Ejercicios de apoyo

1. Ejercicio: Demostrar que la siguiente función es integrable en $[1,3]$ y calcular el valor de su integral

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} -2x & \text{si } x \in [1,2] \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } x \in (2,3] \end{array} \right\}$$

Demostración: Para demostrar que la función es integrable usaremos el criterio de integrabilidad que dice:
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada en $[a,b]$,
f es integrable en $[a,b]$ si solo si, $\forall \varepsilon > 0$ existe una P_ε partición de $[a,b]$ tal que
$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$

Observamos que la función está definida a trozos por lo cual la consideraremos las siguientes funciones:

$$f_1(x) = -2x \forall x \in [1,2]$$

$$f_2(x) = \left\{ \begin{array}{cc} -2x & \text{si } x = 2 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } x \in (2,3] \end{array} \right\} \forall x \in [2,3]$$

Por su definición tenemos que $f_1(x) = f(x)\ \forall x \in [1,2]$ y $f_2(x) = f(x)\ \forall x \in [2,3]$. Entonces probaremos que $f_1(x)$ es integrable en $[1,2]$ y $f_2(x)$ es integrable en $[2,3]$ usando el criterio de integrabilidad para asi usar el teorema 4 tendremos que $f(x)$ es integrable en $[1,3]$.

El teorema 4 dice que:
Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada en $[a,b]$ y $a < c < b$.
f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si f es integrable en $[a,c]$ y f es integrable en $[c,b]$. Además

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Comencemos con $f_1(x)$. Consideremos una partición regular del $[1,2]$ con n puntos, la cual está dada por

$$t_i = \left(\frac{2-1}{n}\right) i + 1 = \frac{i}{n} + 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

y por lo tanto

$$t_i - t_{i-1} = \frac{i}{n} + 1 - \left(\frac{i-1}{n} + 1\right) = \frac{1}{n} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Calculemos $L(f_1, P)$ y $U(f_1, P)$. Tenemos que $f(x) = -2x$ es decreciente en $(0, \infty)$, pues por usando la derivada de f tenemos que $f'(x) = -2 < 0\ \forall x \in [1,2]$.

De manera que:

$$m_i = inf\{f_1(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = inf\{-2x \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = -2(t_i) = -2\left(\frac{i}{n}+1\right)$$

$$M_i = sup\{f_1(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = sup\{-2x \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = -2(t_{i-1}) = -2\left(\frac{i-1}{n}+1\right)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
L(f_1,P) = \textstyle\sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) &= \textstyle\sum_{i=1}^n -2\left(\frac{i}{n}+1\right)\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \left(\tfrac{-2}{n}\right)\left(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1\right) \\
&= \left(\tfrac{-2}{n}\right)\left(\tfrac{1}{n}\left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)+n\right) \\
&= \left(\tfrac{-2}{n}\right)\left(\left(\tfrac{(n+1)}{2}\right)+n\right) \\
&= -\tfrac{n+1}{n} - 2 = -1 - \tfrac{1}{n} - 2 = -3 - \tfrac{1}{n} \\
U(f_1,P) = \textstyle\sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) &= \textstyle\sum_{i=1}^n -2\left(\frac{i-1}{n}+1\right)\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \left(\tfrac{-2}{n}\right)\left(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^n (i-1) + \sum_{i=1}^n 1\right) \\
&= \left(\tfrac{-2}{n}\right)\left(\tfrac{1}{n}\left(\tfrac{(n-1)n}{2}\right)+n\right) \\
&= \left(\tfrac{-2}{n}\right)\left(\left(\tfrac{(n-1)}{2}\right)+n\right) \\
&= -\tfrac{n-1}{n} - 2 = -1 + \tfrac{1}{n} - 2 = -3 + \tfrac{1}{n}
\end{aligned}$$

Así :

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) = -3 + \frac{1}{n} - \left(-3 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n}$$

La cual si podemos hacer más pequeña que ε por la propiedad arquimediana y por lo tanto f_1 si es integrable en el $[1,2]$. Más aun, cuando $n \to \infty$ se tiene que

$$L(f_1, P_\varepsilon) \to -3$$

Por lo que:

$$\int_1^2 f_1(x)dx = -3$$

Ahora analicemos $f_2(x)$. Consideremos una partición regular del $[2,3]$ con n puntos, la cual está dada por

$$t_i = \left(\frac{3-2}{n}\right)i + 2 = \frac{i}{n} + 2 \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}$$

y por lo tanto

$$t_i - t_{i-1} = \frac{i}{n} + 2 - \left(\frac{i-1}{n} + 2\right) = \frac{1}{n} \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}$$

Calculemos $L(f_2,P)$ y $U(f_2,P)$. Tenemos que si $x \in (2,3]$ entonces $f_2(x) = \frac{x^2}{2}$ es creciente en $(0,\infty)$, pues por usando la derivada de f tenemos que $f'(x) = x > 0 \; \forall x \in (2,3]$.

