y - z = 0$.
$P = Vect\,(V_1, V_2)$ avec $V_1 = (-2, 1, 0)$ et $V_2 = (0, 1, 2)$.

# Espaces vectoriels

## Bibliographie et webographie


1. Algèbre linéaire de Robert Cabane et Christian Leboeuf (Ellipses)
2. Algèbre linéaire et géométrie Léonce Lesieur (Armand Colin)
3. Espaces et dimensions de Benoît Rittaud (Le Pommier)
4. Wikipédia : articles Hypercube, Grande Arche de la Défense


Grande Arche de la Défense

# Complément 1 : méthode de Gauss



## Description de la méthode

Les transformations suivantes transforment un système en un système équivalent :

1. Remplacement de la ligne $L_i$ par $L_i + \lambda L_j$, $i \neq j$, $\lambda \neq 0$.
2. Remplacement de la ligne $L_i$ par $\lambda L_i$, $\lambda \neq 0$.
3. Permutation des lignes.

La méthode de GAUSS consiste à utiliser les transformations précédentes pour trouver un système triangulaire équivalent.

# Complément 1 : méthode de Gauss



## Exemple 1

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 1 \\ 2x + 5y - z & = & 5 \\ 3x + y + z & = & 5 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 1 \\ y - 3z & = & 3 \\ -5y - 2z & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + 5L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 1 \\ y - 3z & = & 3 \\ -17z & = & 17 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 1 \\ y - 3z & = & 3 \\ z & = & -1 \end{array} \right.$$

# Complément 1 : méthode de Gauss



## Exemple 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z &= 1 \\ y-3z &= 3 \\ z &= -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z &= 1 \\ y &= 0 \\ z &= -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2 \\ y &= 0 \\ z &= -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(2,0,-1)\}}$$

## Exemple 2

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 1 \\ 2x+5y-z & = & 5 \\ 3x+y+18z & = & 5 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 1 \\ y-3z & = & 3 \\ -5y+15z & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3+5L_2 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 1 \\ y-3z & = & 3 \\ 0z & = & 17 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\emptyset}$$

# Complément 1 : méthode de Gauss

## Exemple 3

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcr} x + 2y + z & = & 1 \\ {\color{red}2}x + 5y - z & = & 5 \\ {\color{red}3}x + y + 18z & = & -12 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 {\color{red}- 2L_1} \\ L_3 {\color{red}- 3L_1} \end{array} \left\{ \begin{array}{rcr} x + 2y + z & = & 1 \\ y - 3z & = & 3 \\ {\color{blue}-5}y + 15z & = & -15 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 {\color{blue}+5L_2} \end{array} \left\{ \begin{array}{rcr} x + 2y + z & = & 1 \\ y - 3z & = & 3 \\ 0z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcr} x + 2y + z & = & 1 \\ y - 3z & = & 3 \end{array} \right.$$

# Complément 1 : méthode de Gauss

## Exemple 3

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 1 \\ y - 3z & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 1 \\ y & = & 3 + 3z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 - 2(3 + 3z) - z \\ y & = & 3 + 3z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -5 - 7z \\ y & = & 3 + 3z \end{array} \right.$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(-5 - 7z, 3 + 3z, z),\ z \in \mathbb{R}\}}$$

# Complément 1 : méthode de Gauss

## Exemple 4

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 1 \\ 2x+4y+2z & = & 2 \\ 3x+6y+3z & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 1 \\ 0y+0z & = & 0 \\ 0y+0z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 1 \\ 0y+0z & = & 0 \\ 0z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad x+2y+z = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1-2y-z$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(1-2y-z, y, z),\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}}$$

# Complément 1 : méthode de Gauss

## Exemple 5

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \\ \end{array} \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+z &=& 1 \\ 2x+5y-z &=& 5 \\ 3x+y+z &=& 5 \\ 4x+5y+5z &=& 3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+z &=& 1 \\ \color{red}{2}x+5y-z &=& 5 \\ \color{red}{3}x+y+z &=& 5 \end{array} \right. \\ 4x+5y+5z = 3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \color{red}{-2L_1} \\ L_3 \color{red}{-3L_1} \\ L_4 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+z &=& 1 \\ y-3z &=& 3 \\ \color{blue}{-5}y-2z &=& 2 \end{array} \right. \\ 4x+5y+5z = 3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \color{blue}{+5L_2} \\ L_4 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+z &=& 1 \\ y-3z &=& 3 \\ -17z &=& 17 \end{array} \right. \\ 4x+5y+5z = 3 \end{array} \right.$$

