M2202
Analyse et
méthodes
numériques

Département
Informatique
IUT de
Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

M2202

Approximations

Aurélie Nemours (1954)

Développements limités

Définitions

Développements limités

Définitions

Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un réel x_0, sauf éventuellement en x_0.

Développements limités

Définitions

Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un réel x_0, sauf éventuellement en x_0.

On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme P de degré au plus n, un intervalle ouvert I de centre x_0 et une fonction ϵ définie sur I, sauf peut-être en x_0, et de limite 0 en x_0

Développements limités

Définitions

Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un réel x_0, sauf éventuellement en x_0.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme P de degré au plus n, un intervalle ouvert I de centre x_0 et une fonction ϵ définie sur I, sauf peut-être en x_0, et de limite 0 en x_0 tels que pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$, on ait :

Développements limités

Définitions

Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un réel x_0, sauf éventuellement en x_0.

On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme P de degré au plus n, un intervalle ouvert I de centre x_0 et une fonction ϵ définie sur I, sauf peut-être en x_0, et de limite 0 en x_0 tels que pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$, on ait : $f(x) = P(x) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$

Développements limités

Définitions

Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un réel x_0, sauf éventuellement en x_0.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme P de degré au plus n, un intervalle ouvert I de centre x_0 et une fonction ϵ définie sur I, sauf peut-être en x_0, et de limite 0 en x_0 tels que pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$, on ait : $f(x) = P(x) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$
P est appelé partie régulière du développement limité.

Développements limités

Définitions

Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un réel x_0, sauf éventuellement en x_0.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme P de degré au plus n, un intervalle ouvert I de centre x_0 et une fonction ϵ définie sur I, sauf peut-être en x_0, et de limite 0 en x_0 tels que pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$, on ait : $f(x) = P(x) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$
P est appelé partie régulière du développement limité.
$(x - x_0)^n \epsilon(x)$ est appelé reste ou terme complémentaire.

Développements limités

Définitions

Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un réel x_0, sauf éventuellement en x_0.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme P de degré au plus n, un intervalle ouvert I de centre x_0 et une fonction ϵ définie sur I, sauf peut-être en x_0, et de limite 0 en x_0 tels que pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$, on ait : $f(x) = P(x) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$
P est appelé partie régulière du développement limité.
$(x - x_0)^n \epsilon(x)$ est appelé reste ou terme complémentaire.

Remarques

Développements limités

Définitions

Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un réel x_0, sauf éventuellement en x_0.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme P de degré au plus n, un intervalle ouvert I de centre x_0 et une fonction ϵ définie sur I, sauf peut-être en x_0, et de limite 0 en x_0 tels que pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$, on ait : $f(x) = P(x) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$
P est appelé partie régulière du développement limité.
$(x - x_0)^n \epsilon(x)$ est appelé reste ou terme complémentaire.

Remarques

- si f admet un développement limité en x_0 et si f n'est pas définie en x_0, f admet $P(x_0)$ comme limite en x_0. On peut alors prolonger f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = P(x_0)$.

Développements limités

Définitions

Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un réel x_0, sauf éventuellement en x_0.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme P de degré au plus n, un intervalle ouvert I de centre x_0 et une fonction ϵ définie sur I, sauf peut-être en x_0, et de limite 0 en x_0 tels que pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$, on ait : $f(x) = P(x) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$
P est appelé partie régulière du développement limité.
$(x - x_0)^n \epsilon(x)$ est appelé reste ou terme complémentaire.

Remarques

- si f admet un développement limité en x_0 et si f n'est pas définie en x_0, f admet $P(x_0)$ comme limite en x_0. On peut alors prolonger f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = P(x_0)$.
- on peut écrire $P(x)$ sous la forme (formule de Taylor) :

Développements limités

Définitions

Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un réel x_0, sauf éventuellement en x_0.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme P de degré au plus n, un intervalle ouvert I de centre x_0 et une fonction ϵ définie sur I, sauf peut-être en x_0, et de limite 0 en x_0 tels que pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$, on ait : $f(x) = P(x) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$
P est appelé partie régulière du développement limité.
$(x - x_0)^n \epsilon(x)$ est appelé reste ou terme complémentaire.

Remarques

- si f admet un développement limité en x_0 et si f n'est pas définie en x_0, f admet $P(x_0)$ comme limite en x_0. On peut alors prolonger f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = P(x_0)$.
- on peut écrire $P(x)$ sous la forme (formule de Taylor) :

$$P(x) = P(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} P'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} P^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} P^{(n)}(x_0)$$

Développements limités

Exemples

Développements limités

Exemples

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir un développement limité d'ordre n pour pour toute fonction f telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe :

Développements limités

Exemples

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir un développement limité d'ordre n pour pour toute fonction f telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

Développements limités

Exemples

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir un développement limité d'ordre n pour pour toute fonction f telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$

Développements limités

Exemples

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir un développement limité d'ordre n pour pour toute fonction f telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$

Exemples au voisinage de 0 avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$:

Développements limités

Exemples

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir un développement limité d'ordre n pour pour toute fonction f telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \epsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$

Exemples au voisinage de 0 avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

Développements limités

Exemples

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir un développement limité d'ordre n pour pour toute fonction f telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$

Exemples au voisinage de 0 avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$$

Développements limités

Exemples

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir un développement limité d'ordre n pour pour toute fonction f telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$

Exemples au voisinage de 0 avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \epsilon(x)$$

Développements limités

Exemples

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir un développement limité d'ordre n pour pour toute fonction f telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$

Exemples au voisinage de 0 avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \epsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - (n-1))}{n!} x^n + x^n \epsilon(x)$$

Développements limités

Exemples

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir un développement limité d'ordre n pour pour toute fonction f telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$

Exemples au voisinage de 0 avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \epsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - (n-1))}{n!} x^n + x^n \epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $f(x) = e^x$ au voisinage de 0

Développements limités

Exemple : $f(x) = e^x$ au voisinage de 0

A l'ordre n : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$

Développements limités

Exemple : $f(x) = e^x$ au voisinage de 0

A l'ordre n : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$

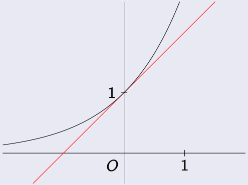
A l'ordre 1 : $e^x = 1 + x^1 + x^1\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$

Développements limités

Exemple : $f(x) = e^x$ au voisinage de 0

A l'ordre n : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$

A l'ordre 1 : $e^x = 1 + x^1 + x^1\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$



Développements limités

Exemple : $f(x) = e^x$ au voisinage de 0

Développements limités

Exemple : $f(x) = e^x$ au voisinage de 0

A l'ordre n : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$

Développements limités

Exemple : $f(x) = e^x$ au voisinage de 0

A l'ordre n : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$

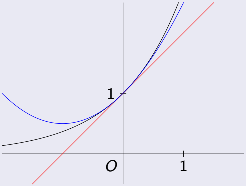
A l'ordre 2 : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$

Développements limités

Exemple : $f(x) = e^x$ au voisinage de 0

A l'ordre n : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$

A l'ordre 2 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$



Développements limités

Exemple : $f(x) = e^x$ au voisinage de 0

Développements limités

Exemple : $f(x) = e^x$ au voisinage de 0

A l'ordre n : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$

Développements limités

Exemple : $f(x) = e^x$ au voisinage de 0

A l'ordre n : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$

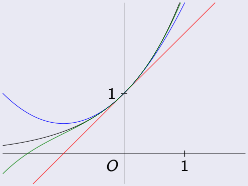
A l'ordre 3 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$

Développements limités

Exemple : $f(x) = e^x$ au voisinage de 0

A l'ordre n : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$

A l'ordre 3 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$



Développements limités

Propriétés

Développements limités

Propriétés

1) Si un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 existe alors il est unique.

Développements limités

Propriétés

1) Si un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 existe alors il est unique.
2) Si une fonction paire (respectivement impaire) admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 alors ce développement ne possède que des puissances paires (respectivement impaires) de la variable.

Développements limités

Propriétés

1) Si un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 existe alors il est unique.
2) Si une fonction paire (respectivement impaire) admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 alors ce développement ne possède que des puissances paires (respectivement impaires) de la variable.
3) Une fonction continue admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0 si et seulement si elle est dérivable en x_0.

Développements limités

Propriétés

1) Si un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 existe alors il est unique.
2) Si une fonction paire (respectivement impaire) admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 alors ce développement ne possède que des puissances paires (respectivement impaires) de la variable.
3) Une fonction continue admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0 si et seulement si elle est dérivable en x_0.
4) Le développement limité d'ordre n à l'origine d'une fonction polynôme P de degré m est égal à ce polynôme si $n \geq m$.

Développements limités

Propriétés

1) Si un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 existe alors il est unique.
2) Si une fonction paire (respectivement impaire) admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 alors ce développement ne possède que des puissances paires (respectivement impaires) de la variable.
3) Une fonction continue admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0 si et seulement si elle est dérivable en x_0.
4) Le développement limité d'ordre n à l'origine d'une fonction polynôme P de degré m est égal à ce polynôme si $n \geq m$.
Pour $n < m$ on obtient ce développement en supprimant tous les termes de degré strictement supérieur à n.

Développements limités

Propriétés

1) Si un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 existe alors il est unique.
2) Si une fonction paire (respectivement impaire) admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 alors ce développement ne possède que des puissances paires (respectivement impaires) de la variable.
3) Une fonction continue admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0 si et seulement si elle est dérivable en x_0.
4) Le développement limité d'ordre n à l'origine d'une fonction polynôme P de degré m est égal à ce polynôme si $n \geq m$.
Pour $n < m$ on obtient ce développement en supprimant tous les termes de degré strictement supérieur à n.
5) On peut toujours se ramener à un développement limité au voisinage de 0.

Développements limités

Exemples

Développements limités

Exemples

Développement limité de $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7$ au voisinage de 0.

Développements limités

Exemples

Développement limité de $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7$ au voisinage de 0.

à l'ordre 8 :

$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7 + x^8\epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = 0)$.

Développements limités

Exemples

Développement limité de $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7$ au voisinage de 0.

à l'ordre 8 :

$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7 + x^8\epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = 0)$.

à l'ordre 7 :

Développements limités

Exemples

Développement limité de $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7$ au voisinage de 0.

à l'ordre 8 :

$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7 + x^8\epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = 0)$.

à l'ordre 7 :

$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7 + x^7\epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = 0)$.

Développements limités

Exemples

Développement limité de $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7$ au voisinage de 0.

à l'ordre 8 :

$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7 + x^8\epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = 0)$.

à l'ordre 7 :

$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7 + x^7\epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = 0)$.

à l'ordre 6 :

Développements limités

Exemples

Développement limité de $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7$ au voisinage de 0.

à l'ordre 8 :

$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7 + x^8\epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = 0)$.

à l'ordre 7 :

$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7 + x^7\epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = 0)$.

