Guía de examen del tercer parcial Grupo 4069

Profesora: María Juana Linares Altamirano
correo: linares.juanita@gmail.com

Ayudante: Alejandro Melchor Galván
correo: amg_29-90@hotmail.com

Ayudante: Apolonia Juana Pérez Sarabia
correo: polasabia@yahoo.com.mx

Indicación General: Cada vez que se pida realizar la gráfica de una función será necesario establecer el comportamiento de la función considerando los criterior de la primera y segunda derivada, sus puntos de inflexión, puntos criticos, maximos y minimos locales y en caso de que aplique calcular los límites $\lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to0^-} f(x)$

Nota: Denotaremos al logaritmo narutal como simplemente log(x), que es lo mismo que ln(x)

1. Derivar cada una de las siguientes funciones (Recordar que a^{b^c} designa siempre $a^{(b^c)}$)

$$a)\ f(x) = e^{(\int_0^x e^{-t^2}dt)} \quad b\ )f(x) = log_{(e^x)}sen(x) \quad c)\ f(x) = (log(x))^{log(x)}$$

$$d)\ f(x) = (log(3+e^4))e^{4x} + (arcsen(x))^{log(3)} \quad e)\ f(x) = x^x \quad f)\ sen(x^{sen(x^{arcsen(x)})})$$

2. *a*) Demostrar que si $f(x) > 0$ entonces $log(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, A esta expresión se le denomina la derivada logaritmica de f.

   b) Usar la derivación logarítmica para encontrar $f'(x)$ de cada una de las siguientes funciones

$$a)f(x) = (1+x)(1+e^{x^2}) \qquad b)f(x) = \frac{(3-x)^{\frac{1}{3}}x^2}{(1-x)(3+x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$c)f(x) = (sen(x))^{cos(x)} + (cos(x))^{sen(x)} \qquad d)f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}(1+x^3)}$$

3. Hallar $\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}dt$, para funciones positivas sobre $[a, b]$.

4. Representar gráficamente las siguientes funciones:

$$a)\ f(x) = e^{x+1} \quad b)\ f(x) = e^{sen(x)} \quad c)\ f(x) = e^x + e^{-x}$$

$$d)\ f(x) = e^x - e^{-x} \quad e)\ f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1 - \frac{2}{e^{2x}-1}$$

5. Encuentra los siguientes límites utilizando la Regla de L'Hopital:

$$a)\ \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 - x - (\frac{x^2}{2})}{x^2} \quad b)\ \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 - x - (\frac{x^2}{2}) - (\frac{x^3}{6})}{x^3}$$

$$c)\ \lim_{x\to0} \frac{log(1+x) - x + (\frac{x^2}{2})}{x^2} \quad d)\ \lim_{x\to0} \frac{log(1+x) - x + (\frac{x^2}{2}) - (\frac{x^3}{3})}{x^3}$$

6. Calcular los siguientes límites mediante la Regla de L'Hopital:

$$a)\ \lim_{x\to 0^+}(1-x)^{\frac{1}{x}} \quad b)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan(x))^{tan(2x)} \quad c)\ \lim_{x\to 0^+}(cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$$

7. Definimos a las siguientes funciones como:

$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$tanh(x) = \frac{senh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Demostrar las siguientes propiedades:

$$a)\ cosh^2(x) - senh^2(x) = 1 \qquad b)\ tanh^2(x) + \frac{1}{cosh^2(x)} = 1$$

$$c)\ senh(x+y) = senh(x)cosh(y) + cosh(x)senh(y)$$

$$d)\ cosh(x+y) = cosh(x)cosh(y) + senh(x)senh(y)$$

$$e)\ senh'(x) = cosh(x) \quad f)\ cosh'(x) = senh(x) \quad g)\ tanh'(x) = \frac{1}{cosh^2(x)}$$

8. Demostrar las siguientes igualdades

$$a)\ senh(arccosh(x)) = \sqrt{x^2-1} \quad b)\ cosh(arcsenh(x)) = \sqrt{1+x^2}$$

$$c)\ (arcsenh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ \forall x \in \mathbb{R} \quad d)\ (arccosh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ \forall x > 1$$

$$e)\ (arctanh)'(x) = \frac{1}{1-x^2}\ \forall |x| < 1$$

9. Encontrar una fórmula explícita para $arcsenh(x), arccosh(x)$ y $arctan(x)$. Sugerencia: resolver la ecuación $y = arcsenh(x)$ expresando x en términos de y.

10. Demostrar que $F(x) = \int_2^x \frac{1}{log(t)}dt$, con $x > 1$, no está acotada sobre $[2, \infty)$.

11. Calcular los siguientes límites sin usar regla de L'Hopital:

$$a)\ \lim_{x\to\infty} a^x,\ \forall\ 0 < a < 1 \quad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{(log(x))^n} \quad c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(log(x))^n}{x}$$

$$d)\ \lim_{x\to 0^+} x(log(x))^n \quad \left(\text{Sugerencia: } x(log(x))^n = \frac{(-1)^n(log(\frac{1}{x}))^n}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$e)\ \lim_{x\to 0^+} x^x \qquad f)\ \lim_{x\to\infty} x^x$$

12. Realizar la gráfica de la siguiente función explicando con detalle su comportamentiento:

$$f(x) = x^x \text{ para toda } x > 0$$

13. Realizar la gráfica y encontrar el valor minimo de $f(x) = \frac{e^x}{x^n}$ para $x > 0$ y concluir que $f(x) > \frac{e^n}{n^n}$ para $x > n$.

