Guía de examen del primer parcia l Grupo 4069

Profesora: María Juana Linares Altamirano
correo: linares.juanita@gmail.com

Ayudante: Alejandro Melchor Galván
correo: amg_29-90@hotmail.com

1. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ tal que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Supongamos que $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$ se cumple que $a \leq b$.

   a) Demostrar que $Sup(A) \leq b \quad \forall\, b \in B$

   b) Demostrar que $Sup(A) \leq Inf(B)$

2. *a*) Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que $A \neq \emptyset$ y acotado superiormente.
   Demostrar que $\forall y \in \mathbb{R}$ tal que $y < Sup(A)$ existe $x \in A$ tal que $y < x < Sup(A)$.
   Sugerencia: Demostrar por Reducción al absurdo.

   b) Sea $B \subset \mathbb{R}$ tal que $B \neq \emptyset$ y acotado inferiormente.
   Demostrar que $\forall y \in \mathbb{R}$ tal que $y > Inf(A)$ existe $x \in A$ tal que $Inf(A) < x < y$.
   Sugerencia: Demostrar por Reducción al absurdo.

3. Sean $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ tal que $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ y acotados.
   Definimos $A + B := \{a + b \,|\, a \in A \ \wedge \ b \in B\}$. Demostrar que:

   a) $A + B$ es un conjunto acotada.

   b) $Sup(A + B) \leq Sup(A) + Sup(B) \ \wedge \ Sup(A + B) \geq Sup(A) + Sup(B)$

   c) $Inf(A + B) \leq Inf(A) + Inf(B) \ \wedge \ Inf(A + B) \geq Inf(A) + Inf(B)$

4. Sean a, b, c, d numeros reales tales que $a < b < c < d$.Demostrar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada en $[a, b]$ entonces f es acotada en $[c, d]$.

5. Sean $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x + 1$ y $h(x) = [x]$ con dominio $[1, 6]$.

   a) Justificar porque las funciones f , g y h están acotadas.

   b) Consideren la partición $P = \{1, 2, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 6\}$. Determinar el supremo y el infimo de

   - Im(f)
   - Im(g)
   - Im(h)
   - $\{f(x) + g(x) \mid x \in [1, 6]\}$
   - $\{g(x) + h(x) \mid x \in [1, 6]\}$
   - $\{f(x) + h(x) \mid x \in [1, 6]\}$
   - $\{f(x_1) + g(x_2) \mid x_1, x_2 \in [1, 6]\}$
   - $\{f(x_1) + h(x_2) \mid x_1, x_2 \in [1, 6]\}$

6. Las siguientes funciones son acotadas. Calcular $L(f,P)$ y $U(f,P)$ con la partición indicada en cada caso y dibujar la gráfica de la función.

   a)

   $$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} x^2 - 1 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 1 - x & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{array} \right\} \text{ La partición es: } P = \{-2,-1,0,1,2,3\}$$

   b)

   $$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 2x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \\ 9 - x^2 & \text{si } 2 < x \leq 6 \\ 2 & \text{si } x = 6 \end{array} \right\} \text{ La partición es: } P = \{-1,2,6\}$$

   c)

   $$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} -1 & \text{si } x = 0 \\ 3x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ -2 & \text{si } x = 1 \\ 9 - 6x & \text{si } 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 2 \end{array} \right\} \text{ La partición es: } P = \{0,1,2\}$$

7. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Demostrar que:

   $$\mathsf{L}(f,P) \leq U(f,P) \quad \forall P \text{ partición de } [a,b]$$

8. Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a,b]$, P, Q dos particiones de $[a,b]$ tales que $P \subset Q$ y Q tiene exactamente un punto más que P.

   - Demostrar que $L(f,P) \leq L(f,Q)$
   - Demostrar que $U(f,P) \geq U(f,Q)$

9. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a,b]$. Demostrar que si P y P' son dos particiones cualesquiera de $[a,b]$ entonces $L(f,P) \leq U(f,P')$

10. Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a,b]$, P, P' y P'' tres particiones cualesquiera de $[a,b]$ y cuyas sumas $L(f,P)$, $U(f,P)$, $L(f,P')$, $U(f,P')$, $L(f,P'')$ y $U(f,P'')$ han sido calculadas.

    a) Demostrar que cualquier elemento del conjunto $\{L(f,P) \mid P$ es una partición cualquiera de [a,b]$\}$ es menor o igual que cada $U(f,P')$.

    b) Justifica de manera detallada porque existe el $Sup(\{L(f,P) \mid P$ es una partición cualquiera de [a,b]$\}$

    c) Demostrar que:

    $$L(f,P') \leq Sup(\{L(f,P) \mid P \text{ es una partición cualquiera de } [a,b]\}) \leq U(f,P'')$$

    d) Justifica de manera detallada porque existe el $Inf\{U(f,P) \mid P$ es una partición cualquiera de [a,b]$\}$

e) Demostrar que:

$$L(f, P') \leq Inf(\{U(f, P) \mid P \text{ es una partición cualquiera de } [a, b]\}) \leq U(f, P'')$$