à l'ordre 6 :

$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 + x^6\epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = -5x)$.

Développements limités

Exemples

Développement limité de $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7$ au voisinage de 0.

à l'ordre 8 :

$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7 + x^8\epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = 0)$.

à l'ordre 7 :

$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7 + x^7\epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = 0)$.

à l'ordre 6 :

$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 + x^6\epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = -5x)$.

à l'ordre 3 :

Développements limités

Exemples

Développement limité de $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7$ au voisinage de 0.

à l'ordre 8 :
$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7 + x^8\epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = 0)$.

à l'ordre 7 :
$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 - 5x^7 + x^7\epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = 0)$.

à l'ordre 6 :
$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^4 + x^6 + x^6\epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = -5x)$.

à l'ordre 3 :
$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + x^3\epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = x + x^3 - 5x^4)$.

Développements limités

Exemples

Développements limités

Exemples

Développement limité de e^x à l'ordre 2 au voisinage de 1 :

Développements limités

Exemples

Développement limité de e^x à l'ordre 2 au voisinage de 1 :

$$e^x = e^{(1+h)} = e^1 e^h = e(1 + h + \frac{h^2}{2} + h^2\epsilon_1(h)) = e + eh + e\frac{h^2}{2} + eh^2\epsilon_1(h)$$

Développements limités

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Exemples

Développement limité de e^x à l'ordre 2 au voisinage de 1 :

$$e^x = e^{(1+h)} = e^1 e^h = e(1 + h + \frac{h^2}{2} + h^2\epsilon_1(h)) = e + eh + e\frac{h^2}{2} + eh^2\epsilon_1(h)$$

avec $\epsilon_1(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Développements limités

Exemples

Développement limité de e^x à l'ordre 2 au voisinage de 1 :

$$e^x = e^{(1+h)} = e^1 e^h = e(1 + h + \frac{h^2}{2} + h^2\epsilon_1(h)) = e + eh + e\frac{h^2}{2} + eh^2\epsilon_1(h)$$

avec $\epsilon_1(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

On obtient en écrivant $h = x - 1$:

Développements limités

Exemples

Développement limité de e^x à l'ordre 2 au voisinage de 1 :

$$e^x = e^{(1+h)} = e^1 e^h = e(1 + h + \frac{h^2}{2} + h^2\epsilon_1(h)) = e + eh + e\frac{h^2}{2} + eh^2\epsilon_1(h)$$

avec $\epsilon_1(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

On obtient en écrivant $h = x - 1$:

$$e^x = e + e(x-1) + e\frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2 e\epsilon_1(x-1)$$

Développements limités

Exemples

Développement limité de e^x à l'ordre 2 au voisinage de 1 :

$$e^x = e^{(1+h)} = e^1 e^h = e(1 + h + \frac{h^2}{2} + h^2\epsilon_1(h)) = e + eh + e\frac{h^2}{2} + eh^2\epsilon_1(h)$$

avec $\epsilon_1(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

On obtient en écrivant $h = x - 1$:

$$e^x = e + e(x-1) + e\frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2 e\epsilon_1(x-1)$$

$$e^x = e + e(x-1) + e\frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2\epsilon_2(x) \text{ avec}$$

$\epsilon_2(x) = e\epsilon_1(x-1) \to 0$ lorsque $x \to 1$

Développements limités

Remarque

Développements limités

Remarque

Si f admet un développement limité d'ordre $n \geq 2$, cela n'implique pas l'existence de dérivées d'ordre supérieur ou égal à 2.

Développements limités

Remarque

Si f admet un développement limité d'ordre $n \geq 2$, cela n'implique pas l'existence de dérivées d'ordre supérieur ou égal à 2.

Exemple

Développements limités

Remarque

Si f admet un développement limité d'ordre $n \geq 2$, cela n'implique pas l'existence de dérivées d'ordre supérieur ou égal à 2.

Exemple

$f(x) = \cos x + x^3 \sin \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ admet un développement limité d'ordre 2 en 0

Développements limités

Remarque

Si f admet un développement limité d'ordre $n \geq 2$, cela n'implique pas l'existence de dérivées d'ordre supérieur ou égal à 2.

Exemple

$f(x) = \cos x + x^3 \sin \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ admet un développement limité d'ordre 2 en 0 : $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + x^2 \epsilon(x)$

Développements limités

Remarque

Si f admet un développement limité d'ordre $n \geq 2$, cela n'implique pas l'existence de dérivées d'ordre supérieur ou égal à 2.

Exemple

$f(x) = \cos x + x^3 \sin \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ admet un développement limité d'ordre 2 en 0 : $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + x^2\epsilon(x) + x^2\left(x \sin \dfrac{1}{x}\right)$

Développements limités

Remarque

Si f admet un développement limité d'ordre $n \geq 2$, cela n'implique pas l'existence de dérivées d'ordre supérieur ou égal à 2.

Exemple

$f(x) = \cos x + x^3 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ admet un développement limité d'ordre 2 en 0 : $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2 \epsilon(x) + x^2 \left(x \sin \frac{1}{x} \right)$

soit $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2 \left(\epsilon(x) + x \sin \frac{1}{x} \right)$

Développements limités

Remarque

Si f admet un développement limité d'ordre $n \geq 2$, cela n'implique pas l'existence de dérivées d'ordre supérieur ou égal à 2.

Exemple

$f(x) = \cos x + x^3 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ admet un développement limité d'ordre 2 en 0 : $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2\epsilon(x) + x^2\left(x \sin \frac{1}{x}\right)$

soit $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2\left(\epsilon(x) + x \sin \frac{1}{x}\right)$ mais $f^{(2)}(0)$ n'existe pas.

Développements limités

Division suivant les puissances croissantes

Développements limités

Division suivant les puissances croissantes

La division suivant les puissances croissantes à l'ordre n du polynôme A par le polynôme B tel que $B(0) \neq 0$ est donnée par $A = BQ_n + x^{n+1}R_n$, Q_n et R_n polynômes avec Q_n de degré $\leq n$.

Développements limités

Division suivant les puissances croissantes

La division suivant les puissances croissantes à l'ordre n du polynôme A par le polynôme B tel que $B(0) \neq 0$ est donnée par $A = BQ_n + x^{n+1}R_n$, Q_n et R_n polynômes avec Q_n de degré $\leq n$.

Remarque

Développements limités

Division suivant les puissances croissantes

La division suivant les puissances croissantes à l'ordre n du polynôme A par le polynôme B tel que $B(0) \neq 0$ est donnée par $A = BQ_n + x^{n+1}R_n$, Q_n et R_n polynômes avec Q_n de degré $\leq n$.

Remarque

Le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Développements limités

Exemple

Développements limités

Exemple

$$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\qquad$ $B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad\boxed{\text{Division à l'ordre 0}}$:

Exemple

$A(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ $\quad \boxed{\text{Division à l'ordre 0}}$:

$$
\begin{array}{lll|l}
x & -\frac{x^3}{6} & +\frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad$ Division à l'ordre 0 :

$$\begin{array}{cccc|l} x & -\frac{x^3}{6} & +\frac{x^5}{120} & & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) . \; 0 + x^{0+1}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right)$$

Développements limités

Exemple

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Développements limités

Exemple

$$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Développements limités

Exemple

$$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

Développements limités

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad$ Division à l'ordre 1 :

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad$ $B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad$ $\boxed{\text{Division à l'ordre 1}}$:

$$
\begin{array}{ccc|l}
x & -\frac{x^3}{6} & +\frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\
\cline{4-4}
-x & +\frac{x^3}{2} & -\frac{x^5}{24} & x \\
\hline
 & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{30} &
\end{array}
$$

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ $\quad$ $\boxed{\text{Division à l'ordre 1}}$:

$$
\begin{array}{ccc|l}
x & -\frac{x^3}{6} & +\frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\ \hline
-x & +\frac{x^3}{2} & -\frac{x^5}{24} & x \\ \hline
 & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{30} &
\end{array}
$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) . \; x + x^{1+1}\left(\frac{x^1}{3} - \frac{x^3}{30}\right)$$

Développements limités

Exemple

Développements limités

Exemple

$$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\qquad$ $B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad$ $B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad$ $\boxed{\text{Division à l'ordre 2}}$:

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\boxed{\text{Division à l'ordre 2}}$:

$$
\begin{array}{ccc|l}
x & -\frac{x^3}{6} & +\frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\
\hline
-x & +\frac{x^3}{2} & -\frac{x^5}{24} & x \\
\hline
 & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{30} &
\end{array}
$$

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad$ $\boxed{\text{Division à l'ordre 2}}$:

$$
\begin{array}{ccc|l}
x & -\frac{x^3}{6} & +\frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\
\hline
-x & +\frac{x^3}{2} & -\frac{x^5}{24} & x \\
\hline
 & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{30} &
\end{array}
$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \cdot \; x + x^{2+1}\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{30}\right)$$

Développements limités

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Exemple

Développements limités

Exemple

$$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Développements limités

Exemple

$$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad$ $B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad$ $\boxed{\text{Division à l'ordre 3}}$:

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad$ $\boxed{\text{Division à l'ordre 3}}$:

$$
\begin{array}{cccc|l}
x & -\frac{x^3}{6} & +\frac{x^5}{120} & & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\
\hline
-x & +\frac{x^3}{2} & -\frac{x^5}{24} & & x + \frac{x^3}{3} \\
\hline
 & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{30} & & \\
 & -\frac{x^3}{3} & +\frac{x^5}{6} & -\frac{x^7}{72} & \\
\hline
 & & \frac{2x^5}{15} & -\frac{x^7}{72} &
\end{array}
$$

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad$ $\boxed{\text{Division à l'ordre 3}}$:

$$
\begin{array}{cccc|l}
x & -\frac{x^3}{6} & +\frac{x^5}{120} & & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\
\hline
-x & +\frac{x^3}{2} & -\frac{x^5}{24} & & x + \frac{x^3}{3} \\
\hline
 & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{30} & & \\
 & -\frac{x^3}{3} & +\frac{x^5}{6} & -\frac{x^7}{72} & \\
\hline
 & & \frac{2x^5}{15} & -\frac{x^7}{72} &
\end{array}
$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + x^{3+1}\left(\frac{2x^1}{15} - \frac{x^3}{72}\right)$$

Développements limités

Exemple

Développements limités

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

Développements limités

Exemple

$$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad$ $B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad$ $\boxed{\text{Division à l'ordre 4}}$:

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad$ Division à l'ordre 4 :

$$
\begin{array}{cccc|l}
x & -\frac{x^3}{6} & +\frac{x^5}{120} & & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\
\cline{5-5}
-x & +\frac{x^3}{2} & -\frac{x^5}{24} & & x + \frac{x^3}{3} \\
\cline{1-3}
 & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{30} & & \\
 & -\frac{x^3}{3} & +\frac{x^5}{6} & -\frac{x^7}{72} & \\
\cline{2-4}
 & & \frac{2x^5}{15} & -\frac{x^7}{72} &
\end{array}
$$

