M3201

Variable aléatoire

François Morellet 40 000 carrés

Ce sont coups du hasard, dont on n'est point garant.

Molière

Variable aléatoire réelle

Définitions

Variable aléatoire réelle

Définitions

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Variable aléatoire réelle

Définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.
Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Variable aléatoire réelle

Définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.
Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Définition équivalente

Variable aléatoire réelle

Définitions

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.
Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Définition équivalente

Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall a \in \mathbb{R}\ X^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{T}$.

Variable aléatoire réelle

Définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.
Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Définition équivalente

Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall a \in \mathbb{R}\ X^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{T}$.

Notation

Variable aléatoire réelle

Définitions

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.
Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$ est une application $X:\Omega\to\mathbb{R}$ vérifiant $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\ X^{-1}(B)\in\mathcal{T}$.

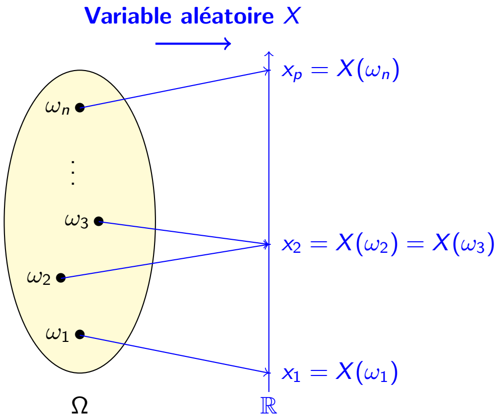
Définition équivalente

Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$ est une application $X:\Omega\to\mathbb{R}$ vérifiant $\forall a\in\mathbb{R}\ X^{-1}(]-\infty,a])\in\mathcal{T}$.

Notation

$$(X\leq a)=X^{-1}(]-\infty,a])=\{\omega\in\Omega,\ X(\omega)\leq a\}$$

Variable aléatoire réelle



Variable aléatoire réelle

Propriété

Variable aléatoire réelle

Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Variable aléatoire réelle

Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
Si B est un intervalle ou une réunion finie ou dénombrable d'intervalles alors $X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Variable aléatoire réelle

Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
Si B est un intervalle ou une réunion finie ou dénombrable d'intervalles alors $X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Notations

Variable aléatoire réelle

Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$.
Si B est un intervalle ou une réunion finie ou dénombrable d'intervalles alors $X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Notations

$$X \in B = X^{-1}(B) \qquad = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\}$$

Variable aléatoire réelle

Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
Si B est un intervalle ou une réunion finie ou dénombrable d'intervalles alors $X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Notations

$$X \in B = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\}$$

$$(X < a) = X^{-1}(]-\infty, a[) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < a\}$$

Variable aléatoire réelle

Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$.
Si B est un intervalle ou une réunion finie ou dénombrable d'intervalles alors $X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Notations

$$
\begin{aligned}
X \in B = X^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\} \\
(X < a) = X^{-1}(]-\infty, a[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < a\} \\
(X \geq a) = X^{-1}([a, +\infty[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq a\}
\end{aligned}
$$

Variable aléatoire réelle

Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
Si B est un intervalle ou une réunion finie ou dénombrable d'intervalles alors $X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Notations

$$
\begin{aligned}
X \in B = X^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\}\\
(X < a) = X^{-1}(]-\infty, a[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < a\}\\
(X \geq a) = X^{-1}([a, +\infty[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq a\}\\
(X > a) = X^{-1}(]a, +\infty[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) > a\}
\end{aligned}
$$

Variable aléatoire réelle

Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
Si B est un intervalle ou une réunion finie ou dénombrable d'intervalles alors $X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Notations

$$\begin{aligned}
X \in B = X^{-1}(B) \quad & = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\} \\
(X < a) = X^{-1}(]-\infty, a[) \quad & = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < a\} \\
(X \geq a) = X^{-1}([a, +\infty[) \quad & = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq a\} \\
(X > a) = X^{-1}(]a, +\infty[) \quad & = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) > a\} \\
(a \leq X \leq b) = X^{-1}([a, b]) \quad & = \{\omega \in \Omega,\ a \leq X(\omega) \leq b\}
\end{aligned}$$

Variable aléatoire réelle

Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$.
Si B est un intervalle ou une réunion finie ou dénombrable d'intervalles alors $X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Notations

$$
\begin{aligned}
X \in B = X^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\} \\
(X < a) = X^{-1}(]-\infty, a[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < a\} \\
(X \geq a) = X^{-1}([a, +\infty[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq a\} \\
(X > a) = X^{-1}(]a, +\infty[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) > a\} \\
(a \leq X \leq b) = X^{-1}([a, b]) &= \{\omega \in \Omega,\ a \leq X(\omega) \leq b\} \\
(a < X \leq b) = X^{-1}(]a, b]) &= \{\omega \in \Omega,\ a < X(\omega) \leq b\}
\end{aligned}
$$

Variable aléatoire réelle

Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$.
Si B est un intervalle ou une réunion finie ou dénombrable d'intervalles alors $X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Notations

$$
\begin{aligned}
X \in B = X^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\}\\
(X < a) = X^{-1}(]-\infty, a[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < a\}\\
(X \geq a) = X^{-1}([a, +\infty[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq a\}\\
(X > a) = X^{-1}(]a, +\infty[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) > a\}\\
(a \leq X \leq b) = X^{-1}([a, b]) &= \{\omega \in \Omega,\ a \leq X(\omega) \leq b\}\\
(a < X \leq b) = X^{-1}(]a, b]) &= \{\omega \in \Omega,\ a < X(\omega) \leq b\}\\
(X = a) = X^{-1}(\{a\}) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = a\}
\end{aligned}
$$

Variable aléatoire réelle

Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$.
Si B est un intervalle ou une réunion finie ou dénombrable d'intervalles alors $X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Notations

$$\begin{aligned}
X \in B = X^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\}\\
(X < a) = X^{-1}(]-\infty, a[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < a\}\\
(X \geq a) = X^{-1}([a, +\infty[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq a\}\\
(X > a) = X^{-1}(]a, +\infty[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) > a\}\\
(a \leq X \leq b) = X^{-1}([a, b]) &= \{\omega \in \Omega,\ a \leq X(\omega) \leq b\}\\
(a < X \leq b) = X^{-1}(]a, b]) &= \{\omega \in \Omega,\ a < X(\omega) \leq b\}\\
(X = a) = X^{-1}(\{a\}) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = a\}\\
\dots &
\end{aligned}$$

Variable aléatoire réelle

Fonction de répartition

Variable aléatoire réelle

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.

Variable aléatoire réelle

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Variable aléatoire réelle

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés

Variable aléatoire réelle

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés

a) F est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$.

Variable aléatoire réelle

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés

a) F est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$.
b) F est croissante.

Variable aléatoire réelle

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés

a) F est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$.
b) F est croissante.
c) $F(x) \to 0$ lorsque $x \to -\infty$

Variable aléatoire réelle

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés

a) F est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$.
b) F est croissante.
c) $F(x) \to 0$ lorsque $x \to -\infty$
d) $F(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$

Variable aléatoire réelle

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés

a) F est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$.
b) F est croissante.
c) $F(x) \to 0$ lorsque $x \to -\infty$
d) $F(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$
e) Limite à droite :

Variable aléatoire réelle

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés

a) F est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$.
b) F est croissante.
c) $F(x) \to 0$ lorsque $x \to -\infty$
d) $F(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$
e) Limite à droite :
$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $F(x) \to F(x_0)$ lorsque $x \to x_{0_+}$ (F est continue à droite)

Variable aléatoire réelle

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés

a) F est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$.
b) F est croissante.
c) $F(x) \to 0$ lorsque $x \to -\infty$
d) $F(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$
e) Limite à droite :
$\forall x_0 \in \mathbb{R}\ F(x) \to F(x_0)$ lorsque $x \to x_{0_+}$ (F est continue à droite)
e) Limite à gauche :

Variable aléatoire réelle

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés

a) F est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$.
b) F est croissante.
c) $F(x) \to 0$ lorsque $x \to -\infty$
d) $F(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$
e) Limite à droite :
$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $F(x) \to F(x_0)$ lorsque $x \to x_{0_+}$ (F est continue à droite)
e) Limite à gauche :
$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $F(x) \to P(X < x_0)$ lorsque $x \to x_{0_-}$

Variable aléatoire réelle

Loi de probabilité

Variable aléatoire réelle

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.

Variable aléatoire réelle

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ définie par $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

Variable aléatoire réelle

Loi de probabilité

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ définie par $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

Propriété

Variable aléatoire réelle

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ définie par $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

Propriété

P_X est une probabilité.

Variable aléatoire réelle

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ définie par $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

Propriété

P_X est une probabilité.
Démonstration en annexe

Variable aléatoire réelle

Vecteur de variables aléatoires

Variable aléatoire réelle

Vecteur de variables aléatoires

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Variable aléatoire réelle

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Vecteur de variables aléatoires

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
L'application $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ définie par
$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ est appelée vecteur aléatoire.

Variable aléatoire réelle

Vecteur de variables aléatoires

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
L'application $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ définie par
$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ est appelée vecteur aléatoire.

Fonction de répartition

Variable aléatoire réelle

Vecteur de variables aléatoires

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
L'application $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ définie par
$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ est appelée vecteur aléatoire.

Fonction de répartition

La fonction de répartition du vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est l'application $F : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ définie par
$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\left((X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cap \cdots \cap (X_n \leq x_n)\right)$.

Variable aléatoire réelle

Fonctions et opérations

Variable aléatoire réelle

Fonctions et opérations

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire, X une variable aléatoire réelle et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Variable aléatoire réelle

Fonctions et opérations

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire, X une variable aléatoire réelle et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X)$ est une variable aléatoire réelle si pour tout réel x $(\phi(X) \leq x) \in \mathcal{T}$.

Variable aléatoire réelle

Fonctions et opérations

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire, X une variable aléatoire réelle et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X)$ est une variable aléatoire réelle si pour tout réel x $(\phi(X) \leq x) \in \mathcal{T}$.

Exemples

Variable aléatoire réelle

Fonctions et opérations

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire, X une variable aléatoire réelle et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X)$ est une variable aléatoire réelle si pour tout réel x $(\phi(X) \leq x) \in \mathcal{T}$.

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle et a et b deux réels.

Variable aléatoire réelle

Fonctions et opérations

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire, X une variable aléatoire réelle et une application $\phi : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.
$\phi(X)$ est une variable aléatoire réelle si pour tout réel x $(\phi(X) \leq x) \in \mathcal{T}$.

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle et a et b deux réels.
$aX + b$ et X^2 sont des variables aléatoires réelles.

Variable aléatoire réelle

Cas d'un vecteur aléatoire

Variable aléatoire réelle

Cas d'un vecteur aléatoire

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire et une application $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Variable aléatoire réelle

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Cas d'un vecteur aléatoire

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire et une application $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle

Variable aléatoire réelle

Cas d'un vecteur aléatoire

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire et une application $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle si pour tout réel x $(\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leq x) \in \mathcal{T}$.

Variable aléatoire réelle

Cas d'un vecteur aléatoire

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire et une application $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle si pour tout réel x $(\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leq x) \in \mathcal{T}$.

Exemples

Variable aléatoire réelle

Cas d'un vecteur aléatoire

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire et une application $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle si pour tout réel x $(\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leq x) \in \mathcal{T}$.

Exemples

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles et a et b deux réels.

Variable aléatoire réelle

Cas d'un vecteur aléatoire

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire et une application $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle si pour tout réel x $(\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leq x) \in \mathcal{T}$.

Exemples

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles et a et b deux réels.
$aX_1 + bX_2$, X_1X_2, $\max(X_1, X_2)$ et $\min(X_1, X_2)$ sont des variables aléatoires réelles.

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire réelle X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

Variable aléatoire discrète

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire réelle X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Si $X(\Omega)$ est fini alors X est dite variable aléatoire discrète finie.

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire réelle X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Si $X(\Omega)$ est fini alors X est dite variable aléatoire discrète finie.
Si $X(\Omega)$ est dénombrable alors X est dite variable aléatoire discrète infinie.

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire réelle X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Si $X(\Omega)$ est fini alors X est dite variable aléatoire discrète finie.
Si $X(\Omega)$ est dénombrable alors X est dite variable aléatoire discrète infinie.

Propriétés

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire réelle X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Si $X(\Omega)$ est fini alors X est dite variable aléatoire discrète finie.
Si $X(\Omega)$ est dénombrable alors X est dite variable aléatoire discrète infinie.

Propriétés

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une application telle que $X(\Omega) = \{x_i, \; i \in I\}$ est fini ou dénombrable.

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire réelle X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Si $X(\Omega)$ est fini alors X est dite variable aléatoire discrète finie.
Si $X(\Omega)$ est dénombrable alors X est dite variable aléatoire discrète infinie.

Propriétés

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une application telle que $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$ est fini ou dénombrable.
a) X est une variable aléatoire réelle si et seulement si $\forall i \in I$, $(X = x_i) \in \mathcal{T}$.

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire réelle X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Si $X(\Omega)$ est fini alors X est dite variable aléatoire discrète finie.
Si $X(\Omega)$ est dénombrable alors X est dite variable aléatoire discrète infinie.

Propriétés

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une application telle que $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ est fini ou dénombrable.
a) X est une variable aléatoire réelle si et seulement si $\forall i \in I$, $(X = x_i) \in \mathcal{T}$.
On utilise $(X \leq x) = \displaystyle\bigcup_{x_i \leq x,\ i \in I} (X = x_i)$

Variable aléatoire discrète

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire réelle X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Si $X(\Omega)$ est fini alors X est dite variable aléatoire discrète finie.
Si $X(\Omega)$ est dénombrable alors X est dite variable aléatoire discrète infinie.

Propriétés

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une application telle que $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$ est fini ou dénombrable.

a) X est une variable aléatoire réelle si et seulement si $\forall i \in I$, $(X = x_i) \in \mathcal{T}$.

On utilise $(X \leq x) = \bigcup_{x_i \leq x,\ i \in I} (X = x_i)$

b) Si Ω est fini ou dénombrable alors toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
Soit a un réel et $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$ (application contante).

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
Soit a un réel et $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$ (application contante).
$X(\Omega) = \{a\}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
Soit a un réel et $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$ (application contante).
$X(\Omega) = \{a\}$.
$(X = a) = X^{-1}(a) = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
Soit a un réel et $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$ (application contante).
$X(\Omega) = \{a\}$.
$(X = a) = X^{-1}(a) = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$.
X est une variable aléatoire discrète dite déterministe.

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Expérience aléatoire : on lance un dé parfait à 6 faces et on note le nombre lu sur sa face supérieure.

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Expérience aléatoire : on lance un dé parfait à 6 faces et on note le nombre lu sur sa face supérieure.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega \; P(i) = \dfrac{1}{6}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Expérience aléatoire : on lance un dé parfait à 6 faces et on note le nombre lu sur sa face supérieure.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega \; P(i) = \dfrac{1}{6}$.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2,4,6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1,3,5\}$.

Variable aléatoire discrète

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 2

Expérience aléatoire : on lance un dé parfait à 6 faces et on note le nombre lu sur sa face supérieure.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega \; P(i) = \dfrac{1}{6}$.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2,4,6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1,3,5\}$.

$X(\Omega) = \{0,1\}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Expérience aléatoire : on lance un dé parfait à 6 faces et on note le nombre lu sur sa face supérieure.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega \ P(i) = \dfrac{1}{6}$.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2, 4, 6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1, 3, 5\}$.

$X(\Omega) = \{0, 1\}$.

$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Expérience aléatoire : on lance un dé parfait à 6 faces et on note le nombre lu sur sa face supérieure.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega \ P(i) = \dfrac{1}{6}$.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2,4,6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1,3,5\}$.

$X(\Omega) = \{0,1\}$.

$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{1,3,5\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Expérience aléatoire : on lance un dé parfait à 6 faces et on note le nombre lu sur sa face supérieure.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega\ P(i) = \dfrac{1}{6}$.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2, 4, 6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1, 3, 5\}$.

$X(\Omega) = \{0, 1\}$.

$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{1, 3, 5\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

X est une variable aléatoire discrète dite variable de Bernoulli : variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

Exemple 2

Expérience aléatoire : on lance un dé parfait à 6 faces et on note le nombre lu sur sa face supérieure.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega\ P(i) = \dfrac{1}{6}$.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2,4,6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1,3,5\}$.

$X(\Omega) = \{0,1\}$.

$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{1,3,5\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

X est une variable aléatoire discrète dite variable de Bernoulli : variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{0,1\}$.

Jacques Bernoulli (1654-1705) : mathématicien suisse.

Variable aléatoire discrète

Remarque

Variable aléatoire discrète

Remarque

En posant $A = \{1, 3, 5\}$, on a $\overline{A} = \{2, 4, 6\}$

Variable aléatoire discrète

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Remarque

En posant $A = \{1, 3, 5\}$, on a $\overline{A} = \{2, 4, 6\}$ et on peut prendre $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier $(n \geq 1)$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Soit $p \in]0, 1[$ et n un entier $(n \geq 1)$.
Expérience aléatoire : on lance n fois une pièce de monnaie et on note la valeur lue sur la face supérieure de la pièce : Pile (P) ou Face (F).

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier ($n \geq 1$).
Expérience aléatoire : on lance n fois une pièce de monnaie et on note la valeur lue sur la face supérieure de la pièce : Pile (P) ou Face (F).
Pour $n = 1$, $\Omega = \{P, F\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(P) = p$, $P(F) = 1 - p$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier ($n \geq 1$).
Expérience aléatoire : on lance n fois une pièce de monnaie et on note la valeur lue sur la face supérieure de la pièce : Pile (P) ou Face (F).
Pour $n = 1$, $\Omega = \{P, F\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(P) = p$, $P(F) = 1 - p$.
Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$, $P(\omega) = p^i (1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier $(n \geq 1)$.
Expérience aléatoire : on lance n fois une pièce de monnaie et on note la valeur lue sur la face supérieure de la pièce : Pile (P) ou Face (F).
Pour $n = 1$, $\Omega = \{P, F\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(P) = p$, $P(F) = 1 - p$.
Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$, $P(\omega) = p^i(1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.
Exemple : pour $n = 4$, $P(PFPP) = p^3(1-p)^1$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier $(n \geq 1)$.
Expérience aléatoire : on lance n fois une pièce de monnaie et on note la valeur lue sur la face supérieure de la pièce : Pile (P) ou Face (F).
Pour $n = 1$, $\Omega = \{P, F\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(P) = p$, $P(F) = 1 - p$.
Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$, $P(\omega) = p^i(1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.
Exemple : pour $n = 4$, $P(PFPP) = p^3(1-p)^1$.
On note $X : \Omega \to \mathbb{N}$ définie par $X(\omega)$ est le nombre de P de ω.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2 \cdots, n\}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier $(n \geq 1)$.
Expérience aléatoire : on lance n fois une pièce de monnaie et on note la valeur lue sur la face supérieure de la pièce : Pile (P) ou Face (F).
Pour $n = 1$, $\Omega = \{P, F\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(P) = p$, $P(F) = 1 - p$.
Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$,
$P(\omega) = p^i(1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.
Exemple : pour $n = 4$, $P(PFPP) = p^3(1-p)^1$.
On note $X : \Omega \to \mathbb{N}$ définie par $X(\omega)$ est le nombre de P de ω.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2 \cdots, n\}$.
Il s'agit d'une application de Ω fini ($|\Omega| = 2^n$) dans $\mathbb{N}$.
X est donc une variable aléatoire discrète.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3 : $n = 3$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3 : $n = 3$

$$\Omega = \{P, F\}^3 = \{FFF, PFF, FPF, FFP, PPF, PFP, FPP, PPP\}$$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3 : $n = 3$

$\Omega = \{P, F\}^3 = \{FFF, PFF, FPF, FFP, PPF, PFP, FPP, PPP\}$
$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3 : $n = 3$

$\Omega = \{P, F\}^3 = \{FFF, PFF, FPF, FFP, PPF, PFP, FPP, PPP\}$
$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

Variable aléatoire discrète

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 3 : $n = 3$

$\Omega = \{P, F\}^3 = \{FFF, PFF, FPF, FFP, PPF, PFP, FPP, PPP\}$
$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{FFF\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3 : $n = 3$

$\Omega = \{P, F\}^3 = \{FFF, PFF, FPF, FFP, PPF, PFP, FPP, PPP\}$
$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{FFF\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{PFF, FPF, FFP\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3 : $n = 3$

$\Omega = \{P, F\}^3 = \{FFF, PFF, FPF, FFP, PPF, PFP, FPP, PPP\}$
$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{FFF\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{PFF, FPF, FFP\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
$(X = 2) = X^{-1}(2) = \{PPF, PFP, FPP\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3 : $n = 3$

$\Omega = \{P, F\}^3 = \{FFF, PFF, FPF, FFP, PPF, PFP, FPP, PPP\}$
$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{FFF\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{PFF, FPF, FFP\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
$(X = 2) = X^{-1}(2) = \{PPF, PFP, FPP\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
$(X = 3) = X^{-1}(3) = \{PPP\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

Variable aléatoire discrète

Dans la suite, on note $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$.

Loi de probabilité

Variable aléatoire discrète

Dans la suite, on note $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.

Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est définie par la donnée de $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et des $P(X = x_i)$ $(i \in I)$.

Variable aléatoire discrète

Dans la suite, on note $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.

Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est définie par la donnée de $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et des $P(X = x_i)$ $(i \in I)$.

Propriétés

Variable aléatoire discrète

Dans la suite, on note $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$.

Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est définie par la donnée de $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$ et des $P(X = x_i)$ $(i \in I)$.

Propriétés

i)

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = \sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$$

Variable aléatoire discrète

Dans la suite, on note $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.

Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est définie par la donnée de $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et des $P(X = x_i)$ $(i \in I)$.

Propriétés

i)

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = \sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$$

ii) Soit $B \subset \mathbb{R}$.

Variable aléatoire discrète

Dans la suite, on note $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.

Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est définie par la donnée de $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et des $P(X = x_i)$ $(i \in I)$.

Propriétés

i)

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = \sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$$

ii) Soit $B \subset \mathbb{R}$. On a

$$P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} P(X = x_i)$$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$,

Variable aléatoire discrète

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$,

$P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$,
$P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$,
$P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$
$X(\Omega) = \{a\}$.

Variable aléatoire discrète

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$,

$P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.

$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$

$X(\Omega) = \{a\}$.

$(X = a) = X^{-1}(a) = \mathbb{R}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$,
$P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$
$X(\Omega) = \{a\}$.
$(X = a) = X^{-1}(a) = \mathbb{R}$.
Loi de probabilité de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$,
$P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$
$X(\Omega) = \{a\}$.
$(X = a) = X^{-1}(a) = \mathbb{R}$.
Loi de probabilité de X :
$P(X = a) = P(\Omega) = 1$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega$, $P(i) = \frac{1}{6}$.

Variable aléatoire discrète

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Exemple 2

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega,\ P(i) = \frac{1}{6}$.
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2, 4, 6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1, 3, 5\}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega$, $P(i) = \frac{1}{6}$.
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2, 4, 6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1, 3, 5\}$.
$X(\Omega) = \{0, 1\}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega,\ P(i) = \frac{1}{6}$.
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2,4,6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1,3,5\}$.
$X(\Omega) = \{0,1\}$.
$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2,4,6\}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega,\ P(i) = \frac{1}{6}$.
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2, 4, 6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1, 3, 5\}$.
$X(\Omega) = \{0, 1\}$.
$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2, 4, 6\}$
$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{1, 3, 5\}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega,\ P(i) = \frac{1}{6}$.
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2,4,6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1,3,5\}$.
$X(\Omega) = \{0,1\}$.
$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2,4,6\}$
$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{1,3,5\}$
Loi de probabilité de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega,\ P(i) = \frac{1}{6}$.
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2,4,6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1,3,5\}$.
$X(\Omega) = \{0,1\}$.
$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2,4,6\}$
$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{1,3,5\}$
Loi de probabilité de X :

$$P(X = 0) = P(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega,\ P(i) = \frac{1}{6}$.
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2,4,6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1,3,5\}$.
$X(\Omega) = \{0,1\}$.
$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2,4,6\}$
$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{1,3,5\}$
Loi de probabilité de X :

$$P(X = 0) = P(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$P(X = 1) = P(\{1,3,5\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega,\ P(i) = \frac{1}{6}$.
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2,4,6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1,3,5\}$.
$X(\Omega) = \{0,1\}$.
$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2,4,6\}$
$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{1,3,5\}$
Loi de probabilité de X :

$$P(X=0) = P(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$P(X=1) = P(\{1,3,5\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Remarque : $P(X=0) + P(X=1) = 1$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Exemple 3

Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$, $P(\omega) = p^i (1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$,
$P(\omega) = p^i (1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.
$X : \Omega \to \mathbb{N}$ définie par $X(\omega)$ est le nombre de P de ω.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$,
$P(\omega) = p^i(1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.
$X : \Omega \to \mathbb{N}$ définie par $X(\omega)$ est le nombre de P de ω.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$
Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

Exemple 3

Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$,
$P(\omega) = p^i (1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.
$X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $X(\omega)$ est le nombre de P de ω.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$
Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i \in [\![0;\ n]\!]$, $P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$,
$P(\omega) = p^i (1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.
$X : \Omega \to \mathbb{N}$ définie par $X(\omega)$ est le nombre de P de ω.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$
Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i \in [\![0; n]\!]$, $P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
Démonstration : il y a C_n^i suites ω de i P et de $n - i$ F.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$,
$P(\omega) = p^i (1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.
$X : \Omega \to \mathbb{N}$ définie par $X(\omega)$ est le nombre de P de ω.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$
Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i \in [\![0; n]\!]$, $P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
Démonstration : il y a C_n^i suites ω de i P et de $n-i$ F.
Remarque :

$$\sum_{i=0}^{n} P(X = i) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

Variable aléatoire discrète

Fonction de répartition

Variable aléatoire discrète

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est définie par

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Variable aléatoire discrète

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est définie par

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Exemple 1

Variable aléatoire discrète

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est définie par

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Exemple 1

Loi de probabilité de X : $P(X = a) = 1$.

