

## Guía de examen del primer parcial Grupo 4069

**Profesora: María Juana Linares Altamirano**  
correo: linares.juanita@gmail.com

**Ayudante: Alejandro Melchor Galván**  
correo: amg\_29-90@hotmail.com

**Ayudante: Apolonia Juana Pérez Sarabia**  
correo: polasabia@yahoo.com.mx

1. Sean  $A \subset \mathbb{R}$  y  $B \subset \mathbb{R}$  tal que  $A \neq \emptyset$  y  $B \neq \emptyset$ . Supongamos que  $\forall a \in A$  y  $\forall b \in B$  se cumple que  $a \leq b$ .
  - a) Demostrar que  $\sup(A) \leq b \quad \forall b \in B$
  - b) Demostrar que  $\sup(A) \leq \inf(B)$
2.
  - a) Sea  $A \subset \mathbb{R}$  tal que  $A \neq \emptyset$  y acotado superiormente. Demostrar que  $\forall y \in \mathbb{R}$  tal que  $y < \sup(A)$  existe  $x \in A$  tal que  $y < x < \sup(A)$ . Sugerencia: Demostrar por Reducción al absurdo.
  - b) Sea  $B \subset \mathbb{R}$  tal que  $B \neq \emptyset$  y acotado inferiormente. Demostrar que  $\forall y \in \mathbb{R}$  tal que  $y > \inf(A)$  existe  $x \in A$  tal que  $\inf(A) < x < y$ . Sugerencia: Demostrar por Reducción al absurdo.
3. Sean  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $B \subset \mathbb{R}$  tal que  $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$  y acotados. Definimos  $A + B := \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}$ . Demostrar que:
  - a)  $A + B$  es un conjunto acotado.
  - b)  $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B) \wedge \sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$
  - c)  $\inf(A + B) \leq \inf(A) + \inf(B) \wedge \inf(A + B) \geq \inf(A) + \inf(B)$
4. Sean  $a, b, c, d$  números reales tales que  $a < b < c < d$ . Demostrar que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función acotada en  $[a, b]$  entonces  $f$  es acotada en  $[c, d]$ .
5. Sean  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x + 1$  y  $h(x) = [x]$  con dominio  $[1, 6]$ .
  - a) Justificar porque las funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$  están acotadas.
  - b) Consideren la partición  $P = \{1, 2, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 6\}$ . Determinar el supremo y el infimo de
    - $\text{Im}(f)$
    - $\text{Im}(g)$
    - $\text{Im}(h)$
    - $\{f(x) + g(x) \mid x \in [1, 6]\}$
    - $\{g(x) + h(x) \mid x \in [1, 6]\}$
    - $\{f(x) + h(x) \mid x \in [1, 6]\}$

- $\{f(x_1) + g(x_2) \mid x_1, x_2 \in [1, 6]\}$
- $\{f(x_1) + h(x_2) \mid x_1, x_2 \in [1, 6]\}$

6. Las siguientes funciones son acotadas. Calcular  $L(f, P)$  y  $U(f, P)$  con la partición indicada en cada caso y dibujar la gráfica de la función.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 1 - x & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases} \quad \text{La partición es: } P = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \\ 9 - x^2 & \text{si } 2 < x \leq 6 \\ 2 & \text{si } x = 6 \end{cases} \quad \text{La partición es: } P = \{-1, 2, 6\}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 3x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ -2 & \text{si } x = 1 \\ 9 - 6x & \text{si } 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{La partición es: } P = \{0, 1, 2\}$$

7. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Demostrar que:

$$L(f, P) \leq U(f, P) \quad \forall P \text{ partición de } [a, b]$$

8. Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada en  $[a, b]$ ,  $P, Q$  dos particiones de  $[a, b]$  tales que  $P \subset Q$  y  $Q$  tiene exactamente un punto más que  $P$ .

- Demostrar que  $L(f, P) \leq L(f, Q)$
- Demostrar que  $U(f, P) \geq U(f, Q)$

9. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada en  $[a, b]$ . Demostrar que si  $P$  y  $P'$  son dos particiones cualesquiera de  $[a, b]$  entonces  $L(f, P) \leq U(f, P')$

10. Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada en  $[a, b]$ ,  $P, P'$  y  $P''$  tres particiones cualesquiera de  $[a, b]$  y cuyas sumas  $L(f, P), U(f, P), L(f, P'), U(f, P'), L(f, P'')$  y  $U(f, P'')$  han sido calculadas.

a) Demostrar que cualquier elemento del conjunto

$$\{L(f, P) \mid P \text{ es una partición cualquiera de } [a, b]\} \text{ es menor o igual que cada } U(f, P').$$

b) Justifica de manera detallada porque existe

$$\sup(\{L(f, P) \mid P \text{ es una partición cualquiera de } [a, b]\})$$

c) Demostrar que:

$$L(f, P') \leq \sup(\{L(f, P) \mid P \text{ es una partición cualquiera de } [a, b]\}) \leq U(f, P'')$$

d) Justifica de manera detallada porque existe

$$\inf\{U(f, P) \mid P \text{ es una partición cualquiera de } [a, b]\}$$

e) Demostrar que:

$$L(f, P') \leq \inf(\{U(f, P) \mid P \text{ es una partición cualquiera de } [a, b]\}) \leq U(f, P'')$$