11. a) Calcular $U(f, P)$ y $L(f, P)$ para cada una de las siguientes funciones en el interval indicado. Utilizar una partición regular $P = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ de seis puntos en tal intervalo

    b) Realizar en cada caso el dibujo correspondiente de los rectángulos circunscritos la región delimitada por la gráfica de f en el intervalo $[a, b]$ y el eje X.

    c) Realizar en cada caso el dibujo correspondiente de los rectángulos inscritos la región delimitada por la gráfica de f en el intervalo $[a, b]$ y el eje X.

    a) $f(x) = -x$, con $x \in [1, 4]$
    b) $f(x) = \frac{1}{x}$, con $x \in [2, 5]$
    c) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, con $x \in [-4, -1]$
    d) $f(x) = x - 2$, con $x \in [-1, 2]$
    e) $f(x) = x^2 - 3$ con $x \in [0, 3]$
    f) $f(x) = x + [x]$, con $x \in [-2, 3]$

12. El criterio de Integrabilidad (Teorema 2 Capítulo 13 del Spivak), dice:
    Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada en $[a, b]$,
    f es integrable en $[a, b]$ si solo si, $\forall \varepsilon > 0$ existe una P_ε partición de $[a, b]$ tal que
    $U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$

    Usar el criterio, para demostrar que cada una de las siguientes funciones integrable en el intervalo cerrado indicado. Calcular la integral cuando sea posible.

    a) $f(x) = 3x^2 + 1, \forall x \in [0, 1]$
    b) $f(x) = x^2, \forall x \in [-1, 0]$
    c) $f(x) = 3x^2 - 1, \forall x \in [1, 2]$
    d) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \forall x \in [0, 1]$
    e) $f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} -x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -x - 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{array} \right\}$
    f) $f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} x^2 - 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -x + 11 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{array} \right\}$

13. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$.Demostrar que si $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$ entonces

$$\int_a^b f \geq 0$$

14. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables en $[a, b]$. Demostrar que si $f(x) \geq g(x) \; \forall x \in [a, b]$ entonces

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

15. *a*) Dar un ejemplo de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable tal que $f(x) \geq 0 \, \forall x \in [a, b]$ y $f(x) > 0$ para algún punto $x \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f = 0$$

    b) Demostrar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a, b]$, $f(x_0) > 0$ con $x_0 \in [a, b]$ y f continua en x_0 entonces

$$\int_a^b f > 0$$

    Sugerencia: Basta hallar una suma inferior $L(f, P)$ que sea positiva.

16. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

    a) Demostrar que si f es integrable en $[a, b]$ y existe $m \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq f(x) \leq M$ para toda $x \in [a, b]$ entonces existe $\mu \in [m, M]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)\mu$$

    b) Demostrar que si f es continua en $[a, b]$ entonces existe $\xi \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi)$$

    c) Demostrar que si f es continua en $[a, b]$ y g es integrable en $[a, b]$ tal que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ entonces existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

17. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada en $[a, b]$ y P una partición de $[a, b]$. Consideremos a

    - $P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_n = b\}$ con $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$
    - $M_i = sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$
    - $m_i = inf\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$
    - $M_i' = sup\{|f(x)| \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$
    - $m_i' = inf\{|f(x)| \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$

    a) Demostrar que $M_i' - m_i' \leq M_i - m_i$ para toda $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$

b) Demostrar que si f es integrable en $[a, b]$ entonces $|f|$ también es integrable en $[a, b]$

18. Demostrar que si f es integrable en $[a, b]$ entonces

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Para acceder al examen se necesitara presentar una identificación con fotografia actualizada. Fecha del primer parcial Viernes 22 de Febrero del 2019 de 16:00 a 18:00 horas en el salón de clase

Bibliografia

- Spivak, Michael. Calculus. 3a. Edición Editorial Reverté. O, el libro de la 2da. Edición
- Apostol,Tom M, Calculus. Volumen I. (Libro digitalizado).
- Arizmendi, Carrillo, Lara. Cálculo. (Libro digitalizado).
- Haaser, Lasalle, Sullivan. Introducción al Análisis Matemático. Vol.I. Editorial Trillas
- Ayres, Frank Jr., Mendelson, Elliot. CALCULO, 4ª. Edución McGraw_Hill. Serie Shaum

Referencias en Internet Encontrarás un gran apoyo en los sitios de Internet: Para Cálculo Diferencial e Integral II

- http://newton.matem.unam.mx/calculo2/ (incluye todo el curso)

Para Cálculo Diferencial e Integral I

- http://newton.matem.unam.mx/calculo1/ (incluye todo el curso)
- http://newton.matem.unam.mx/comunidades/ (incluye la parte inicial de Lógica)

Los cuales se pueden visualizar con exploradores como Firefox, Safari o Chrome y, como están desarrollados en HTML5, es posible visualizarlos en iPad y otros móviles.