# Complément 1 : méthode de Gauss

## Exemple 5

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{rcr} x+2y+z & = & 1 \\ y-3z & = & 3 \\ z & = & -1 \end{array} \right. \\ 4x+5y+5z \quad = \quad 3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 2 \\ y & = & 0 \\ z & = & -1 \end{array} \right. \\ 4x+5y+5z \quad = \quad 3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 2 \\ y & = & 0 \\ z & = & -1 \end{array} \right. \\ 4.2+5.0+5.(-1) \quad = \quad 3 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(2,0,-1)\}}$$

# Complément 2 : espace vectoriel

## Contre-exemple : propriété 4 non vérifiée

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition des vecteurs, on pose :
pour tout réel $\lambda$, $\lambda(x, y) = (\lambda x, 0)$.
On a alors $1(x, y) = (1x, 0) = (x, 0)$
et en particulier $1(1, 1) = (1, 0) \neq (1, 1)$.

# Complément 3 : espace vectoriel



## Autre exemple : suites

On note $E$ l'ensemble des suites réelles
$u = (u_n)_{n \geq 0} = (u_n) = (u_0, u_1, u_2, \cdots)$ avec $u_n \in \mathbb{R}$ $(n \geq 0)$.
Pour toutes suites réelles $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$, et pour tout réel $\lambda$, on pose

1. **Addition :**
   $u + v = (u_n) + (v_n) = (u_n + v_n) = (u_0 + v_0, u_1 + v_1, u_2 + v_2, \cdots)$
2. **Multiplication scalaire :**
   $\lambda u = \lambda (u_n) = (\lambda u_n) = (\lambda u_0, \lambda u_1, \lambda u_2, \cdots)$

On note $(0) = (0, 0, 0, \cdots)$ (suite nulle : $\forall n \geq 0 \ u_n = 0$) et
$-u = -(u_n) = (-u_n) = (-u_0, -u_1, -u_2, \cdots)$.

# Complément 3 : espace vectoriel

## Autre exemple : suites

On a

1. $\forall u = (u_n) \in E, \forall v = (v_n) \in E, u + v = v + u$
2. $\forall u = (u_n) \in E, \forall v = (v_n) \in E, \forall w = (w_n) \in E,$
   $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $\forall u = (u_n) \in E \ u + (0) = u$
4. $\forall u = (u_n) \in E, u + (-u) = (0)$
5. $\forall u = (u_n) \in E, \forall v = (v_n) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \lambda (u + v) = \lambda u + \lambda v$
6. $\forall u = (u_n) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R} \ (\lambda + \mu) u = \lambda u + \mu u$
7. $\forall u = (u_n) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R} \ (\lambda \mu) u = \lambda (\mu u)$
8. $\forall u = (u_n) \in E, 1u = u$

On en déduit que $E$ muni de l'addition et de la multiplication scalaire dfinies ci-dessus est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

# Complément 4 : Suite liée, suite libre (démonstration)

### Propriété 2

Si $(y_1, y_2, \cdots, y_m, y_{m+1})$ est une suite de $m+1$ vecteurs combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_m$ alors la suite $(y_1, y_2, \cdots, y_m, y_{m+1})$ est liée.

### Démonstration (par récurrence sur $m$)

1. Si $m = 1$ alors on pose $y_1 = \lambda_1 x_1$ et $y_2 = \lambda_2 x_1$.
Si $\lambda_2 = 0$ alors $0y_1 + 1y_2 = 0$.
Sinon, $x_1 = \frac{1}{\lambda_2} y_2$ et $\lambda_2 y_1 - \lambda_1 y_2 = \lambda_2 \lambda_1 \frac{1}{\lambda_2} y_2 - \lambda_1 y_2 = 0$.

# Complément 4 : Suite liée, suite libre (démonstration)



## Démonstration (par récurrence sur $m$)

2. Supposons la propriété vraie pour un entier quelconque $m \geq 1$.
Soit $(y_1, y_2, \cdots, y_m, y_{m+1}, y_{m+2})$ une suite de $m+2$ combinaisons linéaires de $x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}$.
On pose $y_1 = z_1 + \lambda_1 x_{m+1}$, $y_2 = z_2 + \lambda_2 x_{m+1}$, $\cdots$, $y_{m+1} = z_{m+1} + \lambda_{m+1} x_{m+1}$ $y_{m+2} = z_{m+2} + \lambda_{m+2} x_{m+1}$ avec $z_1, z_2, \cdots, z_{m+1}, z_{m+2}$ combinaisons linéaires de $x_1, x_2, \cdots, x_m$.
Si $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_{m+2} = 0$ alors $(y_2, y_3, \cdots, y_m, y_{m+1}, y_{m+2})$ est une suite de $m+1$ combinaisons linéaires de $m$ vecteurs $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m$.
Elle est donc liée et $(y_1, y_2, \cdots, y_m, y_{m+1}, y_{m+2})$ également :
$\mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 + \cdots + \mu_m y_m + \mu_{m+1} y_{m+1} + \mu_{m+2} y_{m+2} = 0$ implique
$0 y_1 + \mu_2 y_2 + \cdots + \mu_m y_m + \mu_{m+1} y_{m+1} + \mu_{m+2} y_{m+2} = 0$.

