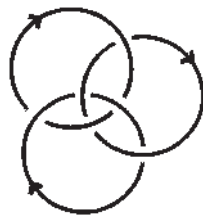


Introducción a la Teoría de Nudos



V JORNADAS DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS,
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ

(11–15 de Abril 2011)

José Luis Cisneros Molina

Prefacio

Las presentes notas cubren esencialmente el contenido del curso impartido en las “V Jornadas de Física y Matemáticas” llevadas a cabo en el Departamento de Ciencias Básicas del Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, del 11 al 15 de Abril de 2011.

Son una versión corregida y aumentada de las notas de un curso, con el mismo título, que se impartió en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Baja California, del 12 al 16 de Noviembre de 2007, en la “Escuela de Verano en Matemáticas”, que se llevó a cabo en la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas de la UNAM del 23 al 31 de Agosto del 2000 y durante la “X Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas” realizada en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, del 1 al 3 de Diciembre de 1999 en Hermosillo, Sonora.

El objetivo principal del curso es despertar en los estudiantes el interés por el estudio de la topología algebraica mediante una introducción a la teoría de nudos. Se escogió este tema, por que muchas de las definiciones y resultados de dicha teoría son muy intuitivas, fáciles de visualizar y en ocasiones hasta divertidas.

Como la intención es dar un panorama general de los principales problemas y técnicas en teoría de nudos, no se darán demostraciones de los resultados expuestos, o a lo más, se darán “demostraciones intuitivas” en algunos casos. Para más detalles damos como referencia los libros [1, 3, 4].

El curso está estructurado de la siguiente manera. En primer lugar, en la introducción, se menciona el uso de los nudos a través de la historia y como fué que se comenzaron a estudiar los nudos desde el punto de vista matemático. A continuación, se dan las principales definiciones de la teoría. Posteriormente se presentan los problemas fundamentales de la teoría de nudos, los cuales son de dos tipos: globales y locales. Como siguiente paso, se describe el uso de invariantes para atacar algunos de los problemas presentados y se definen los ejemplos más importantes de invariantes de nudos. Como punto siguiente, se define el concepto de trenza, se describen sus principales propiedades y su relación con los nudos. Finalmente se mencionan algunas de las aplicaciones que ha tenido la teoría de nudos en algunas otras ciencias.

Índice general

1. Introducción	5
2. Definiciones	7
2.1. Definiciones básicas	7
2.2. Nudos anfiqueirales	11
2.3. Nudos invertibles	12
2.4. Nudos dóciles vs. nudos salvajes	12
2.5. Nudos tóricos	14
2.6. Suma conexa de nudos	19
2.7. Enlaces	20
2.8. Diagramas regulares	21
2.9. Nudos y enlaces alternantes	22
3. Problemas Fundamentales de la Teoría de Nudos	24
3.1. Problemas globales	24
3.1.1. El problema de clasificación	24
3.1.2. Invariantes de nudos	24
3.1.3. Una conjetura fundamental	25
3.2. Problemas locales	25
3.2.1. ¿Cuándo un nudo es anfiqueiral?	25
3.2.2. ¿Cuándo un nudo es primo?	26
3.2.3. ¿Cuándo un nudo es invertible?	27
3.2.4. ¿Cuál es el periodo de un nudo?	27
4. Invariantes	29
4.1. Movimientos de Reidemeister	29
4.2. Número mínimo de cruces	30
4.3. Número de puentes	31
4.4. Número de enlace	32
4.5. Número de coloración	34
4.6. Grupo del nudo	34
4.6.1. Grupo fundamental	35
4.6.2. Grupo del nudo trivial	36
4.6.3. Presentaciones de grupos	36

4.6.4.	Presentación del grupo del trébol	38
4.7.	Polinomios	41
4.7.1.	Polinomio de Alexander–Conway	41
4.7.2.	Polinomios de Jones	44
5.	Trenzas	47
5.1.	El grupo de trenzas	47
5.2.	Presentación de B_n	49
5.3.	Nudos y trenzas	51
5.4.	El índice de trenza de un nudo	53
6.	Aplicaciones	55

Capítulo 1

Introducción

El hombre ha utilizado los nudos, trenzas y enlaces a travez de los a nos hasta la actualidad. Por ejemplo, en los primeros a nos de nuestra existencia, nuestros antepasados, ataron una piedra a un pedazo de madera para formar un hacha. También necesitaron trenzar lianas o pelo de animales para construir cuerdas, que posteriormente enlazaron y anudaron para construir redes para la pesca. Los nudos también aparecen en manuscritos, esculturas, pinturas y otras formas de arte alrededor de todo el mundo. También es sabido que la antigua civilización Inca utilizó un sistema a base de nudos llamado “quipu” como lenguaje escrito y para llevar la contabilidad.