Variable aléatoire discrète

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est définie par

$$F(x) = P\left(X \leq x\right) = \sum_{x_i \leq x} P\left(X = x_i\right)$$

Exemple 1

Loi de probabilité de X : $P\left(X = a\right) = 1$.
Fonction de répartition de X :

Variable aléatoire discrète

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est définie par

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Exemple 1

Loi de probabilité de X : $P(X = a) = 1$.
Fonction de répartition de X :
$\forall x < a,\ F(x) = 0$

Variable aléatoire discrète

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est définie par

$$F(x) = P\left(X \leq x\right) = \sum_{x_i \leq x} P\left(X = x_i\right)$$

Exemple 1

Loi de probabilité de X : $P\left(X = a\right) = 1$.
Fonction de répartition de X :
$\forall x < a,\ F(x) = 0$
$\forall x \geq a,\ F(x) = 1$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X = 0) = \frac{1}{2}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Fonction de répartition de X :

Variable aléatoire discrète

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X = 0) = \frac{1}{2}$

$P(X = 1) = \frac{1}{2}$

Fonction de répartition de X :

$\forall x < 0,\ F(x) = 0$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X=0) = \dfrac{1}{2}$

$P(X=1) = \dfrac{1}{2}$

Fonction de répartition de X :

$\forall x < 0,\ F(x) = 0$

$\forall x,\ 0 \leq x < 1 :\ F(x) = P(X=0) = \frac{1}{2}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X = 0) = \frac{1}{2}$

$P(X = 1) = \frac{1}{2}$

Fonction de répartition de X :

$\forall x < 0,\ F(x) = 0$

$\forall x,\ 0 \leq x < 1 :\ F(x) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$

$\forall x \geq 1,\ F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X=0) = \dfrac{1}{2}$

$P(X=1) = \dfrac{1}{2}$

Fonction de répartition de X :

$\forall x < 0,\ F(x) = 0$

$\forall x,\ 0 \leq x < 1 :\ F(x) = P(X=0) = \frac{1}{2}$

$\forall x \geq 1,\ F(x) = P(X=0) + P(X=1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

Remarque

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P\left(X=0\right)=\dfrac{1}{2}$

$P\left(X=1\right)=\dfrac{1}{2}$

Fonction de répartition de X :

$\forall x<0,\ F(x)=0$

$\forall x,\ 0\leq x<1:\ F(x)=P\left(X=0\right)=\frac{1}{2}$

$\forall x\geq 1,\ F(x)=P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$

Remarque

$F(x)=P\left(X\leq x\right)=P\left(X\in]-\infty,x]\right)=P\left(X\in]-\infty,x]\cap\{0,1\}\right)$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X=0) = \frac{1}{2}$

$P(X=1) = \frac{1}{2}$

Fonction de répartition de X :

$\forall x < 0,\ F(x) = 0$

$\forall x,\ 0 \leq x < 1 :\ F(x) = P(X=0) = \frac{1}{2}$

$\forall x \geq 1,\ F(x) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Remarque

$F(x) = P(X \leq x) = P(X \in]-\infty, x]) = P(X \in]-\infty, x] \cap \{0,1\})$

$F(x) = P(X(\omega) \in]-\infty, x] \cap \{0,1\})$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Variable aléatoire discrète

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

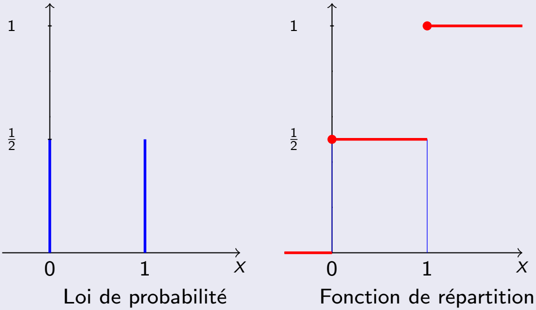
Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Exemple 2



Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
Fonction de répartition de X :

Variable aléatoire discrète

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
Fonction de répartition de X :
$\forall x < 0,\ F(x) = 0$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Fonction de répartition de X :

$\forall x < 0,\ F(x) = 0$

$\forall x,\ 0 \leq x < 1 :\ F(x) = P(X = 0) = C_n^0 p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
Fonction de répartition de X :
$\forall x < 0,\ F(x) = 0$
$\forall x,\ 0 \leq x < 1 :\ F(x) = P(X = 0) = C_n^0 p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$
$\forall x,\ 1 \leq x < 2 :\ F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) =$
$(1-p)^n + C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
Fonction de répartition de X :
$\forall x < 0,\ F(x) = 0$
$\forall x,\ 0 \leq x < 1 :\ F(x) = P\left(X = 0\right) = C_n^0 p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$
$\forall x,\ 1 \leq x < 2 :\ F(x) = P\left(X = 0\right) + P\left(X = 1\right) =$
$(1-p)^n + C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$
$\forall x,\ 2 \leq x < 3 :\ F(x) = P\left(X = 0\right) + P\left(X = 1\right) + P\left(X = 2\right)$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
Fonction de répartition de X :
$\forall x < 0,\ F(x) = 0$
$\forall x,\ 0 \leq x < 1 :\ F(x) = P(X = 0) = C_n^0 p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$
$\forall x,\ 1 \leq x < 2 :\ F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) =$
$(1-p)^n + C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$
$\forall x,\ 2 \leq x < 3 :\ F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
$= (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} + C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2} =$
$(1-p)^n + np(1-p)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
Fonction de répartition de X :
$\forall x < 0,\ F(x) = 0$
$\forall x,\ 0 \leq x < 1 :\ F(x) = P(X = 0) = C_n^0 p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$
$\forall x,\ 1 \leq x < 2 :\ F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) =$
$(1-p)^n + C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$
$\forall x,\ 2 \leq x < 3 :\ F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
$= (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} + C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2} =$
$(1-p)^n + np(1-p)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$
...

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
Fonction de répartition de X :
$\forall x < 0,\ F(x) = 0$
$\forall x,\ 0 \leq x < 1 :\ F(x) = P(X = 0) = C_n^0 p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$
$\forall x,\ 1 \leq x < 2 :\ F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) =$
$(1-p)^n + C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$
$\forall x,\ 2 \leq x < 3 :\ F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
$= (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} + C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2} =$
$(1-p)^n + np(1-p)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$
...

$$\forall x \geq n,\ F(x) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$$

Variable aléatoire discrète

Fonction d'une variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Fonction d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Variable aléatoire discrète

Fonction d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X(\Omega)) = \phi\{x_i,\ i \in I\} = \{y_j,\ j \in J\}$ est fini ou dénombrable.

Variable aléatoire discrète

Fonction d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X(\Omega)) = \phi\{x_i,\ i \in I\} = \{y_j,\ j \in J\}$ est fini ou dénombrable.
On en déduit que $\phi(X)$ est une variable aléatoire discrète.

Variable aléatoire discrète

Fonction d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X(\Omega)) = \phi\{x_i,\ i \in I\} = \{y_j,\ j \in J\}$ est fini ou dénombrable.
On en déduit que $\phi(X)$ est une variable aléatoire discrète.
De même, si $\phi_1 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $\phi_2 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ sont deux applications, $\phi_1(X) + \phi_2(X)$ est une une variable aléatoire discrète.

Variable aléatoire discrète

Fonction d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X(\Omega)) = \phi\{x_i,\ i \in I\} = \{y_j,\ j \in J\}$ est fini ou dénombrable.
On en déduit que $\phi(X)$ est une variable aléatoire discrète.
De même, si $\phi_1 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $\phi_2 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ sont deux applications, $\phi_1(X) + \phi_2(X)$ est une une variable aléatoire discrète.
Loi de probabilité :

Variable aléatoire discrète

Fonction d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X(\Omega)) = \phi\{x_i,\ i \in I\} = \{y_j,\ j \in J\}$ est fini ou dénombrable.
On en déduit que $\phi(X)$ est une variable aléatoire discrète.
De même, si $\phi_1 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $\phi_2 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ sont deux applications, $\phi_1(X) + \phi_2(X)$ est une une variable aléatoire discrète.
Loi de probabilité :

$$P(\phi(X) = y) = \sum_{x_i, \phi(x_i) = y} P(X = x_i)$$

Variable aléatoire discrète

Exemples

Variable aléatoire discrète

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.

Variable aléatoire discrète

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.

Variable aléatoire discrète

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
$Y(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.

Variable aléatoire discrète

M3201
Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
$Y(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.
Loi de probabilité de Y :

Variable aléatoire discrète

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
$Y(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.
Loi de probabilité de Y :

$$P(Y = -1) = P(2X + 1 = -1) = \sum_{x_i, 2x_i + 1 = -1} P(X = x_i) = P(X = -1) = \frac{1}{3}$$

Variable aléatoire discrète

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
$Y(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.
Loi de probabilité de Y :

$$P(Y = -1) = P(2X + 1 = -1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=-1} P(X = x_i) = P(X = -1) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 1) = P(2X + 1 = 1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=1} P(X = x_i) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

Variable aléatoire discrète

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
$Y(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.
Loi de probabilité de Y :

$$P(Y = -1) = P(2X + 1 = -1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=-1} P(X = x_i) = P(X = -1) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 1) = P(2X + 1 = 1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=1} P(X = x_i) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 3) = P(2X + 1 = 3) = \sum_{x_i, 2x_i+1=3} P(X = x_i) = P(X = 1) = \frac{1}{3}$$

Variable aléatoire discrète

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
$Y(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.
Loi de probabilité de Y :

$$P(Y = -1) = P(2X + 1 = -1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=-1} P(X = x_i) = P(X = -1) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 1) = P(2X + 1 = 1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=1} P(X = x_i) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 3) = P(2X + 1 = 3) = \sum_{x_i, 2x_i+1=3} P(X = x_i) = P(X = 1) = \frac{1}{3}$$

Loi de probabilité de Z :

Variable aléatoire discrète

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
$Y(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.
Loi de probabilité de Y :

$$P(Y = -1) = P(2X + 1 = -1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=-1} P(X = x_i) = P(X = -1) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 1) = P(2X + 1 = 1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=1} P(X = x_i) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 3) = P(2X + 1 = 3) = \sum_{x_i, 2x_i+1=3} P(X = x_i) = P(X = 1) = \frac{1}{3}$$

Loi de probabilité de Z :

$$P(Z = 0) = P\left(X^2 = 0\right) = \sum_{x_i, x_i^2=0} P(X = x_i) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

Variable aléatoire discrète

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
$Y(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.
Loi de probabilité de Y :

$$P(Y = -1) = P(2X + 1 = -1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=-1} P(X = x_i) = P(X = -1) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 1) = P(2X + 1 = 1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=1} P(X = x_i) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 3) = P(2X + 1 = 3) = \sum_{x_i, 2x_i+1=3} P(X = x_i) = P(X = 1) = \frac{1}{3}$$

Loi de probabilité de Z :

$$P(Z = 0) = P\left(X^2 = 0\right) = \sum_{x_i, x_i^2=0} P(X = x_i) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

$$P(Z = 1) = P\left(X^2 = 1\right) = \sum_{x_i, x_i^2=1} P(X = x_i) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{2}{3}$$

Variable aléatoire discrète

Espérance

Variable aléatoire discrète

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.

Variable aléatoire discrète

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.
On appelle espérance de X, le nombre, s'il existe, défini par

Variable aléatoire discrète

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.
On appelle espérance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X = x_i)$$

Variable aléatoire discrète

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.
On appelle espérance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X = x_i)$$

Remarques

Variable aléatoire discrète

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.
On appelle espérance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X = x_i)$$

Remarques

i) L'espérance ne dépend que de la loi de probabilité suivie par X. On rencontre donc aussi l'expression : espérance d'une loi de probabilité.

Variable aléatoire discrète

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.
On appelle espérance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X = x_i)$$

Remarques

i) L'espérance ne dépend que de la loi de probabilité suivie par X. On rencontre donc aussi l'expression : espérance d'une loi de probabilité.
ii) Autre expression : valeur moyenne de X.

Variable aléatoire discrète

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.
On appelle espérance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X = x_i)$$

Remarques

i) L'espérance ne dépend que de la loi de probabilité suivie par X. On rencontre donc aussi l'expression : espérance d'une loi de probabilité.
ii) Autre expression : valeur moyenne de X.
iii) Si $X(\Omega)$ est fini alors $E(X)$ existe toujours.

Variable aléatoire discrète

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.
On appelle espérance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X = x_i)$$

Remarques

i) L'espérance ne dépend que de la loi de probabilité suivie par X. On rencontre donc aussi l'expression : espérance d'une loi de probabilité.
ii) Autre expression : valeur moyenne de X.
iii) Si $X(\Omega)$ est fini alors $E(X)$ existe toujours.
Si $X(\Omega)$ est dénombrable alors $E(X)$ existe si et seulement si la série associée est absolument convergente, ce qui garantit qu'on puisse modifier l'ordre des termes.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X :
$P(X = a) = 1$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X :

$P(X = a) = 1$

$$E(X) = aP(X = a) = a$$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X :
$P\left(X=a\right)=1$

$$E\left(X\right)=aP\left(X=a\right)=a$$

Exemple 2

Exemple 1

Loi de probabilité de X :
$P(X = a) = 1$

$$E(X) = aP(X = a) = a$$

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X :
$P(X = a) = 1$

$$E(X) = aP(X = a) = a$$

Exemple 2

Loi de probabilité de X :
$P(X = 0) = \frac{1}{2}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X :

$P(X = a) = 1$

$$E(X) = aP(X = a) = a$$

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X = 0) = \frac{1}{2}$

$P(X = 1) = \frac{1}{2}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X :
$P(X = a) = 1$

$$E(X) = aP(X = a) = a$$

Exemple 2

Loi de probabilité de X :
$P(X = 0) = \frac{1}{2}$
$P(X = 1) = \frac{1}{2}$

$$E(X) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) = 0.\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} iP(X = i) = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np$$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$$E\left(X\right) = \sum_{i=0}^{n} iP\left(X = i\right) = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np$$

Démonstration en annexe.

Variable aléatoire discrète

Propriétés

Variable aléatoire discrète

Propriétés

Soit X une variable aléatoire discrète.

Variable aléatoire discrète

Propriétés

Soit X une variable aléatoire discrète.

i) Soit une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Variable aléatoire discrète

Propriétés

Soit X une variable aléatoire discrète.
i) Soit une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
Si elle existe, $E(\phi(X)) = \displaystyle\sum_{x_i \in X(\Omega)} \phi(x_i) P(X = x_i)$

Variable aléatoire discrète

Propriétés

Soit X une variable aléatoire discrète.

i) Soit une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Si elle existe, $E(\phi(X)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \phi(x_i) P(X = x_i)$

ii) Si elle existe, $E(aX + b) = aE(X) + b$

Variable aléatoire discrète

Propriétés

Soit X une variable aléatoire discrète.

i) Soit une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Si elle existe, $E(\phi(X)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \phi(x_i) P(X = x_i)$

ii) Si elle existe, $E(aX + b) = aE(X) + b$

iii) Soit deux applications $\phi_1 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $\phi_2 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Variable aléatoire discrète

Propriétés

Soit X une variable aléatoire discrète.

i) Soit une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Si elle existe, $E(\phi(X)) = \displaystyle\sum_{x_i \in X(\Omega)} \phi(x_i) P(X = x_i)$

ii) Si elle existe, $E(aX + b) = aE(X) + b$

iii) Soit deux applications $\phi_1 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $\phi_2 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Si elle existe, $E(\phi_1(X) + \phi_2(X)) = E(\phi_1(X)) + E(\phi_2(X))$

Variable aléatoire discrète

Variance

Variable aléatoire discrète

Variance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$ qui admet une espérance.

Variable aléatoire discrète

Variance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$ qui admet une espérance.
On appelle variance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Variable aléatoire discrète

Variance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ qui admet une espérance.
On appelle variance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Si $V(X)$ existe, on applelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Variable aléatoire discrète

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Variance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ qui admet une espérance.
On appelle variance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Si $V(X)$ existe, on applelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarques

Variable aléatoire discrète

Variance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ qui admet une espérance.
On appelle variance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Si $V(X)$ existe, on applelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarques

i) La variance mesure la dispersion autour de l'espérance.

Variable aléatoire discrète

Variance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ qui admet une espérance.
On appelle variance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Si $V(X)$ existe, on applelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarques

i) La variance mesure la dispersion autour de l'espérance.
ii) Pour tous réels a et b, si elle existe $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Variable aléatoire discrète

Variance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ qui admet une espérance.
On appelle variance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Si $V(X)$ existe, on applelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarques

i) La variance mesure la dispersion autour de l'espérance.
ii) Pour tous réels a et b, si elle existe $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
iii) Si elle existe, $V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X : $P(X = a) = 1$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X : $P(X = a) = 1$.
$E(X) = a$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X : $P(X = a) = 1$.
$E(X) = a$
$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E\left((X - a)^2\right) = (a - a)^2 P(X = a) = 0$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X : $P(X = a) = 1$.
$E(X) = a$
$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E\left((X - a)^2\right) = (a-a)^2 P(X = a) = 0$
ou $V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = a^2 P(X = a) - a^2 = 0$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

Variable aléatoire discrète

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X=0)=\frac{1}{2}$

$P(X=1)=\frac{1}{2}$

$E(X)=\frac{1}{2}$

$V(X)=E\left(\left(X-\frac{1}{2}\right)^2\right)=\left(0-\frac{1}{2}\right)^2 P(X=0)+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 P(X=1)=\frac{1}{4}$

Variable aléatoire discrète

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X=0)=\dfrac{1}{2}$

$P(X=1)=\dfrac{1}{2}$

$E(X)=\dfrac{1}{2}$

$V(X)=E\left(\left(X-\frac{1}{2}\right)^2\right)=\left(0-\frac{1}{2}\right)^2P(X=0)+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2P(X=1)=\frac{1}{4}$

ou $V(X)=E\left(X^2\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0^2.P(X=0)+1^2.P(X=1)-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
$E\left(X\right) = np$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
$E(X) = np$
$V(X) = np(1-p) = npq$ en posant $q = 1 - p$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
$E\left(X\right) = np$
$V\left(X\right) = np(1-p) = npq$ en posant $q = 1 - p$.
Démonstration en annexe.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi uniforme

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi uniforme

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme $\mathcal{U}\left(\frac{1}{n}\right)$ sur $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ si

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi uniforme

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme $\mathcal{U}\left(\frac{1}{n}\right)$ sur $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ si

α) $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi uniforme

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme $\mathcal{U}\left(\frac{1}{n}\right)$ sur $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ si

α) $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

β) $\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ P\left(X = x_i\right) = \dfrac{1}{n}$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi uniforme

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme $\mathcal{U}\left(\frac{1}{n}\right)$ sur $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ si

α) $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

β) $\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ P\left(X = x_i\right) = \dfrac{1}{n}$

$$E\left(X\right) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi uniforme

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme $\mathcal{U}\left(\frac{1}{n}\right)$ sur $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ si

α) $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

β) $\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ P\left(X = x_i\right) = \dfrac{1}{n}$

$$E\left(X\right) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$V\left(X\right) = \frac{(x_1 - E(X))^2 + (x_2 - E(X))^2 + \cdots + (x_n - E(X))^2}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} - \left(E\left(X\right)\right)^2$$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

M3201 Probabilités et statistique

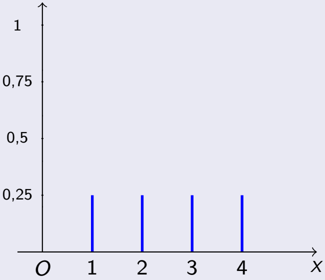
Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi uniforme

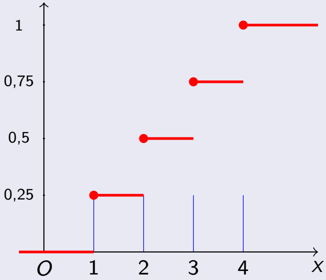
Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi uniforme

$$\boxed{X \sim \mathcal{U}\left(\tfrac{1}{4}\right) \text{ sur } \{1,2,3,4\}}$$



Loi de probabilité



Fonction de répartition

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Bernoulli

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0, 1[$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0, 1[$.

Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$ de paramètre p si

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0, 1[$.

Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$ de paramètre p si

α) $X(\Omega) = \{0, 1\}$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0, 1[$.
Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$ de paramètre p si
α) $X(\Omega) = \{0, 1\}$
β) $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p = q$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0,1[$.
Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ de paramètre p si
$\alpha)$ $X(\Omega) = \{0,1\}$
$\beta)$ $P(X=1) = p$, $P(X=0) = 1-p = q$
$E(X) = p$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0, 1[$.
Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$ de paramètre p si
$\alpha)$ $X(\Omega) = \{0, 1\}$
$\beta)$ $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p = q$
$E(X) = p$
$V(X) = pq$

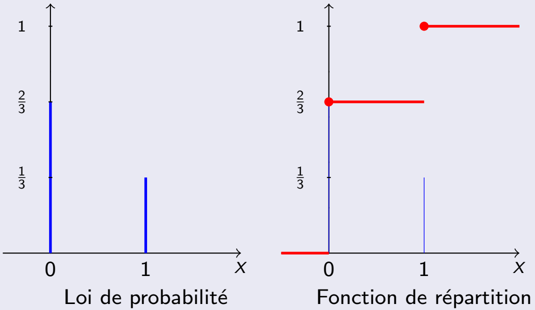
Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Bernoulli

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Bernoulli

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}\left(1, \frac{1}{3}\right)}$$



Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi binomiale

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi binomiale

Soit $p \in]0, 1[$ et n un entier naturel, $n \geq 1$.

Loi binomiale

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier naturel, $n \geq 1$.
Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n et p sur $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ si

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi binomiale

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier naturel, $n \geq 1$.
Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n et p sur $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ si
α) $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi binomiale

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier naturel, $n \geq 1$.
Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n et p sur $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ si
$\alpha)$ $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$
$\beta)$ $\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi binomiale

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier naturel, $n \geq 1$.
Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n et p sur $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ si

α) $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

β) $\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$E\left(X\right) = np$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

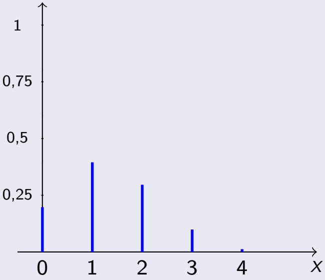
Loi binomiale

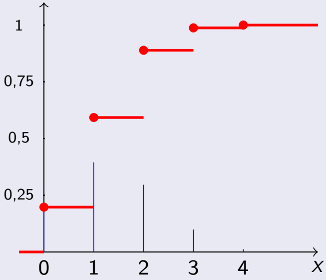
Soit $p \in]0,1[$ et n un entier naturel, $n \geq 1$.
Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n et p sur $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ si
$\alpha)$ $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$
$\beta)$ $\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
$E(X) = np$
$V(X) = np(1-p) = npq$ en posant $q = 1 - p$

Loi binomiale

Loi binomiale

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}\left(4, \tfrac{1}{3}\right)}$$





Loi hypergéométrique

Loi hypergéométrique

Soit N, n et N_1 trois entiers, $N \geq 2$, $1 \leq n$, $1 \leq N_1 < N$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique

Soit N, n et N_1 trois entiers, $N \geq 2$, $1 \leq n$, $1 \leq N_1 < N$. On note $p = \dfrac{N_1}{N}$.

Loi hypergéométrique

Soit N, n et N_1 trois entiers, $N \geq 2$, $1 \leq n$, $1 \leq N_1 < N$. On note $p = \dfrac{N_1}{N}$.

Une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ de paramètres N, n et p sur $[\![0, n]\!]$ si

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique

Soit N, n et N_1 trois entiers, $N \geq 2$, $1 \leq n$, $1 \leq N_1 < N$. On note $p = \dfrac{N_1}{N}$.
Une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ de paramètres N, n et p sur $[\![0,\ n]\!]$ si
α) $X(\Omega) \subset [\![0,\ n]\!]$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique

Soit N, n et N_1 trois entiers, $N \geq 2$, $1 \leq n$, $1 \leq N_1 < N$. On note $p = \dfrac{N_1}{N}$.
Une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ de paramètres N, n et p sur $[\![0, n]\!]$ si
α) $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$

β) $\forall i \in X(\Omega)$, $P(X = i) = \dfrac{C_{N_1}^{i} C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n}$ avec $N_1 = Np$ et $N_2 = N - N_1$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique

Soit N, n et N_1 trois entiers, $N \geq 2$, $1 \leq n$, $1 \leq N_1 < N$. On note $p = \dfrac{N_1}{N}$.

Une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ de paramètres N, n et p sur $[\![0,\ n]\!]$ si

α) $X(\Omega) \subset [\![0,\ n]\!]$

β) $\forall i \in X(\Omega)$, $P\left(X = i\right) = \dfrac{C_{N_1}^{i} C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n}$ avec $N_1 = Np$ et $N_2 = N - N_1$.

$E\left(X\right) = np$

Loi hypergéométrique

Soit N, n et N_1 trois entiers, $N \geq 2$, $1 \leq n$, $1 \leq N_1 < N$. On note $p = \dfrac{N_1}{N}$.

Une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ de paramètres N, n et p sur $[\![0, n]\!]$ si

α) $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$

β) $\forall i \in X(\Omega)$, $P(X = i) = \dfrac{C_{N_1}^{i} C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n}$ avec $N_1 = Np$ et $N_2 = N - N_1$.

$E(X) = np$

$V(X) = \dfrac{N-n}{N-1} np(1-p) = \dfrac{N-n}{N-1} npq$ en posant $q = 1 - p$.

Loi hypergéométrique : exemple

Loi hypergéométrique : exemple

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique : exemple

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.
On tire n boules sans remise.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique : exemple

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.
On tire n boules sans remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

Loi hypergéométrique : exemple

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.
On tire n boules sans remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
Remarque : $X(\Omega) = [\![max\,(0, n - N_2)\,, min\,(n, N_1)]\!]$.

Loi hypergéométrique : exemple

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.
On tire n boules sans remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
Remarque : $X(\Omega) = [\![max\,(0, n - N_2)\,, min\,(n, N_1)]\!]$.
En effet, le nombre i de boules blanches tirées vérifie $0 \leq i \leq N_1$ et $0 \leq n - i \leq N_2$, soit $n - N_2 \leq i \leq n$.

Loi hypergéométrique : exemple

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.
On tire n boules sans remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
Remarque : $X(\Omega) = [\![max\left(0, n - N_2\right), min\left(n, N_1\right)]\!]$.
En effet, le nombre i de boules blanches tirées vérifie $0 \leq i \leq N_1$ et $0 \leq n - i \leq N_2$, soit $n - N_2 \leq i \leq n$.
En prenant $N_1 = 5$, $N_2 = 10$ et $n = 3$, on a $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.

Loi hypergéométrique : exemple

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.
On tire n boules sans remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
Remarque : $X(\Omega) = [\![max\,(0, n - N_2)\,, min\,(n, N_1)]\!]$.
En effet, le nombre i de boules blanches tirées vérifie $0 \leq i \leq N_1$ et $0 \leq n - i \leq N_2$, soit $n - N_2 \leq i \leq n$.
En prenant $N_1 = 5$, $N_2 = 10$ et $n = 3$, on a $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.

$$P\,(X = 2) = \frac{C_5^2\, C_{10}^{3-2}}{C_{15}^3} \approx 0,2198$$

Loi hypergéométrique : exemple

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.
On tire n boules sans remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
Remarque : $X(\Omega) = [\![max\,(0, n - N_2)\,, min\,(n, N_1)]\!]$.
En effet, le nombre i de boules blanches tirées vérifie $0 \leq i \leq N_1$ et $0 \leq n - i \leq N_2$, soit $n - N_2 \leq i \leq n$.
En prenant $N_1 = 5$, $N_2 = 10$ et $n = 3$, on a $X(\Omega) = [\![0,\ 3]\!]$.
$P\,(X = 2) = \dfrac{C_5^2\, C_{10}^{3-2}}{C_{15}^3} \approx 0,2198$
Avec $N_1 = 13$, $N_2 = 2$ et $n = 3$, on a $X(\Omega) = [\![1,\ 3]\!]$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

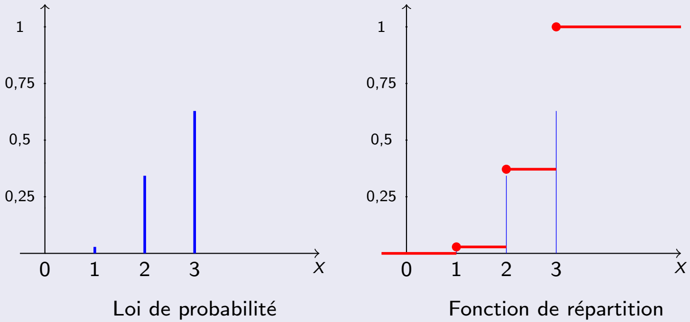
M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi hypergéométrique : $X \sim \mathcal{H}\left(15, 3, \frac{13}{15}\right)$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique : $X \sim \mathcal{H}\left(15, 3, \frac{13}{15}\right)$



On tire sans remise 3 boules dans une urne contenant 13 boules blanches et 2 boules noires. X est le nombre de boules blanches tirées.

Loi hypergéométrique : remarques

Loi hypergéométrique : remarques

1. L'espérance de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ est indépendante de N et est la même que celle de la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Loi hypergéométrique : remarques

1. L'espérance de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ est indépendante de N et est la même que celle de la loi $\mathcal{B}(n, p)$.
2. La variance $\dfrac{N-n}{N-1}npq$ de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ tend vers la variance npq de la loi $\mathcal{B}(n, p)$ quand $N \to +\infty$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique : remarques

1. L'espérance de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ est indépendante de N et est la même que celle de la loi $\mathcal{B}(n, p)$.
2. La variance $\dfrac{N-n}{N-1}npq$ de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ tend vers la variance npq de la loi $\mathcal{B}(n, p)$ quand $N \to +\infty$.
3. $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{C_{N_1}^{i} C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n} = C_n^i p^i q^{n-i}$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique : remarques

1. L'espérance de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ est indépendante de N et est la même que celle de la loi $\mathcal{B}(n, p)$.
2. La variance $\dfrac{N-n}{N-1}npq$ de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ tend vers la variance npq de la loi $\mathcal{B}(n, p)$ quand $N \to +\infty$.
3. $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{C_{N_1}^{i} C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n} = C_n^i p^i q^{n-i}$.
   La loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ tend vers la loi $\mathcal{B}(n, p)$ quand $N \to +\infty$.

Loi hypergéométrique : remarques

1. L'espérance de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ est indépendante de N et est la même que celle de la loi $\mathcal{B}(n, p)$.
2. La variance $\dfrac{N-n}{N-1}npq$ de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ tend vers la variance npq de la loi $\mathcal{B}(n, p)$ quand $N \to +\infty$.
3. $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{C_{N_1}^{i} C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n} = C_n^i p^i q^{n-i}$.
   La loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ tend vers la loi $\mathcal{B}(n, p)$ quand $N \to +\infty$.
   L'approximation est satisfaisante si $\dfrac{n}{N} < 0,05$.

Loi de Poisson

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$.

Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ si

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$.
Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ si
α) $X(\Omega) = \mathbb{N}$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$.
Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ si
$\alpha)$ $X(\Omega) = \mathbb{N}$
$\beta)$ $\forall i \geq 0,\ P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$.
Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ si
α) $X(\Omega) = \mathbb{N}$
β) $\forall i \geq 0, \; P(X = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$
$E(X) = \lambda$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$.
Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ si
$\alpha)$ $X(\Omega) = \mathbb{N}$
$\beta)$ $\forall i \geq 0,\ P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$
$E(X) = \lambda$
$V(X) = \lambda$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$.

Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ si

α) $X(\Omega) = \mathbb{N}$

β) $\forall i \geq 0,\ P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$

$E(X) = \lambda$

$V(X) = \lambda$

Siméon Denis Poisson (1781-1840) : mathématicien français.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Pour n et i grands et p petit, le calcul de $C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ est délicat.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Pour n et i grands et p petit, le calcul de $C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ est délicat.
On va chercher une approximation de en se plaçant dans le cas où lorsque n tend vers $+\infty$, p tend vers 0 et l'espérance np de la loi binomiale tend vers une constante λ.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Pour n et i grands et p petit, le calcul de $C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ est délicat.
On va chercher une approximation de en se plaçant dans le cas où lorsque n tend vers $+\infty$, p tend vers 0 et l'espérance np de la loi binomiale tend vers une constante λ.
Démonstration en annexe.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On obtient alors $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!}$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On obtient alors $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!}$.
On dit alors que la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ tend vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On obtient alors $\lim_{n \to +\infty} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$.
On dit alors que la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ tend vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
Ce résultat permet de remplacer numériquement la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ lorsque n est grand, p petit et np de l'ordre de quelques unités.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On obtient alors $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!}$.
On dit alors que la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ tend vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
Ce résultat permet de remplacer numériquement la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ lorsque n est grand, p petit et np de l'ordre de quelques unités.
On utilise numériquement l'approximation de Poisson dans les conditions suivantes :

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On obtient alors $\lim_{n \to +\infty} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$.
On dit alors que la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ tend vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
Ce résultat permet de remplacer numériquement la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ lorsque n est grand, p petit et np de l'ordre de quelques unités.
On utilise numériquement l'approximation de Poisson dans les conditions suivantes :
$n \geq 30$, $p \leq 0,1$, $np \leq 10$, k petit devant n (événements rares).

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

$\mathcal{B}(50,\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

$\mathcal{B}(50,\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \approx e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}$$

Approximation d'une loi par une autre

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

$\mathcal{B}(50,\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \approx e^{-np}\frac{(np)^i}{i!}$$

$$C_{50}^i 0,05^i (1-0,05)^{50-i} \approx e^{-2,5}\frac{2,5^i}{i!}$$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

$\mathcal{B}(50,\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \approx e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}$$

$$C_{50}^i 0,05^i (1-0,05)^{50-i} \approx e^{-2,5} \frac{2,5^i}{i!}$$

$$C_{50}^3 0,05^3 (1-0,05)^{50-3} \approx 0,2199$$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

$\mathcal{B}(50,\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \approx e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}$$

$$C_{50}^i 0,05^i (1-0,05)^{50-i} \approx e^{-2,5} \frac{2,5^i}{i!}$$

$$C_{50}^3 0,05^3 (1-0,05)^{50-3} \approx 0,2199$$

$$e^{-2,5} \frac{2,5^3}{3!} \approx 0,2138$$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

Approximation d'une loi par une autre

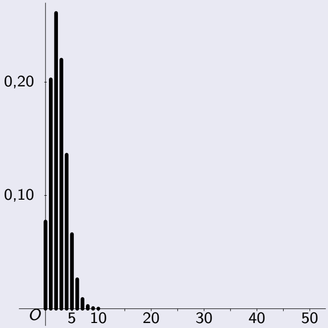
Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

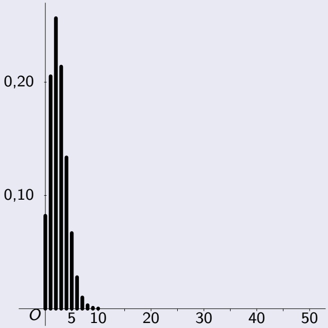
$\mathcal{B}(50,\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

$\mathcal{B}(50, 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$





Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Loi conjointe

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Loi conjointe

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes.

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Loi conjointe

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes.

La loi conjointe de X et de Y, ou loi du couple ou du vecteur (X, Y) est la donnée de

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi conjointe

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes.
La loi conjointe de X et de Y, ou loi du couple ou du vecteur (X, Y) est la donnée de
$\alpha)$ $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Loi conjointe

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes.
La loi conjointe de X et de Y, ou loi du couple ou du vecteur (X, Y) est la donnée de
$\alpha)$ $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$
$\beta)$ $\forall i \in I, j \in J$ $p_{ij} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Loi conjointe

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes.
La loi conjointe de X et de Y, ou loi du couple ou du vecteur (X, Y) est la donnée de
$\alpha)$ $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$
$\beta)$ $\forall i \in I,\ j \in J\ p_{ij} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$

Remarques

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Loi conjointe

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes.
La loi conjointe de X et de Y, ou loi du couple ou du vecteur (X, Y) est la donnée de
$\alpha)$ $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$
$\beta)$ $\forall i \in I,\ j \in J\ p_{ij} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$

Remarques

$$\sum_{i \in I, j \in J} p_{ij} = 1$$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Loi conjointe

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes.
La loi conjointe de X et de Y, ou loi du couple ou du vecteur (X, Y) est la donnée de
$\alpha)$ $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j, \ j \in J\}$
$\beta)$ $\forall i \in I, j \in J \ p_{ij} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$

Remarques

$$\sum_{i \in I, j \in J} p_{ij} = 1$$

$\forall A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = \sum_{x_i \in A, y_j \in B} P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

Lois marginales

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Lois marginales

Les lois marginales de X et de Y sont respectivement données par :

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Lois marginales

Les lois marginales de X et de Y sont respectivement données par :
α) $\forall i \in I$,

$$P(X = x_i) = p_{i.} = \sum_{j \in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j \in J} p_{ij}$$

Lois marginales

Les lois marginales de X et de Y sont respectivement données par :

α) $\forall i \in I$,

$$P(X = x_i) = p_{i.} = \sum_{j \in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j \in J} p_{ij}$$

β) $\forall j \in J$,

$$P(Y = y_j) = p_{.j} = \sum_{i \in I} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{i \in I} p_{ij}$$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.

Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$ puis un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$ puis un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.

Exemple

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$ puis un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$ puis un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$ puis un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$
$Y(\Omega) = \{1,2\}$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2

L'équiprobabilité sur Ω donne :

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2

L'équiprobabilité sur Ω donne :

$p_{11} = P((X=1)\cap(Y=1)) = P(1,1) = \frac{1}{6}$,

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2

L'équiprobabilité sur Ω donne :

$p_{11} = P((X=1)\cap(Y=1)) = P(1,1) = \frac{1}{6}$,

$p_{12} = P((X=1)\cap(Y=2)) = P(1,2) = \frac{1}{6}$

Exemple

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2

L'équiprobabilité sur Ω donne :

$p_{11} = P((X=1)\cap(Y=1)) = P(1,1) = \frac{1}{6}$,

$p_{12} = P((X=1)\cap(Y=2)) = P(1,2) = \frac{1}{6}$

...

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Loi conjointe et lois marginales

Exemple

Loi conjointe et lois marginales

X/Y	1	2	$p_{i.}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$p_{.j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Lois conditionnelles

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Lois conditionnelles

Les lois conditionnelles de X par rapport Y et de Y par rapport X sont respectivement données par :

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Lois conditionnelles

Les lois conditionnelles de X par rapport Y et de Y par rapport X sont respectivement données par :

α) $\forall i \in I$,

$$P\left(X = x_i / Y = y_j\right) = \frac{P\left(\left(X = x_i\right) \cap \left(Y = y_j\right)\right)}{P\left(Y = y_j\right)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

Lois conditionnelles

Les lois conditionnelles de X par rapport Y et de Y par rapport X sont respectivement données par :

α) $\forall i \in I$,

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P((X = x_i) \cap (Y = y_j))}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

β) $\forall j \in J$,

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P((X = x_i) \cap (Y = y_j))}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

$$P\left(X = 1/Y = 1\right) = \frac{p_{11}}{p_{.1}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

$$P\left(X = 1/Y = 1\right) = \frac{p_{11}}{p_{.1}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P\left(X = 2/Y = 1\right) = \frac{p_{21}}{p_{.1}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

$$P\left(X=1/Y=1\right)=\frac{p_{11}}{p_{.1}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$P\left(X=2/Y=1\right)=\frac{p_{21}}{p_{.1}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$P\left(X=3/Y=1\right)=\frac{p_{31}}{p_{.1}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).
La loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est la donnée de

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).

La loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est la donnée de

α) $X_1(\Omega)$, $X_2(\Omega)$, ..., $X_n(\Omega)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).
La loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est la donnée de
α) $X_1(\Omega)$, $X_2(\Omega)$, ..., $X_n(\Omega)$
β) $P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$
$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).
La loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est la donnée de
α) $X_1(\Omega)$, $X_2(\Omega)$, ..., $X_n(\Omega)$
β) $P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$
$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$

Remarque

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).

La loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est la donnée de

α) $X_1(\Omega)$, $X_2(\Omega)$, ..., $X_n(\Omega)$

β) $P\left((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\right)$
$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$

Remarque

$$\sum_{x_i \in X_i(\Omega)} P\left((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\right) = 1$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Lois marginales, lois conditionnelles

Lois marginales, lois conditionnelles

On généralise les définitions des lois marginales et conditionnelles d'un couple au cas d'un vecteur $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.
$\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$
Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:
$X_1(\Omega) = \{1, 2, 3\}$
$X_2(\Omega) = \{1, 2\}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

$X_2(\Omega) = \{1, 2\}$

$X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

$X_2(\Omega) = \{1, 2\}$

$X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$

$X_2(\Omega) = \{1,2\}$

$X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$

$X_2(\Omega) = \{1,2\}$

$X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = \frac{1}{6}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$

$X_2(\Omega) = \{1,2\}$

$X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$

$X_2(\Omega) = \{1,2\}$

$X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$

$X_2(\Omega) = \{1,2\}$

$X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)) = 0$

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$

$X_2(\Omega) = \{1,2\}$

$X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)) = 0$

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$

$X_2(\Omega) = \{1,2\}$

$X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)) = 0$

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$

$X_2(\Omega) = \{1,2\}$

$X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)) = 0$

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)\right) = \frac{1}{6}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)\right) = \frac{1}{6}$
$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)\right) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)\right) = \frac{1}{6}$
$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)\right) = 0$
$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)\right) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)\right) = \frac{1}{6}$
$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)\right) = 0$
$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)\right) = 0$
$P\left((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)\right) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = 0$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Exemple

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = 0$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$
$P((X = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Exemple

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = 0$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$
$P((X = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = \frac{1}{6}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = 0$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$
$P((X = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Exemple

$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)\right) = \frac{1}{6}$
$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)\right) = 0$
$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)\right) = 0$
$P\left((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)\right) = 0$
$P\left((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)\right) = \frac{1}{6}$
$P\left((X = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)\right) = 0$
$P\left((X_1 = 3) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)\right) = \frac{1}{6}$
$P\left((X_1 = 3) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)\right) = 0$
$P\left((X_1 = 3) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)\right) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Fonction d'un vecteur aléatoire

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Fonction d'un vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Fonction d'un vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Fonction d'un vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).
Soit $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Fonction d'un vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).
Soit $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application.
$\phi(X)$ est une variables aléatoire discrète sur Ω.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Fonction d'un vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).

Soit $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application.

$\phi(X)$ est une variables aléatoire discrète sur Ω.

La loi de probabilité de $\phi(X)$ est la donnée de

Fonction d'un vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).

Soit $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application.

$\phi(X)$ est une variables aléatoire discrète sur Ω.

La loi de probabilité de $\phi(X)$ est la donnée de

$\alpha)$ $\phi(X)(\Omega) = \phi\left(X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)\right)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Fonction d'un vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).

Soit $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application.

$\phi(X)$ est une variables aléatoire discrète sur Ω.

La **loi de probabilité** de $\phi(X)$ est la donnée de

$\alpha)$ $\phi(X)(\Omega) = \phi(X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega))$

$\beta)$ $P(\phi(X) = x) = P(\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) = x)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Fonction d'un vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).
Soit $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application.
$\phi(X)$ est une variables aléatoire discrète sur Ω.
La loi de probabilité de $\phi(X)$ est la donnée de
$\alpha)$ $\phi(X)(\Omega) = \phi(X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega))$
$\beta)$ $P(\phi(X) = x) = P(\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) = x) = \displaystyle\sum_{x_i \in X_i(\Omega),\, \phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Cas particuliers

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Cas particuliers

$$\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Cas particuliers

$$\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$
$$\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) = X_1 X_2 \cdots X_n$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ $Y(\Omega) = \{1,2\}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ $Y(\Omega) = \{1,2\}$
Loi de probabilité de $S = X + Y$ (ici $\phi(X,Y) = X + Y$)

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$
$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ $Y(\Omega) = \{1, 2\}$
Loi de probabilité de $S = X + Y$ (ici $\phi(X, Y) = X + Y$)
$S(\Omega) = \{2, 3, 4, 5\}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ $Y(\Omega) = \{1,2\}$
Loi de probabilité de $S = X + Y$ (ici $\phi(X,Y) = X + Y$)
$S(\Omega) = \{2,3,4,5\}$

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2
$S(\omega)$	2	3	3	4	4	5

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ $Y(\Omega) = \{1,2\}$
Loi de probabilité de $S = X + Y$ (ici $\phi(X,Y) = X + Y$)
$S(\Omega) = \{2,3,4,5\}$

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2
$S(\omega)$	2	3	3	4	4	5

L'équiprobabilité sur Ω donne :

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ $Y(\Omega) = \{1,2\}$
Loi de probabilité de $S = X + Y$ (ici $\phi(X,Y) = X + Y$)
$S(\Omega) = \{2,3,4,5\}$

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2
$S(\omega)$	2	3	3	4	4	5

L'équiprobabilité sur Ω donne :
$P(S = 2) = \dfrac{1}{6}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ $Y(\Omega) = \{1,2\}$
Loi de probabilité de $S = X + Y$ (ici $\phi(X,Y) = X + Y$)
$S(\Omega) = \{2,3,4,5\}$

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2
$S(\omega)$	2	3	3	4	4	5

L'équiprobabilité sur Ω donne :
$P(S=2) = \frac{1}{6}$; $P(S=3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ $Y(\Omega) = \{1,2\}$
Loi de probabilité de $S = X + Y$ (ici $\phi(X,Y) = X + Y$)
$S(\Omega) = \{2,3,4,5\}$

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2
$S(\omega)$	2	3	3	4	4	5

L'équiprobabilité sur Ω donne :
$P(S=2) = \frac{1}{6}$; $P(S=3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;
$P(S=4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ $Y(\Omega) = \{1,2\}$
Loi de probabilité de $S = X + Y$ (ici $\phi(X,Y) = X + Y$)
$S(\Omega) = \{2,3,4,5\}$

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2
$S(\omega)$	2	3	3	4	4	5

L'équiprobabilité sur Ω donne :
$P(S=2) = \frac{1}{6}$; $P(S=3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;
$P(S=4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(S=5) = \frac{1}{6}$

Indépendance

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

X et Y sont indépendantes si

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
X et Y sont indépendantes si $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
X et Y sont indépendantes si $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
$P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = P\left(X = x_i\right) P\left(Y = y_j\right)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
X et Y sont **indépendantes** si $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) P(Y = y_j)$

Exemple

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
X et Y sont indépendantes si $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
$P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = P\left(X = x_i\right) P\left(Y = y_j\right)$

Exemple

Loi conjointe et lois marginales

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
X et Y sont indépendantes si $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i)\, P(Y = y_j)$

Exemple

Loi conjointe et lois marginales

X/Y	1	2	$p_{i.}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$p_{.j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
X et Y sont indépendantes si $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) P(Y = y_j)$

Exemple

Loi conjointe et lois marginales

X/Y	1	2	$p_{i.}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$p_{.j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\},\ p_{ij} = p_{i.} p_{.j} = \frac{1}{3} . \frac{1}{2}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
X et Y sont indépendantes si $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
$P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = P\left(X = x_i\right) P\left(Y = y_j\right)$

Exemple

Loi conjointe et lois marginales

X/Y	1	2	$p_{i.}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$p_{.j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$\forall (i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2\},\ p_{ij} = p_{i.}p_{.j} = \dfrac{1}{3}.\frac{1}{2}$ X et Y sont indépendantes.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

X_1, X_2 … X_n sont indépendantes si

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

$X_1, X_2 \dots X_n$ sont indépendantes si
$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$,

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

X_1, X_2 ... X_n sont indépendantes si
$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$,
$P\left((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\right)$
$= P(X_1 = x_1)\, P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

α) Si X et Y sont indépendantes alors pour tous A, $B \subset \mathbb{R}$
$P\left(\left(X \in A\right) \cap \left(Y \in B\right)\right) = P\left(X \in A\right) P\left(Y \in B\right)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

α) Si X et Y sont indépendantes alors pour tous A, $B \subset \mathbb{R}$
$P\left((X \in A) \cap (Y \in B)\right) = P\left(X \in A\right) P\left(Y \in B\right)$
β) Si X_1, X_2 … X_n sont indépendantes

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

α) Si X et Y sont indépendantes alors pour tous A, $B \subset \mathbb{R}$
$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$
β) Si X_1, X_2 ... X_n sont indépendantes alors pour tous A_1, A_2, ..., $A_n \in \mathbb{R}$,

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Propriétés

α) Si X et Y sont indépendantes alors pour tous $A,\ B \subset \mathbb{R}$
$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$
β) Si $X_1,\ X_2\ \ldots\ X_n$ sont indépendantes alors pour tous $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n \in \mathbb{R}$,
$P((X_1 \in A_1) \cap (X_2 \in A_2) \cap \cdots \cap (X_n \in A_n))$
$= P(X_1 \in A_1)\, P(X_2 \in A_2) \cdots P(X_n \in A_n)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

α) Si X et Y sont indépendantes alors pour tous A, $B \subset \mathbb{R}$
$P\left((X \in A) \cap (Y \in B)\right) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$
β) Si X_1, X_2 ... X_n sont indépendantes alors pour tous A_1, A_2, ..., $A_n \in \mathbb{R}$,
$P\left((X_1 \in A_1) \cap (X_2 \in A_2) \cap \cdots \cap (X_n \in A_n)\right)$
$= P(X_1 \in A_1)\, P(X_2 \in A_2) \cdots P(X_n \in A_n)$

Remarques

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

α) Si X et Y sont indépendantes alors pour tous A, $B \subset \mathbb{R}$
$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$
β) Si X_1, X_2 ... X_n sont indépendantes alors pour tous A_1, A_2, ..., $A_n \in \mathbb{R}$,
$P((X_1 \in A_1) \cap (X_2 \in A_2) \cap \cdots \cap (X_n \in A_n))$
$= P(X_1 \in A_1)\, P(X_2 \in A_2) \cdots P(X_n \in A_n)$

Remarques

Pour $n \geq 3$, l'indépendance entraîne l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

α) Si X et Y sont indépendantes alors pour tous A, $B \subset \mathbb{R}$
$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$
β) Si X_1, X_2 ... X_n sont indépendantes alors pour tous A_1, A_2, ..., $A_n \in \mathbb{R}$,
$P((X_1 \in A_1) \cap (X_2 \in A_2) \cap \cdots \cap (X_n \in A_n))$
$= P(X_1 \in A_1)\, P(X_2 \in A_2) \cdots P(X_n \in A_n)$

Remarques

Pour $n \geq 3$, l'indépendance entraîne l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse.
Les variables aléatoires associées à des expériences aléatoires indépendantes sont indépendantes.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

Exemple

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

Exemple

En reprenant $S = X + Y$, on obtient : $E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

Exemple

En reprenant $S = X + Y$, on obtient : $E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
$E(X) = 1.P(X=1) + 2.P(X=2) + 3.P(X=3) = 1.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3} + 3.\frac{1}{3} = 2$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

Exemple

En reprenant $S = X + Y$, on obtient : $E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
$E(X) = 1.P(X=1) + 2.P(X=2) + 3.P(X=3) = 1.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3} + 3.\frac{1}{3} = 2$
$E(Y) = 1.P(Y=1) + 2.P(Y=2) = 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

Exemple

En reprenant $S = X + Y$, on obtient : $E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
$E(X) = 1.P(X=1) + 2.P(X=2) + 3.P(X=3) = 1.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3} + 3.\frac{1}{3} = 2$
$E(Y) = 1.P(Y=1) + 2.P(Y=2) = 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
On en déduit $E(S) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration dans le cas fini

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration dans le cas fini

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration dans le cas fini

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(X+Y) = \sum_{(i,j) \in I \times J} (x_i + y_j) P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Démonstration dans le cas fini

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(X+Y) = \sum_{(i,j)\in I\times J} (x_i + y_j) P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{(i,j)\in I\times J} y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration dans le cas fini

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(X+Y) = \sum_{(i,j)\in I\times J} (x_i + y_j) P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{(i,j)\in I\times J} y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

Démonstration dans le cas fini

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(X+Y) = \sum_{(i,j)\in I\times J} (x_i + y_j) P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{(i,j)\in I\times J} y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration dans le cas fini

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(X+Y) = \sum_{(i,j)\in I\times J} (x_i + y_j) P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{(i,j)\in I\times J} y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i) + \sum_{j=1}^{n} y_j P(Y = y_j)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Démonstration dans le cas fini

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(X+Y) = \sum_{(i,j)\in I\times J} (x_i + y_j) P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{(i,j)\in I\times J} y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P\left(X = x_i\right) + \sum_{j=1}^{n} y_j P\left(Y = y_j\right)$$

$$= E(X) + E(Y)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes indépendantes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes indépendantes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1X_2\cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\dots E(X_n)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes indépendantes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1X_2\cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\dots E(X_n)$$

Exemple

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes indépendantes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\dots E(X_n)$$

Exemple

En reprenant le même exemple, X et Y sont indépendantes

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes indépendantes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1X_2\cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\ldots E(X_n)$$

Exemple

En reprenant le même exemple, X et Y sont indépendantes et donc $E(XY) = E(X)E(Y) = 2.\frac{3}{2} = 3$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration dans le cas fini

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration dans le cas fini

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration dans le cas fini

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P\left((X = x_i)\cap(Y = y_j)\right)$$

Démonstration dans le cas fini

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration dans le cas fini

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left(X = x_i\right) P\left(Y = y_j\right)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration dans le cas fini

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j P(X = x_i)\, P(Y = y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i) \sum_{j=1}^{n} y_j P(Y = y_j)$$

Démonstration dans le cas fini

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j P(X = x_i)\, P(Y = y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i) \sum_{j=1}^{n} y_j P(Y = y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i)\, E(Y)$$

Démonstration dans le cas fini

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left(X = x_i\right) P\left(Y = y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P\left(X = x_i\right) \sum_{j=1}^{n} y_j P\left(Y = y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P\left(X = x_i\right) E(Y)$$

$$= E(Y) \sum_{i=1}^{m} x_i P\left(X = x_i\right)$$

Démonstration dans le cas fini

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j P(X = x_i)\, P(Y = y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i) \sum_{j=1}^{n} y_j P(Y = y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i)\, E(Y)$$

$$= E(Y) \sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i)$$

$$= E(Y)E(X)$$

Démonstration dans le cas fini

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j P(X = x_i) P(Y = y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i) \sum_{j=1}^{n} y_j P(Y = y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i) E(Y)$$

$$= E(Y) \sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i)$$

$$= E(Y)E(X) = E(X)E(Y)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Covariance

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Covariance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires dont l'espérance existe.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Covariance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires dont l'espérance existe.
La covariance de X et de Y est, si elle existe :

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Covariance

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires dont l'espérance existe.
La covariance de X et de Y est, si elle existe :
$cov\,(X,Y) = E\,((X - E(X))\,(Y - E(Y)))$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

Si elles existent :

Propriétés

Si elles existent :

i) $cov\,(X,Y) = cov\,(Y,X)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Propriétés

Si elles existent :

i) $cov\,(X, Y) = cov\,(Y, X)$

ii) $cov\,(aX + bY, Z) = a\ cov\,(X, Z) + b\ cov\,(Y, Z)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

Si elles existent :

i) $cov\,(X, Y) = cov\,(Y, X)$

ii) $cov\,(aX + bY, Z) = a\ cov\,(X, Z) + b\ cov\,(Y, Z)$

iii) $cov\,(X, Y) = E\,(XY) - E(X)E(Y)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

Si elles existent :

i) $cov\,(X,Y) = cov\,(Y,X)$

ii) $cov\,(aX+bY,Z) = a\ cov\,(X,Z) + b\ cov\,(Y,Z)$

iii) $cov\,(X,Y) = E\,(XY) - E(X)E(Y)$

iv) Si X et Y indépendantes alors $cov\,(X,Y) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

Si elles existent :
i) $cov\,(X,Y) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX+bY,Z) = a\;cov\,(X,Z) + b\;cov\,(Y,Z)$
iii) $cov\,(X,Y) = E\,(XY) - E(X)E(Y)$
iv) Si X et Y indépendantes alors $cov\,(X,Y) = 0$
v) $V(X) = cov\,(X,X)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

Si elles existent :

i) $cov(X, Y) = cov(Y, X)$

ii) $cov(aX + bY, Z) = a\ cov(X, Z) + b\ cov(Y, Z)$

iii) $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

iv) Si X et Y indépendantes alors $cov(X, Y) = 0$

v) $V(X) = cov(X, X)$

vi) $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X, Y)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Propriétés

Si elles existent :

i) $cov(X,Y) = cov(Y,X)$

ii) $cov(aX+bY,Z) = a\ cov(X,Z) + b\ cov(Y,Z)$

iii) $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

iv) Si X et Y indépendantes alors $cov(X,Y) = 0$

v) $V(X) = cov(X,X)$

vi) $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$

Remarques

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

Si elles existent :
i) $cov\,(X,Y) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX+bY,Z) = a\ cov\,(X,Z) + b\ cov\,(Y,Z)$
iii) $cov\,(X,Y) = E\,(XY) - E(X)E(Y)$
iv) Si X et Y indépendantes alors $cov\,(X,Y) = 0$
v) $V(X) = cov\,(X,X)$
vi) $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov\,(X,Y)$

Remarques

La réciproque de iv) peut être fausse.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

Si elles existent :

i) $cov\,(X, Y) = cov\,(Y, X)$

ii) $cov\,(aX + bY, Z) = a\ cov\,(X, Z) + b\ cov\,(Y, Z)$

iii) $cov\,(X, Y) = E\,(XY) - E(X)E(Y)$

iv) Si X et Y indépendantes alors $cov\,(X, Y) = 0$

v) $V(X) = cov\,(X, X)$

vi) $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov\,(X, Y)$

Remarques

La réciproque de iv) peut être fausse.
On généralise vi) au cas de n variables :

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

Si elles existent :

i) $cov\,(X, Y) = cov\,(Y, X)$

ii) $cov\,(aX + bY, Z) = a\ cov\,(X, Z) + b\ cov\,(Y, Z)$

iii) $cov\,(X, Y) = E\,(XY) - E(X)E(Y)$

iv) Si X et Y indépendantes alors $cov\,(X, Y) = 0$

v) $V(X) = cov\,(X, X)$

vi) $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov\,(X, Y)$

Remarques

La réciproque de iv) peut être fausse.

