Guía de examen del segundo parcial Grupo 4069

Profesora: María Juana Linares Altamirano
correo: linares.juanita@gmail.com

Ayudante: Alejandro Melchor Galván
correo: amg_29-90@hotmail.com

Ayudante: Apolonia Juana Pérez Sarabia
correo: polasabia@yahoo.com.mx

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$. Demostrar que existe un $x \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^x f(t)dt = \int_x^b f(t)dt$$

2. Cada una de las siguientes funciones $f(t)$ es integrable en $[a, b]$

   a) Argumentar brevemente porque son integrables.

   b) Dibujar la gráfica de $f(t)\ \forall t \in [a, b]$.

   c) Hallar la forma explícita de la función $F(x)\ \forall x \in [a, b]$. Obsérvese que la integral, no necesariamente tiene al punto a de $[a, b]$, como su extremo inferior.

   d) Dibujar la gráfica de $F(x)\ \forall x \in [a, b]$.

---

a)

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt \text{ , si } f(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < t \leq 2 \end{array} \right\} \forall t \in [-1, 2]$$

b)

$$F(x) = \int_{0}^x f(t)dt \text{ , si } f(t) = \left\{ \begin{array}{cc} t^2 & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \end{array} \right\} \forall t \in [-1, 3]$$

c)

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt \text{ , si } f(t) = \left\{ \begin{array}{cc} -t & \text{si } -2 \leq t < -1 \\ t & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \end{array} \right\} \forall t \in [-2, 0]$$

d)

$$F(x) = \int_{-2}^x f(t)dt \text{ , si } f(t) = \left\{ \begin{array}{cc} t & \text{si } -3 \leq t \leq -1 \\ -t & \text{si } -1 < t \leq 3 \end{array} \right\} \forall t \in [-3, 3]$$

e)

$$F(x) = \int_{0}^x f(t)dt \text{ , si } f(t) = \left\{ \begin{array}{cc} t^2 & \text{si } -2 \leq t \leq 1 \\ -t^2 & \text{si } 1 < t \leq 2 \end{array} \right\} \forall t \in [-2, 2]$$

3. Demostrar que si f es integrable en $[a,b]$ y se define $F(x)=\int_a^x f(t)dt\ \forall x\in[a,b]$ entonces

$$\lim_{h\to 0} F(c+h)-F(c)=0$$

para toda $c\in(a,b]$. Es decir, F es continua por la izquierda para todo $c\in(a,b)$.

4. Demostrar que si f es integrable en $[a,b]$ y se define $F(x)=\int_a^x f(t)dt\ \forall x\in[a,b]$. Si f es continua en $c\in[a,b]$ entonces F es derivable por la izquierda en c. Esto es, demostrar que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{F(c+h)-F(c)}{h}=f'(c)$$

y $F'(c)$ por la izquierda vale $f(c)$.(Si $c=b$ entonces $F'(c)=f(c)$ se entiende que representa la derivada de F por la izquierda.)

5. Demostrar que si f es continua en $[a,b]$ y existe una función g tal que $g'=f$, entonces

$$\int_a^b f(t)dt=g(b)-g(a)$$

6. Demostrar que si f es integrable en $[a,b]$ y existe una función g tal que $g'=f$, entonces

$$\int_a^b f(t)dt=g(b)-g(a)$$

7. Demostrar que si f es continua en $[a,b]$ y se define la función $G(x)=\int_x^b f(t)dt$ para toda $x\in[a,b]$ entonces G es derivable para todo $x\in[a,b]$ y $G'(x)=-f(x)$

8. ¿Son derivabes cada una de las siguientes funciones? Si es así, en cada caso calcular su derivada.

   a)
$$H(x)=\int_{15}^{x}\left(\int_{10}^{y}\frac{1}{1+t^2+sen^3(t)}ddt\right)dy$$

   b)
$$H(x)=\int_a^{\int_x^a sen(t)dt}\frac{1}{1+t^2}dt$$

   c)
$$H(x)=\int_a^{\int_a^x sen^3(t)dt}\frac{1}{1+t^2}dt$$

   d)
$$H(x)=sen\left(\int_x^a sen\left(\int_a^y sen^3(t)dt\right)dy\right)$$

   e) Calcular $(H^{-1})'(0)$ si
$$H(x)=\int_0^x 1+sen(sent)dt$$

f) Calcular $(H^{-1})'(0)$ si

$$H(x) = \int_1^x cos(cos(t))dt$$

9. Hallar una función $g(t)$ tal que:

a)

$$\int_0^x tg(t)dt = x + x^2$$

b)

$$\int_0^{x^2} tg(t)dt = x + x^2$$

10. Hallar una función f continua que satisfaga $\int_0^x f(t)dt = (f(x))^2 + C$

11. Sea f una función continua y definimos $F(x) = \int_0^x x(f(t)dt$. Calcular $F'(x)$

12. Demostrar que si h es continua, f y g son derivables y $F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$ entonces F es derivable y

$$F'(x) = h(g(x)).g'(x) - h(f(x)).f'(x)$$

13. Demostrar que si f es continua, entonces

$$\int_0^x f(u)(u-x)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du$$

14. En cada caso, calcular el área de la región delimitada por las curvas dadas:

a) $f(x) = x^3 - x \qquad g(x) = \left\{ \begin{array}{cc} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{array} \right\}$

