

Guía de ejercicios para la evaluación del segundo parcial

1. Sean X, Y y Z espacios topológicos. Consideremos $f, g : X \rightarrow Y$ y $\psi, \varphi : Y \rightarrow Z$ funciones continuas entre estos espacios. Demostrar que:
 - a) Si $f \simeq g$ relativo a $A \subset X$ entonces $\varphi \circ f \simeq \varphi \circ g$ relativo a A .
 - b) Si $\varphi \simeq \psi$ relativo a $B \subset Y$ entonces $\varphi \circ f \simeq \psi \circ f$ relativo a $f^{-1}[B]$
2. Sean X, Y espacios topológicos. Demostrar que si Y es conexo por trayectorias entonces para cualquier $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas nulhomotópicas tenemos que $f \simeq g$.
3. Demostrar que la relación \simeq es una relación de equivalencia en la clase de todos los espacios topológicos.
4. Sean X, Y y Z espacios topológicos. Entonces:
 - a) Demostrar que si $\varphi : (X, x) \rightarrow (Y, y)$, $\psi : (Y, y) \rightarrow (Z, z)$ son funciones basadas,

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* : \pi(X, x) \rightarrow \pi(Z, z)$$
 - b) Demostrar que si $Id_X : (X, x) \rightarrow (X, x)$ es la identidad en X .

$$(Id_X)_* = Id_{\pi(X, x)}$$
5. Demostrar que si $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^2$ son continuas tales que $\forall x \in X, f(x) \neq g(x)$ entonces $f \simeq g$.
6. Sean X un espacio topológico simplemente conexo y $\{x_0, x_1\} \subset X$. Demostrar que si $f, g : I \rightarrow X$ son dos trayectorias con $f(0) = g(0) = x_0$ y $f(1) = g(1) = x_1$ entonces $f \simeq g$ relativo al $\{0, 1\}$.
7. Sean Y y Z espacios topológicos y $p : Y \rightarrow Z$ una función cubriente. Demostrar que para todo $z \in Z$ el subespacio $p^{-1}(z)$ es un espacio discreto en Y .
8. Encontrar una función cubriente de \mathbb{S}^1 en \mathbb{S}^1 que no sea la función identidad.
9. Demostrar que \mathbb{R} es un espacio cubriente del \mathbb{S}^1 .
10. Demostrar que el toro es un espacio cubriente de la botella de Klein.