On généralise vi) au cas de n variables :

$$V(X_1+X_2+\cdots+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)+2\sum_{1\leq i<j\leq n} cov\,(X_i, X_j)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X - E(X))\,(Y - E(Y)))$
$= E\,((Y - E(Y))\,(X - E(X))) = cov\,(Y,X)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

i) $cov\,(X,Y) = E\left((X-E(X))\,(Y-E(Y))\right)$
$= E\left((Y-E(Y))\,(X-E(X))\right) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX+bY,Z)$

Démonstration

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X - E(X))\,(Y - E(Y)))$
$= E\,((Y - E(Y))\,(X - E(X))) = cov\,(Y,X)$

ii) $cov\,(aX + bY, Z)$
$= E\,((aX + bY - E(aX + bY))\,(Z - E(Z)))$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X - E(X))\,(Y - E(Y)))$
$= E\,((Y - E(Y))\,(X - E(X))) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX + bY, Z)$
$= E\,((aX + bY - E(aX + bY))\,(Z - E(Z)))$
$= E\,((aX + bY - aE(X) - bE(Y))\,(Z - E(Z)))$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

i) $cov\,(X, Y) = E\,((X - E(X))\,(Y - E(Y)))$
$= E\,((Y - E(Y))\,(X - E(X))) = cov\,(Y, X)$
ii) $cov\,(aX + bY, Z)$
$= E\,((aX + bY - E(aX + bY))\,(Z - E(Z)))$
$= E\,((aX + bY - aE(X) - bE(Y))\,(Z - E(Z)))$
$= E\,((a(X - E(X)) + b(Y - E(Y)))\,(Z - E(Z)))$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

i) $cov\,(X,Y) = E\left((X-E(X))\,(Y-E(Y))\right)$
$= E\left((Y-E(Y))\,(X-E(X))\right) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX+bY,Z)$
$= E\left((aX+bY-E(aX+bY))\,(Z-E(Z))\right)$
$= E\left((aX+bY-aE(X)-bE(Y))\,(Z-E(Z))\right)$
$= E\left((a(X-E(X))+b(Y-E(Y)))\,(Z-E(Z))\right)$
$= E\left(a(X-E(X))(Z-E(Z))\right) + E\left(b(Y-E(Y))(Z-E(Z))\right)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X-E(X))\,(Y-E(Y)))$
$= E\,((Y-E(Y))\,(X-E(X))) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX+bY,Z)$
$= E\,((aX+bY-E(aX+bY))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((aX+bY-aE(X)-bE(Y))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((a(X-E(X))+b(Y-E(Y)))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,(a(X-E(X))(Z-E(Z))) + E\,(b(Y-E(Y))(Z-E(Z)))$
$= acov\,(X,Z) + bcov\,(Y,Z)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Démonstration

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X-E(X))\,(Y-E(Y)))$
$= E\,((Y-E(Y))\,(X-E(X))) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX+bY,Z)$
$= E\,((aX+bY-E(aX+bY))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((aX+bY-aE(X)-bE(Y))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((a(X-E(X)+b(Y-E(Y)))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,(a(X-E(X))(Z-E(Z))) + E\,(b(Y-E(Y))(Z-E(Z)))$
$= acov\,(X,Z) + bcov\,(Y,Z)$
iii) $cov\,(X,Y) = E\,(XY - E(Y)X - E(X)Y + E(X)E(Y))$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X-E(X))\,(Y-E(Y)))$
$= E\,((Y-E(Y))\,(X-E(X))) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX+bY,Z)$
$= E\,((aX+bY-E(aX+bY))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((aX+bY-aE(X)-bE(Y))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((a(X-E(X))+b(Y-E(Y)))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,(a(X-E(X))(Z-E(Z))) + E\,(b(Y-E(Y))(Z-E(Z)))$
$= acov\,(X,Z) + bcov\,(Y,Z)$
iii) $cov\,(X,Y) = E\,(XY-E(Y)X-E(X)Y+E(X)E(Y))$
$= E(XY)-E(Y)E(X)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y) = E(XY)-E(X)E(Y)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X-E(X))\,(Y-E(Y)))$
$= E\,((Y-E(Y))\,(X-E(X))) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX+bY,Z)$
$= E\,((aX+bY-E(aX+bY))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((aX+bY-aE(X)-bE(Y))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((a(X-E(X))+b(Y-E(Y)))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,(a(X-E(X))(Z-E(Z))) + E\,(b(Y-E(Y))(Z-E(Z)))$
$= acov\,(X,Z) + bcov\,(Y,Z)$
iii) $cov\,(X,Y) = E\,(XY - E(Y)X - E(X)Y + E(X)E(Y))$
$= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
iv) Si X et Y indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ et donc $cov\,(X,Y) = 0$

Démonstration

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X - E(X))\,(Y - E(Y)))$
$= E\,((Y - E(Y))\,(X - E(X))) = cov\,(Y,X)$

ii) $cov\,(aX + bY, Z)$
$= E\,((aX + bY - E(aX + bY))\,(Z - E(Z)))$
$= E\,((aX + bY - aE(X) - bE(Y))\,(Z - E(Z)))$
$= E\,((a(X - E(X) + b(Y - E(Y)))\,(Z - E(Z)))$
$= E\,(a(X - E(X))(Z - E(Z))) + E\,(b(Y - E(Y))(Z - E(Z)))$
$= acov\,(X,Z) + bcov\,(Y,Z)$

iii) $cov\,(X,Y) = E\,(XY - E(Y)X - E(X)Y + E(X)E(Y))$
$= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

iv) Si X et Y indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ et donc $cov\,(X,Y) = 0$

v) $cov\,(X,X) = E\,((X - E(X))\,(X - E(X))) = V(X)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

i) $cov\,(X,Y) = E\left((X-E(X))\,(Y-E(Y))\right)$
$= E\left((Y-E(Y))\,(X-E(X))\right) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX+bY,Z)$
$= E\left((aX+bY-E(aX+bY))\,(Z-E(Z))\right)$
$= E\left((aX+bY-aE(X)-bE(Y))\,(Z-E(Z))\right)$
$= E\left((a(X-E(X))+b(Y-E(Y)))\,(Z-E(Z))\right)$
$= E\left(a(X-E(X))(Z-E(Z))\right) + E\left(b(Y-E(Y))(Z-E(Z))\right)$
$= acov\,(X,Z) + bcov\,(Y,Z)$
iii) $cov\,(X,Y) = E\left(XY - E(Y)X - E(X)Y + E(X)E(Y)\right)$
$= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
iv) Si X et Y indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ et donc $cov\,(X,Y) = 0$
v) $cov\,(X,X) = E\left((X-E(X))\,(X-E(X))\right) = V(X)$
vi)
$V(X+Y) = cov(X+Y,X+Y) = cov(X,X)+cov(X,Y)+cov(Y,X)+cov(Y,Y)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X-E(X))\,(Y-E(Y)))$
$= E\,((Y-E(Y))\,(X-E(X))) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX+bY,Z)$
$= E\,((aX+bY-E(aX+bY))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((aX+bY-aE(X)-bE(Y))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((a(X-E(X))+b(Y-E(Y)))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,(a(X-E(X))(Z-E(Z))) + E\,(b(Y-E(Y))(Z-E(Z)))$
$= acov\,(X,Z) + bcov\,(Y,Z)$
iii) $cov\,(X,Y) = E\,(XY - E(Y)X - E(X)Y + E(X)E(Y))$
$= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
iv) Si X et Y indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ et donc $cov\,(X,Y) = 0$
v) $cov\,(X,X) = E\,((X-E(X))\,(X-E(X))) = V(X)$
vi)
$V(X+Y) = cov(X+Y,X+Y) = cov(X,X)+cov(X,Y)+cov(Y,X)+cov(Y,Y)$
$= V(X)+V(Y)+2cov\,(X,Y)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Variance de la somme de variables aléatoires indépendantes

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Variance de la somme de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Variance de la somme de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y (respectivement X_1, X_2, ..., X_n) deux (respectivement n) variables aléatoires discrètes indépendantes.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Variance de la somme de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y (respectivement X_1, X_2, ..., X_n) deux (respectivement n) variables aléatoires discrètes indépendantes. Alors

1. $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Variance de la somme de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y (respectivement X_1, X_2, ..., X_n) deux (respectivement n) variables aléatoires discrètes indépendantes. Alors

1. $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$
2. $V(X_1 + X_2 + \cdots X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$

Exemple

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

En reprenant le même exemple, X et Y sont indépendantes et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

En reprenant le même exemple, X et Y sont indépendantes et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.
Or $V(X) = 1^2.P(X=1) + 2^2.P(X=2) + 3^2.P(X=3) - 2^2$
$= 1.\frac{1}{3} + 4.\frac{1}{3} + 9.\frac{1}{3} - 4 = \frac{2}{3}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

En reprenant le même exemple, X et Y sont indépendantes et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Or $V(X) = 1^2.P(X=1) + 2^2.P(X=2) + 3^2.P(X=3) - 2^2$
$= 1.\frac{1}{3} + 4.\frac{1}{3} + 9.\frac{1}{3} - 4 = \frac{2}{3}$

$V(Y) = 1^2.P(Y=1) + 2^2.P(Y=2) - \left(\frac{3}{2}\right)^2$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

En reprenant le même exemple, X et Y sont indépendantes et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Or $V(X) = 1^2.P(X=1) + 2^2.P(X=2) + 3^2.P(X=3) - 2^2$
$= 1.\frac{1}{3} + 4.\frac{1}{3} + 9.\frac{1}{3} - 4 = \frac{2}{3}$

$$V(Y) = 1^2.P(Y=1) + 2^2.P(Y=2) - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$V(Y) = 1.\frac{1}{2} + 4.\frac{1}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$$

Exemple

En reprenant le même exemple, X et Y sont indépendantes et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Or $V(X) = 1^2.P(X=1) + 2^2.P(X=2) + 3^2.P(X=3) - 2^2$
$= 1.\frac{1}{3} + 4.\frac{1}{3} + 9.\frac{1}{3} - 4 = \frac{2}{3}$

$$V(Y) = 1^2.P(Y=1) + 2^2.P(Y=2) - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$V(Y) = 1.\frac{1}{2} + 4.\frac{1}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$$

On en déduit $V(X+Y) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{12}$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov\,(X,Y) = V(X) + V(Y)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov\,(X,Y) = V(X) + V(Y)$$

$$V(X_1+X_2+\cdots+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)+2\sum_{1\leq i<j\leq n} cov\,(X_i,X_j)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Démonstration

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov\,(X,Y) = V(X) + V(Y)$$

$$V(X_1+X_2+\cdots+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)+2\sum_{1\leq i<j\leq n} cov\,(X_i,X_j)$$

$$= V(X_1+X_2+\cdots+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)$$

Loi binomiale

Loi binomiale

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi binomiale

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$.
$X_i(\Omega) = \{0, 1\}$.
On pose $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

Loi binomiale

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$.
$X_i(\Omega) = \{0, 1\}$.
On pose $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$. $S(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi binomiale

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$.
$X_i(\Omega) = \{0, 1\}$.
On pose $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. $S(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$

$$P(S = k) = \sum_{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi binomiale

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$.
$X_i(\Omega) = \{0, 1\}$.
On pose $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. $S(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$

$$P(S = k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$$

$$P(S = k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi binomiale

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$.
$X_i(\Omega) = \{0, 1\}$.
On pose $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. $S(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$

$$P(S = k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$$

$$P(S = k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)$$

Comme il y a C_n^k termes et que chacun des termes
$P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n) = p^k (1 - p)^{n-k}$,

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi binomiale

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1,p)$.
$X_i(\Omega) = \{0,1\}$.
On pose $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. $S(\Omega) = \{0,1,\ldots,n\}$

$$P(S=k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$$

$$P(S=k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)$$

Comme il y a C_n^k termes et que chacun des termes
$P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n) = p^k (1-p)^{n-k}$, on obtient

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi binomiale

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$.
$X_i(\Omega) = \{0, 1\}$.
On pose $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$. $S(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$

$$P(S = k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$$

$$P(S = k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)$$

Comme il y a C_n^k termes et que chacun des termes $P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n) = p^k (1-p)^{n-k}$, on obtient

$$P(S = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi binomiale

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$.
$X_i(\Omega) = \{0, 1\}$.
On pose $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$. $S(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$

$$P(S = k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$$

$$P(S = k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)$$

Comme il y a C_n^k termes et que chacun des termes
$P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n) = p^k (1 - p)^{n-k}$, on obtient

$$P(S = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

et $S \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Loi de Poisson

Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
Exemple : un standard téléphonique reçoit en moyenne 4 appels de 10h à 11h et 2 appels de 11h à midi.

Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
Exemple : un standard téléphonique reçoit en moyenne 4 appels de 10h à 11h et 2 appels de 11h à midi.
En supposant $X \sim \mathcal{P}(4)$, $Y \sim \mathcal{P}(2)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(6)$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
Exemple : un standard téléphonique reçoit en moyenne 4 appels de 10h à 11h et 2 appels de 11h à midi.
En supposant $X \sim \mathcal{P}(4)$, $Y \sim \mathcal{P}(2)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(6)$.

$$P(X + Y = 0) = e^{-6}\frac{6^0}{0!} \approx 0,00248$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
Exemple : un standard téléphonique reçoit en moyenne 4 appels de 10h à 11h et 2 appels de 11h à midi.
En supposant $X \sim \mathcal{P}(4)$, $Y \sim \mathcal{P}(2)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(6)$.

$$P(X + Y = 0) = e^{-6}\frac{6^0}{0!} \approx 0,00248$$

$$P(X + Y = 1) = e^{-6}\frac{6^1}{1!} \approx 0,0174$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Exemple : un standard téléphonique reçoit en moyenne 4 appels de 10h à 11h et 2 appels de 11h à midi.

En supposant $X \sim \mathcal{P}(4)$, $Y \sim \mathcal{P}(2)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(6)$.

$$P(X + Y = 0) = e^{-6}\frac{6^0}{0!} \approx 0,00248$$

$$P(X + Y = 1) = e^{-6}\frac{6^1}{1!} \approx 0,0174$$

Remarque : $P(X + Y = 0) = P((X = 0) \cap (Y = 0)) = e^{-4}\frac{4^0}{0!}e^{-2}\frac{2^0}{0!}$

Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Exemple : un standard téléphonique reçoit en moyenne 4 appels de 10h à 11h et 2 appels de 11h à midi.

En supposant $X \sim \mathcal{P}(4)$, $Y \sim \mathcal{P}(2)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(6)$.

$$P(X + Y = 0) = e^{-6}\frac{6^0}{0!} \approx 0,00248$$

$$P(X + Y = 1) = e^{-6}\frac{6^1}{1!} \approx 0,0174$$

Remarque : $P(X + Y = 0) = P((X = 0) \cap (Y = 0)) = e^{-4}\frac{4^0}{0!}e^{-2}\frac{2^0}{0!}$

$P(X + Y = 1) = P((X = 0) \cap (Y = 1)) + P((X = 1) \cap (Y = 0)) =$
$e^{-4}\frac{4^0}{0!}e^{-2}\frac{2^1}{1!} + e^{-4}\frac{4^1}{1!}e^{-2}\frac{2^0}{0!}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale

La loi multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, ..., p_m)$ est la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$ définie par

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale

La loi multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, ..., p_m)$ est la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$ définie par

1. $X_i(\Omega) = [\![0, n]\!]$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale

La loi multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, ..., p_m)$ est la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$ définie par

1. $X_i(\Omega) = [\![0, n]\!]$
2. pour tout $(x_1, x_2 ..., x_m) \in [\![0, n]\!]^m$
   $P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) ... \cap (X_m = x_m)) = \dfrac{n!}{x_1!x_2!...x_m!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_m^{x_m}$
   si $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$, 0 sinon.

Loi multinomiale

La loi multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, ..., p_m)$ est la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$ définie par

1. $X_i(\Omega) = [\![0, n]\!]$
2. pour tout $(x_1, x_2 ..., x_m) \in [\![0, n]\!]^m$
$$P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \dots \cap (X_m = x_m)) = \frac{n!}{x_1!x_2!\dots x_m!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_m^{x_m}$$
si $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$, 0 sinon.

Exemple : tirages avec remise dans une urne multicolore.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale

La loi multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, ..., p_m)$ est la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$ définie par

1. $X_i(\Omega) = [\![0, n]\!]$
2. pour tout $(x_1, x_2 ..., x_m) \in [\![0, n]\!]^m$
$$P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \ldots \cap (X_m = x_m)) = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_m!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_m^{x_m}$$
si $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$, 0 sinon.

Exemple : tirages avec remise dans une urne multicolore.
Une urne contient N boules de couleurs c_i (N_i boules).

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale

La loi multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, \ldots, p_m)$ est la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ définie par

1. $X_i(\Omega) = [\![0, n]\!]$
2. pour tout $(x_1, x_2 \ldots, x_m) \in [\![0, n]\!]^m$
$$P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \ldots \cap (X_m = x_m)) = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_m!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_m^{x_m}$$
si $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$, 0 sinon.

Exemple : tirages avec remise dans une urne multicolore.
Une urne contient N boules de couleurs c_i (N_i boules).

$N_1 + N_2 + \ldots + N_m = N$;

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale

La loi multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, ..., p_m)$ est la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$ définie par

1. $X_i(\Omega) = [\![0, n]\!]$
2. pour tout $(x_1, x_2 ..., x_m) \in [\![0, n]\!]^m$
   $$P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) ... \cap (X_m = x_m)) = \frac{n!}{x_1! x_2! ... x_m!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_m^{x_m}$$
   si $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$, 0 sinon.

Exemple : tirages avec remise dans une urne multicolore.
Une urne contient N boules de couleurs c_i (N_i boules).
$N_1 + N_2 + ... + N_m = N$; $p_i = \dfrac{N_i}{N}$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale

La loi multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, ..., p_m)$ est la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$ définie par

1. $X_i(\Omega) = [\![0, n]\!]$
2. pour tout $(x_1, x_2 ..., x_m) \in [\![0, n]\!]^m$

   $P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) ... \cap (X_m = x_m)) = \frac{n!}{x_1! x_2! ... x_m!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_m^{x_m}$

   si $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$, 0 sinon.

Exemple : tirages avec remise dans une urne multicolore.
Une urne contient N boules de couleurs c_i (N_i boules).
$N_1 + N_2 + ... + N_m = N$; $p_i = \frac{N_i}{N}$.
On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note X_i le nombre de boules de couleurs c_i obtenues.

Loi multinomiale : exemple

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale : exemple

Une urne contient 20 boules rouges, 30 boules vertes et 50 boules bleues ($N = 100$).

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale : exemple

Une urne contient 20 boules rouges, 30 boules vertes et 50 boules bleues ($N = 100$).
On effectue $n = 12$ tirages d'une boule avec remise et on note X_1 le nombre de boules rouges, X_2 le nombre de boules vertes et X_3 le nombre de boules bleues obtenues.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale : exemple

Une urne contient 20 boules rouges, 30 boules vertes et 50 boules bleues ($N = 100$).
On effectue $n = 12$ tirages d'une boule avec remise et on note X_1 le nombre de boules rouges, X_2 le nombre de boules vertes et X_3 le nombre de boules bleues obtenues.

$$P\left((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap (X_3 = x_3)\right) = \frac{12!}{x_1!x_2!x_3!} \left(\frac{20}{100}\right)^{x_1} \left(\frac{30}{100}\right)^{x_2} \left(\frac{50}{100}\right)^{x_3}$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale : exemple

Une urne contient 20 boules rouges, 30 boules vertes et 50 boules bleues ($N = 100$).
On effectue $n = 12$ tirages d'une boule avec remise et on note X_1 le nombre de boules rouges, X_2 le nombre de boules vertes et X_3 le nombre de boules bleues obtenues.

$$P\left((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap (X_3 = x_3)\right) = \frac{12!}{x_1!x_2!x_3!}\left(\frac{20}{100}\right)^{x_1}\left(\frac{30}{100}\right)^{x_2}\left(\frac{50}{100}\right)^{x_3}$$

En prenant $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ et $x_3 = 4$, on obtient

$$P\left((X_1 = 5) \cap (X_2 = 3) \cap (X_3 = 4)\right) = \frac{12!}{5!3!4!}0,2^5 0,3^3 0,5^4 \approx 0,01497$$

Loi multinomiale : remarques

Loi multinomiale : remarques

1. La loi binomiale est un cas particulier de la loi multinomiale ($m = 2$)

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale : remarques

1. La loi binomiale est un cas particulier de la loi multinomiale ($m = 2$)
2. $X_i \sim \mathcal{B}(n, p_i)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale : remarques

1. La loi binomiale est un cas particulier de la loi multinomiale ($m = 2$)
2. $X_i \sim \mathcal{B}(n, p_i)$
3. $E(X_i) = np_i$, $V(X_i) = np_i(1 - p_i)$, $cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$

Variable aléatoire continue

Densité de probabilité

Variable aléatoire continue

Densité de probabilité

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité si

Variable aléatoire continue

Densité de probabilité

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité si

i) $f \geq 0$,

Variable aléatoire continue

Densité de probabilité

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité si

i) $f \geq 0$,

ii) f est continue sauf éventuellement en un nombre fini de réels,

Variable aléatoire continue

Densité de probabilité

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité si

i) $f \geq 0$,

ii) f est continue sauf éventuellement en un nombre fini de réels,

iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et est égale à 1.

Variable aléatoire continue

Exemple

Variable aléatoire continue

Exemple

f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

Variable aléatoire continue

Exemple

f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0,1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

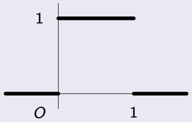
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 1dt = 1$$

Variable aléatoire continue

Exemple

f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 1dt = 1$$



Variable aléatoire continue

Variable aléatoire absolument continue

Variable aléatoire continue

Variable aléatoire absolument continue

Une variable aléatoire réelle X est dite absolument continue s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive et continue sauf éventuellement en un nombre fini de réels telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \; F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Variable aléatoire continue

Variable aléatoire absolument continue

Une variable aléatoire réelle X est dite absolument continue s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive et continue sauf éventuellement en un nombre fini de réels telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \; F(x) = P\left(X \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

La fonction f est une densité de probabilité appelée densité de X.

Variable aléatoire continue

Exemple

Variable aléatoire continue

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Exemple

Toute variable aléatoire X admettant comme densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0,1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

Variable aléatoire continue

Exemple

Toute variable aléatoire X admettant comme densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.
i) si $x \leq 0$ alors $F(x) = 0$

Variable aléatoire continue

Exemple

Toute variable aléatoire X admettant comme densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.
i) si $x \leq 0$ alors $F(x) = 0$
ii) si $0 < x < 1$ alors $F(x) = x$

Variable aléatoire continue

Exemple

Toute variable aléatoire X admettant comme densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.
i) si $x \leq 0$ alors $F(x) = 0$
ii) si $0 < x < 1$ alors $F(x) = x$
iii) si $x \geq 1$ alors $F(x) = 1$.

Exemple

Toute variable aléatoire X admettant comme densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.
i) si $x \leq 0$ alors $F(x) = 0$
ii) si $0 < x < 1$ alors $F(x) = x$
iii) si $x \geq 1$ alors $F(x) = 1$.

Variable aléatoire continue

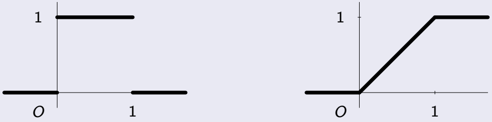
Exemple

Toute variable aléatoire X admettant comme densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

i) si $x \leq 0$ alors $F(x) = 0$

ii) si $0 < x < 1$ alors $F(x) = x$

iii) si $x \geq 1$ alors $F(x) = 1$.



Variable aléatoire continue

Propriétés

Variable aléatoire continue

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Propriétés

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

Variable aléatoire continue

Propriétés

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

i) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Variable aléatoire continue

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Propriétés

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

i) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

ii) pour tout réel x en lequel f est continue $F'(x) = f(x)$.

Variable aléatoire continue

Propriétés

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

ii) pour tout réel x en lequel f est continue $F'(x) = f(x)$.

iii) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X = a) = 0$

Variable aléatoire continue

Propriétés

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

ii) pour tout réel x en lequel f est continue $F'(x) = f(x)$.

iii) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X = a) = 0$

iv) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X \leq a) = P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$

Variable aléatoire continue

Propriétés

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

ii) pour tout réel x en lequel f est continue $F'(x) = f(x)$.

iii) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X = a) = 0$

iv) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X \leq a) = P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$

v) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F(a) = 1 - \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$

Variable aléatoire continue

Propriétés

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

ii) pour tout réel x en lequel f est continue $F'(x) = f(x)$.

iii) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X = a) = 0$

iv) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X \leq a) = P(X < a) = F(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$

v) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F(a) = 1 - \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$

vi) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) =$
$P(a < X < b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_{a}^{b} f(t)dt$

Variable aléatoire continue

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

Variable aléatoire continue

Exemple

Soit f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$.

Variable aléatoire continue

Exemple

Soit f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$.
f est une densité de probabilité et toute variable aléatoire X admettant la fonction f comme densité est absolument continue.

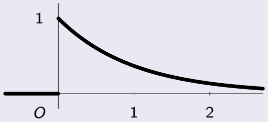
Variable aléatoire continue

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

Soit f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$.
f est une densité de probabilité et toute variable aléatoire X admettant la fonction f comme densité est absolument continue.



Variable aléatoire continue

Exemple

Variable aléatoire continue

Exemple

Pour f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$,

Variable aléatoire continue

Exemple

Pour f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$,
$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}$ sur $]0, +\infty[$ et 0 sur $]-\infty, 0]$.

Variable aléatoire continue

Exemple

Pour f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$,
$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}$ sur $]0, +\infty[$ et 0 sur $]-\infty, 0]$.
$P(X \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-1} \approx 0,632$

Variable aléatoire continue

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Exemple

Pour f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$,

$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}$ sur $]0, +\infty[$ et 0 sur $]-\infty, 0]$.

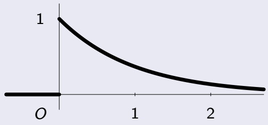
$P(X \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-1} \approx 0,632$

$P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = 1 - e^{-2} - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0,233$

Variable aléatoire continue

Exemple

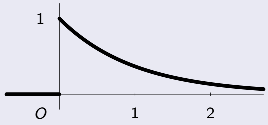
Pour f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$,
$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}$ sur $]0, +\infty[$ et 0 sur $]-\infty, 0]$.
$P(X \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-1} \approx 0,632$
$P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = 1 - e^{-2} - \left(1 - e^{-1}\right) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0,233$

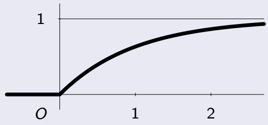


Variable aléatoire continue

Exemple

Pour f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$,
$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}$ sur $]0, +\infty[$ et 0 sur $]-\infty, 0]$.
$P(X \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-1} \approx 0,632$
$P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = 1 - e^{-2} - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0,233$





Variable aléatoire continue

Fonction d'une variable aléatoire absolument continue

Variable aléatoire continue

Fonction d'une variable aléatoire absolument continue

Soit X une variable aléatoire absolument continue et $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction.

Variable aléatoire continue

Fonction d'une variable aléatoire absolument continue

Soit X une variable aléatoire absolument continue et $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si $P\left(\phi(X) \leq x\right)$ existe pour tout réel x alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire.

Variable aléatoire continue

Fonction d'une variable aléatoire absolument continue

Soit X une variable aléatoire absolument continue et $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si $P(\phi(X) \leq x)$ existe pour tout réel x alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire.
S'il existe $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ continue sauf éventuellement en un nombre fini de réels et telle que $G(x) = P(\phi(X) \leq x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire absolument continue de densité g.

Variable aléatoire continue

Fonction d'une variable aléatoire absolument continue

Soit X une variable aléatoire absolument continue et $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si $P(\phi(X) \leq x)$ existe pour tout réel x alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire.
S'il existe $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ continue sauf éventuellement en un nombre fini de réels et telle que $G(x) = P(\phi(X) \leq x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire absolument continue de densité g.

Exemple

Variable aléatoire continue

Fonction d'une variable aléatoire absolument continue

Soit X une variable aléatoire absolument continue et $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si $P(\phi(X) \leq x)$ existe pour tout réel x alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire.
S'il existe $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ continue sauf éventuellement en un nombre fini de réels et telle que $G(x) = P(\phi(X) \leq x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire absolument continue de densité g.

Exemple

Si X est une variable aléatoire absolument continue de densité f, et $a \neq 0$ et b deux réels alors $aX + b$ est une variable aléatoire absolument continue de densité $g(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Variable aléatoire continue

Fonction d'une variable aléatoire absolument continue

Soit X une variable aléatoire absolument continue et $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si $P(\phi(X) \leq x)$ existe pour tout réel x alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire.
S'il existe $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ continue sauf éventuellement en un nombre fini de réels et telle que $G(x) = P(\phi(X) \leq x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire absolument continue de densité g.

Exemple

Si X est une variable aléatoire absolument continue de densité f, et $a \neq 0$ et b deux réels alors $aX + b$ est une variable aléatoire absolument continue de densité $g(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.
Démonstration en compléments.

Variable aléatoire continue

M3201
Probabilités et
statistique

Département
Informatique
IUT de
Saint-Dié-des-
Vosges

Plan

Variable
aléatoire

Variable aléatoire
réelle

Variable aléatoire
discrète

Variable aléatoire
continue

Loi des grands
nombres

Intervalle de
fluctuation

Annexe

Espérance

Variable aléatoire continue

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

Variable aléatoire continue

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

L'espérance de X est $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Variable aléatoire continue

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

L'espérance de X est $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Sinon, l'espérance n'existe pas.

Variable aléatoire continue

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.
L'espérance de X est $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.
Sinon, l'espérance n'existe pas.

Exemple

Variable aléatoire continue

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.
L'espérance de X est $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.
Sinon, l'espérance n'existe pas.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

Variable aléatoire continue

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

L'**espérance** de X est $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Sinon, l'espérance n'existe pas.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx$$

Variable aléatoire continue

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

L'espérance de X est $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Sinon, l'espérance n'existe pas.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0,1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx = \int_0^1 x.1\ dx$$

Variable aléatoire continue

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.
L'espérance de X est $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.
Sinon, l'espérance n'existe pas.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0,1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx = \int_0^1 x.1\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

Variable aléatoire continue

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.
L'espérance de X est $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.
Sinon, l'espérance n'existe pas.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx = \int_0^1 x.1\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Variable aléatoire continue

Espérance de $\phi(X)$

Variable aléatoire continue

Espérance de $\phi(X)$

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

Variable aléatoire continue

Espérance de $\phi(X)$

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

L'espérance de $\phi(X)$ est $E(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Variable aléatoire continue

Espérance de $\phi(X)$

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.
L'espérance de $\phi(X)$ est $E(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Conséquences

Variable aléatoire continue

Espérance de $\phi(X)$

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.
L'espérance de $\phi(X)$ est $E(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Conséquences

Si $E(X)$ existe alors $\forall a, b$, $E(aX+b)$ existe et $E(aX+b) = aE(X)+b$.