# Complément 4 : Suite liée, suite libre (démonstration)



## Démonstration (par récurrence sur $m$)

Si l'un des $\lambda_i \neq 0$ par exemple $\lambda_{m+2} \neq 0$, on a
$x_{m+1} = \frac{1}{\lambda_{m+2}} y_{m+2} - \frac{1}{\lambda_{m+2}} z_{m+2}$.
On a alors $y_1 = z_1 + \lambda_1 x_{m+1} = z_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_{m+2}} y_{m+2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_{m+2}} z_{m+2}$ et donc
$y_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{m+2}} y_{m+2} = z_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{m+2}} z_{m+2} = z_1'$
De même, $y_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{m+2}} y_{m+2} = z_2'$, ... , $y_{m+1} - \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_{m+2}} y_{m+2} = z_{m+1}'$ avec
$z_1', z_2', \cdots, z_{m+1}'$ combinaisons linéaires de $x_1, x_2, \cdots, x_m$.
D'après l'hypothèse de récurrence
$\mu_1 z_1' + \mu_2 z_2' + \cdots + \mu_m z_m' + \mu_{m+1} z_{m+1}' = 0$ avec l'un au moins des $\mu_i \neq 0$.
Donc
$\mu_1(y_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{m+2}} y_{m+2}) + \mu_2(y_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{m+2}} y_{m+2}) + \cdots + \mu_{m+1}(y_{m+1} - \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_{m+2}} y_{m+2}) = 0$
et donc $\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \cdots + \mu_m y_m + \mu_{m+1} y_{m+1} + \mu_{m+2} y_{m+2} = 0$ et la suite $(y_1, y_2, \cdots, y_m, y_{m+1}, y_{m+2})$ est liée.

# Complément 5 : sous-espaces supplémentaires



## Démonstration

$f$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$ (de dimensions finies) si et seulement si $dim\,E = dim\,F$ et $Ker\,f = \{0\}$.

1. Si $f$ est un isomorphisme, alors $f$ est injective et donc $Ker\,f = \{0\}$.
Par ailleurs, si $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est une base de $E$ alors
$(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n))$ est une suite libre de $F$ car $f$ est injective et donc
$(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n))$ est libre.
Comme $f$ est surjective, tout vecteur de $F$ s'écrit $f(x)$, avec $x \in E$.
Or $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$. On a alors
$f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$.
$(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n))$ est donc génératrice.
$(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n))$ est donc une base de $F$ et
$dim\,F = n = dim\,E$.

# Complément 5 : sous-espaces supplémentaires



## Démonstration

2. Si $dim\, E = dim\, F = n$ et $Ker\, f = \{0\}$ alors $f$ est injective.
Si $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est une base de $E$ alors $(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n))$ est une suite libre de $n$ vecteurs dans $F$ de dimension $n$.
$(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n))$ est donc une base de $F$.
Tout vecteur $y$ de $F$ s'écrit alors
$y = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n)$.
On en déduit que $f$ est surjective.

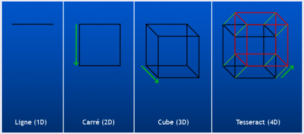
# Complément 6 : hypercube

## Hypercube

| $n$ | sommets (0-faces) | côtés (1-faces) | faces (2-faces) | 3-faces | 4-faces |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | | | |
| 2 | 4 | 4 | 1 | | |
| 3 | 8 | 12 | 6 | 1 | |
| 4 | 16 | 32 | 24 | 8 | 1 |

$k$-face ou $k$-cellule ou hypercube de dimension $k$ : face à $k$ dimension(s).

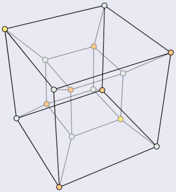
Nombre de $k$-faces : $C_n^k 2^{n-k}$.




Génération de l'hypercube ou tesseract ou tessaract (Charles Howard Hinton).

# Complément 6 : hypercube

## Hypercube

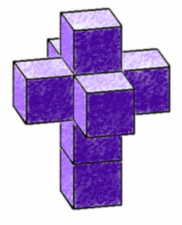


Hypercube

# Complément 6 : hypercube



## Hypercube



Patron