A pesar de que la gente ha hecho uso de los nudos desde los albores de nuestra existencia, el estudio *matemático* de los nudos es relativamente joven. En el siglo XIX los físicos se preguntaban sobre la naturaleza de los átomos. Lord Kelvin, uno de los principales físicos de ese tiempo, propuso en 1867 la ambiciosa idea de que los átomos eran vórtices tubulares de eter anudados [6]. Sus argumentos en favor de esta teoría se pueden resumir de la siguiente manera:

Estabilidad La estabilidad de la materia puede ser explicada por la estabilidad de los nudos (es decir, su naturaleza topológica).

Variedad La variedad de los elementos químicos puede deberse a los diferentes tipos de nudos.

Espectro Las oscilaciones vibracionales de los vórtices tubulares pueden explicar las líneas espectrales de los átomos.

Desde un punto de vista moderno, podríamos agregar en retrospectiva un cuarto argumento:

Transmutación La habilidad de los átomos para transformarse en otros átomos a altas energías puede estar relacionado con el corte y recombinación de los nudos.

Durante alrededor de 20 a nos, la teoría de Kelvin fué tomada seriamente. El veredicto de Maxwell al respecto fue que “satisface mas condiciones que

cualquier otro modelo del átomo hasta entonces considerado”. P. G. Tait, colaborador de Kelvin, se encargó del estudio extensivo y de la clasificación de los nudos [5]. Tait enumeró a los nudos en términos del número de cruces de las proyecciones planas (ver Sección 4.2) y también hizo algunos descubrimientos empíricos los cuales han sido llamados desde entonces las “**Conjeturas de Tait**”. Después de que la teoría de Kelvin fue descartada como teoría atómica, el estudio de los nudos se convirtió en una rama esotérica de las matemáticas puras.

A pesar del gran esfuerzo hecho por los topólogos en el siglo XX, las Conjeturas de Tait resistieron todo intento de demostración hasta finales de los 80’s, cuando un nuevo invariante de nudos, ahora conocido como el **polinomio de Jones**, fue descubierto, el cual resultó ser lo suficientemente poderoso para demostrar la mayoría de las conjeturas fácilmente.

Uno de los principales logros de la topología moderna fue el descubrimiento en 1928 del **polinomio de Alexander** de un nudo o enlace. A pesar de que no ayudó a probar las conjeturas de Tait fue un invariante de nudos muy útil y simplificó grandemente la clasificación de los nudos. Por más de 50 años, el polinomio de Alexander fue el único invariante de nudos de su tipo. Por lo tanto fue una gran sorpresa para todos los expertos cuando, en 1984, Vaughan Jones descubrió otro invariante polinomial de nudos y enlaces.

Con el paso de los años se han encontrado nuevas aplicaciones de la teoría de nudos a otras disciplinas, tales como el estudio de la molécula de ADN, química, biología molecular, mecánica cuántica entre otras.

Capítulo 2

Definiciones

2.1. Definiciones básicas

En nuestra vida en múltiples ocasiones hemos tenido que hacer algún nudo, por lo menos el mas sencillo de ellos. En la Figura 2.1 se muestran ejemplos de los nudos mas conocidos.

Experimentando un poco con un par de cordones uno se puede convencer fácilmente de que los nudos de la Figura 2.1 son diferentes, ya que no se puede pasar de uno al otro sin pasar alguno de los extremos por alguna de las asas, es decir, desanudando primero y luego volviendo a anudar. Pero el hecho de intentar sin éxito un gran número de veces el transformar un nudo en el otro no es una prueba matemática de que no puede hacerse. Para poder dar una demostración matemática, necesitamos hacer un modelo matemático de la situación física. Se deben definir objetos matemáticos que aproximen lo mas cerca posible a los objetos físicos bajo consideración. El modelo puede ser bueno o malo dependiendo de si la correspondencia entre objetos matemáticos y realidad es buena o mala.

