Documents autorisés : cours, TD, notes manuscrites. **Durée** : 1h 30.

Barème indicatif sur 40 : 3+3+2+4+8+2+2+4+3+1+3+2+3

Exercice 1

On pose $E = \{-1, 0, 1\}$, $A = \{-1, 0\}$ et $B = \{0, 1\}$.

1. Déterminer $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$, $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
   Reproduire et compléter le tableau suivant.

$\mathcal{P}(E)$	
$\mathcal{P}(A)$	
$\mathcal{P}(B)$	
$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$	
$\mathcal{P}(A \cup B)$	

2. Comparer $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(A \cup B)$.

Exercice 2

Écrire la table de vérité de $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee \overline{C})$ (reproduire et compléter le tableau suivant).

A	B	C	$\overline{C}$	$A \wedge B$	$A \vee \overline{C}$	$(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee \overline{C})$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Exercice 3

Ecrire la négation de : *Dans tous les IUT, tous les étudiants sont attentifs.*

Exercice 4

L'ensemble de référence est $\mathbb{R}$.
Préciser la valeur de vérité de

1. $\forall x\ x^2 = 4\ \Rightarrow x = 2$
2. $\forall x\ x = 2\ \Rightarrow x^2 = 4$

3. $\exists x\ \forall y\ x+y>0$
4. $\forall x\ \exists y\ x+y>0$

Exercice 5

On note $\mathfrak{R}$ la relation définie dans $E=\{3,5,7,11,13\}$ par $x\mathfrak{R}y$ si et seulement si l'entier $\dfrac{x+y}{2}$ est un nombre premier.

1. Représenter graphiquement la relation $\mathfrak{R}$.
2. $\mathfrak{R}$ est-elle
   (a) réflexive,
   (b) symétrique,
   (c) antisymétrique,
   (d) transitive ?

   Expliquer.
3. Matrice booléenne de la relation $\mathfrak{R}$
   (a) Préciser la matrice booléeenne A de la relation $\mathfrak{R}$.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 7 & 11 & 13 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \\ 13 \end{array} & \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

   (b) En déduire la matrice A^2.
   Indication : En posant $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ $(1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n)$,
   $A\wedge B=(p_{ij})$ où $p_{ij}=(a_{i1}\wedge b_{1j})\vee(a_{i2}\wedge b_{2j})\vee\ldots\vee(a_{in}\wedge b_{nj})$.
   (c) En utilisant la matrice A, $\mathfrak{R}$ est-elle
      i. réflexive,
      Indication : comparer I_5 et A.
      ii. symétrique,
      Indication : comparer ${}^tA$ et A.
      iii. antisymétrique,
      iv. transitive ?
      Indication : comparer A^2 et A.

   Expliquer.

Exercice 6

n est un entier naturel quelconque.
En utilisant la fomule du binôme, développer et réduire $(n+2)^5$.

Exercice 7

On pose $u_0 = 13$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

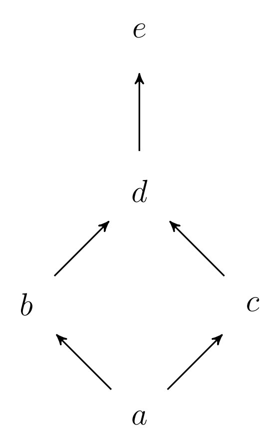
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.

Exercice 8

1. Ecrire le nombre 61 en base 2, en base 8, puis en base 16.
2. Quel est le nombre de chiffres du nombre $61^{1\,000}$ en base 2 ?
   Indications :
   (a) $log_2 61 = 5,930737337562886276...$
   (b) Le nombre de chiffres en base b d'un nombre x écrit en base 10 est $[log_b x] + 1$.

Exercice 9

On considère le treillis $(E, \leq)$ avec $E = \{a, b, c, d, e\}$:



1. Reproduire et compléter le tableau suivant.

x	a	b	c	d	e
$x \wedge b$					
$x \vee b$					

2. En déduire les éventuels compléments de b. Expliquer.
3. En déduire (en justifiant) si le treillis est une algèbre de Boole.

Exercice 10

Préciser si la congruence (respectivement l'égalité) suivante est vraie ou fausse :

1. $6! \equiv 6 \pmod 9$
2. $\overline{1\,457} = \overline{17}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2$.

1. Préciser la nature de f : f est-elle injective, surjective, bijective ? Expliquer.
2. On pose $A = \{-1, 0\}$ et $B = \{0, 1\}$.
   (a) Préciser $A \cap B$, $f(A)$, $f(B)$, $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.
   Reproduire et compléter le tableau suivant :

$A \cap B$	$f(A \cap B)$	$f(A)$	$f(B)$	$f(A) \cap f(B)$

   (b) Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.

Exercice 12

1. Déterminer le reste r dans la division euclidienne de $2\,028$ par 17.
2. En déduire le reste r' de la division euclidienne de $2\,028^2$ par 17.
3. Reproduire et compléter le tableau suivant :

r	r'

Exercice 13

1. Appliquer l'algorithme d'Euclide étendu à $2\,021$ et $2\,019$.
2. En déduire $PGCD(2\,021, 2\,019)$, ainsi qu'une décomposition de Bezout : $PGCD(2\,021, 2\,019) = 2\,021u + 2\,019v$.
3. Résoudre $2\,021x + 2\,019y = 1$ dans $\mathbb{Z}^2$.