Variable aléatoire continue

Espérance de $\phi(X)$

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.
L'espérance de $\phi(X)$ est $E\left(\phi(X)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Conséquences

Si $E(X)$ existe alors $\forall a, b$, $E(aX + b)$ existe et $E(aX + b) = aE(X) + b$.
Si $E\left(\phi_1(X)\right)$ et $E\left(\phi_2(X)\right)$ existent

Variable aléatoire continue

Espérance de $\phi(X)$

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.
L'espérance de $\phi(X)$ est $E(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Conséquences

Si $E(X)$ existe alors $\forall a, b$, $E(aX+b)$ existe et $E(aX+b) = aE(X)+b$.
Si $E(\phi_1(X))$ et $E(\phi_2(X))$ existent alors $E(\phi_1(X)+\phi_2(X))$ existe et $E(\phi_1(X)+\phi_2(X)) = E(\phi_1(X)) + E(\phi_2(X))$.

Variable aléatoire continue

Variance

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
L'écart-type est alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
L'écart-type est alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
L'écart-type est alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
L'écart-type est alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0,1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 f(x)dx$$

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
L'écart-type est alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0,1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 f(x)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx$$

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
L'écart-type est alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 f(x)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^3}{3}\right]_0^1$$

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
L'écart-type est alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 f(x)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
L'écart-type est alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 f(x)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Variable aléatoire continue

Propriétés

Variable aléatoire continue

Propriétés

Sous réserve d'existence,

Variable aléatoire continue

Propriétés

Sous réserve d'existence,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2$$

Variable aléatoire continue

Propriétés

Sous réserve d'existence,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2$$

$\forall a,\ b,\ V(aX+b)$ existe et $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

Variable aléatoire continue

Propriétés

Sous réserve d'existence,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2$$

$\forall a,\ b,\ V(aX+b)$ existe et $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

Exemple

Variable aléatoire continue

Propriétés

Sous réserve d'existence,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2$$

$\forall a,\ b,\ V(aX+b)$ existe et $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

Exemple

$$V(X) = \int_0^1 x^2 f(x)dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Variable aléatoire continue

Variables absolument continues indépendantes

Variable aléatoire continue

Variables absolument continues indépendantes

Deux variables absolument continues X et Y sont indépendantes si

Variable aléatoire continue

Variables absolument continues indépendantes

Deux variables absolument continues X et Y sont indépendantes si

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

Variable aléatoire continue

Variables absolument continues indépendantes

Deux variables absolument continues X et Y sont indépendantes si

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

n variables absolument continues X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes si

$$\forall x_i \in \mathbb{R} \, P((X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cdots \cap (X_n \leq x_n))$$
$$= P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2) \cdots P(X_n \leq x_n)$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi uniforme

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi uniforme

Soit a et b deux réels. Une variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ si elle admet pour densité la fonction f définie par

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi uniforme

Soit a et b deux réels. Une variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $x \in]a, b[$ et $f(x) = 0$ sinon.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi uniforme

Soit a et b deux réels. Une variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ si elle admet pour densité la fonction f définie par
$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $x \in]a, b[$ et $f(x) = 0$ sinon.

Notation

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi uniforme

Soit a et b deux réels. Une variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $x \in]a, b[$ et $f(x) = 0$ sinon.

Notation

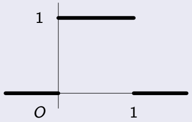
$X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$.

Loi uniforme : exemple

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi uniforme : exemple

Toute variable aléatoire X de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.



Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi uniforme : propriétés

Loi uniforme : propriétés

Fonction de répartition :

Loi uniforme : propriétés

Fonction de répartition :
$F(x) = 0$ si $x \leq a$, $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ si $a < x < b$, $F(x) = 1$ si $x \geq b$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi uniforme : propriétés

Fonction de répartition :
$F(x) = 0$ si $x \leq a$, $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ si $a < x < b$, $F(x) = 1$ si $x \geq b$.

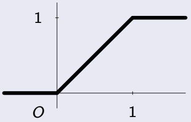
$$E(X) = \frac{a+b}{2},\ V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Loi uniforme : propriétés

Fonction de répartition :

$F(x) = 0$ si $x \leq a$, $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ si $a < x < b$, $F(x) = 1$ si $x \geq b$.

$$E(X) = \frac{a+b}{2},\ V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Loi exponentielle

Variable aléatoire continue : lois usuelles

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi exponentielle

Soit a un réel strictement positif.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle

Soit a un réel strictement positif. Une variable aléatoire réelle X suit la loi exponentielle de paramètre a si elle admet pour densité la fonction f définie par

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle

Soit a un réel strictement positif. Une variable aléatoire réelle X suit la loi exponentielle de paramètre a si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = ae^{-ax}$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ sinon.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle

Soit a un réel strictement positif. Une variable aléatoire réelle X suit la loi exponentielle de paramètre a si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = ae^{-ax}$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ sinon.

Notation

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle

Soit a un réel strictement positif. Une variable aléatoire réelle X suit la loi exponentielle de paramètre a si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = ae^{-ax}$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ sinon.

Notation

$X \sim \mathcal{E}(a)$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle : exemple

Variable aléatoire continue : lois usuelles

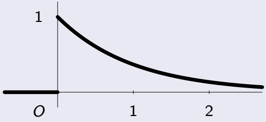
Loi exponentielle : exemple

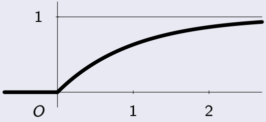
Toute variable aléatoire X de densité f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sinon.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle : exemple

Toute variable aléatoire X de densité f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sinon.





Loi exponentielle : propriétés

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle : propriétés

$X \sim \mathcal{E}(a)$ $(a > 0)$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle : propriétés

$X \sim \mathcal{E}(a)$ $(a > 0)$
$f(x) = ae^{-ax}$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ sinon.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Loi exponentielle : propriétés

$X \sim \mathcal{E}(a)$ $(a > 0)$
$f(x) = ae^{-ax}$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ sinon.
Fonction de répartition :

Loi exponentielle : propriétés

$X \sim \mathcal{E}(a)$ $(a > 0)$
$f(x) = ae^{-ax}$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ sinon.
Fonction de répartition :
$F(x) = 0$ si $x \leq 0$, $F(x) = 1 - e^{-ax}$ si $x > 0$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi exponentielle : propriétés

$X \sim \mathcal{E}(a)$ $(a > 0)$

$f(x) = ae^{-ax}$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ sinon.

Fonction de répartition :

$F(x) = 0$ si $x \leq 0$, $F(x) = 1 - e^{-ax}$ si $x > 0$.

$$E(X) = \int_0^{+\infty} xae^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle : propriétés

$X \sim \mathcal{E}(a)$ $(a > 0)$

$f(x) = ae^{-ax}$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ sinon.

Fonction de répartition :

$F(x) = 0$ si $x \leq 0$, $F(x) = 1 - e^{-ax}$ si $x > 0$.

$$E(X) = \int_0^{+\infty} xae^{-ax}\, dx = \frac{1}{a}$$

$$V(X) = \int_0^{+\infty} x^2 ae^{-ax}\, dx - (E(X))^2 = \frac{1}{a^2}$$

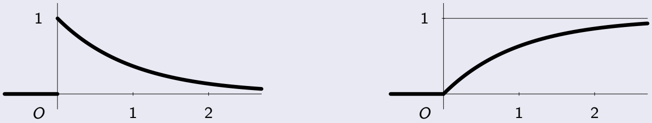
Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle : propriétés

$X \sim \mathcal{E}(a)$ $(a > 0)$
$f(x) = ae^{-ax}$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ sinon.
Fonction de répartition :
$F(x) = 0$ si $x \leq 0$, $F(x) = 1 - e^{-ax}$ si $x > 0$.

$$E(X) = \int_0^{+\infty} xae^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$$

$$V(X) = \int_0^{+\infty} x^2ae^{-ax}\,dx - (E(X))^2 = \frac{1}{a^2}$$



Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi normale centrée réduite

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Remarque

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Remarque

La définition est justifiée par $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \sqrt{2\pi}$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Remarque

La définition est justifiée par $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

Notation

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Remarque

La définition est justifiée par $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Notation

$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Remarque

La définition est justifiée par $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Notation

$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

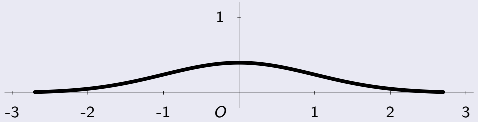
La loi normale a été définie par Pierre-Simon de Laplace (1749-1827; français) en 1774, puis Carl-Friedrich Gauss (1777-1855; allemand) en 1809.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$



Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : propriétés

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : propriétés

Fonction de répartition :

Variable aléatoire continue : lois usuelles

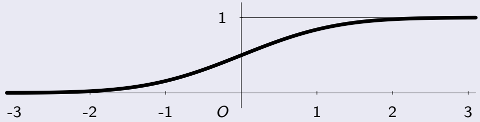
Loi normale centrée réduite : propriétés

Fonction de répartition : $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

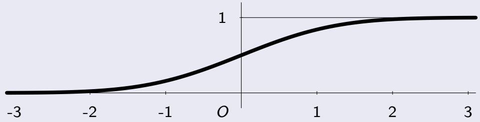
Loi normale centrée réduite : propriétés

Fonction de répartition : $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$



Loi normale centrée réduite : propriétés

Fonction de répartition : $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

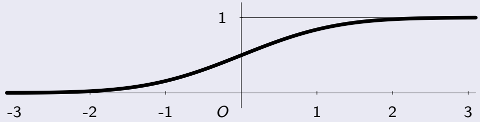


$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx = 0$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : propriétés

Fonction de répartition : $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$



$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = 0$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx - (E(X))^2 = 1$$

Loi normale centrée réduite : propriétés

Loi normale centrée réduite : propriétés

Soit F la fonction de répartition de X suivant la loi normale centrée réduite.

Loi normale centrée réduite : propriétés

Soit F la fonction de répartition de X suivant la loi normale centrée réduite.
$F(0) = P(X \leq 0) = 0,5$

Loi normale centrée réduite : propriétés

Soit F la fonction de répartition de X suivant la loi normale centrée réduite.
$F(0) = P(X \leq 0) = 0,5$
$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X \leq -x)$.

Loi normale centrée réduite : propriétés

Soit F la fonction de répartition de X suivant la loi normale centrée réduite.
$F(0) = P(X \leq 0) = 0,5$
$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X \leq -x)$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 1 - F(-x)$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : propriétés

Soit F la fonction de répartition de X suivant la loi normale centrée réduite.

$F(0) = P(X \leq 0) = 0,5$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X \leq -x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 1 - F(-x)$.

$P(-1 \leq X \leq 1) \approx 0,6826$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : propriétés

Soit F la fonction de répartition de X suivant la loi normale centrée réduite.
$F(0) = P(X \leq 0) = 0,5$
$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X \leq -x)$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 1 - F(-x)$.
$P(-1 \leq X \leq 1) \approx 0,6826$
$P(-2 \leq X \leq 2) \approx 0,9544$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : propriétés

Soit F la fonction de répartition de X suivant la loi normale centrée réduite.

$F(0) = P(X \leq 0) = 0,5$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X \leq -x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 1 - F(-x)$.

$P(-1 \leq X \leq 1) \approx 0,6826$

$P(-2 \leq X \leq 2) \approx 0,9544$

$P(-3 \leq X \leq 3) \approx 0,9974$

Loi normale centrée réduite : calculs

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1)$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : calculs

$$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1)$$

Loi normale centrée réduite : calculs

$$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : calculs

$$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$$
$$= 2.F(1) - 1$$

Loi normale centrée réduite : calculs

$$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$$
$$= 2.F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$$

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$
$= 2.F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$
$P(-2 \leq X \leq 2)$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$
$= 2.F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$
$P(-2 \leq X \leq 2) = 2.F(2) - 1 \approx 2.0,9772 - 1 \approx 0,9544$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$
$= 2.F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$
$P(-2 \leq X \leq 2) = 2.F(2) - 1 \approx 2.0,9772 - 1 \approx 0,9544$
$P(-3 \leq X \leq 3)$

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$
$= 2.F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$
$P(-2 \leq X \leq 2) = 2.F(2) - 1 \approx 2.0,9772 - 1 \approx 0,9544$
$P(-3 \leq X \leq 3) = 2.F(3) - 1 \approx 2.0,9987 - 1 \approx 0,9974$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$
$= 2.F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$
$P(-2 \leq X \leq 2) = 2.F(2) - 1 \approx 2.0,9772 - 1 \approx 0,9544$
$P(-3 \leq X \leq 3) = 2.F(3) - 1 \approx 2.0,9987 - 1 \approx 0,9974$
$P(-0,54 \leq X \leq 1,12)$

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$
$= 2.F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$
$P(-2 \leq X \leq 2) = 2.F(2) - 1 \approx 2.0,9772 - 1 \approx 0,9544$
$P(-3 \leq X \leq 3) = 2.F(3) - 1 \approx 2.0,9987 - 1 \approx 0,9974$
$P(-0,54 \leq X \leq 1,12) = F(1,12) - F(-0,54)$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$
$= 2.F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$
$P(-2 \leq X \leq 2) = 2.F(2) - 1 \approx 2.0,9772 - 1 \approx 0,9544$
$P(-3 \leq X \leq 3) = 2.F(3) - 1 \approx 2.0,9987 - 1 \approx 0,9974$
$P(-0,54 \leq X \leq 1,12) = F(1,12) - F(-0,54) = F(1,12) - (1 - F(0,54))$

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$
$= 2.F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$
$P(-2 \leq X \leq 2) = 2.F(2) - 1 \approx 2.0,9772 - 1 \approx 0,9544$
$P(-3 \leq X \leq 3) = 2.F(3) - 1 \approx 2.0,9987 - 1 \approx 0,9974$
$P(-0,54 \leq X \leq 1,12) = F(1,12) - F(-0,54) = F(1,12) - (1 - F(0,54))$
$= F(1,12) - 1 + F(0,54) \approx 0,8686 - 1 + 0,7054 \approx 0,5740$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale de paramètres m et σ si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi normale

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale de paramètres m et σ si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Loi normale centrée réduite : propriété

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale de paramètres m et σ si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Loi normale centrée réduite : propriété

$E(X) = m$
$V(X) = \sigma^2$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale de paramètres m et σ si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Loi normale centrée réduite : propriété

$E(X) = m$
$V(X) = \sigma^2$

Notation

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale de paramètres m et σ si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Loi normale centrée réduite : propriété

$E(X) = m$
$V(X) = \sigma^2$

Notation

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$

Loi normale : exemples

Loi normale : exemples

$\mathcal{N}(-1, 2)$,

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemples

$\mathcal{N}(-1, 2)$, $\mathcal{N}(1, \frac{1}{5})$,

Variable aléatoire continue : lois usuelles

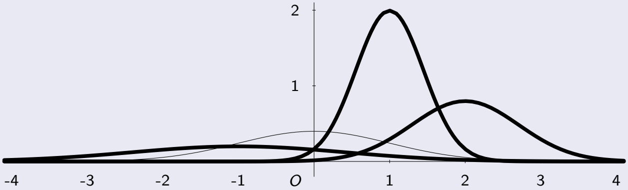
Loi normale : exemples

$\mathcal{N}(-1, 2)$, $\mathcal{N}(1, \frac{1}{5})$, $\mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemples

$\mathcal{N}(-1,\, 2)$, $\mathcal{N}(1,\, \frac{1}{5})$, $\mathcal{N}(2,\, \frac{1}{2})$



Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : propriété

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : propriété

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi normale : propriété

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ si et seulement si $T = \dfrac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Loi normale : propriété

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ si et seulement si $T = \dfrac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Démonstration

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : propriété

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ si et seulement si $T = \dfrac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Démonstration

$T = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} X - \frac{m}{\sigma}$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : propriété

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ si et seulement si $T = \dfrac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Démonstration

$T = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{m}{\sigma}$.
La densité associée à T est donc

Loi normale : propriété

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ si et seulement si $T = \dfrac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Démonstration

$T = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{m}{\sigma}$.

La densité associée à T est donc

$$g(x) = \frac{1}{\frac{1}{\sigma}} f\left(\frac{x-(-\frac{m}{\sigma})}{\frac{1}{\sigma}}\right) = \sigma f(\sigma x + m) = \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\sigma x+m-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Loi normale : exemple

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$.

$P(1 \leq X \leq 2,5)$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(2, \dfrac{1}{2})$.

$$P\left(1 \leq X \leq 2,5\right) = P\left(\frac{1-2}{0,5} \leq \frac{X-2}{0,5} \leq \frac{2,5-2}{0,5}\right)$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi normale : exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$.

$$P(1 \leq X \leq 2,5) = P\left(\frac{1-2}{0,5} \leq \frac{X-2}{0,5} \leq \frac{2,5-2}{0,5}\right) = P(-2 \leq T \leq 1)$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$.

$$P(1 \leq X \leq 2,5) = P\left(\frac{1-2}{0,5} \leq \frac{X-2}{0,5} \leq \frac{2,5-2}{0,5}\right) = P(-2 \leq T \leq 1)$$

$$= F(1) - F(-2)$$

Loi normale : exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$.

$$P(1 \leq X \leq 2,5) = P\left(\frac{1-2}{0,5} \leq \frac{X-2}{0,5} \leq \frac{2,5-2}{0,5}\right) = P(-2 \leq T \leq 1)$$

$$= F(1) - F(-2) = F(1) - (1 - F(2))$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$.

$$P(1 \leq X \leq 2,5) = P\left(\frac{1-2}{0,5} \leq \frac{X-2}{0,5} \leq \frac{2,5-2}{0,5}\right) = P(-2 \leq T \leq 1)$$
$$= F(1) - F(-2) = F(1) - (1 - F(2)) = F(1) - 1 + F(2)$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$.

$$P(1 \leq X \leq 2,5) = P\left(\frac{1-2}{0,5} \leq \frac{X-2}{0,5} \leq \frac{2,5-2}{0,5}\right) = P(-2 \leq T \leq 1)$$
$$= F(1) - F(-2) = F(1) - (1 - F(2)) = F(1) - 1 + F(2)$$
$$\approx 0,8413 - 1 + 0,9772 \approx 0,8185$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi gamma

Variable aléatoire continue : lois usuelles

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi gamma

z et θ sont des réels strictement positifs.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi gamma

z et θ sont des réels strictement positifs.

On pose $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} \, dx$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi gamma

z et θ sont des réels strictement positifs.

On pose $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx$

La densité d'une variable aléatoire $X \sim \gamma(z, \theta)$ est $f(x) = \dfrac{\theta^z}{\Gamma(z)} e^{-\theta x} x^{z-1}$ $(x \geq 0)$.

Loi gamma

z et θ sont des réels strictement positifs.

On pose $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx$

La densité d'une variable aléatoire $X \sim \gamma(z, \theta)$ est $f(x) = \dfrac{\theta^z}{\Gamma(z)} e^{-\theta x} x^{z-1}$ $(x \geq 0)$.

$E(X) = \dfrac{z}{\theta}$; $V(X) = \dfrac{z}{\theta^2}$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi gamma

z et θ sont des réels strictement positifs.

On pose $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx$

La densité d'une variable aléatoire $X \sim \gamma(z, \theta)$ est $f(x) = \dfrac{\theta^z}{\Gamma(z)} e^{-\theta x} x^{z-1}$ $(x \geq 0)$.

$E(X) = \dfrac{z}{\theta}$; $V(X) = \dfrac{z}{\theta^2}$.

Exemple : somme de z variables aléatoires X_i indépendantes et de loi exponentielle de paramètre θ.

Loi du χ^2

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi du χ^2

La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi $\gamma(n/2, 1/2)$.

Loi du χ^2

La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi $\gamma(n/2, 1/2)$.
Notation : χ^2_n

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi du χ^2

La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi $\gamma(n/2, 1/2)$.
Notation : χ^2_n
Propriété caractéristique :

Si $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendantes et $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_n$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi du χ^2

La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi $\gamma(n/2, 1/2)$.
Notation : χ^2_n
Propriété caractéristique :

Si $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendantes et $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_n$.

$E\left(\chi^2_n\right) = n$; $V\left(\chi^2_n\right) = 2n$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

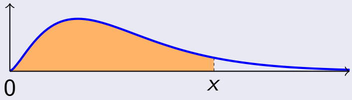
Loi du χ^2

La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi $\gamma(n/2, 1/2)$.
Notation : χ^2_n
Propriété caractéristique :

Si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ indépendantes et $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_n$.

$E\left(\chi^2_n\right) = n$; $V\left(\chi^2_n\right) = 2n$.

χ^2_5 : $P(X \leq x)$



Variable aléatoire continue : lois usuelles

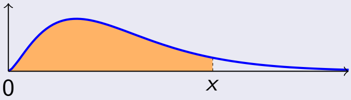
Loi du χ^2

La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi $\gamma(n/2, 1/2)$.
Notation : χ^2_n
Propriété caractéristique :

Si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ indépendantes et $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_n$.

$E\left(\chi^2_n\right) = n$; $V\left(\chi^2_n\right) = 2n$.

χ^2_5 : $P(X \leq x)$



Utilisation : tests d'hypothèse.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

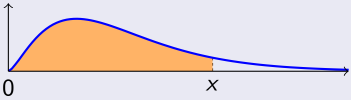
Loi du χ^2

La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi $\gamma(n/2, 1/2)$.
Notation : χ^2_n
Propriété caractéristique :

Si $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendantes et $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_n$.

$E\left(\chi^2_n\right) = n$; $V\left(\chi^2_n\right) = 2n$.

χ^2_5 : $P(X \leq x)$



Utilisation : tests d'hypothèse.
La table donne $x_{n;\alpha}$ tel que $P\left(\chi^2_n \leq x_{n;\alpha}\right) = \alpha$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

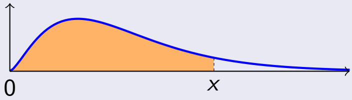
Loi du χ^2

La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi $\gamma(n/2, 1/2)$.
Notation : χ^2_n
Propriété caractéristique :

Si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ indépendantes et $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_n$.

$E\left(\chi^2_n\right) = n$; $V\left(\chi^2_n\right) = 2n$.

χ^2_5 : $P\,(X \leq x)$



Utilisation : tests d'hypothèse.
La table donne $x_{n;\alpha}$ tel que $P\left(\chi^2_n \leq x_{n;\alpha}\right) = \alpha$.
Exemple : $x_{5;0,05} = 1,145$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student $\mathcal{T}_n$

Loi de Student $\mathcal{T}_n$

On pose $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx$.

Loi de Student $\mathcal{T}_n$

On pose $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx$.

La densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Student à n degrés de liberté est $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi de Student $\mathcal{T}_n$

On pose $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx$.

La densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Student à n degrés de liberté est $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Notation : $X \sim \mathcal{T}_n$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student $\mathcal{T}_n$

On pose $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx$.

La densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Student à n degrés de liberté est $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Notation : $X \sim \mathcal{T}_n$.

Propriété : Si $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2_n$ indépendantes alors $\dfrac{U}{\sqrt{Y/n}} \sim \mathcal{T}_n$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student $\mathcal{T}_n$

On pose $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx$.

La densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Student à n degrés de liberté est $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Notation : $X \sim \mathcal{T}_n$.

Propriété : Si $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2_n$ indépendantes alors $\dfrac{U}{\sqrt{Y/n}} \sim \mathcal{T}_n$.

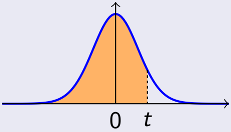
$E\left(\mathcal{T}_n\right) = 0$ pour $n \geq 2$; $V\left(\mathcal{T}_n\right) = \dfrac{n}{n-2}$ pour $n \geq 3$.

Loi de Student T_n

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student T_n

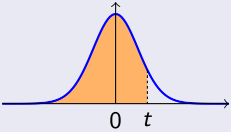
$\mathcal{T}_{49}$: $P\left(T_{49} \leq t\right)$



Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student T_n

$\mathcal{T}_{49}$: $P(T_{49} \leq t)$

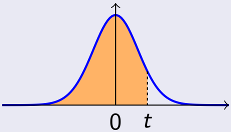


Utilisation : intervalle de confiance et tests d'hypothèse.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student T_n

$\mathcal{T}_{49}$: $P\left(T_{49} \leq t\right)$



Utilisation : intervalle de confiance et tests d'hypothèse.

Pseudonyme de William Sealy Gosset : statisticien britannique (1876-1937).

Loi de Student : remarques

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student : remarques

1. f est paire : la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student : remarques

1. f est paire : la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. On en déduit : $P(T_n \leq -t) = P(T_n > t) = 1 - P(T_n \leq t)$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi de Student : remarques

1. f est paire : la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. On en déduit : $P\left(T_n \leq -t\right) = P\left(T_n > t\right) = 1 - P\left(T_n \leq t\right)$.

Exemple : $P\left(T_5 \leq -2,015\right) = 1 - P\left(T_5 \leq 2.015\right) \approx 1 - 0,95 = 0,05$

Propriétés de l'espérance

Variable aléatoire continue

Propriétés de l'espérance

Soit X et Y deux variables aléatoires absolument continues dont l'espérance existe et a et b deux réels.

Variable aléatoire continue

Propriétés de l'espérance

Soit X et Y deux variables aléatoires absolument continues dont l'espérance existe et a et b deux réels.
$E(aX + bY)$ existe et $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Propriétés de l'espérance

Soit X et Y deux variables aléatoires absolument continues dont l'espérance existe et a et b deux réels.
$E(aX + bY)$ existe et $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Variable aléatoire continue

Propriétés de l'espérance

Soit X et Y deux variables aléatoires absolument continues dont l'espérance existe et a et b deux réels.
$E(aX + bY)$ existe et $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.
Si X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes alors
$E(X_1X_2 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2) \cdots E(X_n)$.

Variable aléatoire continue

Propriétés de la variance

Variable aléatoire continue

Propriétés de la variance

Soit X et Y (respectivement X_1, X_2, ..., X_n) deux (respectivement n) variables aléatoires absolument continues indépendantes.

Variable aléatoire continue

Propriétés de la variance

Soit X et Y (respectivement X_1, X_2, ..., X_n) deux (respectivement n) variables aléatoires absolument continues indépendantes.
Alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Variable aléatoire continue

Propriétés de la variance

Soit X et Y (respectivement X_1, X_2, ..., X_n) deux (respectivement n) variables aléatoires absolument continues indépendantes.

Alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

$V(X_1 + X_2 + \cdots X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$

Loi normale : propriété

Loi normale : propriété

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi normale $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$,..., $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n)$ et α_i des réels alors

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi normale $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$,..., $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n)$ et α_i des réels alors $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi normale $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$,..., $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n)$ et α_i des réels alors $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$

avec $m = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \cdots \alpha_n m_n$

Variable aléatoire continue

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi normale : propriété

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi normale $\mathcal{N}(m_1,\, \sigma_1)$, $\mathcal{N}(m_2,\, \sigma_2)$,..., $\mathcal{N}(m_n,\, \sigma_n)$ et α_i des réels alors $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n \sim \mathcal{N}(m,\, \sigma)$

avec $m = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \cdots \alpha_n m_n$ et $\sigma = \sqrt{\alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 \sigma_n^2}$

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété

Loi normale : propriété

Cas particulier important

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété

Cas particulier important
Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ alors

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété

Cas particulier important
Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ alors $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{N}(nm, \sqrt{n}\sigma)$

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété

Cas particulier important

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ alors $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{N}(nm, \sqrt{n}\sigma)$

et $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \sim \mathcal{N}(m, \sigma/\sqrt{n})$

Loi normale : propriété

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété

Exemple : la contenance (en grammes) d'une boîte de céréales suit la loi normale $\mathcal{N}(750, 5)$.

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété

Exemple : la contenance (en grammes) d'une boîte de céréales suit la loi normale $\mathcal{N}(750, 5)$.
On prend au hasard $n = 10$ boîtes. On suppose que la contenance de la i-ème boîte est une variable aléatoire $X_i \sim \mathcal{N}(750, 5)$ et que les X_i sont indépendantes.

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété

Exemple : la contenance (en grammes) d'une boîte de céréales suit la loi normale $\mathcal{N}(750, 5)$.

On prend au hasard $n = 10$ boîtes. On suppose que la contenance de la i-ème boîte est une variable aléatoire $X_i \sim \mathcal{N}(750, 5)$ et que les X_i sont indépendantes.

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim \mathcal{N}(750 \times 10, 5\sqrt{10})$$

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété

Exemple : la contenance (en grammes) d'une boîte de céréales suit la loi normale $\mathcal{N}(750, 5)$.
On prend au hasard $n = 10$ boîtes. On suppose que la contenance de la i-ème boîte est une variable aléatoire $X_i \sim \mathcal{N}(750, 5)$ et que les X_i sont indépendantes.