Para formular nuestro modelo matemático debemos dar una definición matemática de lo que es un nudo y definir matemáticamente cuando dos nudos son

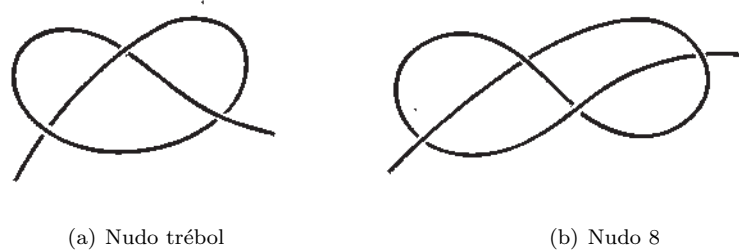


Figura 2.1: Ejemplos de nudos

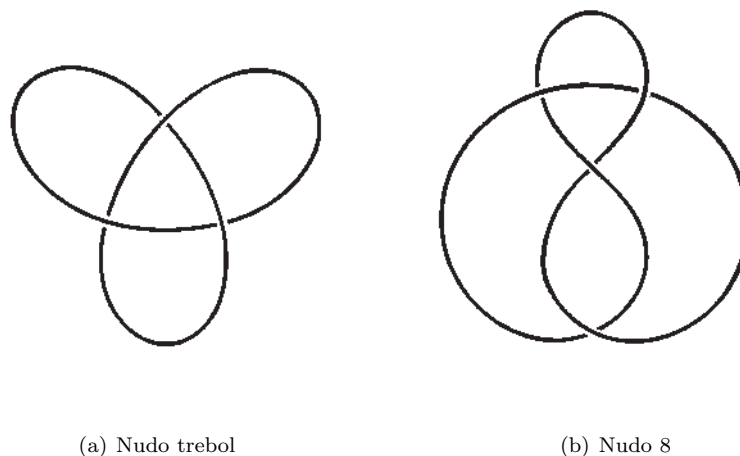


Figura 2.2: Nudos cerrados

iguales. Como todo nudo puede ser transformado en otro cualquiera desanudando y volviendo a anudar, debemos prohibir esta operación, ya sea en la definición de cuando dos nudos son iguales o desde la definición misma de nudo. Nosotros optaremos por el segundo enfoque que es el mas fácil. Para ello, existen dos formas de hacerlo, la primera es prolongar los extremos hasta el infinito y la mas sencilla es juntarlos. De este modo, nuestros nudos quedarían como en la Figura 2.2.

De esta manera, consideramos a un nudo como un subconjunto del espacio tridimensional el cual es *homeomorfo* al círculo. La definición formal es la siguiente:

Definición. El subconjunto $K \subset \mathbb{R}^3$ es un **nudo** si existe un *homeomorfismo* del círculo unitario S^1 en \mathbb{R}^3 cuya imagen es K . Donde S^1 es el conjunto de puntos (x, y) en el plano \mathbb{R}^2 que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

De ahora en adelante, pensaremos en esta definición para referirnos a un nudo. El nudo mas sencillo es la circunferencia estandar S^1 vista en \mathbb{R}^3 , es decir, el conjunto de puntos $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ en $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Este nudo es llamado **nudo trivial** y corresponde a no anudar el cordón y simplemente juntar sus extremos. Se dan mas ejemplos de nudos en la Figura 2.3

Uno podría preguntarse por que se define un nudo como un subespacio de \mathbb{R}^3 . (¿Únicamente por que vivimos en un mundo tridimensional?). ¿Por que no definimos un nudo K como un subespacio de \mathbb{R}^n que sea homeomorfo a S^1 ? Tenemos que n debe ser mayor o igual que dos, ya que toda aplicación continua de la circunferencia en la recta real manda por lo menos un par de puntos diametralmente opuestos al mismo punto (ver [3, Corolario 10.3]) y por lo tanto no puede haber subconjuntos de \mathbb{R} homeomorfos a S^1 . Sin embargo, si