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Exemple

$A(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ $\quad$ $B(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ $\quad$ $\boxed{\text{Division à l'ordre 4}}$:

$$\begin{array}{cccc|c}
x & -\frac{x^3}{6} & +\frac{x^5}{120} & & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\ \cline{5-5}
-x & +\frac{x^3}{2} & -\frac{x^5}{24} & & x + \frac{x^3}{3} \\ \cline{1-3}
 & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{30} & & \\
 & -\frac{x^3}{3} & +\frac{x^5}{6} & -\frac{x^7}{72} & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{2x^5}{15} & -\frac{x^7}{72} &
\end{array}$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + x^{4+1}\left(\frac{2}{15} - \frac{x^2}{72}\right)$$

Développements limités

Exemple

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

Développements limités

Exemple

$$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad$ $B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad$ $\boxed{\text{Division à l'ordre 5}}$:

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ $\quad$ $\boxed{\text{Division à l'ordre 5}}$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x & -\frac{x^3}{6} & +\frac{x^5}{120} & & & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\
\hline
-x & +\frac{x^3}{2} & -\frac{x^5}{24} & & & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \\
\hline
 & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{30} & & & \\
 & -\frac{x^3}{3} & +\frac{x^5}{6} & -\frac{x^7}{72} & & \\
\hline
 & & \frac{2x^5}{15} & -\frac{x^7}{72} & & \\
\hline
 & & \frac{2x^5}{15} & -\frac{x^7}{72} & & \\
 & & -\frac{2x^5}{15} & +\frac{x^7}{15} & -\frac{x^9}{180} & \\
\hline
 & & & \frac{19x^7}{360} & -\frac{x^9}{180} &
\end{array}
$$

Développements limités

Exemple

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\qquad$ $B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad$ $B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad$ $\boxed{\text{Division à l'ordre 5}}$:

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad$ Division à l'ordre 5 :

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) + x^{5+1}\left(\frac{19x^1}{360} - \frac{x^3}{180}\right)$$

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad$ Division à l'ordre 5 :

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \right) + x^{5+1} \left(\frac{19x^1}{360} - \frac{x^3}{180} \right)$$

Exemple

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\boxed{\text{Division à l'ordre 5}}$:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) + x^{5+1}\left(\frac{19x^1}{360} - \frac{x^3}{180}\right)$$

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad$ $\boxed{\text{Division à l'ordre 5}}$:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) + x^{5+1}\left(\frac{19x^1}{360} - \frac{x^3}{180}\right)$$

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad$ Division à l'ordre 5 :

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) + x^{5+1}\left(\frac{19x^1}{360} - \frac{x^3}{180}\right)$$

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad$ Division à l'ordre 6 :

Développements limités

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad \boxed{\text{Division à l'ordre 5}}$:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \right) + x^{5+1} \left(\frac{19x^1}{360} - \frac{x^3}{180} \right)$$

Exemple

$A(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad B(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad \boxed{\text{Division à l'ordre 6}}$:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \right) + x^{6+1} \left(\frac{19}{360} - \frac{x^2}{180} \right)$$

Développements limités

Opérations

Développements limités

Opérations

Soit f et g deux fonctions admettant un développement limité d'ordre $n \geq 1$ au voisinage de 0. Alors $f+g$,

Développements limités

Opérations

Soit f et g deux fonctions admettant un développement limité d'ordre $n \geq 1$ au voisinage de 0. Alors $f + g$, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$,

Développements limités

Opérations

Soit f et g deux fonctions admettant un développement limité d'ordre $n \geq 1$ au voisinage de 0. Alors $f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), fg admettent un développement limité d'ordre n au voisinage de 0.

Développements limités

Opérations

Soit f et g deux fonctions admettant un développement limité d'ordre $n \geq 1$ au voisinage de 0. Alors $f + g$, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$, fg admettent un développement limité d'ordre n au voisinage de 0.

De même pour $\dfrac{f}{g}$ si $g(0) \neq 0$

Développements limités

Opérations

Soit f et g deux fonctions admettant un développement limité d'ordre $n \geq 1$ au voisinage de 0. Alors $f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), fg admettent un développement limité d'ordre n au voisinage de 0.

De même pour $\dfrac{f}{g}$ si $g(0) \neq 0$ et $g \circ f$ si $f(0) = 0$.

Développements limités

Opérations

Développements limités

Opérations

De plus, si $f(x) = P(x) + x^n\epsilon_1(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\epsilon_2(x)$ ($deg(P) \leq n$, $deg(Q) \leq n$) :

Développements limités

Opérations

De plus, si $f(x) = P(x) + x^n\epsilon_1(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\epsilon_2(x)$ $(deg(P) \leq n, deg(Q) \leq n)$:
La partie régulière du développement limité de la somme $f + g$ est la somme des parties régulières $P(x) + Q(x)$.

Développements limités

Opérations

De plus, si $f(x) = P(x) + x^n\epsilon_1(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\epsilon_2(x)$ ($deg(P) \leq n$, $deg(Q) \leq n$) :
La partie régulière du développement limité de la somme $f + g$ est la somme des parties régulières $P(x) + Q(x)$.
La partie régulière du développement limité du produit fg est la somme des termes de degré inférieur ou égal à n du produit $P(x)Q(x)$.

Développements limités

Opérations

De plus, si $f(x) = P(x) + x^n\epsilon_1(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\epsilon_2(x)$ ($deg(P) \leq n$, $deg(Q) \leq n$) :

La partie régulière du développement limité de la somme $f + g$ est la somme des parties régulières $P(x) + Q(x)$.

La partie régulière du développement limité du produit fg est la somme des termes de degré inférieur ou égal à n du produit $P(x)Q(x)$.

La partie régulière du développement limité du quotient $\dfrac{f}{g}$ est le quotient suivant les puissances croissantes à l'ordre n de $P(x)$ par $Q(x)$.

Développements limités

Opérations

De plus, si $f(x) = P(x) + x^n \epsilon_1(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n \epsilon_2(x)$ ($deg(P) \leq n$, $deg(Q) \leq n$) :

La partie régulière du développement limité de la somme $f + g$ est la somme des parties régulières $P(x) + Q(x)$.

La partie régulière du développement limité du produit fg est la somme des termes de degré inférieur ou égal à n du produit $P(x)Q(x)$.

La partie régulière du développement limité du quotient $\dfrac{f}{g}$ est le quotient suivant les puissances croissantes à l'ordre n de $P(x)$ par $Q(x)$.

La division suivant les puissances croissantes d'un polynôme A par un polynôme B tel que $B(0) \neq 0$ est donnée par $A = BQ_n + x^{n+1}R_n$, Q_n et R_n polynômes avec Q_n de degré $\leq n$.

Développements limités

Opérations

De plus, si $f(x) = P(x) + x^n\epsilon_1(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\epsilon_2(x)$ ($deg(P) \leq n$, $deg(Q) \leq n$) :

La partie régulière du développement limité de la somme $f+g$ est la somme des parties régulières $P(x) + Q(x)$.

La partie régulière du développement limité du produit fg est la somme des termes de degré inférieur ou égal à n du produit $P(x)Q(x)$.

La partie régulière du développement limité du quotient $\dfrac{f}{g}$ est le quotient suivant les puissances croissantes à l'ordre n de $P(x)$ par $Q(x)$.

La division suivant les puissances croissantes d'un polynôme A par un polynôme B tel que $B(0) \neq 0$ est donnée par $A = BQ_n + x^{n+1}R_n$, Q_n et R_n polynômes avec Q_n de degré $\leq n$.

La partie régulière du développement limité de la composée $g \circ f$ est la somme des termes de degré inférieur ou égal à n de $Q \circ P(x)$.

Développements limités

Exemple : $e^x + \sin x$

Développements limités

Exemple : $e^x + \sin x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $e^x + \sin x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $e^x + \sin x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x)$$

$$e^x + \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + x^3\epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $e^x + \sin x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x)$$

$$e^x + \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + x^3\epsilon(x)$$

$$e^x + \sin x = 1 + 2x + \frac{x^2}{2!} + x^3\epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $e^x \sin x$

Développements limités

Exemple : $e^x \sin x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $e^x \sin x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

$$\sin x = 0 + x + 0.x^2 - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $e^x \sin x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

$$\sin x = 0 + x + 0.x^2 - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

$e^x \sin x =$

Développements limités

Exemple : $e^x \sin x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

$$\sin x = 0 + x + 0.x^2 - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

$e^x \sin x = 1.0$

Développements limités

Exemple : $e^x \sin x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

$$\sin x = 0 + x + 0.x^2 - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

$e^x \sin x = 1.0 + (1.x + x.0)$

Développements limités

Exemple : $e^x \sin x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

$$\sin x = 0 + x + 0.x^2 - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

$$e^x \sin x = 1.0 + {\color{red}(1.x + x.0)} + \left(1.0x^2 + x.x + \frac{x^2}{2}.0\right)$$

Développements limités

Exemple : $e^x \sin x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

$$\sin x = 0 + x + 0.x^2 - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

$$e^x \sin x = 1.0 + (1.x + x.0) + \left(1.0x^2 + x.x + \frac{x^2}{2}.0\right) + \left(1.\left(-\frac{x^3}{6}\right) + \frac{x^2}{2}.x + \frac{x^3}{6}.0\right)$$

Développements limités

Exemple : $e^x \sin x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

$$\sin x = 0 + x + 0.x^2 - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

$$e^x \sin x = 1.0 + (1.x + x.0) + \left(1.0x^2 + x.x + \frac{x^2}{2}.0\right) + \left(1.\left(-\frac{x^3}{6}\right) + \frac{x^2}{2}.x + \frac{x^3}{6}.0\right) + x^3\epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $e^x \sin x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

$$\sin x = 0 + x + 0.x^2 - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

$$e^x \sin x = 1.0 + (1.x + x.0) + \left(1.0x^2 + x.x + \frac{x^2}{2}.0\right) + \left(1.\left(-\frac{x^3}{6}\right) + \frac{x^2}{2}.x + \frac{x^3}{6}.0\right) + x^3\epsilon(x)$$

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $\tan x$

Développements limités

Exemple : $\tan x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $\tan x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $\tan x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\epsilon(x)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Exemple : $\tan x$

Exemple : $\tan x$

$$
\begin{array}{ccccc|l}
x & -\frac{x^3}{6} & +\frac{x^5}{120} & & & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \\
\cline{6-6}
-x & +\frac{x^3}{2} & -\frac{x^5}{24} & & & x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15} \\
\cline{1-3}
 & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{30} & & & \\
 & -\frac{x^3}{3} & +\frac{x^5}{6} & -\frac{x^7}{72} & & \\
\cline{2-4}
 & & \frac{2x^5}{15} & -\frac{x^7}{72} & & \\
 & & -\frac{2x^5}{15} & +\frac{x^7}{15} & -\frac{x^9}{180} & \\
\cline{3-5}
 & & & \frac{19x^7}{360} & -\frac{x^9}{180} &
\end{array}
$$