b) $x + \sqrt{y} = 2$ y los ejes coordenados

c) $f(x) = x^3 - x \qquad g(x) = -x^2 + 2x$

d) $f(x) = x^3 - x \qquad g(x) = \left\{ \begin{array}{cc} -x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{array} \right\}$

e) $4y^2 + x = 2$ y el eje Y

f) $y + 4x^2 = 5$ y el eje X

15. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$ y $c \in (a, b)$ y sea

$$F(x) = \int_a^x f(t), \ a \leq x \leq b$$

Para cada una de los siguientes enunciados determinar si son verdaderos o falsos ya sea proporcionando una demostración o un contrajemplo:

a) Si f es diferenciable en c, entonces F es diferenciable en c

b) Si f es diferenciable en c, entonces F' es diferenciable en c

c) Si f' es diferenciable en c, entonces F' es diferenciable en c

16. Calcular la integral impropia

$$\int_0^\infty f(x)dx \text{ si } f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{array} \right\}$$

17. Sea $A(t) = \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2} + \int_t^1 \sqrt{1-z^2}$, $\forall t \in [-1,1]$. Utilizando los criterios de la 1^a y 2^a derivada, realizar la gráfica de $A(t)$, $\forall t \in [-1,1]$.

18. Mediante la definición de $cos(x)$ y $sen(x)$ para toda $x \in [0,\pi]$ del capítulo 15 del Spivak, demostrar que si $0 < x < \pi$ entonces $cos'(x) = -sen(x)$ y $sen'(x) = cos(x)$

19. Demostrar que

a)
$$arcsen'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

b)
$$arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

c)
$$arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

20. Demostrar si converge o no cada una de las siguientes integrales impropias. Si converge encontrar su valor.

a)
$$\int_0^\infty x^r dx, \text{ si } r < -1$$

b)
$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$$

c)
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$$

d)
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$$

e)
$$\int_0^a x^r dx, \text{ si } -1 < r < 0 \text{ y } a > 0$$

f)
$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx$$

g)
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

h)
$$\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}dx$$

i)
$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$$

21. Calcular las siguientes derivadas

a)
$$f(x) = arctan(arctan(arctan(x)))$$

b)
$$f(x) = arcsen(arctan(arccos(x)))$$

c)
$$f(x) = arctan(arcsen(x).arccos(x))$$

d)
$$f(x) = arcsen\left(\frac{1}{1+arccos^2(x)}\right)$$

22. *a*) Demostrar que si $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $y \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ y $x + y \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$tan(x+y) = \frac{tan(x) + tan(y)}{1 - tan(x)tan(y)}$$

b) Demostrar que

$$arc(x) + arc(y) = arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

e indicar las restricciones bajo las que se cumple la igualdad.

23. Demuestrar que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

a)
$$sen(mx)sen(nx) = \frac{1}{2}(cos((m-n)x) - cos((m+n)x)))$$

b)
$$sen(mx)cos(nx) = \frac{1}{2}(sen((m-n)x) + sen((m+n)x)))$$

c)
$$cos(mx)cos(nx) = \frac{1}{2}(cos((m-n)x) + cos((m+n)x)))$$

24. Demostrar que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

a)
$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)sen(nx) = \left\{ \begin{array}{cc} -\pi & m=-n \\ 0 & m \neq n \text{ y } m \neq -n \\ \pi & m=n \end{array} \right\}$$

b)
$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(mx)cos(nx) = \left\{ \begin{array}{cc} -\pi & m=-n \\ 0 & m \neq n \text{ y } m \neq -n \\ \pi & m=n \end{array} \right\}$$

c)
$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)cos(nx)dx = 0$$

25. Demostrar que para toda $x \neq y$ se cumple que

$$|sen(x) - sen(y)| \leq |x-y|$$

26. Calcular la integral explícitamente para demostrar que

$$\lim_{h \to \infty} \int_a^b sen(\lambda x)dx = 0$$

Para acceder al examen se necesitara presentar una identificación con fotografia actualizada. Fecha del primer parcial Viernes 29 de Marzo del 2019 de 16:00 a 18:00 horas en el salón de clase

Bibliografia

- Spivak, Michael. Calculus. 3a. Edición Editorial Reverté. O, el libro de la 2da. Edición
- Apostol,Tom M, Calculus. Volumen I. (Libro digitalizado).
- Arizmendi, Carrillo, Lara. Cálculo. (Libro digitalizado).
- Haaser, Lasalle, Sullivan. Introducción al Análisis Matemático. Vol.I. Editorial Trillas
- Ayres, Frank Jr., Mendelson, Elliot. CALCULO, 4ª. Edución McGraw_Hill. Serie Shaum

Referencias en Internet Encontrarás un gran apoyo en los sitios de Internet: Para Cálculo Diferencial e Integral II

- http://newton.matem.unam.mx/calculo2/ (incluye todo el curso)

Para Cálculo Diferencial e Integral I

- http://newton.matem.unam.mx/calculo1/ (incluye todo el curso)
- http://newton.matem.unam.mx/comunidades/ (incluye la parte inicial de Lógica)

Los cuales se pueden visualizar con exploradores como Firefox, Safari o Chrome y, como están desarrollados en HTML5, es posible visualizarlos en iPad y otros móviles.