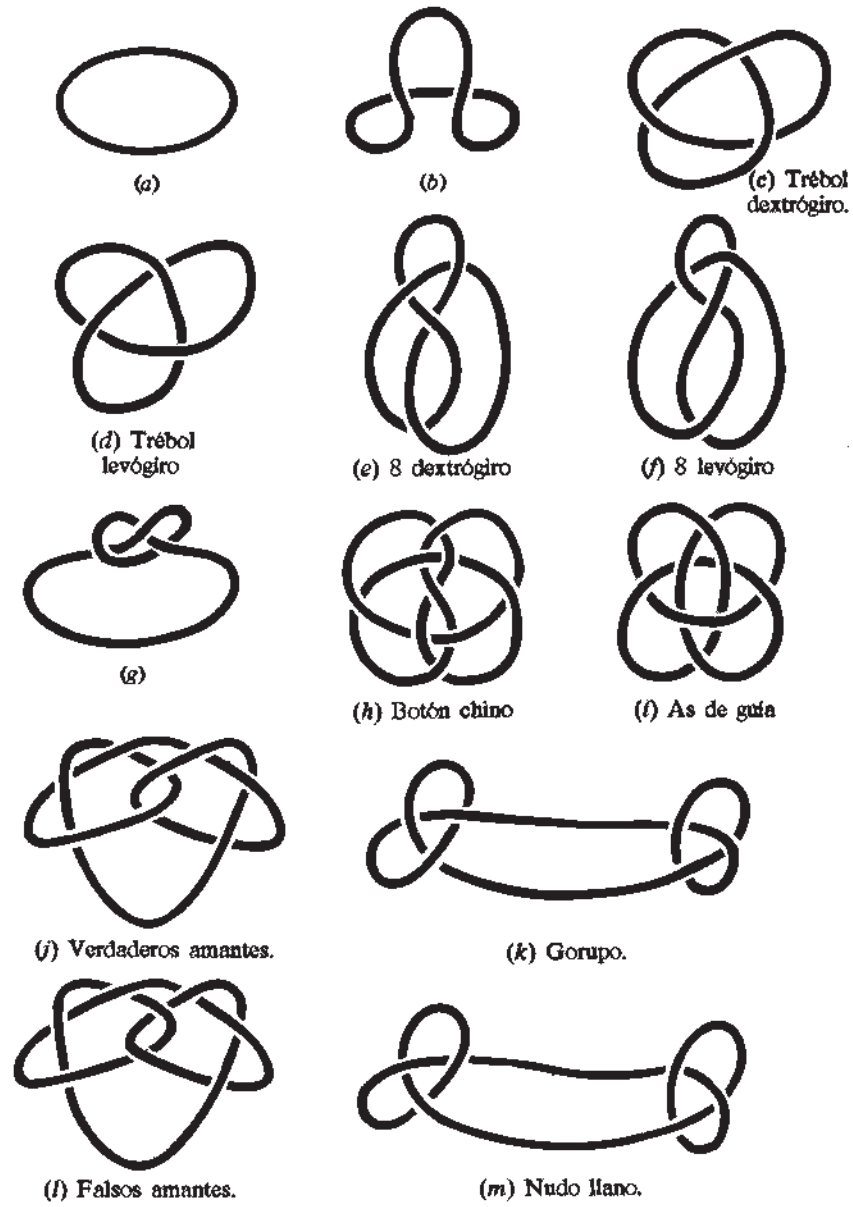
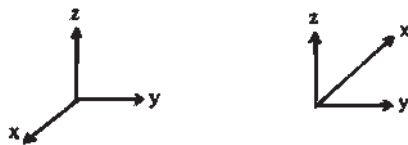


Figura 2.3: Algunos nudos



(a) Referencia dextrógira

(b) Referencia levógira

Figura 2.4: Referencias de \mathbb{R}^3

$n \neq 3$, existe un homeomorfismo $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $h(K)$ es la circunferencia standar. Para $n = 2$ constituye el famoso Teorema de Schönflies; para $n \geq 4$ el resultado nos dice que si vivieramos en un mundo de 4 o mas dimensiones podríamos desanudar todos los nudos.