Développements limités

Exemple : $\tan x$

$$
\begin{array}{ccccc|l}
x & -\frac{x^3}{6} & +\frac{x^5}{120} & & & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \\
\cline{6-6}
-x & +\frac{x^3}{2} & -\frac{x^5}{24} & & & x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15} \\
\cline{1-3}
 & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{30} & & & \\
 & -\frac{x^3}{3} & +\frac{x^5}{6} & -\frac{x^7}{72} & & \\
\cline{2-4}
 & & \frac{2x^5}{15} & -\frac{x^7}{72} & & \\
 & & -\frac{2x^5}{15} & +\frac{x^7}{15} & -\frac{x^9}{180} & \\
\cline{3-5}
 & & & \frac{19x^7}{360} & -\frac{x^9}{180} & \\
\end{array}
$$

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)+x^{5+1}\left(\frac{19x}{360}-\frac{x^3}{180}\right)$$

Développements limités

Exemple : $\tan x$

Développements limités

Exemple : $\tan x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $\tan x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $\tan x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\epsilon(x)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $\tan x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\epsilon(x)$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\epsilon(x)$$

Remarque

Développements limités

Exemple : $\tan x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\epsilon(x)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\epsilon(x)$$

Remarque

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^6\epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $e^{\sin x}$

Développements limités

Exemple : $e^{\sin x}$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon(u)$$

Développements limités

Exemple : $e^{\sin x}$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon(u)$$

$$u = x - \frac{x^3}{6}$$

Développements limités

Exemple : $e^{\sin x}$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon(u)$$

$$u = x - \frac{x^3}{6}$$

$$u^2 = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = x^2 + \cdots$$

Développements limités

Exemple : $e^{\sin x}$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon(u)$$

$$u = x - \frac{x^3}{6}$$

$$u^2 = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = x^2 + \cdots$$

$$u^3 = u.u^2 = x^3 + \cdots$$

Développements limités

Exemple : $e^{\sin x}$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon(u)$$

$$u = x - \frac{x^3}{6}$$

$$u^2 = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = x^2 + \cdots$$

$$u^3 = u.u^2 = x^3 + \cdots$$

$$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $e^{\sin x}$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon(u)$$

$$u = x - \frac{x^3}{6}$$

$$u^2 = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = x^2 + \cdots$$

$$u^3 = u.u^2 = x^3 + \cdots$$

$$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x)$$

Développements limités

Dérivation

Développements limités

Dérivation

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert contenant 0.

Développements limités

Dérivation

Soit f une fonction de classe C^{∞} sur un intervalle ouvert contenant 0.
Le développement limité de f d'ordre n au voisinage de 0 est
$f(x) = P(x) + x^n \epsilon(x)$.

Développements limités

Dérivation

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert contenant 0.
Le développement limité de f d'ordre n au voisinage de 0 est
$f(x) = P(x) + x^n\epsilon(x)$.
Celui de $f'(x)$ est alors $P'(x) + x^{n-1}\epsilon(x)$.

Développements limités

Dérivation

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert contenant 0.
Le développement limité de f d'ordre n au voisinage de 0 est
$f(x) = P(x) + x^n\epsilon(x)$.
Celui de $f'(x)$ est alors $P'(x) + x^{n-1}\epsilon(x)$.

Exemple

Développements limités

Dérivation

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert contenant 0.
Le développement limité de f d'ordre n au voisinage de 0 est
$f(x) = P(x) + x^n\epsilon(x)$.
Celui de $f'(x)$ est alors $P'(x) + x^{n-1}\epsilon(x)$.

Exemple

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$ donne

Développements limités

Dérivation

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert contenant 0.
Le développement limité de f d'ordre n au voisinage de 0 est
$f(x) = P(x) + x^n\epsilon(x)$.
Celui de $f'(x)$ est alors $P'(x) + x^{n-1}\epsilon(x)$.

Exemple

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$ donne

$\left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + x^{n-1}\epsilon(x)$ soit

Développements limités

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Dérivation

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert contenant 0.
Le développement limité de f d'ordre n au voisinage de 0 est
$f(x) = P(x) + x^n \epsilon(x)$.
Celui de $f'(x)$ est alors $P'(x) + x^{n-1}\epsilon(x)$.

Exemple

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$ donne

$\left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + x^{n-1}\epsilon(x)$ soit

$\dfrac{-1}{(1-x)^2}.(-1) = \dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + x^{n-1}\epsilon(x)$

Développements limités

Intégration

Intégration

Soit f une fonction dérivable sur un voisinage de 0 dont la dérivée admet un développement limité d'ordre n : $f'(x) = P(x) + x^n\epsilon(x)$.

Développements limités

Intégration

Soit f une fonction dérivable sur un voisinage de 0 dont la dérivée admet un développement limité d'ordre n : $f'(x) = P(x) + x^n\epsilon(x)$.
Alors f admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n :
$f(x) = f(0) + \int_0^x P(t)dt + x^{n+1}\epsilon(x)$.

Développements limités

Exemple : $\ln(1+x)$

Développements limités

Exemple : $\ln(1+x)$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$ donne par composition :

Développements limités

Exemple : $\ln(1+x)$

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$ donne par composition :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + (-x)^2 + (-x)^3 \cdots + (-x)^n + x^n\epsilon(x)$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $\ln(1+x)$

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$ donne par composition :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + (-x)^2 + (-x)^3 \cdots + (-x)^n + x^n\epsilon(x)$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$$

Comme $\ln(1+x)' = \dfrac{1}{1+x}$

Développements limités

Exemple : $\ln(1+x)$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$ donne par composition :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + (-x)^2 + (-x)^3 \cdots + (-x)^n + x^n\epsilon(x)$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$$

Comme $\ln(1+x)' = \frac{1}{1+x}$

$$\ln(1+x) = \ln(1+0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\epsilon(x)$$

Développements limités

Exemple : $\ln(1+x)$

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$ donne par composition :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + (-x)^2 + (-x)^3 \cdots + (-x)^n + x^n\epsilon(x)$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$$

Comme $\ln(1+x)' = \dfrac{1}{1+x}$

$$\ln(1+x) = \ln(1+0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\epsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\epsilon(x)$$

Développement limité généralisé

Définition

Développement limité généralisé

Définition

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0.

Développement limité généralisé

Définition

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0. Si la fonction f n'admet pas de de développement limité au voisinage de x_0, mais si $(x - x_0)^k f(x)$ $(k > 0)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 :

Développement limité généralisé

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Définition

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0.
Si la fonction f n'admet pas de de développement limité au voisinage de x_0, mais si $(x-x_0)^k f(x)$ $(k>0)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 :
$(x-x_0)^k f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \epsilon(x)$ alors

Développement limité généralisé

Définition

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0.
Si la fonction f n'admet pas de de développement limité au voisinage de x_0, mais si $(x-x_0)^k f(x)$ $(k>0)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 :
$(x-x_0)^k f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \epsilon(x)$ alors

$$f(x) = \frac{a_0}{(x-x_0)^k} + \frac{a_1}{(x-x_0)^{k-1}} + \frac{a_2}{(x-x_0)^{k-2}} + \cdots + a_n(x-x_0)^{n-k} + (x-x_0)^{n-k}\epsilon(x)$$

Développement limité généralisé

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Définition

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0.
Si la fonction f n'admet pas de de développement limité au voisinage de x_0, mais si $(x-x_0)^k f(x)$ $(k>0)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 :

$(x-x_0)^k f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \epsilon(x)$ alors

$$f(x) = \frac{a_0}{(x-x_0)^k} + \frac{a_1}{(x-x_0)^{k-1}} + \frac{a_2}{(x-x_0)^{k-2}} + \cdots + a_n(x-x_0)^{n-k} + (x-x_0)^{n-k}\epsilon(x)$$

On dit que f admet un développement limité généralisé d'ordre $n-k$ au voisinage de x_0.

Développement limité généralisé

Exemple

Développement limité généralisé

Exemple

Au voisinage de 0 : $\dfrac{1}{x^2 - x^3} = \dfrac{1}{x^2(1-x)}$

Développement limité généralisé

Exemple

Au voisinage de 0 : $\dfrac{1}{x^2 - x^3} = \dfrac{1}{x^2(1-x)}$

$$\frac{x^2}{x^2 - x^3} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+2}\epsilon(x)$$

Développement limité généralisé

Exemple

Au voisinage de 0 : $\dfrac{1}{x^2 - x^3} = \dfrac{1}{x^2(1-x)}$

$$\frac{x^2}{x^2 - x^3} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+2}\epsilon(x)$$

donne $\dfrac{1}{x^2 - x^3} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1 + x + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n + x^n\epsilon(x)$

Développement limité à l'infini

Exemple

Développement limité à l'infini

Exemple

Soit f une fonction définie sur un voisinage de $-\infty$ ou $+\infty$.

Développement limité à l'infini

Exemple

Soit f une fonction définie sur un voisinage de $-\infty$ ou $+\infty$.
On se ramène au cas précédent en posant $y = \dfrac{1}{x}$ et en étudiant $g(y) = f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ au voisinage de 0, sauf peut-être en 0.

Développement limité à l'infini

Exemple

Développement limité à l'infini

Exemple

Au voisinage de $+\infty$, en posant $y = \dfrac{1}{x}$:

$$\frac{x^3}{x-1} = \frac{1}{y^2 - y^3} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + 1 + y + \cdots + y^{n-2} + y^{n-1} + y^n + y^n \epsilon(y).$$

Développement limité à l'infini

Exemple

Au voisinage de $+\infty$, en posant $y = \dfrac{1}{x}$:

$$\frac{x^3}{x-1} = \frac{1}{y^2 - y^3} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + 1 + y + \cdots + y^{n-2} + y^{n-1} + y^n + y^n \epsilon(y).$$

On obtient :

Développement limité à l'infini

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Exemple

Au voisinage de $+\infty$, en posant $y = \dfrac{1}{x}$:

$$\frac{x^3}{x-1} = \frac{1}{y^2 - y^3} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + 1 + y + \cdots + y^{n-2} + y^{n-1} + y^n + y^n \epsilon(y).$$

On obtient :

$$\frac{x^3}{x-1} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \cdots + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

Développement limité à l'infini

Exemple

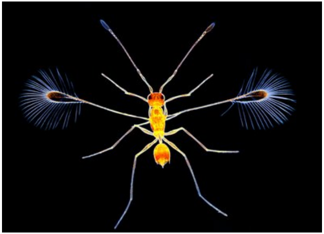
Au voisinage de $+\infty$, en posant $y = \frac{1}{x}$:

$$\frac{x^3}{x-1} = \frac{1}{y^2 - y^3} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + 1 + y + \cdots + y^{n-2} + y^{n-1} + y^n + y^n \epsilon(y).$$

On obtient :

$$\frac{x^3}{x-1} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \cdots + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

soit $\frac{x^3}{x-1} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \cdots + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n}\epsilon(x)$



Guêpe "Fairy Fly" par Spike Walker

Fonctions équivalentes

Définitions

Fonctions équivalentes

Définitions

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 (réel, $+\infty$ ou -∞), sauf peut-être en x_0 ou sur un voisinage à gauche (partie contenant un intervalle $]a, x_0[$) ou à droite (partie contenant un intervalle $]x_0, a[$).

