Ejercicios adicionales

1. Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que $A \neq \emptyset$ y acotado inferiormente.

   a) Demostrar que
   $$-Inf(A) = Sup(-A)$$

   b) Demostrar que si $k < 0$ y $kA = \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A \text{ tal que } c = ka\}$ entonces
   $$kInf(A) = Sup(kA)$$

2. Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que $A \neq \emptyset$, acotado y $k > 0$ entonces

   a) Demostrar que $Sup(kA) = kSup(A)$

   b) Demostrar que $Inf(kA) = kInf(A)$

3. Dar un ejemplo de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$ que satisfaga lo siguiente:

   a) $\forall P$ partición de $[a, b]$ se tiene que $L(f, P) = \int_a^b f(x)dx = U(f, P)$ (Justificar detalladamente porque pasa esto).

   b) $\forall P$ partición de $[a, b]$ se tiene que $L(f, P) < \int_a^b f(x)dx = U(f, P)$ (Justificar detalladamente porque pasa esto).

   c) $\forall P$ partición de $[a, b]$ se tiene que $L(f, P) = \int_a^b f(x)dx < U(f, P)$ (Justificar detalladamente porque pasa esto).