Ahora veamos que significa que dos nudos sean el mismo. Nótese que en este caso la cuestión no se reduce a ver cuando dos nudos K_1 y K_2 son homeomorfos ya que todos son homeomorfos a S^1 y por lo tanto homeomorfos entre sí. La propiedad de estar anudado no es una propiedad topológica intrínseca del espacio formado por los puntos del nudo, sino que esta relacionado a la forma en que el nudo esta metido en \mathbb{R}^3 . La teoría de nudos es parte de la topología tridimensional y no de la unidimensional. Entonces se podría pensar que dos nudos son el mismo si están metidos de la misma manera en \mathbb{R}^3 y de acuerdo con esta idea damos la siguiente definición:

Definición. Dos nudos K_1 y K_2 son **semejantes** si existe un homeomorfismo $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $h(K_1) = K_2$.

Por ejemplo, en la Figura 2.3 los nudos (a) y (b) son semejantes, los nudos (c), (d) y (g) son semejantes y también (e) y (f). Que (a) y (b) lo son es obvio, y también es fácil ver que (g) y (c) lo son. Para ver que (c) y (d) son semejantes, colocamos uno encima del otro y ponemos un espejo enmedio y lo mismo para (e) y (f).

Sin embargo, la experiencia física nos dice que los tréboles dextrógiro y levógiro no son iguales, es decir, si los construimos con un pedazo de cuerda no podemos transformar uno en el otro, únicamente podremos hacerlo mediante el uso de un espejo. Esto nos dice que nuestra definición de nudos semejantes no corresponde con la idea física que tenemos de que dos nudos sean iguales, por lo que tenemos que buscar una definición más adecuada. Veamos que es lo que falla en nuestra definición de semejanza.

Todo homeomorfismo h de \mathbb{R}^3 en si mismo **preserva la orientación** o **invierte la orientación**. Intuitivamente h invierte la orientación si transforma una referencia dextrógira (Figura 2.4) de \mathbb{R}^3 en una referencia levógira y preserva la orientación si la deja igual.

La composición de homeomorfismos sigue las siguientes reglas:

h_1	h_2	$h_1 \circ h_2$
preserva	preserva	preserva
invierte	preserva	invierte
preserva	invierte	invierte
invierte	invierte	preserva

Obviamente la aplicación identidad preserva la orientación y por otro lado la reflexión $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ la invierte. Si h es una transformación lineal, preserva o invierte la orientación dependiendo de si su *determinante* es positivo o negativo. Análogamente, si h y su inversa son C^1 diferenciables en cada punto de \mathbb{R}^3 , entonces preserva o invierte la orientación si su *Jacobiano* es positivo o negativo en todas partes.

El concepto físico de igualdad de nudos corresponde a mover continuamente un nudo en \mathbb{R}^3 hasta obtener el otro nudo y esto se hace mediante homeomorfismos. La definición de semejanza no corresponde al concepto físico por que no se puede transformar continuamente una referencia dextrógira en una levógira usando únicamente homeomorfismos, es decir, mediante *isotopías*. Tomando esto en cuenta, damos nuestra segunda definición de igualdad de nudos.

Definición. Dos nudos K_1 y K_2 son **equivalentes** si existe un homeomorfismo $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que preserve la orientación tal que $h(K_1) = K_2$. La equivalencia de nudos la denotaremos por $K_1 \cong K_2$.

El concepto de nudos equivalentes coincide con el concepto físico de igualdad de nudos. De hecho se podría demostrar que dos nudos K_1 y K_2 , son equivalentes si y solo si existe un homeomorfismo $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y un número real $k > 0$ tal que $h(K_1) = K_2$, y $h(x) = x$ siempre que $\|x\| \geq k$.

2.2. Nudos anfiqueirales

Por la discusión anterior, la experiencia física nos dice que los tréboles dextrógiro y levógiro no son equivalentes. Sin embargo, existen nudos que si son equivalentes a su imagen en el espejo, uno de ellos es el nudo 8; el nudo 8 dextrógiro se puede transformar en el 8 levógiro como se muestra en la Figura 2.5.

De lo anterior tenemos la siguiente definición.

Definición. Un nudo K es **anfiqueiral** si existe un homeomorfismo que invierte la orientación $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $h(K) = K$.