Fonctions équivalentes

Définitions

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 (réel, $+\infty$ ou -∞), sauf peut-être en x_0 ou sur un voisinage à gauche (partie contenant un intervalle $]a, x_0[$) ou à droite (partie contenant un intervalle $]x_0, a[$).
On dit que f est équivalente à g sur un voisinage de x_0

Fonctions équivalentes

Définitions

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 (réel, $+\infty$ ou -∞), sauf peut-être en x_0 ou sur un voisinage à gauche (partie contenant un intervalle $]a, x_0[$) ou à droite (partie contenant un intervalle $]x_0, a[$).
On dit que f est équivalente à g sur un voisinage de x_0 s'il existe un voisinage (respectivement un voisinage à gauche ou à droite) de x_0 $V(x_0)$ sur lequel f et g sont définies, sauf peut-être en x_0, et une fonction ϵ définie sur $V(x_0)$, sauf peut-être en x_0, tendant vers 0 en x_0, telle que pour tout $x \in V(x_0)$, éventuellement $x \neq x_0$,

Fonctions équivalentes

Définitions

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 (réel, $+\infty$ ou -∞), sauf peut-être en x_0 ou sur un voisinage à gauche (partie contenant un intervalle $]a, x_0[$) ou à droite (partie contenant un intervalle $]x_0, a[$).
On dit que f est équivalente à g sur un voisinage de x_0 s'il existe un voisinage (respectivement un voisinage à gauche ou à droite) de x_0 $V(x_0)$ sur lequel f et g sont définies, sauf peut-être en x_0, et une fonction ϵ définie sur $V(x_0)$, sauf peut-être en x_0, tendant vers 0 en x_0, telle que pour tout $x \in V(x_0)$, éventuellement $x \neq x_0$, $f(x) = g(x) + g(x)\epsilon(x)$.

Fonctions équivalentes

Définitions

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 (réel, $+\infty$ ou -∞), sauf peut-être en x_0 ou sur un voisinage à gauche (partie contenant un intervalle $]a, x_0[$) ou à droite (partie contenant un intervalle $]x_0, a[$).
On dit que f est équivalente à g sur un voisinage de x_0 s'il existe un voisinage (respectivement un voisinage à gauche ou à droite) de x_0 $V(x_0)$ sur lequel f et g sont définies, sauf peut-être en x_0, et une fonction ϵ définie sur $V(x_0)$, sauf peut-être en x_0, tendant vers 0 en x_0, telle que pour tout $x \in V(x_0)$, éventuellement $x \neq x_0$, $f(x) = g(x) + g(x)\epsilon(x)$.

Notation

Fonctions équivalentes

Définitions

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 (réel, $+\infty$ ou -∞), sauf peut-être en x_0 ou sur un voisinage à gauche (partie contenant un intervalle $]a, x_0[$) ou à droite (partie contenant un intervalle $]x_0, a[$).
On dit que f est équivalente à g sur un voisinage de x_0 s'il existe un voisinage (respectivement un voisinage à gauche ou à droite) de x_0 $V(x_0)$ sur lequel f et g sont définies, sauf peut-être en x_0, et une fonction ϵ définie sur $V(x_0)$, sauf peut-être en x_0, tendant vers 0 en x_0, telle que pour tout $x \in V(x_0)$, éventuellement $x \neq x_0$, $f(x) = g(x) + g(x)\epsilon(x)$.

Notation

$f \sim g$ au voisinage de x_0 ou $f \underset{x_0}{\sim} g$.

Fonctions équivalentes

Remarque

Fonctions équivalentes

Remarque

S'il existe un voisinage (respectivement à gauche ou à droite) de x_0 sur lequel g ne s'annule pas, sauf peut-être en x_0, alors

Fonctions équivalentes

Remarque

S'il existe un voisinage (respectivement à gauche ou à droite) de x_0 sur lequel g ne s'annule pas, sauf peut-être en x_0, alors

$$f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Fonctions équivalentes

Exemples

Fonctions équivalentes

Exemples

$\sin x \underset{0}{\sim} x$: $\sin x = x + x\epsilon(x)$.

Fonctions équivalentes

Exemples

$\sin x \underset{0}{\sim} x$: $\sin x = x + x\epsilon(x)$.

Un polynôme est équivalent à son monôme

Fonctions équivalentes

Exemples

$\sin x \underset{0}{\sim} x$: $\sin x = x + x\epsilon(x)$.

Un polynôme est équivalent à son monôme

- de plus haut degré au voisinage de $\pm\infty$,

Fonctions équivalentes

Exemples

$\sin x \underset{0}{\sim} x$: $\sin x = x + x\epsilon(x)$.

Un polynôme est équivalent à son monôme

- de plus haut degré au voisinage de $\pm\infty$,
- de plus bas degré au voisinage de 0.

Fonctions équivalentes

Exemples

$\sin x \underset{0}{\sim} x$: $\sin x = x + x\epsilon(x)$.

Un polynôme est équivalent à son monôme

- de plus haut degré au voisinage de $\pm\infty$,
- de plus bas degré au voisinage de 0.

Exemples

Fonctions équivalentes

Exemples

$\sin x \underset{0}{\sim} x$: $\sin x = x + x\epsilon(x)$.

Un polynôme est équivalent à son monôme
- de plus haut degré au voisinage de $\pm\infty$,
- de plus bas degré au voisinage de 0.

Exemples

$2x^3 + 5x^2 - x \underset{\pm\infty}{\sim} 2x^3$

Fonctions équivalentes

Exemples

$\sin x \underset{0}{\sim} x$: $\sin x = x + x\epsilon(x)$.

Un polynôme est équivalent à son monôme

- de plus haut degré au voisinage de $\pm\infty$,
- de plus bas degré au voisinage de 0.

Exemples

$$2x^3 + 5x^2 - x \underset{\pm\infty}{\sim} 2x^3$$

$$2x^3 + 5x^2 - x \underset{0}{\sim} -x$$

Fonctions équivalentes

Propriétés

Fonctions équivalentes

Propriétés

f, g, h et i sont des fonctions définies au voisinage (respectivement un voisinage à gauche ou à droite) de x_0, sauf peut-être en x_0.

Fonctions équivalentes

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Propriétés

f, g, h et i sont des fonctions définies au voisinage (respectivement un voisinage à gauche ou à droite) de x_0, sauf peut-être en x_0.

1) $f \underset{x_0}{\sim} f$

Fonctions équivalentes

Propriétés

f, g, h et i sont des fonctions définies au voisinage (respectivement un voisinage à gauche ou à droite) de x_0, sauf peut-être en x_0.

1) $f \underset{x_0}{\sim} f$

2) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $g \underset{x_0}{\sim} f$

Fonctions équivalentes

Propriétés

f, g, h et i sont des fonctions définies au voisinage (respectivement un voisinage à gauche ou à droite) de x_0, sauf peut-être en x_0.

1) $f \underset{x_0}{\sim} f$

2) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $g \underset{x_0}{\sim} f$

3) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$ alors $f \underset{x_0}{\sim} h$

Fonctions équivalentes

Propriétés

f, g, h et i sont des fonctions définies au voisinage (respectivement un voisinage à gauche ou à droite) de x_0, sauf peut-être en x_0.

1) $f \underset{x_0}{\sim} f$

2) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $g \underset{x_0}{\sim} f$

3) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$ alors $f \underset{x_0}{\sim} h$

4) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} i$ alors $fh \underset{x_0}{\sim} gi$

Fonctions équivalentes

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Propriétés

f, g, h et i sont des fonctions définies au voisinage (respectivement un voisinage à gauche ou à droite) de x_0, sauf peut-être en x_0.

1) $f \underset{x_0}{\sim} f$

2) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $g \underset{x_0}{\sim} f$

3) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$ alors $f \underset{x_0}{\sim} h$

4) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} i$ alors $fh \underset{x_0}{\sim} gi$

5) Soit $\alpha > 0$. Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $f^\alpha \underset{x_0}{\sim} g^\alpha$

Fonctions équivalentes

Propriétés

f, g, h et i sont des fonctions définies au voisinage (respectivement un voisinage à gauche ou à droite) de x_0, sauf peut-être en x_0.

1) $f \underset{x_0}{\sim} f$

2) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $g \underset{x_0}{\sim} f$

3) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$ alors $f \underset{x_0}{\sim} h$

4) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} i$ alors $fh \underset{x_0}{\sim} gi$

5) Soit $\alpha > 0$. Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $f^\alpha \underset{x_0}{\sim} g^\alpha$

6) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et g ne s'annule pas sur $V(x_0)$ alors $\dfrac{1}{f} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{1}{g}$

Fonctions équivalentes

Propriétés

f, g, h et i sont des fonctions définies au voisinage (respectivement un voisinage à gauche ou à droite) de x_0, sauf peut-être en x_0.

1) $f \underset{x_0}{\sim} f$

2) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $g \underset{x_0}{\sim} f$

3) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$ alors $f \underset{x_0}{\sim} h$

4) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} i$ alors $fh \underset{x_0}{\sim} gi$

5) Soit $\alpha > 0$. Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $f^\alpha \underset{x_0}{\sim} g^\alpha$

6) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et g ne s'annule pas sur $V(x_0)$ alors $\dfrac{1}{f} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{1}{g}$

7) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si g admet une limite en x_0 alors f y admet la même limite.

Fonctions équivalentes

Propriétés

f, g, h et i sont des fonctions définies au voisinage (respectivement un voisinage à gauche ou à droite) de x_0, sauf peut-être en x_0.

1) $f \underset{x_0}{\sim} f$

2) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $g \underset{x_0}{\sim} f$

3) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$ alors $f \underset{x_0}{\sim} h$

4) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} i$ alors $fh \underset{x_0}{\sim} gi$

5) Soit $\alpha > 0$. Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $f^\alpha \underset{x_0}{\sim} g^\alpha$

6) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et g ne s'annule pas sur $V(x_0)$ alors $\dfrac{1}{f} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{1}{g}$

7) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si g admet une limite en x_0 alors f y admet la même limite.

8) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors il existe un voisinage de x_0 (respectivement un voisinage à gauche, à droite) sur lequel f et g ont le même signe.

Fonctions équivalentes

Propriétés

f, g, h et i sont des fonctions définies au voisinage (respectivement un voisinage à gauche ou à droite) de x_0, sauf peut-être en x_0.