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim \mathcal{N}(750 \times 10, 5\sqrt{10})$$

$$\overline{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i \sim \mathcal{N}(750, 5/\sqrt{10})$$

Variable aléatoire continue

Loi du χ^2 : propriété

Variable aléatoire continue

Loi du χ^2 : propriété

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ alors

Variable aléatoire continue

Loi du χ^2 : propriété

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

Variable aléatoire continue

Loi du χ^2 : propriété

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

Remarques :

Loi du χ^2 : propriété

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

Remarques :
Les variables $X_i - \overline{X}$ ne sont pas indépendantes (somme nulle), d'où la perte d'un degré de liberté.

Variable aléatoire continue

Loi du χ^2 : propriété

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,\,1)$ alors $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

Remarques :
Les variables $X_i - \overline{X}$ ne sont pas indépendantes (somme nulle), d'où la perte d'un degré de liberté.

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \sim \mathcal{N}(0,\,1/\sqrt{n})$$

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration (cas discret fini)

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration (cas discret fini)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration (cas discret fini)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i)$$

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration (cas discret fini)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i)$$

$$\geq \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i)$$

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration (cas discret fini)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i)$$

$$\geq \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i) \geq \sum_{x_i \geq a} a P(X = x_i)$$

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration (cas discret fini)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i)$$

$$\geq \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i) \geq \sum_{x_i \geq a} a P(X = x_i) = a \sum_{x_i \geq a} P(X = x_i)$$

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration (cas discret fini)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i)$$

$$\geq \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i) \geq \sum_{x_i \geq a} a P(X = x_i) = a \sum_{x_i \geq a} P(X = x_i) = aP(X \geq a)$$

Loi des grands nombres

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration (cas discret fini)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i)$$

$$\geq \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i) \geq \sum_{x_i \geq a} a P(X = x_i) = a \sum_{x_i \geq a} P(X = x_i) = aP(X \geq a)$$

Andreï Andreïevitch Markov (1856-1922) : mathématicien russe.

Loi des grands nombres

Exemple

Loi des grands nombres

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2.

Loi des grands nombres

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2. La probabilité qu'il y ait trois absents au moins lors du prochain cours vérifie :

Loi des grands nombres

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2. La probabilité qu'il y ait trois absents au moins lors du prochain cours vérifie : $P(X \geq 3) \leq \dfrac{2}{3}$.

Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une variable aléatoire et a un réel strictement positif.

Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une variable aléatoire et a un réel strictement positif.

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une variable aléatoire et a un réel strictement positif.

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Démonstration (cas discret fini)

Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une variable aléatoire et a un réel strictement positif.

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Démonstration (cas discret fini)

Dans l'inégalité de Markov, on remplace X par $(X - E(X))^2$ et a par a^2.

Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une variable aléatoire et a un réel strictement positif.

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Démonstration (cas discret fini)

Dans l'inégalité de Markov, on remplace X par $(X - E(X))^2$ et a par a^2.

On obtient : $P((X - E(X))^2 \geq a^2) \leq \dfrac{E((X - E(X))^2)}{a^2}$ soit

Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une variable aléatoire et a un réel strictement positif.

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Démonstration (cas discret fini)

Dans l'inégalité de Markov, on remplace X par $(X - E(X))^2$ et a par a^2.

On obtient : $P((X - E(X))^2 \geq a^2) \leq \dfrac{E((X - E(X))^2)}{a^2}$ soit

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une variable aléatoire et a un réel strictement positif.

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Démonstration (cas discret fini)

Dans l'inégalité de Markov, on remplace X par $(X - E(X))^2$ et a par a^2.

On obtient : $P((X - E(X))^2 \geq a^2) \leq \dfrac{E((X - E(X))^2)}{a^2}$ soit

$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$.

Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894) : mathématicien russe.

Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une variable aléatoire et a un réel strictement positif.

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Démonstration (cas discret fini)

Dans l'inégalité de Markov, on remplace X par $(X - E(X))^2$ et a par a^2.

On obtient : $P((X - E(X))^2 \geq a^2) \leq \dfrac{E((X - E(X))^2)}{a^2}$ soit

$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$.

Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894) : mathématicien russe.

Irénée-Jules Bienaymé (1796-1878) : mathématicien français.

Loi des grands nombres

Exemple

Loi des grands nombres

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2. La variance est de 1.

Loi des grands nombres

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2. La variance est de 1.

En écrivant : $P(|X-2| \geq 2) \leq \dfrac{1}{2^2}$, la probabilité qu'il y ait entre un et trois absents lors du prochain cours vérifie :

Loi des grands nombres

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2. La variance est de 1.
En écrivant : $P(|X-2| \geq 2) \leq \frac{1}{2^2}$, la probabilité qu'il y ait entre un et trois absents lors du prochain cours vérifie :
$P\,(1 \leq X \leq 3)$

Loi des grands nombres

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2. La variance est de 1.

En écrivant : $P(|X-2| \geq 2) \leq \dfrac{1}{2^2}$, la probabilité qu'il y ait entre un et trois absents lors du prochain cours vérifie :

$P\left(1 \leq X \leq 3\right) = P(-1 \leq X - 2 \leq 1)$

Loi des grands nombres

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2. La variance est de 1.

En écrivant : $P(|X-2| \geq 2) \leq \dfrac{1}{2^2}$, la probabilité qu'il y ait entre un et trois absents lors du prochain cours vérifie :

$P\,(1 \leq X \leq 3) \; = P(-1 \leq X-2 \leq 1) = P(|X-2| \leq 1)$

Loi des grands nombres

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2. La variance est de 1.

En écrivant : $P(|X-2| \geq 2) \leq \dfrac{1}{2^2}$, la probabilité qu'il y ait entre un et trois absents lors du prochain cours vérifie :

$P(1 \leq X \leq 3) = P(-1 \leq X-2 \leq 1) = P(|X-2| \leq 1)$
$= 1 - P(|X-2| \geq 2) \geq 1 - \dfrac{1}{2^2}$

Loi des grands nombres

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2. La variance est de 1.
En écrivant : $P(|X-2| \geq 2) \leq \dfrac{1}{2^2}$, la probabilité qu'il y ait entre un et trois absents lors du prochain cours vérifie :
$P\left(1 \leq X \leq 3\right) = P(-1 \leq X-2 \leq 1) = P(|X-2| \leq 1)$
$= 1 - P(|X-2| \geq 2) \geq 1 - \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{3}{4}.$

Loi des grands nombres

Loi faible des grands nombres

Loi des grands nombres

Loi faible des grands nombres

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes relatives à une suite de n expériences aléatoires identiques.

Loi des grands nombres

Loi faible des grands nombres

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes relatives à une suite de n expériences aléatoires identiques. L'espérance commune est notée m et l'écart-type σ. Alors

Loi des grands nombres

Loi faible des grands nombres

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes relatives à une suite de n expériences aléatoires identiques. L'espérance commune est notée m et l'écart-type σ. Alors

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-m\right|\geq\epsilon\right)\leq\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

Loi des grands nombres

Loi faible des grands nombres

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes relatives à une suite de n expériences aléatoires identiques. L'espérance commune est notée m et l'écart-type σ. Alors

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-m\right|\geq\epsilon\right)\leq\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-m\right|\geq\epsilon\right)=0$$

Loi des grands nombres

Démonstration

Loi des grands nombres

Démonstration

Dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on remplace X par $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et a par ϵ.

Loi des grands nombres

Démonstration

Dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on remplace X par $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et a par ϵ.

Par ailleurs,

Loi des grands nombres

Démonstration

Dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on remplace X par $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et a par ϵ.

Par ailleurs,

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\right)$$

Loi des grands nombres

Démonstration

Dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on remplace X par $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et a par ϵ.

Par ailleurs,

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\right)$$

$= \dfrac{1}{n}.n.m = m$ et

Loi des grands nombres

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Démonstration

Dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on remplace X par $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et a par ϵ.

Par ailleurs,

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\right)$$

$= \dfrac{1}{n}.n.m = m$ et

$$V\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\right)$$

Loi des grands nombres

Démonstration

Dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on remplace X par $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et a par ϵ.

Par ailleurs,

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\right)$$

$$= \frac{1}{n}.n.m = m \text{ et}$$

$$V\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}.n.\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Loi des grands nombres

Exemple

Loi des grands nombres

Exemple

On lance n fois une pièce parfaite dont les faces sont numérotées 0 et 1. On note X_i le numéro relevé au i-ème lancer.

Loi des grands nombres

Exemple

On lance n fois une pièce parfaite dont les faces sont numérotées 0 et 1.
On note X_i le numéro relevé au i-ème lancer.
$X_i \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$.

Loi des grands nombres

Exemple

On lance n fois une pièce parfaite dont les faces sont numérotées 0 et 1.
On note X_i le numéro relevé au i-ème lancer.
$X_i \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$.
$E(X_i) = \frac{1}{2}$, $V(X_i) = \frac{1}{2}.(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

Loi des grands nombres

Exemple

On lance n fois une pièce parfaite dont les faces sont numérotées 0 et 1.
On note X_i le numéro relevé au i-ème lancer.
$X_i \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$.
$E(X_i) = \frac{1}{2}$, $V(X_i) = \frac{1}{2}.(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$
On obtient alors

Loi des grands nombres

Exemple

On lance n fois une pièce parfaite dont les faces sont numérotées 0 et 1.
On note X_i le numéro relevé au i-ème lancer.
$X_i \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$.
$E(X_i) = \frac{1}{2}$, $V(X_i) = \frac{1}{2}.(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$
On obtient alors

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

Loi des grands nombres

Application

Loi des grands nombres

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Application

On se demande à partir de quelle valeur de n on a

Loi des grands nombres

Application

On se demande à partir de quelle valeur de n on a

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq 0,01\right)\leq 0,05$$

Loi des grands nombres

Application

On se demande à partir de quelle valeur de n on a

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq 0,01\right) \leq 0,05$$

Il suffit de prendre n tel que $\dfrac{1}{4n.0,01^2} \leq 0,05$,

Loi des grands nombres

Application

On se demande à partir de quelle valeur de n on a

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq 0,01\right)\leq 0,05$$

Il suffit de prendre n tel que $\dfrac{1}{4n.0,01^2}\leq 0,05$,

c'est-à-dire $n\geq\dfrac{1}{4.0,05.0,01^2}=50\,000$.

Loi des grands nombres

Application

On se demande à partir de quelle valeur de n on a

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{1}{2}\right| \geq 0,01\right) \leq 0,05$$

Il suffit de prendre n tel que $\dfrac{1}{4n.0,01^2} \leq 0,05$,

c'est-à-dire $n \geq \dfrac{1}{4.0,05.0,01^2} = 50\,000$.

On dit que la fréquence d'apparition de 1 s'écarte de sa probabilité $\dfrac{1}{2}$ d'au plus 1 % au seuil de risque de 5 %.

Loi des grands nombres

Théorème central limite

Loi des grands nombres

Théorème central limite

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de moyenne m et d'écart-type σ.

Loi des grands nombres

Théorème central limite

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de moyenne m et d'écart-type σ.
La loi de la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ converge vers la loi normale de moyenne nm et d'écart-type $\sqrt{n}\sigma$

Loi des grands nombres

Théorème central limite

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de moyenne m et d'écart-type σ.
La loi de la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ converge vers la loi normale de moyenne nm et d'écart-type $\sqrt{n}\sigma$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \leq a\right) = \int_{-\infty}^{a} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

Loi des grands nombres

Autre formulation

Loi des grands nombres

Autre formulation

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de moyenne m et d'écart-type σ.

Loi des grands nombres

Autre formulation

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de moyenne m et d'écart-type σ.

La loi de la variable aléatoire $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$

Loi des grands nombres

Autre formulation

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de moyenne m et d'écart-type σ.

La loi de la variable aléatoire $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ converge vers la loi normale de moyenne m et d'écart-type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$:

Loi des grands nombres

Autre formulation

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de moyenne m et d'écart-type σ.

La loi de la variable aléatoire $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ converge vers la loi normale de moyenne m et d'écart-type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{\overline{X_n} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a\right) = \int_{-\infty}^{a} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

Loi des grands nombres

Autre formulation

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de moyenne m et d'écart-type σ.

La loi de la variable aléatoire $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ converge vers la loi normale de moyenne m et d'écart-type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{\overline{X_n} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a\right) = \int_{-\infty}^{a} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

Dans la pratique, on peut utiliser l'approximation qui en résulte pour $n \geq 30$.

Loi des grands nombres

Exemple 1

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute.

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute. On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute.
On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.
Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute.
On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.
Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.
$E(X_i) = 2, \; V(X_i) = 1.$

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute. On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.
Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.
$E(X_i) = 2,\ V(X_i) = 1.$
La loi de la variable aléatoire $S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ est approchée par la loi normale de moyenne $100.2 = 200$ et d'écart-type $\sqrt{100.1} = 10$:

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute. On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.

Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.

$E(X_i) = 2,\ V(X_i) = 1.$

La loi de la variable aléatoire $S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ est approchée par la loi normale de moyenne $100.2 = 200$ et d'écart-type $\sqrt{100.1} = 10$:

$P\left(S_{100} \leq 180\right)$

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute.
On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.
Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.
$E(X_i) = 2,\ V(X_i) = 1.$
La loi de la variable aléatoire $S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ est approchée par la loi normale de moyenne $100.2 = 200$ et d'écart-type $\sqrt{100.1} = 10$:

$$P\left(S_{100} \leq 180\right) = P\left(\frac{S_{100} - 200}{10} \leq \frac{180 - 200}{10}\right)$$

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute. On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.

Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.

$E(X_i) = 2,\ V(X_i) = 1.$

La loi de la variable aléatoire $S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ est approchée par la loi normale de moyenne $100.2 = 200$ et d'écart-type $\sqrt{100.1} = 10$:

$$P\left(S_{100} \leq 180\right) = P\left(\frac{S_{100} - 200}{10} \leq \frac{180 - 200}{10}\right) = P\left(T \leq -2\right)$$

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute. On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.
Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.
$E(X_i) = 2,\ V(X_i) = 1.$
La loi de la variable aléatoire $S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ est approchée par la loi normale de moyenne $100.2 = 200$ et d'écart-type $\sqrt{100.1} = 10$:

$$P\left(S_{100} \leq 180\right) = P\left(\frac{S_{100} - 200}{10} \leq \frac{180 - 200}{10}\right) = P\left(T \leq -2\right)$$
$$= F(-2) = 1 - F(2)$$

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute. On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.

Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.

$E(X_i) = 2,\ V(X_i) = 1$.

La loi de la variable aléatoire $S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ est approchée par la loi normale de moyenne $100.2 = 200$ et d'écart-type $\sqrt{100.1} = 10$:

$$P\left(S_{100} \leq 180\right) = P\left(\frac{S_{100} - 200}{10} \leq \frac{180 - 200}{10}\right) = P\left(T \leq -2\right)$$

$$= F(-2) = 1 - F(2) \approx 1 - 0,9772$$

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute. On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.

Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.

$E(X_i) = 2, \; V(X_i) = 1.$

La loi de la variable aléatoire $S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ est approchée par la loi normale de moyenne $100.2 = 200$ et d'écart-type $\sqrt{100.1} = 10$:

$$P\left(S_{100} \leq 180\right) = P\left(\frac{S_{100} - 200}{10} \leq \frac{180-200}{10}\right) = P\left(T \leq -2\right)$$

$$= F(-2) = 1 - F(2) \approx 1 - 0,9772 \approx 0,0228.$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50}$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50} = \frac{S_{50}}{50} \sim \mathcal{N}(75, \frac{1}{\sqrt{50}})$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50} = \frac{S_{50}}{50} \sim \mathcal{N}(75, \frac{1}{\sqrt{50}})$$

$$P\left(74,5 \leq \overline{X_{50}} \leq 75,5\right)$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50} = \frac{S_{50}}{50} \sim \mathcal{N}(75,\ \frac{1}{\sqrt{50}})$$

$$P\left(74,5 \leq \overline{X_{50}} \leq 75,5\right) = P\left(\frac{74,5-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75,5-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

Loi des grands nombres

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50} = \frac{S_{50}}{50} \sim \mathcal{N}(75, \frac{1}{\sqrt{50}})$$

$$P\left(74,5 \leq \overline{X_{50}} \leq 75,5\right) = P\left(\frac{74,5-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75,5-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= P\left(-0,5.\sqrt{50} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq 0,5.\sqrt{50}\right)$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50} = \frac{S_{50}}{50} \sim \mathcal{N}(75, \frac{1}{\sqrt{50}})$$

$$P\left(74,5 \leq \overline{X_{50}} \leq 75,5\right) = P\left(\frac{74,5-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75,5-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= P\left(-0,5.\sqrt{50} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq 0,5.\sqrt{50}\right)$$

$$= 2F\left(0,5.\sqrt{50}\right) - 1$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50} = \frac{S_{50}}{50} \sim \mathcal{N}(75,\ \frac{1}{\sqrt{50}})$$

$$P\left(74,5 \leq \overline{X_{50}} \leq 75,5\right) = P\left(\frac{74,5-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75,5-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= P\left(-0,5.\sqrt{50} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq 0,5.\sqrt{50}\right)$$

$$= 2F\left(0,5.\sqrt{50}\right) - 1 = 2F\left(3,54\right) - 1$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50} = \frac{S_{50}}{50} \sim \mathcal{N}(75, \frac{1}{\sqrt{50}})$$

$$P\left(74,5 \leq \overline{X_{50}} \leq 75,5\right) = P\left(\frac{74,5-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75,5-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= P\left(-0,5.\sqrt{50} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq 0,5.\sqrt{50}\right)$$

$$= 2F\left(0,5.\sqrt{50}\right) - 1 = 2F\left(3,54\right) - 1 \approx 2.0,9998 - 1 = 0,9996.$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Loi des grands nombres

Exemple 2

$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right)$

Loi des grands nombres

Exemple 2

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right)$$

Loi des grands nombres

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

- Plan
- Variable aléatoire
  - Variable aléatoire réelle
  - Variable aléatoire discrète
  - Variable aléatoire continue
- Loi des grands nombres
- Intervalle de fluctuation
- Annexe

Exemple 2

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right) = 1 - P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75 - 75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right) = 1 - P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$
$$= 1 - P(T \leq 0) =$$

Loi des grands nombres

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Exemple 2

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right) = 1 - P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$
$$= 1 - P(T \leq 0) = 0,5.$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right) = 1 - P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75 - 75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= 1 - P(T \leq 0) = 0,5.$$

$$P\left(\overline{X_{50}} \leq 74\right)$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right) = 1 - P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75 - 75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= 1 - P(T \leq 0) = 0,5.$$

$$P\left(\overline{X_{50}} \leq 74\right) = P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{74 - 75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

Loi des grands nombres

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Exemple 2

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right) = 1 - P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= 1 - P(T \leq 0) = 0,5.$$

$$P\left(\overline{X_{50}} \leq 74\right) = P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{74-75}{1/\sqrt{50}}\right) = P(T \leq -\sqrt{50})$$

Loi des grands nombres

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Exemple 2

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right) = 1 - P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$
$$= 1 - P(T \leq 0) = 0,5.$$
$$P\left(\overline{X_{50}} \leq 74\right) = P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{74-75}{1/\sqrt{50}}\right) = P(T \leq -\sqrt{50})$$
$$= P(T \leq -7,07)$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right) = 1 - P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= 1 - P(T \leq 0) = 0,5.$$

$$P\left(\overline{X_{50}} \leq 74\right) = P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{74-75}{1/\sqrt{50}}\right) = P(T \leq -\sqrt{50})$$

$$= P(T \leq -7,07) \approx 0.$$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : événements non rares

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : événements non rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $np \geq 5$ et $nq \geq 5$,

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : événements non rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $np \geq 5$ et $nq \geq 5$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : événements non rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $np \geq 5$ et $nq \geq 5$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$.

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : événements non rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $np \geq 5$ et $nq \geq 5$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$.

Exemple

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : événements non rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $np \geq 5$ et $nq \geq 5$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$.

Exemple

$\mathcal{B}(50;\ 0,2)$ approchée par $\mathcal{N}(10,\ \sqrt{8})$

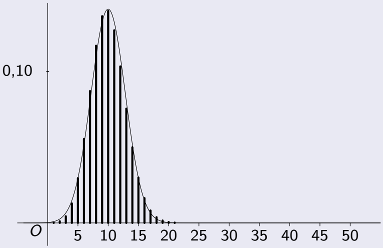
Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : événements non rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $np \geq 5$ et $nq \geq 5$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$.

Exemple

$\mathcal{B}(50;\ 0,2)$ approchée par $\mathcal{N}(10,\ \sqrt{8})$



Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : événements rares

Approximation d'une loi par une autre

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : événements rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : événements rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : événements rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ suit approximativement la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$.

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : événements rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ suit approximativement la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$.

$$C_n^i p^i q^{n-i} \approx e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}$$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : événements rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ suit approximativement la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$.

$$C_n^i p^i q^{n-i} \approx e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}$$

Exemple

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : événements rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ suit approximativement la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$.

$$C_n^i p^i q^{n-i} \approx e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}$$

Exemple

$\mathcal{B}(50,\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

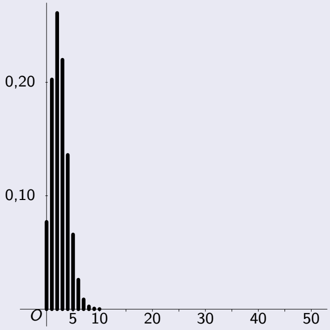
Approximation d'une loi par une autre

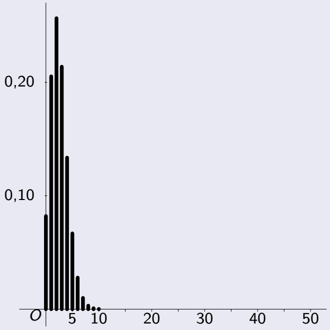
Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

$\mathcal{B}(50;\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

$\mathcal{B}(50;\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$





Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Pour $\lambda \geq 10$, une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Pour $\lambda \geq 10$, une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Exemple

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Pour $\lambda \geq 10$, une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Exemple

$\mathcal{P}(20)$ approchée par $\mathcal{N}(20, \sqrt{20})$

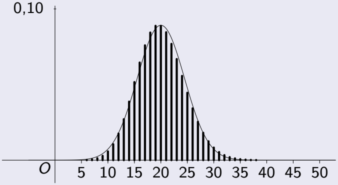
Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Pour $\lambda \geq 10$, une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Exemple

$\mathcal{P}(20)$ approchée par $\mathcal{N}(20, \sqrt{20})$



Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

$X \sim \mathcal{B}(n, p), \; k \in \mathbb{Z}$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $k \in \mathbb{Z}$
La correction de continuité de Yates consiste à écrire
$P(X = k) = P(k - 0,5 \leq X \leq k + 0,5)$.

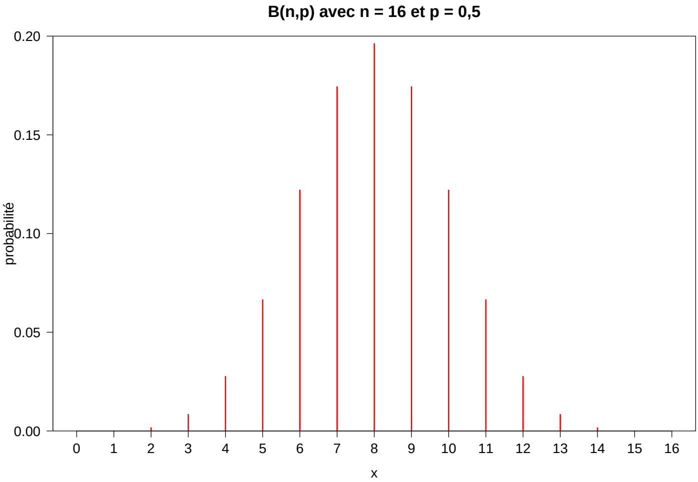
Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

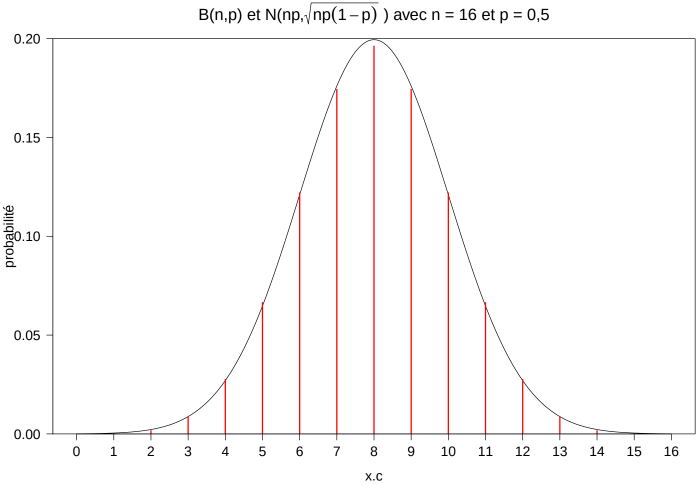
$X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $k \in \mathbb{Z}$
La correction de continuité de Yates consiste à écrire
$P(X = k) = P(k - 0,5 \leq X \leq k + 0,5)$.