Una formulación equivalente esta dada en el siguiente lema.

Definición. La **imagen especular** de un nudo K es la imagen de K bajo la reflexión \mathcal{R} definida por $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$.

2.1 Lema. *Un nudo es anfiqueiral si y solo si existe un homeomorfismo que preserva la orientación de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 que manda a K en su imagen especular.*

Demostración. Usar las reglas de composición. En otras palabras, K es anfiqueiral si y solo si es equivalente a su imagen especular. \square

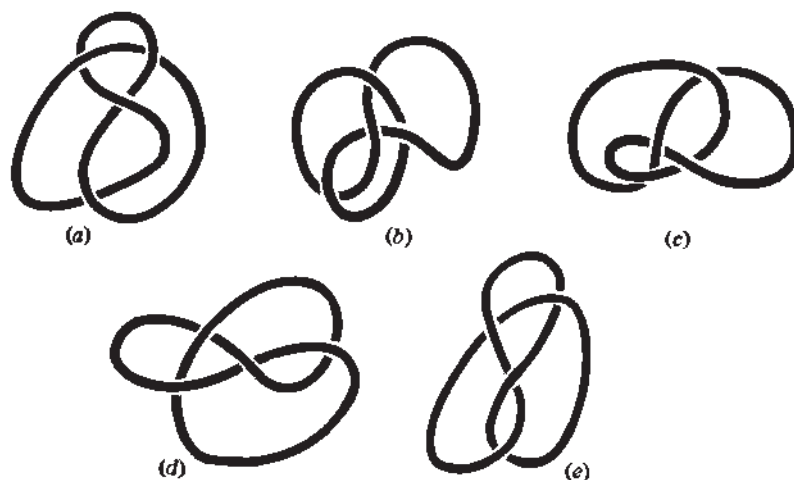


Figura 2.5: Equivalencia del 8 dextrógiro y levógiro

2.3. Nudos invertibles

De la misma manera que todo homeomorfismo de \mathbb{R}^3 en si mismo preserva o invierte la orientación, también lo hace todo homeomorfismo de K en si mismo. Dando una dirección al nudo K , f preserva o invierte la orientación si el orden de los puntos de K se conserva o es invertido.

Definición. Un nudo K es **invertible** si existe un homeomorfismo de \mathbb{R}^3 en si mismo que preserve la orientación, tal que la restricción $h|_K$ es un homeomorfismo que invierte la orientación de K en si mismo.

En este caso, el trébol y el 8 son invertibles, solo hay que darles la vuelta como se muestra en la Figura 2.6.

2.4. Nudos dóciles vs. nudos salvajes

Vamos a restringir nuestro estudio a una clase de nudos que se comportan bien.

Definición. Un **nudo poligonal** es aquel formado por una unión finita de segmentos de recta llamados **aristas** cuyos puntos extremos son los **vértices** del nudo. Un nudo es **dócil** si es equivalente a un nudo poligonal. Los nudos que no son dóciles se llaman **salvajes**.

Todos los ejemplos anteriores han sido nudos dóciles, un ejemplos de un nudo salvaje se da en la Figura 2.7.

De ahora en adelante únicamente nos referiremos a nudos dóciles.