1) $f \underset{x_0}{\sim} f$

2) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $g \underset{x_0}{\sim} f$

3) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$ alors $f \underset{x_0}{\sim} h$

4) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} i$ alors $fh \underset{x_0}{\sim} gi$

5) Soit $\alpha > 0$. Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $f^\alpha \underset{x_0}{\sim} g^\alpha$

6) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et g ne s'annule pas sur $V(x_0)$ alors $\dfrac{1}{f} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{1}{g}$

7) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si g admet une limite en x_0 alors f y admet la même limite.

8) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors il existe un voisinage de x_0 (respectivement un voisinage à gauche, à droite) sur lequel f et g ont le même signe.

9) Si f admet un développement généralisé au voisinage de x_0 de la forme $f(x) = a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$ $(a_n \neq 0)$

Fonctions équivalentes

Propriétés

f, g, h et i sont des fonctions définies au voisinage (respectivement un voisinage à gauche ou à droite) de x_0, sauf peut-être en x_0.

1) $f \underset{x_0}{\sim} f$

2) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $g \underset{x_0}{\sim} f$

3) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$ alors $f \underset{x_0}{\sim} h$

4) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} i$ alors $fh \underset{x_0}{\sim} gi$

5) Soit $\alpha > 0$. Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $f^\alpha \underset{x_0}{\sim} g^\alpha$

6) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et g ne s'annule pas sur $V(x_0)$ alors $\dfrac{1}{f} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{1}{g}$

7) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si g admet une limite en x_0 alors f y admet la même limite.

8) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors il existe un voisinage de x_0 (respectivement un voisinage à gauche, à droite) sur lequel f et g ont le même signe.

9) Si f admet un développement généralisé au voisinage de x_0 de la forme $f(x) = a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\epsilon(x)$ ($a_n \neq 0$) alors $f \underset{x_0}{\sim} a_n(x - x_0)^n$

Fonctions équivalentes

Remarques

Fonctions équivalentes

Remarques

En général, les équivalents ne s'additionnent pas :

Fonctions équivalentes

Remarques

En général, les équivalents ne s'additionnent pas :
$x + 1 \underset{0}{\sim} 1$

Fonctions équivalentes

Remarques

En général, les équivalents ne s'additionnent pas :

$x + 1 \underset{0}{\sim} 1$

$-1 \underset{0}{\sim} -1$

Fonctions équivalentes

Remarques

En général, les équivalents ne s'additionnent pas :

$x + 1 \underset{0}{\sim} 1$

$-1 \underset{0}{\sim} -1$

mais $x \neq 0 + 0\epsilon(x) = 0$ sur un voisinage de 0.

Fonctions équivalentes

Remarques

En général, les équivalents ne s'additionnent pas :

$x + 1 \underset{0}{\sim} 1$

$-1 \underset{0}{\sim} -1$

mais $x \neq 0 + 0\epsilon(x) = 0$ sur un voisinage de 0.

De même pour la composition :

Fonctions équivalentes

Remarques

En général, les équivalents ne s'additionnent pas :

$x + 1 \underset{0}{\sim} 1$

$-1 \underset{0}{\sim} -1$

mais $x \neq 0 + 0\epsilon(x) = 0$ sur un voisinage de 0.

De même pour la composition :

$$x + \sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} x : \frac{x + \sqrt{x}}{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ et } 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x \to \infty}{\to} 1.$$

Fonctions équivalentes

Remarques

En général, les équivalents ne s'additionnent pas :

$x+1 \underset{0}{\sim} 1$

$-1 \underset{0}{\sim} -1$

mais $x \neq 0 + 0\epsilon(x) = 0$ sur un voisinage de 0.

De même pour la composition :

$x+\sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} x$: $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $1 + \underset{x\to\infty}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} \to 1$.

Mais $\dfrac{e^{x+\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}} = e^{x+\sqrt{x}-\sqrt{x}} = e^x$ et $e^x \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$.

Fonctions équivalentes

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Remarques

En général, les équivalents ne s'additionnent pas :

$x+1 \underset{0}{\sim} 1$

$-1 \underset{0}{\sim} -1$

mais $x \neq 0 + 0\epsilon(x) = 0$ sur un voisinage de 0.

De même pour la composition :

$x+\sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} x$: $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $1+\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to\infty}{\to} 1$.

Mais $\dfrac{e^{x+\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}} = e^{x+\sqrt{x}-\sqrt{x}} = e^x$ et $e^x \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$.

Dans le cas de limites finies, la composition est possible.

Fonctions équivalentes

Equivalents usuels

Fonctions équivalentes

Equivalents usuels

$$\sin x \underset{0}{\sim} x$$

Fonctions équivalentes

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Equivalents usuels

$$\sin x \underset{0}{\sim} x$$

$$\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

Fonctions équivalentes

Equivalents usuels

$$\sin x \underset{0}{\sim} x$$

$$\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\tan x \underset{0}{\sim} x$$

Fonctions équivalentes

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Equivalents usuels

$$\sin x \underset{0}{\sim} x$$

$$\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\tan x \underset{0}{\sim} x$$

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$$

Fonctions équivalentes

Equivalents usuels

$$\sin x \underset{0}{\sim} x$$

$$\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\tan x \underset{0}{\sim} x$$

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

Application au calcul de limite

Exemple

Application au calcul de limite

Exemple

Limite lorsque x tend vers 0 de $f(x) = \dfrac{(\cos x - 1)(\sin x)^2}{x^3 \ln(1+x)}$

Application au calcul de limite

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Exemple

Limite lorsque x tend vers 0 de $f(x) = \dfrac{(\cos x - 1)(\sin x)^2}{x^3 \ln(1+x)}$

$$f(x) = \frac{(\cos x - 1)(\sin x)^2}{x^3 \ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}x^2}{x^3.x} = -\frac{1}{2}$$

Application au calcul de limite

Exemple

Limite lorsque x tend vers 0 de $f(x) = \dfrac{(\cos x - 1)(\sin x)^2}{x^3 \ln(1+x)}$

$$f(x) = \frac{(\cos x - 1)(\sin x)^2}{x^3 \ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}x^2}{x^3.x} = -\frac{1}{2}$$

On en déduit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}$

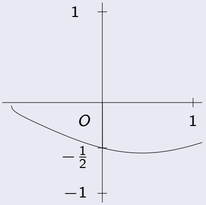
Application au calcul de limite

Exemple

Limite lorsque x tend vers 0 de $f(x) = \dfrac{(\cos x - 1)(\sin x)^2}{x^3 \ln(1+x)}$

$$f(x) = \frac{(\cos x - 1)(\sin x)^2}{x^3 \ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}x^2}{x^3.x} = -\frac{1}{2}$$

On en déduit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}$



Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Tangente

Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Tangente

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre $n \geq 2$ au voisinage de 0 :

Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Tangente

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre $n \geq 2$ au voisinage de 0 : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$ $(a_n \neq 0)$. On a alors $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) \underset{x_0}{\sim} a_n(x - x_0)^n$ et

Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Tangente

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre $n \geq 2$ au voisinage de 0 : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\epsilon(x)$ $(a_n \neq 0)$. On a alors $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) \underset{x_0}{\sim} a_n(x - x_0)^n$ et

- si n est pair, la courbe C_f reste d'un même côté de la tangente en x_0

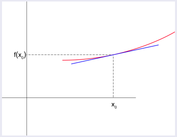
Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Tangente

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre $n \geq 2$ au voisinage de 0 : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$ $(a_n \neq 0)$. On a alors $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) \underset{x_0}{\sim} a_n(x - x_0)^n$ et

- si n est pair, la courbe C_f reste d'un même côté de la tangente en x_0

$a_n > 0$

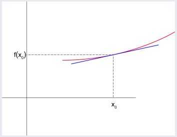


Tangente

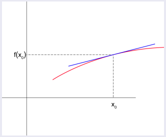
Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre $n \geq 2$ au voisinage de 0 : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$ $(a_n \neq 0)$. On a alors $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) \underset{x_0}{\sim} a_n(x - x_0)^n$ et

- si n est pair, la courbe C_f reste d'un même côté de la tangente en x_0

$a_n > 0$



$a_n < 0$



Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Tangente

Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Tangente

$$f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) \underset{x_0}{\sim} a_n(x - x_0)^n$$

Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Tangente

$$f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) \underset{x_0}{\sim} a_n(x - x_0)^n$$

- si n est impair, la courbe C_f traverse la tangente en x_0

Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Tangente

$$f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) \underset{x_0}{\sim} a_n(x - x_0)^n$$

- si n est impair, la courbe C_f traverse la tangente en x_0 (point d'inflexion).

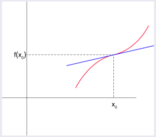
Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Tangente

$$f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) \underset{x_0}{\sim} a_n(x - x_0)^n$$

- si n est impair, la courbe C_f traverse la tangente en x_0 (point d'inflexion).

$a_n > 0$



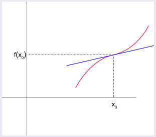
Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Tangente

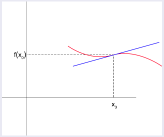
$$f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) \underset{x_0}{\sim} a_n(x - x_0)^n$$

- si n est impair, la courbe C_f traverse la tangente en x_0 (point d'inflexion).

$a_n > 0$



$a_n < 0$



Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Exemple

Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Exemple

Au voisinage de 0 $f(x) = e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$.

Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Exemple

Au voisinage de 0 $f(x) = e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$.
La tangente à C_f en 0 a pour équation $y = 1 + x$ et

Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Exemple

Au voisinage de 0 $f(x) = e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$.

La tangente à C_f en 0 a pour équation $y = 1 + x$ et

$$f(x) - (1 + x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

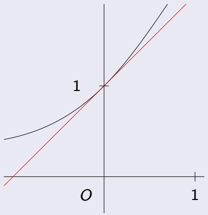
Exemple

Au voisinage de 0 $f(x) = e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$.
La tangente à C_f en 0 a pour équation $y = 1 + x$ et
$f(x) - (1 + x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$
On en déduit que C_f est localement au-dessus de sa tangente en 0 (concavité tournée vers le haut).

Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Exemple

Au voisinage de 0 $f(x) = e^{\sin x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$.
La tangente à C_f en 0 a pour équation $y = 1 + x$ et
$f(x) - (1 + x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
On en déduit que C_f est localement au-dessus de sa tangente en 0 (concavité tournée vers le haut).



Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Point d'inflexion

Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I.

Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I.
Si C_f admet un point d'inflexion en un point d'abscisse x_0 alors $f^{(2)}(x_0) = 0$.

Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I.
Si C_f admet un point d'inflexion en un point d'abscisse x_0 alors $f^{(2)}(x_0) = 0$.
Si $f^{(2)}$ s'annule en $x_0 \in I$ en changeant de signe alors x_0 est l'abscisse d'un point d'inflexion de C_f.

