Guía de examen del primer parcial Grupo 4041

Profesora: María Juana Linares Altamirano
correo: linares.juanita@gmail.com

Ayudante: Alejandro Melchor Galván
correo: amg_29-90@hotmail.com

Ayudante: Apolonia Juana Pérez Sarabia
correo: polasabia@yahoo.com.mx

1. Realiza los siguientes enunciados:
   - Exhibir la equivalencia lógica en la que se basa el método de demostración por contrarrecíproca(contrapositiva o contrapuesta).
   - Demostrar por contrarrecíproca la siguientre propose posiciión: Sean A, B conjuntos. Si $A \subset B$ entonces $B^c \subset A^c$.
   - Demostrar por reducción al absurdo la siguiente proposición: Sean A, B conjuntos. Si $A \subset B$ entonces $A \setminus B = \emptyset$
   - Demostrar por el método directo la siguiente proposición: Sea p un entero. Si p es múltiplo de 3 entonces p^2 es un entero multiplo de 3.
   - Demostar por Reducción al absurdo la siguiente proposición: Sea p un entero. Si p^2 es múltiplo de 3 entonces p es entero múltiplo de 3.
   - Si la proposición siguiente es Verdadera, realizar su demostración, si es Falsa, proporcionar un contraejemplo. Sean a y b número reales. Si $a^2 = b^2$ entonces $a = b$.

2. Realizar la demostración de cada una de las siguientes propiedades de conjuntos:

   i) $(A^c)^c = A$ ii) Si $A \subset B$ entonces $A \cap B = A$ iii) Si $A \subset B$ entonces $A \cup B = B$

   iv) $\forall A$ conjunto tenemos que $\emptyset \subset A$ v) $A \cap \emptyset = \emptyset$ vi) $A \cup \emptyset = A$

   vii) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ viii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ix) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

   x) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

3. Demostrar cada una de las siguientes proposiciones:

   a)$\forall a \in \mathbb{R}\ a.0 = 0$ b) $\forall a \in \mathbb{R}\ -a = (-1)a$ c)$\forall a \in \mathbb{R}\ -(-a) = a$

   d)$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, si $c \neq 0$ y $ac = bc$ entonces $a = b$ e) $\forall a, b \in \mathbb{R}\ -a-b = -(a+b)$

f) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $a(-b) = -(ab)$ g) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $(-a)(-b) = ab$ h) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $(-a)(b) = -(ab)$

i) Si $a \neq 0$ entonces $(a^{-1})^{-1} = a$ j) Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

k) Si $ab \neq 0$ entonces $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. l) Si $a = -a$ entonces $a = 0$.

m)$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

n)$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

o)$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

p) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a^2 = b^2$ entones $a = b$ o $a = -b$.

q) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a = b$ o $a = -b$ entonces $a^2 = b^2$.

r) Si $a \neq 0$ y $a = a^{-1}$ entonces $a = 1$ o $a = -1$.

s) Si $a = 0$ o $b = 0$ entonces $ab = 0$ t) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a^2 \geq 0$

4. Recordar la definición de $\frac{a}{b}$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $b \neq 0$, para demostrar cada una de las siguientes proposiciones:

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$;

a) Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces
$$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

b) Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

c) Sean $b \neq 0$ y $d \neq 0$.
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y solo si } ad = bc$$

d) Sean $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

e) Sean $a \neq 0$ y $b \neq 0$. $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ si y solo si $a = b$ o $a = -b$

5. Demostrar las siguientes proposiciones que involucran inecuaciones

a) Si $ac < bc$ y $c > 0$ entonces $a < b$ b) Si $c \neq 0$ entonces c y c^{-1} tienen el mismo signo.

c) Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$ d) Si $a < b$ entonces $-b < -a$

e) Si $a < b$ y $c > d$ entonces $a - c < b - d$ f) Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$

g) Si $a > 1$ entonces $a^2 > a$ h) Si $0 < a < 1$ entonces $a^2 < a$.

i) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a < b$ entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$

j) Sean a, b, c, d reales positivos. Si $a < b$ y $c < d$ entonces $ac < bd$

k) Sean a, b, c, d reales positivos. Si $ad < bc$ entonces $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$

l) Sean a, b, c, d reales positivos. Si $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ entonces $ad < bc$.

m) Sean a, b, c, d reales positivos. Si $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ entonces $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$

n) Sean a y b reales positivos. Si $a < b$ entonces $a^2 < b^2$

ñ) Sean a y b reales positivos. Si $a^2 < b^2$ entonces $a < b$

o)Sean a y b reales negativos. Si $a < b$ entonces $a^2 > b^2$

p) Sean a y b reales no negativos entonces $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

q) Si b es un real positivo, entonces $a^2 < b$ si y solo si $-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

r) Si b es un real positivo, entonces $a^2 > b$ si y solo si $a < -\sqrt{b}$ o $\sqrt{b} < a$

s) Si a y b son reales positivos, entonces $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$

t) Sean a y b reales positivos. Si $a < b$ entonces $a < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < b$

u) Sean a y b reales positivos. Si $a < b$, entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