Frank Yates (né à Manchester en 1902, décédé en 1994) : mathématicien britannique

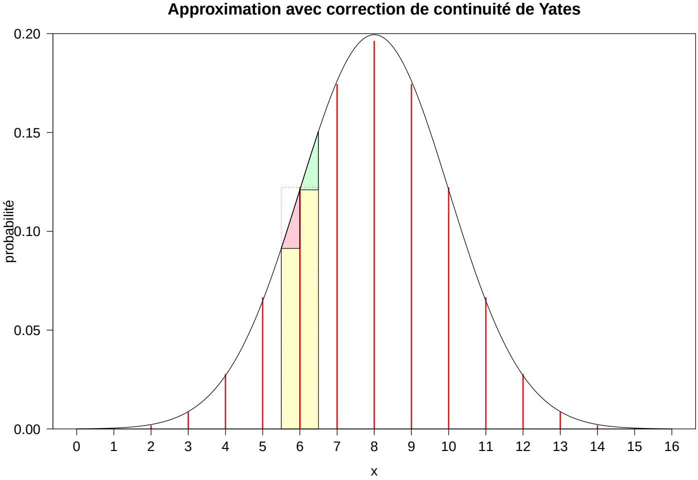
Approximation d'une loi par une autre



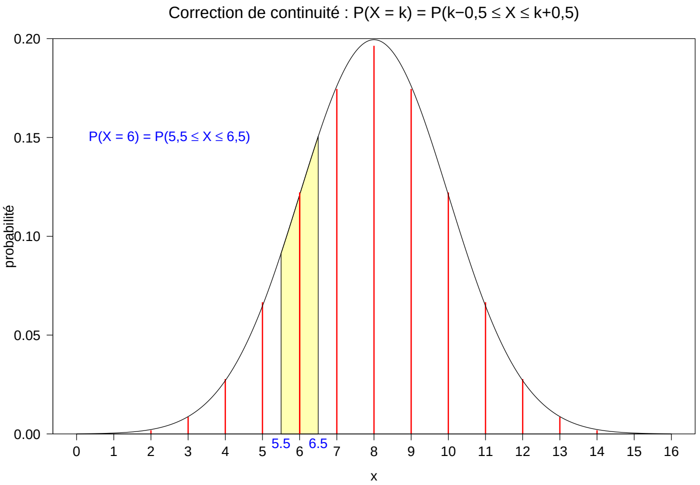
Approximation d'une loi par une autre



Approximation d'une loi par une autre



Approximation d'une loi par une autre



Approximation d'une loi par une autre

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

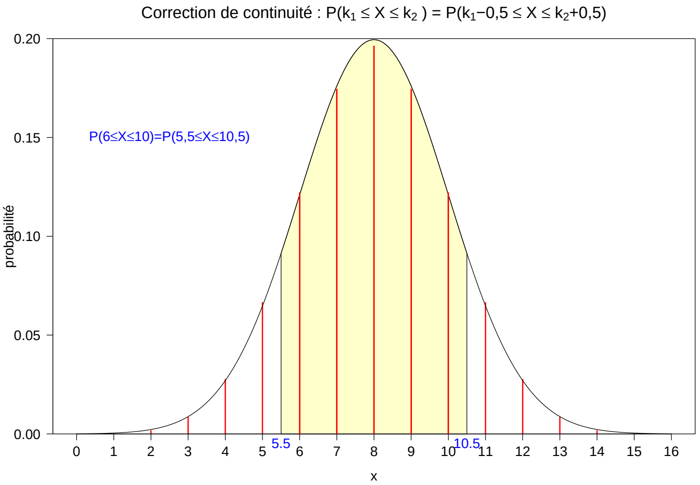
Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

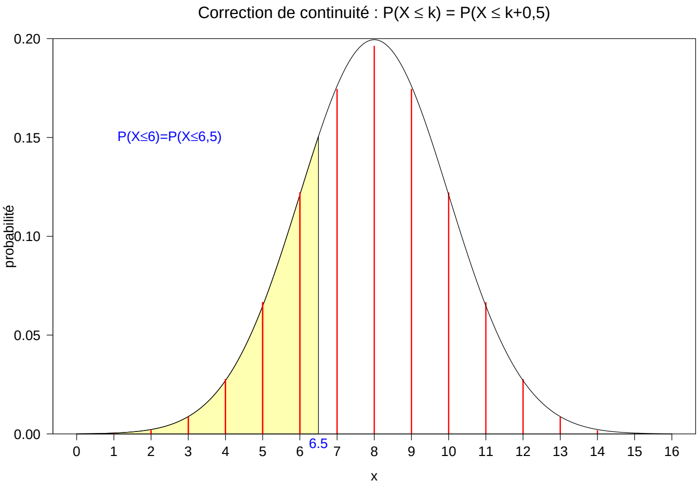
Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

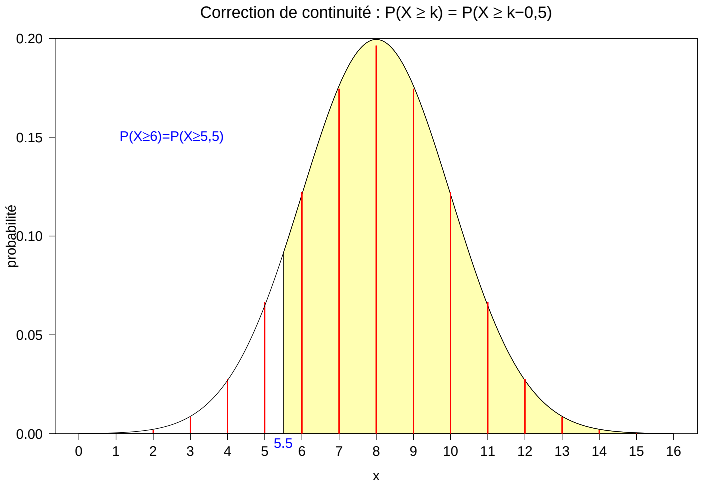
Annexe



Approximation d'une loi par une autre



Approximation d'une loi par une autre



Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16;\ 0,5)$

Approximation d'une loi par une autre

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

- Plan
- Variable aléatoire
  - Variable aléatoire réelle
  - Variable aléatoire discrète
  - Variable aléatoire continue
- Loi des grands nombres
- Intervalle de fluctuation
- Annexe

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16; 0,5)$
$P(X = 6) = P(6 - 0,5 \leq X \leq 6 + 0,5) = P(5,5 \leq X \leq 6,5)$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16;\, 0,5)$

$P(X = 6) = P(6 - 0,5 \leq X \leq 6 + 0,5) = P(5,5 \leq X \leq 6,5)$

En posant $X' \sim \mathcal{N}\left(16 \times 0,5;\, \sqrt{16 \times 0,5 \times 0,5}\right) = \mathcal{N}(8;\, 2)$:

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16; 0,5)$

$P(X = 6) = P(6 - 0,5 \leq X \leq 6 + 0,5) = P(5,5 \leq X \leq 6,5)$

En posant $X' \sim \mathcal{N}\left(16 \times 0,5; \sqrt{16 \times 0,5 \times 0,5}\right) = \mathcal{N}(8; 2)$:

$$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P\left(\frac{5,5-8}{2} \leq \frac{X'-8}{2} \leq \frac{6,5-8}{2}\right)$$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16;\ 0,5)$

$P(X=6) = P(6-0,5 \leq X \leq 6+0,5) = P(5,5 \leq X \leq 6,5)$

En posant $X' \sim \mathcal{N}\left(16 \times 0,5;\ \sqrt{16 \times 0,5 \times 0,5}\right) = \mathcal{N}(8;\ 2)$:

$$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P\left(\frac{5,5-8}{2} \leq \frac{X'-8}{2} \leq \frac{6,5-8}{2}\right)$$

$$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P(-1,25 \leq T \leq -0,75)$$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16;\ 0,5)$

$P(X = 6) = P(6 - 0,5 \leq X \leq 6 + 0,5) = P(5,5 \leq X \leq 6,5)$

En posant $X' \sim \mathcal{N}\left(16 \times 0,5;\ \sqrt{16 \times 0,5 \times 0,5}\right) = \mathcal{N}(8;\ 2)$:

$$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P\left(\frac{5,5-8}{2} \leq \frac{X'-8}{2} \leq \frac{6,5-8}{2}\right)$$

$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P(-1,25 \leq T \leq -0,75)$

$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) \approx 0,1210$ alors que $P(X = 6) \approx 0,1221$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16;\ 0,5)$

$P(X = 6) = P(6 - 0,5 \leq X \leq 6 + 0,5) = P(5,5 \leq X \leq 6,5)$

En posant $X' \sim \mathcal{N}\left(16 \times 0,5;\ \sqrt{16 \times 0,5 \times 0,5}\right) = \mathcal{N}(8;\ 2)$:

$$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P\left(\frac{5,5-8}{2} \leq \frac{X'-8}{2} \leq \frac{6,5-8}{2}\right)$$

$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P(-1,25 \leq T \leq -0,75)$

$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) \approx 0,1210$ alors que $P(X = 6) \approx 0,1221$

De même, $P(6 \leq X \leq 10) \approx 0,7899$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16; 0,5)$

$P(X = 6) = P(6 - 0,5 \leq X \leq 6 + 0,5) = P(5,5 \leq X \leq 6,5)$

En posant $X' \sim \mathcal{N}\left(16 \times 0,5; \sqrt{16 \times 0,5 \times 0,5}\right) = \mathcal{N}(8; 2)$:

$$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P\left(\frac{5,5-8}{2} \leq \frac{X'-8}{2} \leq \frac{6,5-8}{2}\right)$$

$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P(-1,25 \leq T \leq -0,75)$

$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) \approx 0,1210$ alors que $P(X = 6) \approx 0,1221$

De même, $P(6 \leq X \leq 10) \approx 0,7899$

Par l'approximation : $P(5,5 \leq X' \leq 10,5) \approx 0,7887$.

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16;\, 0,5)$
$P(X = 6) = P(6 - 0,5 \leq X \leq 6 + 0,5) = P(5,5 \leq X \leq 6,5)$
En posant $X' \sim \mathcal{N}\left(16 \times 0,5;\, \sqrt{16 \times 0,5 \times 0,5}\right) = \mathcal{N}(8;\, 2)$:

$$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P\left(\frac{5,5-8}{2} \leq \frac{X'-8}{2} \leq \frac{6,5-8}{2}\right)$$

$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P(-1,25 \leq T \leq -0,75)$
$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) \approx 0,1210$ alors que $P(X = 6) \approx 0,1221$
De même, $P(6 \leq X \leq 10) \approx 0,7899$
Par l'approximation : $P(5,5 \leq X' \leq 10,5) \approx 0,7887$.
Approximation d'autant meilleure que n est grand ($n \geq 30$), $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i ($1 \leq i \leq n$) la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i $(1 \leq i \leq n)$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face. $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$. Les X_i sont indépendantes.

Intervalle de fluctuation

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i $(1 \leq i \leq n)$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face. $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$. Les X_i sont indépendantes.

On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (nombre de piles) et $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ (fréquence de piles).

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i $(1 \leq i \leq n)$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face. $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$. Les X_i sont indépendantes.

On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (nombre de piles) et $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ (fréquence de piles).

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i $(1 \leq i \leq n)$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face. $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$. Les X_i sont indépendantes.

On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (nombre de piles) et $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ (fréquence de piles).

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

On note $\alpha \in [0, 1]$ (seuil de risque).

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i ($1 \leq i \leq n$) la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face. $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$. Les X_i sont indépendantes.

On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (nombre de piles) et $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ (fréquence de piles).

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

On note $\alpha \in [0, 1]$ (seuil de risque).

Le plus petit intervalle (au sens de l'inclusion) $[\![n_1, n_2]\!]$ tel que $P(X < n_1) \leq \frac{\alpha}{2}$ et $P(X > n_2) \leq \frac{\alpha}{2}$ est appelé intervalle de fluctuation de X au seuil de risque α (ou de niveau $1 - \alpha$).

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i $(1 \leq i \leq n)$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face. $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$. Les X_i sont indépendantes.

On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (nombre de piles) et $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ (fréquence de piles).

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

On note $\alpha \in [0, 1]$ (seuil de risque).

Le plus petit intervalle (au sens de l'inclusion) $[\![n_1, n_2]\!]$ tel que $P(X < n_1) \leq \frac{\alpha}{2}$ et $P(X > n_2) \leq \frac{\alpha}{2}$ est appelé intervalle de fluctuation de X au seuil de risque α (ou de niveau $1 - \alpha$).

On a alors $P(n_1 \leq X \leq n_2) \geq 1 - \alpha$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i $(1 \leq i \leq n)$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face. $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$. Les X_i sont indépendantes.

On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (nombre de piles) et $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ (fréquence de piles).

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

On note $\alpha \in [0, 1]$ (seuil de risque).

Le plus petit intervalle (au sens de l'inclusion) $[\![n_1, n_2]\!]$ tel que $P(X < n_1) \leq \frac{\alpha}{2}$ et $P(X > n_2) \leq \frac{\alpha}{2}$ est appelé intervalle de fluctuation de X au seuil de risque α (ou de niveau $1 - \alpha$).

On a alors $P(n_1 \leq X \leq n_2) \geq 1 - \alpha$.

$\left[\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}\right]$ est l'intervalle de fluctuation associé de $\overline{X}$ au seuil de risque α.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i $(1 \leq i \leq n)$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face. $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$. Les X_i sont indépendantes.

On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (nombre de piles) et $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ (fréquence de piles).

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

On note $\alpha \in [0, 1]$ (seuil de risque).

Le plus petit intervalle (au sens de l'inclusion) $[\![n_1, n_2]\!]$ tel que $P(X < n_1) \leq \frac{\alpha}{2}$ et $P(X > n_2) \leq \frac{\alpha}{2}$ est appelé intervalle de fluctuation de X au seuil de risque α (ou de niveau $1 - \alpha$).

On a alors $P(n_1 \leq X \leq n_2) \geq 1 - \alpha$.

$\left[\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}\right]$ est l'intervalle de fluctuation associé de $\overline{X}$ au seuil de risque α.

On vérifie $P\left(n_1 \leq \overline{X} \leq n_2\right) \geq 1 - \alpha$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

En prenant $F(i) = P(X \leq i)$ (fonction de répartition, $0 \leq i \leq n$),

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

En prenant $F(i) = P(X \leq i)$ (fonction de répartition, $0 \leq i \leq n$), n_1 et n_2 sont les entiers définis par :

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

En prenant $F(i) = P(X \leq i)$ (fonction de répartition, $0 \leq i \leq n$), n_1 et n_2 sont les entiers définis par :

1. $F(n_1 - 1) \leq \frac{\alpha}{2}$ et $F(n_1) > \frac{\alpha}{2}$,

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

En prenant $F(i) = P(X \leq i)$ (fonction de répartition, $0 \leq i \leq n$), n_1 et n_2 sont les entiers définis par :

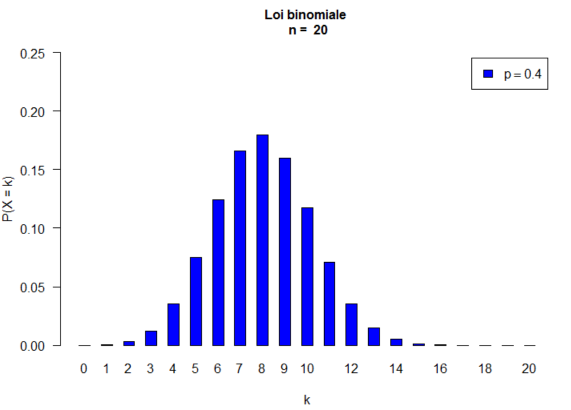
1. $F(n_1 - 1) \leq \dfrac{\alpha}{2}$ et $F(n_1) > \dfrac{\alpha}{2}$,
2. $F(n_2 - 1) < 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ et $F(n_2) \geq 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $p = 0,4$, $n = 20$, $\alpha = 0,05$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $p = 0,4,\ n = 20,\ \alpha = 0,05$.
$F(3) = P\left(X \leq 3\right) = 0,016 \leq 0,025$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $p = 0,4$, $n = 20$, $\alpha = 0,05$.
$F(3) = P(X \leq 3) = 0,016 \leq 0,025$
$F(4) = P(X \leq 4) = 0,051 > 0,025$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $p = 0,4$, $n = 20$, $\alpha = 0,05$.
$F(3) = P(X \leq 3) = 0,016 \leq 0,025$
$F(4) = P(X \leq 4) = 0,051 > 0,025$
$n_1 = 4$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $p = 0,4$, $n = 20$, $\alpha = 0,05$.

$F(3) = P(X \leq 3) = 0,016 \leq 0,025$

$F(4) = P(X \leq 4) = 0,051 > 0,025$

$n_1 = 4$

$F(11) = P(X \leq 11) = 0,943 < 0,975$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $p = 0,4,\ n = 20,\ \alpha = 0,05.$

$F(3) = P\left(X \leq 3\right) = 0,016 \leq 0,025$

$F(4) = P\left(X \leq 4\right) = 0,051 > 0,025$

$n_1 = 4$

$F(11) = P\left(X \leq 11\right) = 0,943 < 0,975$

$F(12) = P\left(X \leq 12\right) = 0,979 \geq 0,975$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $p = 0,4,\ n = 20,\ \alpha = 0,05.$

$F(3) = P(X \leq 3) = 0,016 \leq 0,025$

$F(4) = P(X \leq 4) = 0,051 > 0,025$

$n_1 = 4$

$F(11) = P(X \leq 11) = 0,943 < 0,975$

$F(12) = P(X \leq 12) = 0,979 \geq 0,975$

$n_2 = 12$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $p = 0,4, \; n = 20, \; \alpha = 0,05$.
$F(3) = P(X \leq 3) = 0,016 \leq 0,025$
$F(4) = P(X \leq 4) = 0,051 > 0,025$
$n_1 = 4$
$F(11) = P(X \leq 11) = 0,943 < 0,975$
$F(12) = P(X \leq 12) = 0,979 \geq 0,975$
$n_2 = 12$
Intervalle de fluctuation de X au seuil de risque 0,05 (ou 5 %) : $[\![4, 12]\!]$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $p = 0,4,\ n = 20,\ \alpha = 0,05$.
$F(3) = P(X \leq 3) = 0,016 \leq 0,025$
$F(4) = P(X \leq 4) = 0,051 > 0,025$
$n_1 = 4$
$F(11) = P(X \leq 11) = 0,943 < 0,975$
$F(12) = P(X \leq 12) = 0,979 \geq 0,975$
$n_2 = 12$
Intervalle de fluctuation de X au seuil de risque 0,05 (ou 5 %) : $[\![4, 12]\!]$
Intervalle de fluctuation de $\overline{X}$ au seuil de risque $0,05$ (ou 5 %) : $[0,2\,;\ 0,6]$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $p = 0,4,\ n = 20,\ \alpha = 0,05$.
$F(3) = P(X \leq 3) = 0,016 \leq 0,025$
$F(4) = P(X \leq 4) = 0,051 > 0,025$
$n_1 = 4$
$F(11) = P(X \leq 11) = 0,943 < 0,975$
$F(12) = P(X \leq 12) = 0,979 \geq 0,975$
$n_2 = 12$
Intervalle de fluctuation de X au seuil de risque 0,05 (ou 5 %) : $[\![4, 12]\!]$
Intervalle de fluctuation de $\overline{X}$ au seuil de risque $0,05$ (ou 5 %) : $[0,2\,;\ 0,6]$.

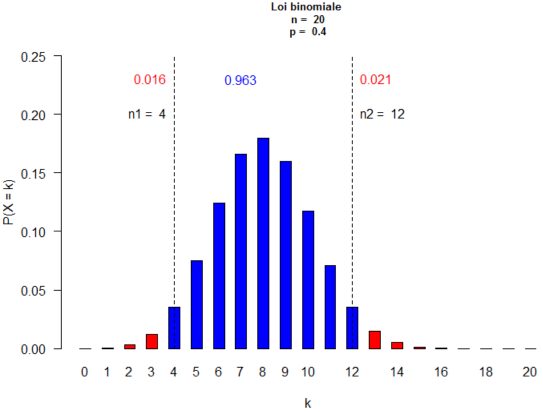
$$P(4 \leq X \leq 12) = P\left(\frac{4}{20} \leq \overline{X} \leq \frac{12}{20}\right) = 0,963 \geq 1 - 0,05$$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

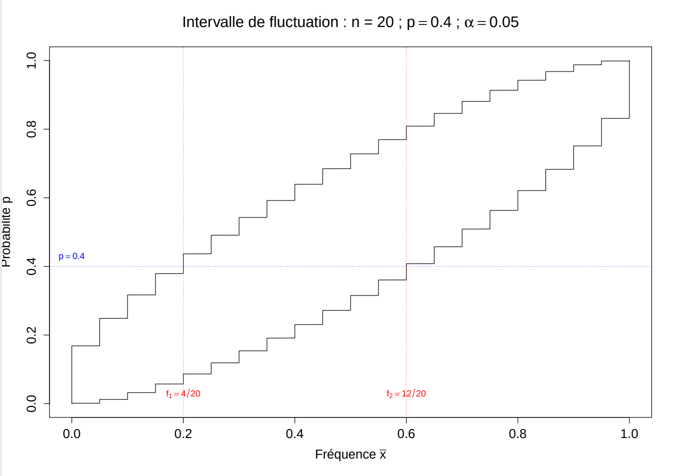


Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $nq = n(1-p) \geq 5$ alors $X \sim \mathcal{N}\left(np, \sqrt{npq}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(p, \sqrt{pq/n}\right)$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $nq = n(1-p) \geq 5$ alors $X \sim \mathcal{N}\left(np, \sqrt{npq}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(p, \sqrt{pq/n}\right)$.

L'intervalle I de fluctuation de $\overline{X}$ au seuil de risque α est alors défini par

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{pq/n}}\right| \leq u_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha :$$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $nq = n(1-p) \geq 5$ alors $X \sim \mathcal{N}\left(np, \sqrt{npq}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(p, \sqrt{pq/n}\right)$.

L'intervalle I de fluctuation de $\overline{X}$ au seuil de risque α est alors défini par

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{pq/n}}\right| \leq u_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha :$$

$$I = \left[p - u_{1-\alpha/2}\sqrt{pq/n},\ p + u_{1-\alpha/2}\sqrt{pq/n}\right]$$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $n = 70,\ p = 0,4$: $n \geq 30,\ np = 28 \geq 5$ et $nq = n(1-p) = 42 \geq 5$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $n = 70,\ p = 0,4$: $n \geq 30,\ np = 28 \geq 5$ et $nq = n(1-p) = 42 \geq 5$

$X \sim \mathcal{N}\left(28, \sqrt{16,8}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(0,4, \sqrt{0,24/70}\right)$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $n = 70$, $p = 0,4$: $n \geq 30$, $np = 28 \geq 5$ et $nq = n(1-p) = 42 \geq 5$

$X \sim \mathcal{N}\left(28, \sqrt{16,8}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(0,4, \sqrt{0,24/70}\right)$.

On pose $\alpha = 0,05$: $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $n = 70,\ p = 0,4$: $n \geq 30,\ np = 28 \geq 5$ et $nq = n(1-p) = 42 \geq 5$

$X \sim \mathcal{N}\left(28, \sqrt{16,8}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(0,4, \sqrt{0,24/70}\right)$.

On pose $\alpha = 0,05$: $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$

L'intervalle I de fluctuation de $\overline{X}$ au seuil de risque α est alors défini par

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - 0,4}{\sqrt{0,24/70}}\right| \leq 1,96\right) = 1 - 0,05$$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $n = 70,\ p = 0,4$: $n \geq 30,\ np = 28 \geq 5$ et $nq = n(1-p) = 42 \geq 5$

$X \sim \mathcal{N}\left(28, \sqrt{16,8}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(0,4, \sqrt{0,24/70}\right)$.

On pose $\alpha = 0,05$: $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$

L'intervalle I de fluctuation de $\overline{X}$ au seuil de risque α est alors défini par

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - 0,4}{\sqrt{0,24/70}}\right| \leq 1,96\right) = 1 - 0,05$$

$$I = \left[0,4 - 1,96\sqrt{0,24/70};\ 0,4 + 1,96\sqrt{0,24/70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

Intervalle de fluctuation

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $n = 70,\ p = 0,4$: $n \geq 30,\ np = 28 \geq 5$ et $nq = n(1-p) = 42 \geq 5$

$X \sim \mathcal{N}\left(28, \sqrt{16,8}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(0,4, \sqrt{0,24/70}\right)$.

On pose $\alpha = 0,05$: $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$

L'intervalle I de fluctuation de $\overline{X}$ au seuil de risque α est alors défini par

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - 0,4}{\sqrt{0,24/70}}\right| \leq 1,96\right) = 1 - 0,05$$

$$I = \left[0,4 - 1,96\sqrt{0,24/70};\ 0,4 + 1,96\sqrt{0,24/70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

L'intervalle I de fluctuation de X au seuil de risque α est alors défini par les bornes $0,285 \times 70 \approx 20$ et $0,515 \times 70 \approx 36$,

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $n = 70,\ p = 0,4$: $n \geq 30,\ np = 28 \geq 5$ et
$nq = n(1-p) = 42 \geq 5$
$X \sim \mathcal{N}\left(28, \sqrt{16,8}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(0,4, \sqrt{0,24/70}\right)$.
On pose $\alpha = 0,05$: $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$
L'intervalle I de fluctuation de $\overline{X}$ au seuil de risque α est alors défini par

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - 0,4}{\sqrt{0,24/70}}\right| \leq 1,96\right) = 1 - 0,05$$

$$I = \left[0,4 - 1,96\sqrt{0,24/70};\ 0,4 + 1,96\sqrt{0,24/70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

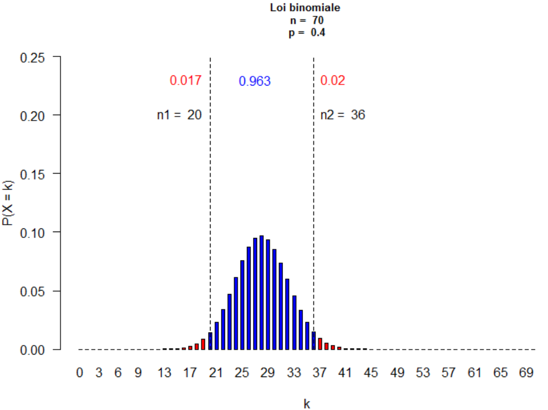
L'intervalle I de fluctuation de X au seuil de risque α est alors défini par les bornes $0,285 \times 70 \approx 20$ et $0,515 \times 70 \approx 36$,
soit $[\![20, 36]\!]$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Calcul direct :

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Calcul direct :

$$I' = \left[\frac{20}{70}, \frac{36}{70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Calcul direct :

$$I' = \left[\frac{20}{70}, \frac{36}{70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

soit $[\![20, 36]\!]$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Calcul direct :

$$I' = \left[\frac{20}{70}, \frac{36}{70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

soit $[\![20, 36]\!]$.

$\frac{20}{70} \approx 0,2857143$; $\frac{36}{70} \approx 0,5142857$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Calcul direct :

$$I' = \left[\frac{20}{70}, \frac{36}{70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

soit $[\![20, 36]\!]$.

$\frac{20}{70} \approx 0,2857143;\ \frac{36}{70} \approx 0,5142857$

Avec la loi normale :

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Calcul direct :

$$I' = \left[\frac{20}{70}, \frac{36}{70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

soit $[\![20, 36]\!]$.

$\frac{20}{70} \approx 0,2857143$; $\frac{36}{70} \approx 0,5142857$

Avec la loi normale :

$$I = \left[0,4 - 1,96\sqrt{0,24/70};\ 0,4 + 1,96\sqrt{0,24/70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Calcul direct :

$$I' = \left[\frac{20}{70}, \frac{36}{70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

soit $[\![20, 36]\!]$.

$\frac{20}{70} \approx 0,2857143$; $\frac{36}{70} \approx 0,5142857$

Avec la loi normale :

$$I = \left[0,4 - 1,96\sqrt{0,24/70};\ 0,4 + 1,96\sqrt{0,24/70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

soit $[\![20, 36]\!]$.

Intervalle de fluctuation

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Calcul direct :

$$I' = \left[\frac{20}{70}, \frac{36}{70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

soit $[\![20, 36]\!]$.

$\frac{20}{70} \approx 0,2857143$; $\frac{36}{70} \approx 0,5142857$

Avec la loi normale :

$$I = \left[0,4 - 1,96\sqrt{0,24/70};\ 0,4 + 1,96\sqrt{0,24/70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

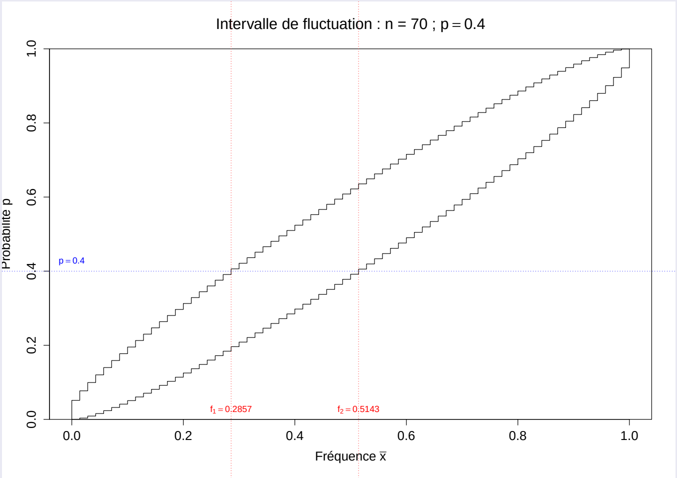
soit $[\![20, 36]\!]$.

$0,4 - 1,96\sqrt{0,24/70} \approx 0,2852342$; $0,4 + 1,96\sqrt{0,24/70} \approx 0.5147658$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

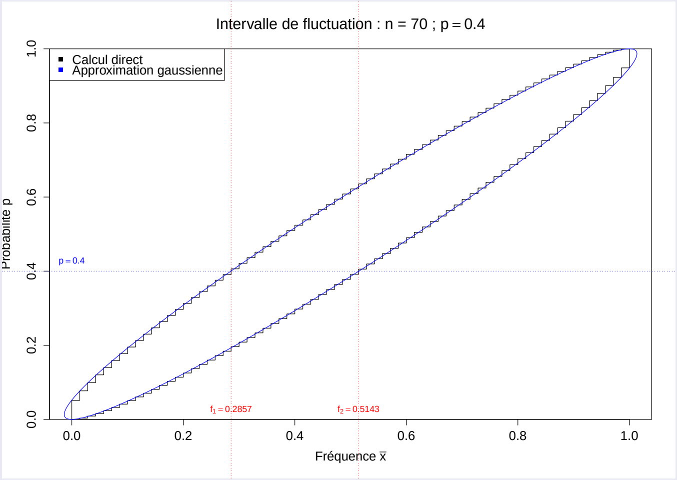
Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

M3201
Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

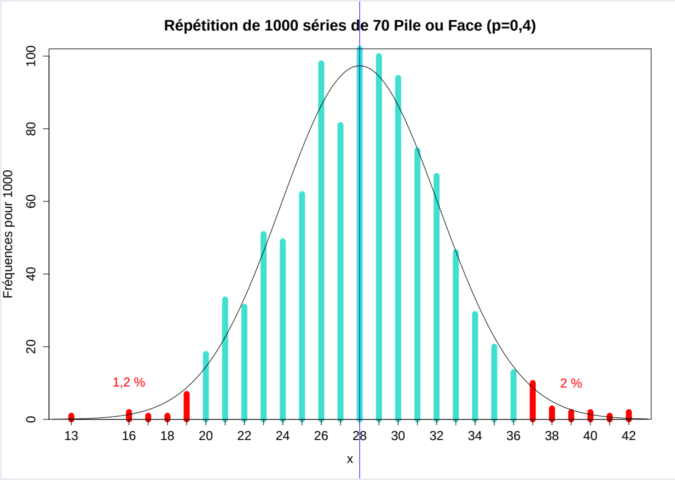
Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $P(X = 0) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ alors $n_1 = 0$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $P(X = 0) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ alors $n_1 = 0$.

De même, si $P(X = n) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ alors $n_2 = n$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $P(X = 0) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ alors $n_1 = 0$.

De même, si $P(X = n) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ alors $n_2 = n$.

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $P(X=0) \geq \frac{\alpha}{2}$ alors $n_1 = 0$.

De même, si $P(X=n) \geq \frac{\alpha}{2}$ alors $n_2 = n$.

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.

$$P(X=0) \approx 0,044 \geq \frac{0,05}{2}$$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $P(X=0) \geq \frac{\alpha}{2}$ alors $n_1 = 0$.