Point d'inflexion

Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Point d'inflexion

$f(x) = x^3$ en 0 :

Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

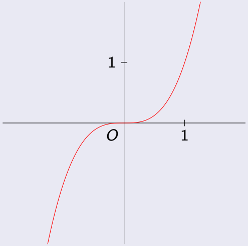
Point d'inflexion

$f(x) = x^3$ en 0 :
$f'(x) = 3x^2$

Application à l'étude locale d'une fonction : tangente

Point d'inflexion

$f(x) = x^3$ en 0 :
$f'(x) = 3x^2$
$f^{(2)}(x) = 6x.$



Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Asymptote

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Asymptote

Les courbes C_f et C_g représentant deux fonctions f et g sont dites asymptotes en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si $f(x) - g(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ (respectivement $f(x) - g(x) \underset{x\to-\infty}{\to} 0$).

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Asymptote

Les courbes C_f et C_g représentant deux fonctions f et g sont dites asymptotes en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si $f(x) - g(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0$ (respectivement $f(x) - g(x) \underset{x \to -\infty}{\to} 0$).

Soit f une fonction admettant un développement limité généralisé au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) :

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Asymptote

Les courbes C_f et C_g représentant deux fonctions f et g sont dites **asymptotes** en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si $f(x) - g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (respectivement $f(x) - g(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$).

Soit f une fonction admettant un développement limité généralisé au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) :

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x^n} + \frac{1}{x^n}\epsilon(x) \ (\gamma \neq 0).$$

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Asymptote

Les courbes C_f et C_g représentant deux fonctions f et g sont dites asymptotes en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si $f(x) - g(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0$ (respectivement $f(x) - g(x) \underset{x \to -\infty}{\to} 0$).

Soit f une fonction admettant un développement limité généralisé au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) :

$f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma}{x^n} + \dfrac{1}{x^n}\epsilon(x)$ $(\gamma \neq 0)$.

Alors la droite D d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote à C_f en $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Asymptote

Les courbes C_f et C_g représentant deux fonctions f et g sont dites asymptotes en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si $f(x) - g(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0$ (respectivement $f(x) - g(x) \underset{x \to -\infty}{\to} 0$).

Soit f une fonction admettant un développement limité généralisé au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) :

$f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma}{x^n} + \dfrac{1}{x^n}\epsilon(x)$ $(\gamma \neq 0)$.

Alors la droite D d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote à C_f en $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

On a alors $f(x) - (\alpha x + \beta) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{\gamma}{x^n}$ et le signe de γ donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Exemple

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Exemple

$f(x) = \dfrac{2x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Exemple

$f(x) = \dfrac{2x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Au voisinage de $\pm\infty$, on a $f(x) = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{24x^2} + \dfrac{1}{x^2}\epsilon(x)$.

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Exemple

$f(x) = \dfrac{2x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Au voisinage de $\pm\infty$, on a $f(x) = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{24x^2} + \dfrac{1}{x^2}\epsilon(x)$.

On en déduit que D : $y = x - \dfrac{1}{2}$ et C_f sont asymptotes en $+\infty$

(respectivement $-\infty$),

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Exemple

$f(x) = \dfrac{2x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Au voisinage de $\pm\infty$, on a $f(x) = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{24x^2} + \dfrac{1}{x^2}\epsilon(x)$.

On en déduit que D : $y = x - \dfrac{1}{2}$ et C_f sont asymptotes en $+\infty$ (respectivement $-\infty$), que $f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{24x^2}$

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Exemple

$f(x) = \dfrac{2x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Au voisinage de $\pm\infty$, on a $f(x) = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{24x^2} + \dfrac{1}{x^2}\epsilon(x)$.

On en déduit que D : $y = x - \dfrac{1}{2}$ et C_f sont asymptotes en $+\infty$ (respectivement $-\infty$), que $f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{24x^2}$ et donc que C_f est au-dessus de l'asymptote en $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

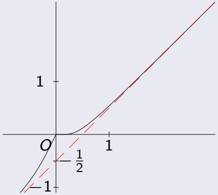
Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Exemple

$f(x) = \dfrac{2x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Au voisinage de $\pm\infty$, on a $f(x) = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{24x^2} + \dfrac{1}{x^2}\epsilon(x)$.

On en déduit que $D : y = x - \dfrac{1}{2}$ et C_f sont asymptotes en $+\infty$ (respectivement $-\infty$), que $f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{24x^2}$ et donc que C_f est au-dessus de l'asymptote en $+\infty$ (respectivement $-\infty$).



Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Exemple $f(x) = \frac{2x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Exemple $f(x) = \frac{2x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$$1 + e^{\frac{1}{x}} = 1 + e^{y} = 1 + 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + y^3\epsilon(y) = 2 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + y^3\epsilon(y)$$

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Exemple $f(x) = \frac{2x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$$1 + e^{\frac{1}{x}} = 1 + e^y = 1 + 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + y^3\epsilon(y) = 2 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + y^3\epsilon(y)$$

$$\begin{array}{ccccccc|c}
2 & & & & & & & 2 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} \\ \cline{8-8}
-2 & -y & -\frac{y^2}{2} & -\frac{y^3}{6} & & & & 1 - \frac{y}{2} + \frac{y^3}{24} \\ \cline{1-4}
 & -y & -\frac{y^2}{2} & -\frac{y^3}{6} & & & & \\
 & y & +\frac{y^2}{2} & +\frac{y^3}{4} & +\frac{y^4}{6} & & & \\ \cline{2-5}
 & & & +\frac{y^3}{12} & +\frac{y^4}{6} & & & \\
 & & & -\frac{y^3}{12} & -\frac{y^4}{24} & -\frac{y^5}{48} & -\frac{y^6}{144} & \\ \cline{4-7}
 & & & & \frac{y^4}{8} & -\frac{y^5}{48} & -\frac{y^6}{144} &
\end{array}$$

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Exemple $f(x) = \frac{2x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$$1 + e^{\frac{1}{x}} = 1 + e^{y} = 1 + 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + y^3\epsilon(y) = 2 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + y^3\epsilon(y)$$

$$\begin{array}{ccccccc|c}
2 & & & & & & & 2 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} \\
\cline{8-8}
-2 & -y & -\frac{y^2}{2} & -\frac{y^3}{6} & & & & 1 - \frac{y}{2} + \frac{y^3}{24} \\
\cline{1-4}
 & -y & -\frac{y^2}{2} & -\frac{y^3}{6} & & & & \\
 & y & +\frac{y^2}{2} & +\frac{y^3}{4} & +\frac{y^4}{6} & & & \\
\cline{2-5}
 & & & +\frac{y^3}{12} & +\frac{y^4}{6} & & & \\
 & & & -\frac{y^3}{12} & -\frac{y^4}{24} & -\frac{y^5}{48} & -\frac{y^6}{144} & \\
\cline{4-7}
 & & & & \frac{y^4}{8} & -\frac{y^5}{48} & -\frac{y^6}{144} &
\end{array}$$

$$\frac{2}{1+e^{y}} = 1 - \frac{y}{2} + \frac{y^3}{24} + y^3\epsilon(y)$$

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Exemple

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Exemple

$$\frac{2}{1+e^y} = 1 - \frac{y}{2} + \frac{y^3}{24} + y^3\epsilon(y)$$

$$f(x) = x.\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}} = x\left(1 - \frac{y}{2} + \frac{y^3}{24} + y^3\epsilon(y)\right) = x\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{24x^3} + \frac{1}{x^3}\epsilon(x)\right)$$

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Exemple

$$\frac{2}{1+e^y} = 1 - \frac{y}{2} + \frac{y^3}{24} + y^3\epsilon(y)$$

$$f(x) = x.\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}} = x\left(1 - \frac{y}{2} + \frac{y^3}{24} + y^3\epsilon(y)\right) = x\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{24x^3} + \frac{1}{x^3}\epsilon(x)\right)$$

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{24x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(x)$$

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Exemple

$$\frac{2}{1+e^y} = 1 - \frac{y}{2} + \frac{y^3}{24} + y^3\epsilon(y)$$

$$f(x) = x.\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}} = x\left(1 - \frac{y}{2} + \frac{y^3}{24} + y^3\epsilon(y)\right) = x\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{24x^3} + \frac{1}{x^3}\epsilon(x)\right)$$

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{24x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(x)$$

$$f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(x)$$

Application à l'étude locale d'une fonction : asymptote

Exemple

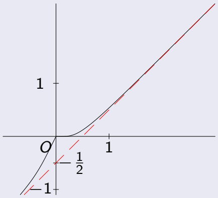
$$\frac{2}{1+e^y} = 1 - \frac{y}{2} + \frac{y^3}{24} + y^3\epsilon(y)$$

$$f(x) = x.\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}} = x\left(1 - \frac{y}{2} + \frac{y^3}{24} + y^3\epsilon(y)\right) = x\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{24x^3} + \frac{1}{x^3}\epsilon(x)\right)$$

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{24x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(x)$$

$$f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(x)$$

$$f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{1}{24x^2}$$



Suites équivalentes

Définition

Suites équivalentes

Définition

Deux suites sont équivalentes si il existe une suite (ϵ_n) de limite 0 telle que $u_n = v_n + v_n\epsilon_n$ à partir d'un certain rang.

Suites équivalentes

Définition

Deux suites sont équivalentes si il existe une suite (ϵ_n) de limite 0 telle que $u_n = v_n + v_n\epsilon_n$ à partir d'un certain rang.

Notation

Suites équivalentes

Définition

Deux suites sont équivalentes si il existe une suite (ϵ_n) de limite 0 telle que $u_n = v_n + v_n\epsilon_n$ à partir d'un certain rang.

Notation

$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ou $u_n \sim v_n$.

Suites équivalentes

Définition équivalente

Suites équivalentes

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Définition équivalente

Si la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang $u_n \sim v_n$ signifie $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Suites équivalentes

Définition équivalente

Si la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang $u_n \sim v_n$ signifie $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Exemple

Suites équivalentes

Définition équivalente

Si la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang $u_n \sim v_n$ signifie $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Exemple

$$u_n = \frac{n-1}{n^2} \quad (n \geq 1).$$

Suites équivalentes

Définition équivalente

Si la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang $u_n \sim v_n$ signifie $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Exemple

$$u_n = \frac{n-1}{n^2} \ (n \geq 1).$$

$$v_n = \frac{1}{n} \ (n \geq 1).$$

Suites équivalentes

Définition équivalente

Si la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang $u_n \sim v_n$ signifie $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Exemple

$u_n = \frac{n-1}{n^2}$ $(n \geq 1)$.

$v_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$.

$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{n-1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{n^2-n}{n^2} = \frac{n^2(1-1/n)}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$.

Suites équivalentes

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Définition équivalente

Si la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang $u_n \sim v_n$ signifie $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Exemple

$$u_n = \frac{n-1}{n^2} \ (n \geq 1).$$

$$v_n = \frac{1}{n} \ (n \geq 1).$$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{n-1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{n^2-n}{n^2} = \frac{n^2(1-1/n)}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \ (n \geq 1).$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Suites équivalentes

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Définition équivalente

Si la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang $u_n \sim v_n$ signifie $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Exemple

$u_n = \frac{n-1}{n^2}$ $(n \geq 1)$.