6. Demostrar las siguientes propiedades del valor absoluto:

   i) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ |x+y| = |x| + |y|$ si y solo si $xy \geq 0$ ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ |xy| \leq \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$

   iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ |x-y| \leq |x+y|$ si y solo si $xy \geq 0$ iv) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ |x| - |y| \leq \|x-y|$

   v)$\forall x, y \in \mathbb{R}\ |x-y| \leq |x| + |y|$ vi)$\forall x, y \in \mathbb{R}||x| - |y|| \leq |x-y|$

   vii) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ |x| = |y|$ si y solo si $x = y$ o $x = -y$

7. Obtener el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

   a) $\dfrac{1}{x-1} < \dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{2}{x} + 5 < \dfrac{3}{x} - 2$ c) $\dfrac{-2}{x-4}$ d) $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$

   e) $x^2 - 3x + 4 > 0$ f) $2x^2 - x - 8 < 0$ g) $\dfrac{7}{x+4} + \dfrac{2}{x-3} > 0$

   h) $10 - x^2 < 16$ i) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} < 0$ j) $(x-2)(x-4) > 0$ k) $x^2 + x + \dfrac{3}{4} > 0$

   l) $4x^2 + 4x + 5 > 2$ m) $-\dfrac{3}{4} \leq \dfrac{x}{1+x^2} \leq \dfrac{2}{3}$

8. Encontrar los números x para los cuales se cumple cada una de las siguientes desigualdades. Y dibujar su conjunto solución de la rect numérica.

   a) $|x-4| + |x-2| > 3$ b) $|x-1||x+2| < 3$ c) $|2x-5||3x+6| > 8$ $|x-1||x+3| = 0$

   e) $|x-3||x+2| = 6$ f) $|x-1||x+4| > 0$ g) $|x^2 - 1| \leq 4$

9. Demostrar cada una de las siguientes proposiciones:

   a) $|x-4| < 1$ implica que $8 < x + 5 < 10$ b) $|x-3| < 2$ implica que $-\dfrac{4}{3} < x - \dfrac{7}{3} < \dfrac{8}{3}$

   c) $|x-7| < 6$ implica que $|x^2 - 49| < 120$ d)$|x-6| < 4$ implica que $\dfrac{1}{11} < \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{3}$

10. Determinar un valor $\delta > 0$ que garantice que

    Si $|x+2| < \delta$ entonces $|x^2 - 4| < \dfrac{2}{15}$

11. Determinar un valor $\delta > 0$ que garantice que

    Si $0 < |x+2| < \delta$ entonces $2x - 5$ dista de -9 en menos que $\dfrac{1}{10}$

12. Para cada uno de los siguientes incisos, valorar si la proposición es Verdadera o Falsa. En una u otra situación, demuestre el valor de la proposición.

    - Si a es racional y b es irracional, entonces $a + b$ es irracional.
    - Si a es racional distinto de cero y b es irracional, entonces ab es irracional.
    - Si a es irracional y b es irracional, entonces $a + b$ es irracional.
    - Si a es irracional y b es irracional, entonces ab es irracional.

13. Demostrar que $\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ son irracionales.

    Indicación: Para ver que $\sqrt{3}$ es irracional, aplique el hecho de que todo entero es de la forma $3n$ o $3n + 1$ o $3n + 2$, en este caso es una demostración por casos. En ls otros casos aplicar algo muy similar

Para acceder al examen se necesitara presentar una identificación con fotografia actualizada. Fecha del primer parcial Viernes 30 de Agosto del 2019 de 17:00 a 19:00 horas en el salón de clase

Bibliografia

- Spivak, Michael. Calculus. 2a. Edición Editorial Reverté.
- Apostol,Tom M, Calculus. Volumen I. (Libro digitalizado).
- Arizmendi, Carrillo, Lara. Cálculo. (Libro digitalizado).
- Haaser, Lasalle, Sullivan. Introducción al Análisis Matemático. Vol.I. Editorial Trillas
- Ayres, Frank Jr., Mendelson, Elliot. CALCULO, 4ª. Edución McGraw_Hill. Serie Shaum

Referencias en Internet Encontrarás un gran apoyo en los sitios de Internet: Para Cálculo Diferencial e Integral I

- http://newton.matem.unam.mx/calculo1/ (incluye todo el curso)
- http://newton.matem.unam.mx/comunidades/ (incluye la parte inicial de Lógica)

Los cuales se pueden visualizar con exploradores como Firefox, Safari o Chrome y, como están desarrollados en HTML5, es posible visualizarlos en iPad y otros móviles.