Pero como está función está definida a trozos, hay que analizar de la siguiente forma:

Dado que $t_0 = 2$ y $t_0 < t_1$ entonces :

$$\begin{aligned}
m_1 = inf\{f_2(x) \mid t_0 \leq x \leq t_1\} &= inf\left(\{-2x \mid t_0 = x\} \cup \left\{\tfrac{x^2}{2} \mid t_0 < x \leq t_1\right\}\right) \\
&= inf\left(\{-2t_0\} \cup \left\{\tfrac{t_0^2}{2} < \tfrac{x^2}{2} \leq \tfrac{t_1^2}{2}\right\}\right) \\
&= -2t_0 = -2(2) = -4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_1 = sup\{f_2(x) \mid t_0 \leq x \leq t_1\} &= sup\left(\{-2x \mid t_0 = x\} \cup \left\{\tfrac{x^2}{2} \mid t_0 < x \leq t_1\right\}\right) \\
&= sup\left(\{-2t_0\} \cup \left\{\tfrac{t_0^2}{2} < \tfrac{x^2}{2} < \tfrac{t_1^2}{2}\right\}\right) \\
&= \tfrac{t_1^2}{2}
\end{aligned}$$

y para $i \in \{2,\ldots,n\}$ se tiene que:

$$m_i = inf\{f_2(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = inf\left\{\frac{x^2}{2} \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\right\} = \frac{t_{i-1}^2}{2} = \frac{\left(\frac{i-1}{n} + 2\right)^2}{2}$$

$$M_i = sup\{f_2(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = sup\left\{\frac{x^2}{2} \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\right\} = \frac{t_i^2}{2} = \frac{\left(\frac{i}{n} + 2\right)^2}{2}$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
L(f_2,P)=\textstyle\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i-t_{i-1}) &= m_1(t_1-t_0)+\textstyle\sum_{i=2}^{n} m_i(t_i-t_{i-1})\\
&= -4\left(\tfrac{1}{n}\right)+\textstyle\sum_{i=2}^{n}\frac{(\frac{i-1}{n}+2)^2}{2}\left(\tfrac{1}{n}\right)\\
&= -4\left(\tfrac{1}{n}\right)+\left(\tfrac{1}{n}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\textstyle\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{i-1}{n}+2\right)^2\\
&= \left(\tfrac{1}{n}\right)\left(-4+\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{(i-1)^2}{n^2}+4\left(\frac{i-1}{n}\right)+4\right)\right)\\
&= \left(\tfrac{1}{n}\right)\left(-4+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{n^2}\textstyle\sum_{i=2}^{n}(i-1)^2+\tfrac{4}{n}\textstyle\sum_{i=2}^{n}(i-1)+\textstyle\sum_{i=2}^{n}4\right)\right)\\
&= \left(\tfrac{1}{n}\right)\left(-4+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{n^2}\left(\tfrac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6}\right)+\tfrac{4}{n}\left(\tfrac{(n-1)n}{2}\right)+4n\right)\right)\\
&=\\
&= \tfrac{-4}{n}+\tfrac{(n-1)n(2n-1)}{12n^3}+\tfrac{4(n-1)n}{4n^2}+2\\
&= \tfrac{-4}{n}+\tfrac{2n^3-3n^2+n}{12n^3}+1-\tfrac{1}{n}+2\\
&= \tfrac{-4}{n}+\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{4n}+\tfrac{1}{12n^2}-\tfrac{1}{n}+3=\tfrac{19}{6}-\tfrac{5}{n}-\tfrac{1}{4n}+\tfrac{1}{12n^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U(f_2,P)=\textstyle\sum_{i=1}^{n} M_i(t_i-t_{i-1}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{i}{n}+2\right)^2}{2}\left(\tfrac{1}{n}\right)\\
&= \left(\tfrac{1}{2n}\right)\textstyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}+2\right)^2\\
&= \left(\tfrac{1}{2n}\right)\textstyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2}{n^2}+4\left(\frac{i}{n}\right)+4\right)\\
&= \left(\tfrac{1}{2n}\right)\left(\tfrac{1}{n^2}\textstyle\sum_{i=1}^{n} i^2+\tfrac{4}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} i+\textstyle\sum_{i=1}^{n}4\right)\\
&= \left(\tfrac{1}{2n}\right)\left(\left(\tfrac{1}{n^2}\left(\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)+\tfrac{4}{n}\left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)+4n\right)\right)\\
&=\\
&= \tfrac{2n^3+3n^2+n}{12n^3}+\tfrac{2(n+1)}{2n}+2\\
&= \tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{4n}+\tfrac{1}{12n^2}+1+\tfrac{1}{n}+2=\tfrac{19}{6}+\tfrac{1}{4n}+\tfrac{1}{12n^2}+\tfrac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Así :

$$U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)=\frac{2}{4n}+\frac{6}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{12}{2n}=\frac{13}{2n}$$

La cual si podemos hacer más pequeña que ε por la propiedad arquimediana y por lo tanto f_2 si es integrable en el $[2,3]$. Más aun, cuando $n\to\infty$ se tiene que

$$U(f_2,P_\varepsilon)\to\frac{19}{6}$$

Por lo que:

$$\int_1^2 f_2(x)dx = \frac{19}{6}$$

Entonces por el teorema 4 se tiene que $f(x)$ es integrable en $[1,3]$ y además se cumple que

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = \int_1^2 f_1(x)dx + \int_2^3 f_2(x)dx = -3 + \frac{19}{6} = \frac{1}{6}$$

■