$v_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$.

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{n-1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{n^2 - n}{n^2} = \frac{n^2(1 - 1/n)}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \ (n \geq 1).$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

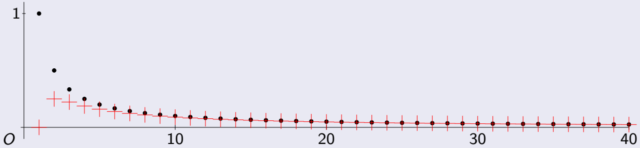
On en déduit $u_n \sim v_n$.

Suites équivalentes

$$\frac{n-1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$$

Suites équivalentes

$$\frac{n-1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$$



Suites équivalentes

Propriétés

Suites équivalentes

Propriétés

Les propriétés énumérées dans le cas des fonctions s'étendent aux suites équivalentes.

Suites équivalentes

M2202
Analyse et
méthodes
numériques

Département
Informatique
IUT de
Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Propriétés

Les propriétés énumérées dans le cas des fonctions s'étendent aux suites équivalentes.
En particulier :

Suites équivalentes

Propriétés

Les propriétés énumérées dans le cas des fonctions s'étendent aux suites équivalentes.

En particulier :

Si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L$ finie ou non alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Suites équivalentes

Propriétés

Les propriétés énumérées dans le cas des fonctions s'étendent aux suites équivalentes.
En particulier :
Si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L$ finie ou non alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Exemple 1

Suites équivalentes

Propriétés

Les propriétés énumérées dans le cas des fonctions s'étendent aux suites équivalentes.
En particulier :
Si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L$ finie ou non alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Exemple 1

$u_n = \dfrac{n-1}{n^2}$ $(n \geq 1)$.

Suites équivalentes

Propriétés

Les propriétés énumérées dans le cas des fonctions s'étendent aux suites équivalentes.
En particulier :
Si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L$ finie ou non alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Exemple 1

$u_n = \dfrac{n-1}{n^2}$ $(n \geq 1)$.
$v_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$.

Suites équivalentes

Propriétés

Les propriétés énumérées dans le cas des fonctions s'étendent aux suites équivalentes.
En particulier :
Si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L$ finie ou non alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Exemple 1

$u_n = \dfrac{n-1}{n^2}$ $(n \geq 1)$.
$v_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$.
On a $u_n \sim v_n$

Suites équivalentes

Propriétés

Les propriétés énumérées dans le cas des fonctions s'étendent aux suites équivalentes.
En particulier :
Si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L$ finie ou non alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Exemple 1

$u_n = \dfrac{n-1}{n^2}$ $(n \geq 1)$.
$v_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$.
On a $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Suites équivalentes

Propriétés

Les propriétés énumérées dans le cas des fonctions s'étendent aux suites équivalentes.

En particulier :

Si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L$ finie ou non alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Exemple 1

$u_n = \dfrac{n-1}{n^2}$ $(n \geq 1)$.

$v_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$.

On a $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

On en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Suites équivalentes

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

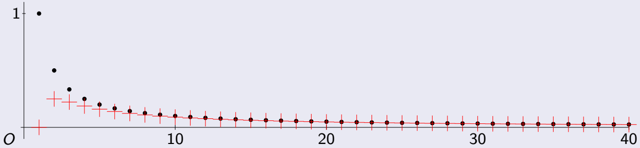
Fonctions équivalentes

Bibliographie

$$\frac{n-1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$$

Suites équivalentes

$$\frac{n-1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$$



Suites équivalentes

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Exemple 2

Suites équivalentes

Exemple 2

$u_n = n^2 + n \cos n + 17 \ (n \geq 0).$

Suites équivalentes

Exemple 2

$u_n = n^2 + n\cos n + 17$ $(n \geq 0)$.

$$n^2 + n\cos n + 17 = n^2\left(1 + \frac{\cos n}{n} + \frac{17}{n^2}\right) \Rightarrow n^2 + n\cos n + 17 \sim n^2.$$

Suites équivalentes

Exemple 2

$u_n = n^2 + n\cos n + 17 \ (n \geq 0)$.

$n^2 + n\cos n + 17 = n^2\left(1 + \dfrac{\cos n}{n} + \dfrac{17}{n^2}\right) \Rightarrow n^2 + n\cos n + 17 \sim n^2$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

Suites équivalentes

Exemple 2

$u_n = n^2 + n\cos n + 17 \ (n \geq 0)$.

$n^2 + n\cos n + 17 = n^2\left(1 + \dfrac{\cos n}{n} + \dfrac{17}{n^2}\right) \Rightarrow n^2 + n\cos n + 17 \sim n^2$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Suites équivalentes

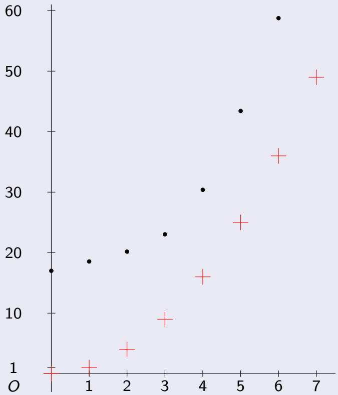
$u_n = n^2 + n \cos n + 17 \ (n \geq 0)$

Suites équivalentes

M2202
Analyse et méthodes numériques

Département Informatique
IUT de Saint-Dié

$u_n = n^2 + n\cos n + 17 \ (n \geq 0)$



Suites équivalentes

Exemple 3

Suites équivalentes

Exemple 3

$$u_n = \frac{n^2 + n\cos n + 17}{3n^2 + 1} \quad (n \geq 1).$$

Suites équivalentes

Exemple 3

$$u_n = \frac{n^2 + n\cos n + 17}{3n^2 + 1} \; (n \geq 1).$$

$n^2 + n\cos n + 17 \sim n^2$.

Suites équivalentes

Exemple 3

$$u_n = \frac{n^2 + n\cos n + 17}{3n^2 + 1} \ (n \geq 1).$$

$$n^2 + n\cos n + 17 \sim n^2.$$

$$3n^2 + 1 = 3n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow 3n^2 + 1 \sim 3n^2.$$

Suites équivalentes

Exemple 3

$$u_n = \frac{n^2 + n\cos n + 17}{3n^2+1} \ (n \geq 1).$$

$$n^2 + n\cos n + 17 \sim n^2.$$

$$3n^2 + 1 = 3n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow 3n^2 + 1 \sim 3n^2.$$

On en déduit $u_n = \dfrac{n^2 + n\cos n + 17}{3n^2+1} \sim \dfrac{n^2}{3n^2} = \dfrac{1}{3}$,

Suites équivalentes

Exemple 3

$$u_n = \frac{n^2 + n\cos n + 17}{3n^2+1} \quad (n \geq 1).$$

$$n^2 + n\cos n + 17 \sim n^2.$$

$$3n^2 + 1 = 3n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow 3n^2 + 1 \sim 3n^2.$$

On en déduit $u_n = \dfrac{n^2 + n\cos n + 17}{3n^2+1} \sim \dfrac{n^2}{3n^2} = \dfrac{1}{3}$,

puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$.

Suites équivalentes

$$u_n = \frac{n^2 + n\cos n + 17}{3n^2 + 1} \sim \frac{1}{3}$$

Suites équivalentes

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

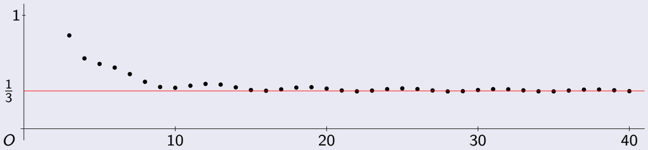
Plan

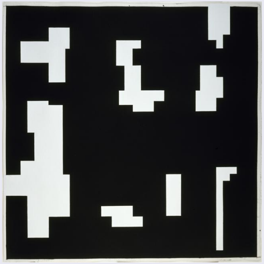
Développement limité

Fonctions équivalentes

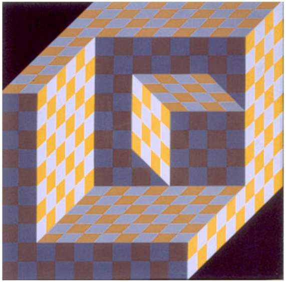
Bibliographie

$$u_n = \frac{n^2 + n\cos n + 17}{3n^2+1} \sim \frac{1}{3}$$





Nombre et hasard (V 154), Aurélie Nemours, 1991



Victor Vasarelly, (1908-1997)

Bibliographie et webographie

Bibliographie et webographie

1. Cours d'analyse d'Antoine Rauzy - Éditions ESKA

M2202 Analyse et méthodes numériques

Département Informatique IUT de Saint-Dié

Plan

Développement limité

Fonctions équivalentes

Bibliographie

Bibliographie et webographie

1. Cours d'analyse d'Antoine Rauzy - Éditions ESKA
2. Théorie et applications de l'analyse de Murray R. Spiegel - McGraw-Hill

Bibliographie et webographie

1. Cours d'analyse d'Antoine Rauzy - Éditions ESKA
2. Théorie et applications de l'analyse de Murray R. Spiegel - McGraw-Hill
3. Analyse de J. Lelong-Ferrand - Dunod Université

Bibliographie et webographie

1. Cours d'analyse d'Antoine Rauzy - Éditions ESKA
2. Théorie et applications de l'analyse de Murray R. Spiegel - McGraw-Hill
3. Analyse de J. Lelong-Ferrand - Dunod Université
4. http://fr.wikipedia.org

Bibliographie et webographie

1. Cours d'analyse d'Antoine Rauzy - Éditions ESKA
2. Théorie et applications de l'analyse de Murray R. Spiegel - McGraw-Hill
3. Analyse de J. Lelong-Ferrand - Dunod Université
4. http://fr.wikipedia.org
5. www.infinite-art.com

Bibliographie et webographie

1. Cours d'analyse d'Antoine Rauzy - Éditions ESKA
2. Théorie et applications de l'analyse de Murray R. Spiegel - McGraw-Hill
3. Analyse de J. Lelong-Ferrand - Dunod Université
4. http://fr.wikipedia.org
5. www.infinite-art.com
6. www.futura-sciences.com

Bibliographie et webographie

1. Cours d'analyse d'Antoine Rauzy - Éditions ESKA
2. Théorie et applications de l'analyse de Murray R. Spiegel - McGraw-Hill
3. Analyse de J. Lelong-Ferrand - Dunod Université
4. http://fr.wikipedia.org
5. www.infinite-art.com
6. www.futura-sciences.com
7. http://abcmaths.free.fr

Bibliographie et webographie

1. Cours d'analyse d'Antoine Rauzy - Éditions ESKA
2. Théorie et applications de l'analyse de Murray R. Spiegel - McGraw-Hill
3. Analyse de J. Lelong-Ferrand - Dunod Université
4. http://fr.wikipedia.org
5. www.infinite-art.com
6. www.futura-sciences.com
7. http://abcmaths.free.fr

Escher