11. a) Calcular  $U(f, P)$  y  $L(f, P)$  para cada una de las siguientes funciones en el intervalo indicado. Utilizar una partición regular  $P = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$  de seis puntos en tal intervalo
- b) Realizar en cada caso el dibujo correspondiente de los rectángulos circunscritos la región delimitada por la gráfica de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  y el eje  $X$ .
- c) Realizar en cada caso el dibujo correspondiente de los rectángulos inscritos la región delimitada por la gráfica de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  y el eje  $X$ .
- a)  $f(x) = -x$ , con  $x \in [1, 4]$
- b)  $f(x) = \frac{1}{x}$ , con  $x \in [2, 5]$
- c)  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ , con  $x \in [-4, -1]$
- d)  $f(x) = x - 2$ , con  $x \in [-1, 2]$
- e)  $f(x) = x^2 - 3$  con  $x \in [0, 3]$
- f)  $f(x) = x + [x]$ , con  $x \in [-2, 3]$

12. El criterio de Integrabilidad (Teorema 2 Capítulo 13 del Spivak), dice:

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada en  $[a, b]$ ,

$f$  es integrable en  $[a, b]$  si solo si,  $\forall \varepsilon > 0$  existe una  $P_\varepsilon$  partición de  $[a, b]$  tal que

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$$

Usar el criterio, para demostrar que cada una de las siguientes funciones integrable en el intervalo cerrado indicado. Calcular la integral cuando sea posible.

- a)  $f(x) = 3x^2 + 1, \forall x \in [0, 1]$
- b)  $f(x) = x^2, \forall x \in [-1, 0]$
- c)  $f(x) = 3x^2 - 1, \forall x \in [1, 2]$
- d)  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{2} \end{cases} \forall x \in [0, 1]$
- e)  $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -x - 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$
- f)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -x + 11 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

13. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable en  $[a, b]$ . Demostrar que si  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$  entonces

$$\int_a^b f \geq 0$$

14. Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrables en  $[a, b]$ . Demostrar que si  $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$  entonces

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

15. a) Dar un ejemplo de una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable tal que  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$  y  $f(x) > 0$  para algún punto  $x \in [a, b]$  tal que

$$\int_a^b f = 0$$

- b) Demostrar que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ ,  $f(x_0) > 0$  con  $x_0 \in [a, b]$  y  $f$  continua en  $x_0$  entonces

$$\int_a^b f > 0$$

Sugerencia: Basta hallar una suma inferior  $L(f, P)$  que sea positiva.

16. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- a) Demostrar que si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y existe  $m \in \mathbb{R}$ ,  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $m \leq f(x) \leq M$  para toda  $x \in [a, b]$  entonces existe  $\mu \in [m, M]$  tal que

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)\mu$$

- b) Demostrar que si  $f$  es continua en  $[a, b]$  entonces existe  $\xi \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi)$$

- c) Demostrar que si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y  $g$  es integrable en  $[a, b]$  tal que  $g(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$  entonces existe  $\xi \in [a, b]$  tal que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

17. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada en  $[a, b]$  y  $P$  una partición de  $[a, b]$ . Consideremos a

- $P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_n = b\}$  con  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$
- $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$
- $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$

- $M'_i = \sup\{|f(x)| \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$
- $m'_i = \inf\{|f(x)| \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$

- a) Demostrar que  $M'_i - m'_i \leq M_i - m_i$  para toda  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$
- b) Demostrar que si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  entonces  $|f|$  también es integrable en  $[a, b]$

18. Demostrar que si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  entonces

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

**Para acceder al examen se necesitara presentar una identificación con fotografía actualizada. Fecha del primer parcial Viernes 22 de Febrero del 2019 de 16:00 a 18:00 horas en el salón de clase**

### Bibliografía

- Spivak, Michael. Calculus. 3a. Edición Editorial Reverté. O, el libro de la 2da. Edición
- Apostol, Tom M, Calculus. Volumen I. (Libro digitalizado).
- Arizmendi, Carrillo, Lara. Cálculo. (Libro digitalizado).
- Haaser, Lasalle, Sullivan. Introducción al Análisis Matemático. Vol.I. Editorial Trillas
- Ayres, Frank Jr., Mendelson, Elliot. CALCULO, 4ª. Edición McGraw-Hill. Serie Shaum

Referencias en Internet Encontrarás un gran apoyo en los sitios de Internet: Para Cálculo Diferencial e Integral II

- <http://newton.matem.unam.mx/calculo2/> (incluye todo el curso)

Para Cálculo Diferencial e Integral I

- <http://newton.matem.unam.mx/calculo1/> (incluye todo el curso)
- <http://newton.matem.unam.mx/comunidades/> (incluye la parte inicial de Lógica)

Los cuales se pueden visualizar con exploradores como Firefox, Safari o Chrome y, como están desarrollados en HTML5, es posible visualizarlos en iPad y otros móviles.