14. Demostrar los siguientes limites sin usar regla de L'Hopital:

$$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x}{log(x)} = 0 \quad b)\ \lim_{x\to 0^+} x.log(x) = 0 \quad c)\ \lim_{h\to 0} \frac{log(1+h)}{h}$$

$$d)\ \lim_{x\to\infty} x.log\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \quad e)\ \lim_{x\to\infty} log\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = 1 \quad f)\ \lim_{x\to 0} log\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = 1$$

$$g)\ \lim_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad h)\ \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad i)\ \lim_{x\to\infty} x(b^{\frac{1}{x}} - 1) = log(b)$$

15. Gráficar $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\forall x > 0$.

16. Demostrar que si $f(x) = \int_0^x f(t)dt$ y f es continua, entonces $f(x) = 0$.

17. Hallar todas las funciones continuas f que satisfacen:

    a) $\int_0^x f(t)dt = e^x$

    b) $\int_0^{x^2} f(t)dt = 1 - e^{2x^2}$

18. Demostrar que:
    f es derivable y $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si y solo si para algun $c \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(x) = ce^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

19. a) Demostrar que $e^x > x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Y en consecuencia :

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

    b) Demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

    c) Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

20. Se ha definido $log_a(x)$ como la función inversa de a^x. La función $log_a(x)$ tiene por dominio los reales positivos y como conjunto imagen los números reales.

    a) Demostrar que

$$log_a(x) = \frac{log(x)}{log(a)},\ \forall x > 0 \text{ y } \forall a > 0$$

    b) calcular la primera derivada de $g(x) = log_a(x)$ para $x > 0$ y $a > 0$.

21. a) Encontrar la derivada de $h(x) = (\sqrt{x})^x$ para $x > 0$

    b) Graficar la función $f(x) = (\sqrt{x})^x$

22. Dada la siguiente función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{para todo } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right\}$$

a) Calcular $f'(0)$ y $f''(0)$.

b) Calcular

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

c) Calcular

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \text{ y } \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

d) Realizar la gráfica de $f(x)$. Indicación: Realizar la gráfica de f(x) con base en el análisis de su primera y segunda derivada

23. Sea $f(x) = x^a \quad \forall x > 0$ y $a \in \mathbb{R}$

a) Calcular la primera derivada de $f(x)$.

b) Carlcular la segunda derivable de $f(x)$.

24. Realizar las gráficas de las siguientes funciones:

$$a\ f(x) = x^{\sqrt{2}},\ \forall x > 0 \quad b)\ f(x) = x^{\sqrt{\frac{1}{3}}},\ \forall x > 0 \quad c)\ f(x) = x^{-\sqrt{5}},\ \forall x > 0$$

25. *a*) Trazar la gráfica de cada una de las siguientes funciones en sus respectivos dominios.

$$a)\ arcsenh(x) \quad b)\ arccosh(x) \quad c)\ arctanh(x)$$

b) Calcular las siguientes integrales:

$$i) \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad ii) \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \text{ para } a, b > 1 \text{ ó } a, b < -1$$

$$iii) \int_a^b \frac{1}{1-x^2} dx, \text{ para } |a|, |b| < 1$$

26. Suponer que existe f''. Hallar todas las funciones f que satisfacen $f'(t) = f(t) + \int_0^1 f(t)dt$

27. a) Calcular

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

b) Hallar los siguientes limites:

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x^2} \int_x^{x+\frac{1}{x}} e^{t^2} dt$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} \int_x^{x+\frac{log(x)}{x}} e^{t^2} dt$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} \int_x^{x+\frac{log(x)}{2x}} e^{t^2} dt$$

28. *a*) Realizar la gráfica de $f(x) = \frac{log(x)}{x}$, explicando con detalle su comportamiento.
    b) ¿Qué número es mayor, e^{π} o π^e?

29. Calcular las siguientes integrales

$$a) \int_0^{\infty} e^{-x} dx \quad b) \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

30. Calcular la $\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx$ cuando:

$$a)\ f(x) = e^{kx} \text{ con } s > k \quad b)\ f(x) = sen(kx) \text{ con } s > 0 \quad c)\ f(x) = cos(kx), \text{ con } s > 0$$

Para acceder al examen se necesitara presentar una identificación con fotografia actualizada. Fecha del primer parcial Viernes 03 de Mayo del 2019 de 16:00 a 18:00 horas en el salón de clase

Bibliografia

- Spivak, Michael. Calculus. 3a. Edición Editorial Reverté. O, el libro de la 2da. Edición
- Apostol,Tom M, Calculus. Volumen I. (Libro digitalizado).
- Arizmendi, Carrillo, Lara. Cálculo. (Libro digitalizado).
- Haaser, Lasalle, Sullivan. Introducción al Análisis Matemático. Vol.I. Editorial Trillas
- Ayres, Frank Jr., Mendelson, Elliot. CALCULO, 4ª. Edución McGraw_Hill. Serie Shaum

Referencias en Internet Encontrarás un gran apoyo en los sitios de Internet: Para Cálculo Diferencial e Integral II

- http://newton.matem.unam.mx/calculo2/ (incluye todo el curso)

Para Cálculo Diferencial e Integral I

- http://newton.matem.unam.mx/calculo1/ (incluye todo el curso)
- http://newton.matem.unam.mx/comunidades/ (incluye la parte inicial de Lógica)

Los cuales se pueden visualizar con exploradores como Firefox, Safari o Chrome y, como están desarrollados en HTML5, es posible visualizarlos en iPad y otros móviles.