De même, si $P(X=n) \geq \frac{\alpha}{2}$ alors $n_2 = n$.

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.

$$P(X=0) \approx 0,044 \geq \frac{0,05}{2}$$

$$P(X \leq 6) \approx 0,961 < 1 - \frac{0,05}{2}$$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $P(X = 0) \geq \frac{\alpha}{2}$ alors $n_1 = 0$.

De même, si $P(X = n) \geq \frac{\alpha}{2}$ alors $n_2 = n$.

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.

$$P(X = 0) \approx 0,044 \geq \frac{0,05}{2}$$

$$P(X \leq 6) \approx 0,961 < 1 - \frac{0,05}{2}$$

$$P(X \leq 7) \approx 0,985 \geq 1 - \frac{0,05}{2}$$

Intervalle de fluctuation

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $P\,(X = 0) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ alors $n_1 = 0$.

De même, si $P\,(X = n) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ alors $n_2 = n$.

Exemple : $X \sim \mathcal{B}\,(n, p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.

$$P\,(X = 0) \approx 0,044 \geq \frac{0,05}{2}$$

$$P\,(X \leq 6) \approx 0,961 < 1 - \frac{0,05}{2}$$

$$P\,(X \leq 7) \approx 0,985 \geq 1 - \frac{0,05}{2}$$

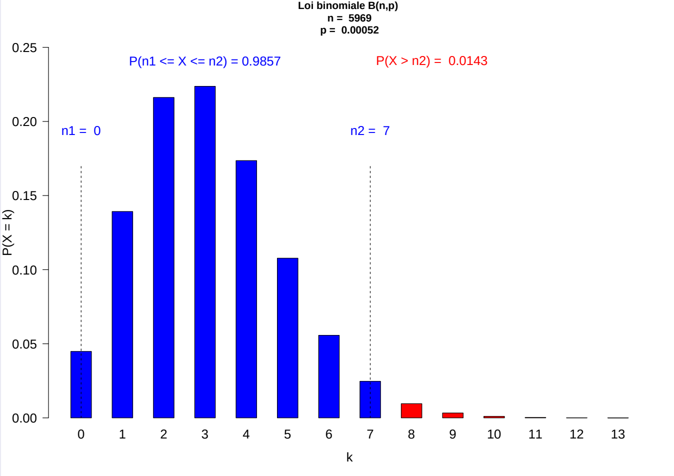
Intervalle de fluctuation de X au seuil de risque 0,05 (ou 5 %) : $[\![0,\ 7]\!]$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Dans ce dernier cas, on peut envisager de partager l'axe des valeurs de la variable X en deux intervalles $[\![0,\ n_2]\!]$ et $[\![n_2,\ n]\!]$ au lieu de trois.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Dans ce dernier cas, on peut envisager de partager l'axe des valeurs de la variable X en deux intervalles $[\![0, n_2]\!]$ et $[\![n_2, n]\!]$ au lieu de trois.
On parlera alors d'intervalle de fluctuation unilatéral (bilatéral dans l'approche précédente).

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Dans ce dernier cas, on peut envisager de partager l'axe des valeurs de la variable X en deux intervalles $[\![0,\ n_2]\!]$ et $[\![n_2,\ n]\!]$ au lieu de trois.
On parlera alors d'intervalle de fluctuation unilatéral (bilatéral dans l'approche précédente).
n_2 est choisi pour que $[\![0,\ n_2]\!]$ soit le plus petit intervalle vérifiant $P(X > n_2) \leq \alpha$, c'est-à-dire tel que $P(X \leq n_2) \geq 1 - \alpha$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.

$P(X = 0) \approx 0,044 \geq \dfrac{0,05}{2}$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.

$P(X = 0) \approx 0,044 \geq \dfrac{0,05}{2}$

$P(X \leq 5) \approx 0,905 < 1 - 0,05$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.

$P(X = 0) \approx 0,044 \geq \dfrac{0,05}{2}$

$P(X \leq 5) \approx 0,905 < 1 - 0,05$

$P(X \leq 6) \approx 0,961 \geq 1 - 0,05$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.

$P(X = 0) \approx 0,044 \geq \dfrac{0,05}{2}$

$P(X \leq 5) \approx 0,905 < 1 - 0,05$

$P(X \leq 6) \approx 0,961 \geq 1 - 0,05$

Intervalle de fluctuation de X au seuil de risque 0,05 (ou 5 %) : $[\![0, 6]\!]$

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

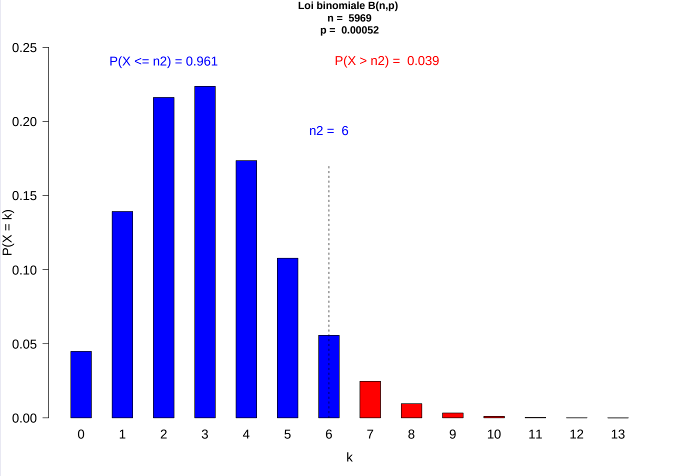
Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ. Une suite $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.
Une suite $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.
Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est assez grande ($n \geq 30$), $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.
Une suite $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.
Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est assez grande ($n \geq 30$),
$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.
Un intervalle de fluctuation de niveau $1-\alpha$ est alors
$$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.
Une suite $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.
Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est assez grande ($n \geq 30$),
$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.
Un intervalle de fluctuation de niveau $1 - \alpha$ est alors
$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.
Exemple : dans un élevage, le poids de naissance moyen d'un lapin est $\mu = 40$ g avec un écart-type $\sigma = 5$ g.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.
Une suite $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.
Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est assez grande ($n \geq 30$), $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.
Un intervalle de fluctuation de niveau $1 - \alpha$ est alors

$$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Exemple : dans un élevage, le poids de naissance moyen d'un lapin est $\mu = 40$ g avec un écart-type $\sigma = 5$ g.
Pour un échantillon de taille $n = 1\,000$, on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % :

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.
Une suite $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.
Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est assez grande ($n \geq 30$), $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.
Un intervalle de fluctuation de niveau $1-\alpha$ est alors

$$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Exemple : dans un élevage, le poids de naissance moyen d'un lapin est $\mu = 40$ g avec un écart-type $\sigma = 5$ g.
Pour un échantillon de taille $n = 1\,000$, on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % :

$$\left[40 - 1,96\frac{5}{\sqrt{1\,000}} ; 40 + 1,96\frac{5}{\sqrt{1\,000}}\right]$$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.
Une suite $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.
Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est assez grande ($n \geq 30$), $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.
Un intervalle de fluctuation de niveau $1 - \alpha$ est alors
$$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$
Exemple : dans un élevage, le poids de naissance moyen d'un lapin est $\mu = 40$ g avec un écart-type $\sigma = 5$ g.
Pour un échantillon de taille $n = 1\,000$, on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % :
$$\left[40 - 1,96\frac{5}{\sqrt{1\,000}};\ 40 + 1,96\frac{5}{\sqrt{1\,000}}\right], \text{ soit } [39,69;\ 40,31].$$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.
Une suite $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.
Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est assez grande ($n \geq 30$), $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.
Un intervalle de fluctuation de niveau $1-\alpha$ est alors
$$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$
Exemple : dans un élevage, le poids de naissance moyen d'un lapin est $\mu = 40$ g avec un écart-type $\sigma = 5$ g.
Pour un échantillon de taille $n = 1\,000$, on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % :
$$\left[40 - 1,96\frac{5}{\sqrt{1\,000}};\ 40 + 1,96\frac{5}{\sqrt{1\,000}}\right],\ \text{soit } [39,69;\ 40,31].$$
Au niveau 99 %,

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.
Une suite $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.
Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est assez grande ($n \geq 30$), $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.
Un intervalle de fluctuation de niveau $1-\alpha$ est alors
$$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$
Exemple : dans un élevage, le poids de naissance moyen d'un lapin est $\mu = 40$ g avec un écart-type $\sigma = 5$ g.
Pour un échantillon de taille $n = 1\,000$, on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % :
$$\left[40 - 1,96\frac{5}{\sqrt{1\,000}}; 40 + 1,96\frac{5}{\sqrt{1\,000}}\right], \text{ soit } [39,69; 40,31].$$
Au niveau 99 %, on obtient $[39,59; 40,41]$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n'est pas assez grande ($n < 30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n'est pas assez grande ($n < 30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.
Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ $(1 \leq i \leq n)$ alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n'est pas assez grande ($n < 30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.
Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ $(1 \leq i \leq n)$ alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.
Et un intervalle de fluctuation de niveau $1 - \alpha$ est alors

$$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n'est pas assez grande ($n < 30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.
Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ $(1 \leq i \leq n)$ alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.
Et un intervalle de fluctuation de niveau $1 - \alpha$ est alors

$$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Exemple : on suppose que le poids de naissance d'un lapin $X \sim \mathcal{N}(40, 5)$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ n'est pas assez grande ($n<30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.
Si $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ et $X_i\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ $(1\leq i\leq n)$ alors $\overline{X}\sim\mathcal{N}\left(\mu,\sigma/\sqrt{n}\right)$.
Et un intervalle de fluctuation de niveau $1-\alpha$ est alors

$$\left[\mu-u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\mu+u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Exemple : on suppose que le poids de naissance d'un lapin $X\sim\mathcal{N}(40,5)$.
Pour un échantillon de taille $n=20$, on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % :

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ n'est pas assez grande ($n < 30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.
Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ $(1 \leq i \leq n)$ alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.
Et un intervalle de fluctuation de niveau $1-\alpha$ est alors
$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.
Exemple : on suppose que le poids de naissance d'un lapin $X \sim \mathcal{N}(40, 5)$.
Pour un échantillon de taille $n = 20$, on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % : $\left[40 - 1,96\dfrac{5}{\sqrt{20}}; 40 + 1,96\dfrac{5}{\sqrt{20}}\right]$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ n'est pas assez grande ($n < 30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.
Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ $(1 \leq i \leq n)$ alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.
Et un intervalle de fluctuation de niveau $1-\alpha$ est alors
$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.
Exemple : on suppose que le poids de naissance d'un lapin $X \sim \mathcal{N}(40, 5)$.
Pour un échantillon de taille $n = 20$, on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % : $\left[40 - 1,96\dfrac{5}{\sqrt{20}};\ 40 + 1,96\dfrac{5}{\sqrt{20}}\right]$,
soit $[37,80;\ 42,20]$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n'est pas assez grande ($n < 30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.
Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ $(1 \leq i \leq n)$ alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.
Et un intervalle de fluctuation de niveau $1 - \alpha$ est alors
$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.
Exemple : on suppose que le poids de naissance d'un lapin $X \sim \mathcal{N}(40, 5)$.
Pour un échantillon de taille $n = 20$, on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % : $\left[40 - 1,96\dfrac{5}{\sqrt{20}};\ 40 + 1,96\dfrac{5}{\sqrt{20}}\right]$,
soit $[37,80;\ 42,20]$.
Au niveau 99 %,

Intervalle de fluctuation

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n'est pas assez grande ($n < 30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.
Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ $(1 \leq i \leq n)$ alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.
Et un intervalle de fluctuation de niveau $1 - \alpha$ est alors
$$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$
Exemple : on suppose que le poids de naissance d'un lapin $X \sim \mathcal{N}(40, 5)$.
Pour un échantillon de taille $n = 20$, on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % : $\left[40 - 1,96\frac{5}{\sqrt{20}};\ 40 + 1,96\frac{5}{\sqrt{20}}\right]$, soit $[37,80;\ 42,20]$.
Au niveau 99 %, on obient $[37,12;\ 42,88]$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un chantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n'est pas assez grande ($n < 30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.
Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ $(1 \leq i \leq n)$ alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.
Et un intervalle de fluctuation de niveau $1 - \alpha$ est alors
$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.
Exemple : on suppose que le poids de naissance d'un lapin $X \sim \mathcal{N}(40, 5)$.
Pour un échantillon de taille $n = 20$, on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % : $\left[40 - 1,96\frac{5}{\sqrt{20}}; \ 40 + 1,96\frac{5}{\sqrt{20}}\right]$,
soit $[37,80; \ 42,20]$.
Au niveau 99 %, on obient $[37,12; \ 42,88]$.

Tables de la Loi binomiale

Utilisation des tables ($p > 0,5$)

Tables de la Loi binomiale

Utilisation des tables ($p > 0,5$)

Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors :
$P(X \leq i) = 1 - P(X' \leq n-i-1)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$,
$P(X \geq i) = P(X' \leq n-i)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$.

Démonstration

$$P(X \leq i) = \sum_{k=0}^{i} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X \leq i) = \sum_{k'=n-i}^{n} C_n^{n-k'} p^{n-k'} (1-p)^{k'} \text{ en posant } k' = n-k.$$

$$P(X \leq i) = \sum_{k'=n-i}^{n} C_n^{k'} (1-p)^{k'} p^{n-k'}$$

$$P(X \leq i) = P(X' \geq n-i)$$

$$\boxed{P(X \leq i) = 1 - P(X' \leq n-i-1)}$$

On en dduit $P(X \geq i) = 1 - P(X \leq i-1) = 1 - (1 - P(X' \leq n-(i-1)-1))$

$$\boxed{P(X \geq i) = P(X' \leq n-i)}$$

Variable aléatoire réelle

Démonstration : P_X est une probabilité

Variable aléatoire réelle

Démonstration : P_X est une probabilité

La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ définie par
$P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

Variable aléatoire réelle

Démonstration : P_X est une probabilité

La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0,1]$ définie par
$P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

a) $P_X(\mathbb{R}) = P\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right) = P(\Omega) = 1$

Variable aléatoire réelle

Démonstration : P_X est une probabilité

La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ définie par $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

a) $P_X(\mathbb{R}) = P\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right) = P(\Omega) = 1$

b) Soit $(B_i)_{i \geq 1}$ une suite d'événements incompatibles.

Variable aléatoire réelle

Démonstration : P_X est une probabilité

La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ définie par $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

a) $P_X(\mathbb{R}) = P\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right) = P(\Omega) = 1$

b) Soit $(B_i)_{i \geq 1}$ une suite d'événements incompatibles.

On a

$$X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} X^{-1}(B_i)$$

et $X^{-1}(B_i) \cap X^{-1}(B_j) = X^{-1}(B_i \cap B_j) = X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Variable aléatoire réelle

Démonstration : P_X est une probabilité

La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ définie par $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

a) $P_X(\mathbb{R}) = P\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right) = P(\Omega) = 1$

b) Soit $(B_i)_{i \geq 1}$ une suite d'événements incompatibles.
On a

$$X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} X^{-1}(B_i)$$

et $X^{-1}(B_i) \cap X^{-1}(B_j) = X^{-1}(B_i \cap B_j) = X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
On en déduit

$$P_X\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} X^{-1}(B_i)\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P\left(X^{-1}(B_i)\right)$$

Variable aléatoire réelle

Démonstration : P_X est une probabilité

La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ définie par $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

a) $P_X(\mathbb{R}) = P\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right) = P(\Omega) = 1$

b) Soit $(B_i)_{i \geq 1}$ une suite d'événements incompatibles.

On a

$$X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} X^{-1}(B_i)$$

et $X^{-1}(B_i) \cap X^{-1}(B_j) = X^{-1}(B_i \cap B_j) = X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

On en déduit

$$P_X\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} X^{-1}(B_i)\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P\left(X^{-1}(B_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} P_X(B_i)$$

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} iP(X = i) = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np$$

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} iP(X = i) = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np$$

$$\text{Or } \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-1-(i-1)}$$

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$$E\left(X\right) = \sum_{i=0}^{n} iP\left(X = i\right) = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np$$

$$\text{Or } \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-1-(i-1)}$$

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} p^{j} (1-p)^{n-1-j} \text{ en posant } j = i-1.$$

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} iP(X = i) = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np$$

$$\text{Or } \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-1-(i-1)}$$

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} p^{j} (1-p)^{n-1-j} \text{ en posant } j = i-1.$$

On en déduit $E(X) = np\,(p - (1-p))^{n-1} = np.1^{n-1} = np$.

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} iP(X = i) = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np$$

Or $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-1-(i-1)}$

$\displaystyle = np \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} p^{j} (1-p)^{n-1-j}$ en posant $j = i-1$.

On en déduit $E(X) = np(p-(1-p))^{n-1} = np.1^{n-1} = np$.
Explication :

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X=i\right)=C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$$E\left(X\right)=\sum_{i=0}^{n} iP\left(X=i\right)=\sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i}=np$$

$$\text{Or } \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i}=np\sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-1-(i-1)}$$

$$=np\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} p^{j} (1-p)^{n-1-j} \text{ en posant } j=i-1.$$

On en déduit $E\left(X\right)=np\left(p-(1-p)\right)^{n-1}=np.1^{n-1}=np$.

Explication :

$$C_n^i=\frac{n!}{i!(n-i)!}=\frac{n.(n-1)!}{i.(i-1)!(n-i)!}=\frac{n}{i}\frac{(n-1)!}{(i-1)!\left(n-1-(i-1)\right)!}=\frac{n}{i}C_{n-1}^{i-1}$$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
$E(X) = np$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$E\left(X\right) = np$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - (np)^2$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$E(X) = np$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - (np)^2$

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{n} i^2 P(X = i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$E\left(X\right) = np$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - (np)^2$

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{n} i^2 P\left(X = i\right) = \sum_{i=1}^{n} i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$$

Or $C_n^i = \dfrac{n}{i} C_{n-1}^{i-1} = \dfrac{n(n-1)}{i(i-1)} C_{n-2}^{i-2}$ pour $i \geq 1$.

Variance d’une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

On écrit alors $i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ et

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Démonstration

On écrit alors $i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ et $E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$.

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

On écrit alors $i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1)C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + iC_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ et

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

On a $i(i-1)C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1)\dfrac{n(n-1)}{i(i-1)} C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

On écrit alors $i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ et

$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$.

On a $i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) \dfrac{n(n-1)}{i(i-1)} C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$

$= n(n-1) C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$ et donc

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Démonstration

On écrit alors $i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ et

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

On a $i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) \dfrac{n(n-1)}{i(i-1)} C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$

$= n(n-1) C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$ et donc

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} n(n-1) p^2 C_{n-2}^{i-2} p^{i-2} (1-p)^{n-2-(i-2)}$$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

On écrit alors $i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ et

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

On a $i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) \dfrac{n(n-1)}{i(i-1)} C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$

$= n(n-1) C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$ et donc

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} n(n-1) p^2 C_{n-2}^{i-2} p^{i-2} (1-p)^{n-2-(i-2)}$$

$= n(n-1) p^2 \sum_{j=0}^{n-2} C_{n-2}^{j} p^j (1-p)^{n-2-j}$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

M3201 Probabilités et statistique

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Loi des grands nombres

Intervalle de fluctuation

Annexe

Démonstration

On écrit alors $i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1)C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + iC_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ et

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

On a $i(i-1)C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1)\dfrac{n(n-1)}{i(i-1)} C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$

$= n(n-1)C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$ et donc

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} n(n-1)p^2 C_{n-2}^{i-2} p^{i-2} (1-p)^{n-2-(i-2)}$$

$= n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} C_{n-2}^{j} p^j (1-p)^{n-2-j}$

$= n(n-1)p^2 \left(p + (1-p)\right)^{n-2} = n(n-1)p^2$

On obtient finalement : $V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2$

$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

On écrit alors $i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ et

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

On a $i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) \dfrac{n(n-1)}{i(i-1)} C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$

$= n(n-1) C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$ et donc

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} n(n-1) p^2 C_{n-2}^{i-2} p^{i-2} (1-p)^{n-2-(i-2)}$$

$= n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} C_{n-2}^{j} p^j (1-p)^{n-2-j}$

$= n(n-1)p^2 (p + (1-p))^{n-2} = n(n-1)p^2$

On obtient finalement : $V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2$

$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$

$V(X) = np(1-p) = npq$ en posant $q = 1 - p$.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)...(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

$$(1-p)^i \underset{n\to+\infty}{\to} 1^i = 1$$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)...(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

$$(1-p)^i \underset{n\to+\infty}{\to} 1^i = 1$$

$$n(n-1)...(n-(i-1))p^i = np(n-1)p...(n-(i-1))p$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

$$(1-p)^i \underset{n\to+\infty}{\to} 1^i = 1$$

$$n(n-1)\ldots(n-(i-1))p^i = np(n-1)p\ldots(n-(i-1))p$$
$$= np.(1-\tfrac{1}{n})np(1-\tfrac{2}{n})np\ldots(1-\tfrac{i-1}{n})np$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)...(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

$$(1-p)^i \underset{n\to+\infty}{\to} 1^i = 1$$

$$n(n-1)...(n-(i-1))p^i = np(n-1)p...(n-(i-1))p$$
$$= np.(1-\tfrac{1}{n})np(1-\tfrac{2}{n})np...(1-\tfrac{i-1}{n})np$$
$$= (np)^i(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})...(1-\tfrac{i-1}{n})$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)...(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

$$(1-p)^i \underset{n\to+\infty}{\to} 1^i = 1$$

$$n(n-1)...(n-(i-1))p^i = np(n-1)p...(n-(i-1))p$$
$$= np.(1-\tfrac{1}{n})np(1-\tfrac{2}{n})np...(1-\tfrac{i-1}{n})np$$
$$= (np)^i(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})...(1-\tfrac{i-1}{n})$$
$$n(n-1)...(n-(i-1))p^i \to \lambda^i$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)...(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

$$(1-p)^i \underset{n\to+\infty}{\to} 1^i = 1$$

$$n(n-1)...(n-(i-1))p^i = np(n-1)p...(n-(i-1))p$$
$$= np.(1-\tfrac{1}{n})np(1-\tfrac{2}{n})np...(1-\tfrac{i-1}{n})np$$
$$= (np)^i(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})...(1-\tfrac{i-1}{n})$$
$$n(n-1)...(n-(i-1))p^i \to \lambda^i$$

$(1-p)^n$:

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)...(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

$(1-p)^i \underset{n\to+\infty}{\to} 1^i = 1$

$n(n-1)...(n-(i-1))p^i = np(n-1)p...(n-(i-1))p$
$= np.(1-\frac{1}{n})np(1-\frac{2}{n})np...(1-\frac{i-1}{n})np$
$= (np)^i(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{i-1}{n})$

$n(n-1)...(n-(i-1))p^i \to \lambda^i$

$(1-p)^n$:

$\ln(1-p)^n = n\ln(1-p) \underset{+\infty}{\sim} n.(-p) = -np \underset{+\infty}{\to} -\lambda$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)...(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

$(1-p)^i \underset{n\to+\infty}{\to} 1^i = 1$

$n(n-1)...(n-(i-1))p^i = np(n-1)p...(n-(i-1))p$
$= np.(1-\frac{1}{n})np(1-\frac{2}{n})np...(1-\frac{i-1}{n})np$
$= (np)^i(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{i-1}{n})$
$n(n-1)...(n-(i-1))p^i \to \lambda^i$
$(1-p)^n$:
$\ln(1-p)^n = n\ln(1-p) \underset{+\infty}{\sim} n.(-p) = -np \underset{+\infty}{\to} -\lambda$
On a donc $(1-p)^n = exp(n\ln(1-p)) \underset{+\infty}{\to} e^{-\lambda}$

Variable aléatoire continue

Démonstration

Variable aléatoire continue

Démonstration

Si X est une variable aléatoire absolument continue de densité f, et $a \neq 0$ et b deux réels alors $aX + b$ est une variable aléatoire absolument continue de densité $g(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Variable aléatoire continue

Démonstration

Si X est une variable aléatoire absolument continue de densité f, et $a \neq 0$ et b deux réels alors $aX + b$ est une variable aléatoire absolument continue de densité $g(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

$P(aX + b \leq x) = P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right)$ si $a > 0$, $P\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right)$ si $a < 0$.

Variable aléatoire continue

Démonstration (suite)

Variable aléatoire continue

Démonstration (suite)

$\boxed{a > 0}$

$$P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f(t)\,dt.$$

Variable aléatoire continue

Démonstration (suite)

$\boxed{a > 0}$

$$P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f(t)\,dt.$$

En posant $t = \dfrac{u-b}{a}$, on a

$$\int_{y}^{\frac{x-b}{a}} f(t)\,dt = \int_{ay+b}^{x} f\left(\frac{u-b}{a}\right)\frac{1}{a}du \underset{-\infty}{\rightarrow} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{a} f\left(\frac{u-b}{a}\right) du.$$

Variable aléatoire continue

Démonstration (suite)

Variable aléatoire continue

Démonstration (suite)

$\boxed{a < 0}$

$$P\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) = \int_{\frac{x-b}{a}}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Variable aléatoire continue

Démonstration (suite)

$\boxed{a < 0}$

$$P\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) = \int_{\frac{x-b}{a}}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

En posant $t = \dfrac{u-b}{a}$, on a

Variable aléatoire continue

Démonstration (suite)

$\boxed{a < 0}$

$$P\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) = \int_{\frac{x-b}{a}}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

En posant $t = \dfrac{u-b}{a}$, on a

$$\int_{\frac{x-b}{a}}^{y} f(t)\,dt = \int_{x}^{ay+b} f\left(\frac{u-b}{a}\right)\frac{1}{a}du \underset{+\infty}{\rightarrow} \int_{x}^{-\infty} f\left(\frac{u-b}{a}\right)\frac{1}{a}du$$

avec $\displaystyle\int_{x}^{-\infty} f\left(\frac{u-b}{a}\right)\frac{1}{a}du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{-a} f\left(\frac{u-b}{a}\right)du.$

Variable aléatoire continue

Démonstration (suite)

$\boxed{a < 0}$

$$P\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) = \int_{\frac{x-b}{a}}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

En posant $t = \dfrac{u-b}{a}$, on a

$$\int_{\frac{x-b}{a}}^{y} f(t)\,dt = \int_{x}^{ay+b} f\left(\frac{u-b}{a}\right)\frac{1}{a}du \underset{+\infty}{\rightarrow} \int_{x}^{-\infty} f\left(\frac{u-b}{a}\right)\frac{1}{a}du$$

avec $\displaystyle\int_{x}^{-\infty} f\left(\frac{u-b}{a}\right)\frac{1}{a}du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{-a} f\left(\frac{u-b}{a}\right)du.$

On a donc bien la densité $g(x) = \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Fischer-Snedecor $\mathcal{F}_{n,m}$

Loi de Fischer-Snedecor $\mathcal{F}_{n,m}$

On pose $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ (fonction *Beta*).

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Fischer-Snedecor $\mathcal{F}_{n,m}$

On pose $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ (fonction *Beta*).

La densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Fischer-Snedecor de paramètre (n,m) est

$$f(x)=\frac{1}{xB\left(n/2,m/2\right)}\left(\frac{nx}{nx+m}\right)^{n/2}\left(1-\frac{nx}{nx+m}\right)^{m/2}\quad(x\in\mathbb{R}_+).$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Fischer-Snedecor $\mathcal{F}_{n,m}$

On pose $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ (fonction *Beta*).

La densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Fischer-Snedecor de paramètre (n,m) est

$$f(x) = \frac{1}{xB\left(n/2, m/2\right)} \left(\frac{nx}{nx+m}\right)^{n/2} \left(1 - \frac{nx}{nx+m}\right)^{m/2} \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Notation : $X \sim \mathcal{F}_{n,m}$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Fischer-Snedecor $\mathcal{F}_{n,m}$

On pose $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ (fonction *Beta*).

La densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Fischer-Snedecor de paramètre (n,m) est

$$f(x) = \frac{1}{xB\left(n/2, m/2\right)} \left(\frac{nx}{nx+m}\right)^{n/2} \left(1 - \frac{nx}{nx+m}\right)^{m/2} \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Notation : $X \sim \mathcal{F}_{n,m}$.

Propriété :

Si $X \sim \chi^2_n$, $Y \sim \chi^2_m$ et X, Y indépendantes alors $\dfrac{X/n}{Y/m} \sim \mathcal{F}_{n,m}$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Fischer-Snedecor $\mathcal{F}_{n,m}$

On pose $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ (fonction *Beta*).
La densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Fischer-Snedecor de paramètre (n,m) est

$$f(x) = \frac{1}{xB\left(n/2, m/2\right)}\left(\frac{nx}{nx+m}\right)^{n/2}\left(1-\frac{nx}{nx+m}\right)^{m/2} \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Notation : $X \sim \mathcal{F}_{n,m}$.
Propriété :
Si $X \sim \chi^2_n$, $Y \sim \chi^2_m$ et X, Y indépendantes alors $\dfrac{X/n}{Y/m} \sim \mathcal{F}_{n,m}$
Utilisation : comparaison des variances de deux échantillons.