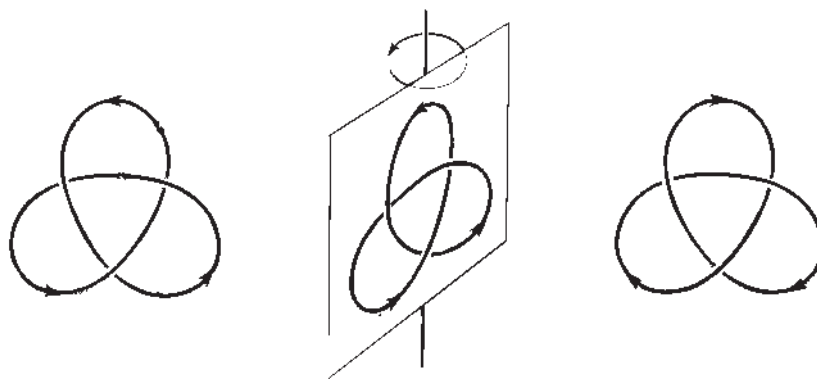


Figura 2.6: El trébol es invertible

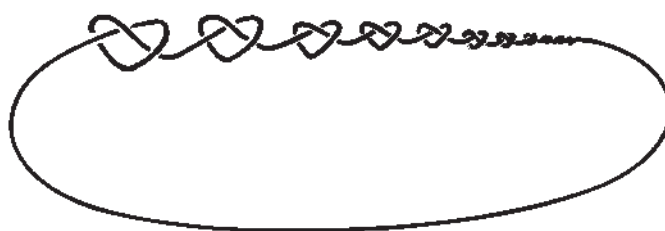


Figura 2.7: Nudo salvaje

2.5. Nudos tóricos

A continuación definiremos un conjunto de nudos que tienen ciertas propiedades en común. A este conjunto de nudos se les llama **nudos tóricos** porque se construyen sobre una superficie llamada **toro**. Los nudos tóricos no solo son interesantes por si mismos, sino que tambien son importantes por que en muchas ocasiones ayudan a intuir propiedades generales de los nudos.

El **toro** T , intuitivamente, es el espacio dado por la superficie de una dona. A continuación daremos tres descripciones diferentes del toro que a su vez nos darán diferentes maneras de construir los nudos tóricos.

- (a) **Como espacio producto:** Considérese al círculo unitario en el plano complejo \mathbb{C} , es decir el conjunto de puntos dado por

$$S^1 = \{ \exp(i\theta) \mid 0 \leq \theta < 2\pi \}.$$

Entonces el toro es el espacio $S^1 \times S^1$.

- (b) **Como espacio cociente:** Sea X el cuadrado unitario en \mathbb{R}^2 , es decir,

$$X = \{ (x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1 \}.$$

Entonces el toro T es el espacio cociente X/\sim donde la relación de equivalencia está dada por

$$(0, y) \sim (1, y) \quad (x, 0) \sim (x, 1).$$

Intuitivamente, lo anterior equivale a identificar los lados del cuadrado como lo indican las flechas en la Figura 2.8.

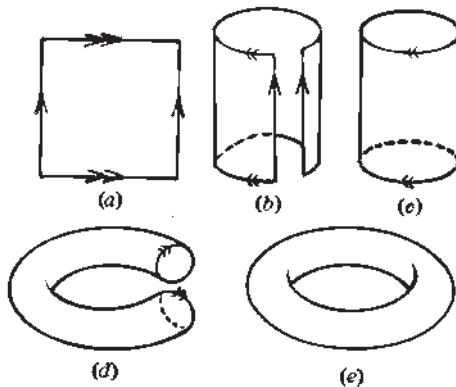


Figura 2.8: El toro como espacio cociente

(c) **Como subespacio de \mathbb{R}^3** , el toro está definido por

$$\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1 \},$$

que es la superficie obtenida rotando la circunferencia $(x - 2)^2 + z^2 = 1$ en el plano xz con centro en $(2, 0, 0)$, alrededor del eje z , dándonos la superficie de una dona, como lo muestra la Figura 2.9.

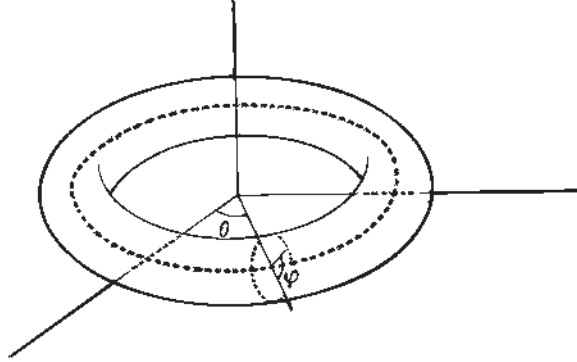


Figura 2.9: El toro como subespacio de \mathbb{R}^3

Para ver que todas estas descripciones nos dan el mismo espacio, podemos dar homeomorfismos en forma explícita. Primero damos un homeomorfismo de X/\sim a $S^1 \times S^1$.

$$\begin{aligned} X/\sim &\rightarrow S^1 \times S^1 \\ (x, y) &\mapsto (\exp(2\pi ix), \exp(2\pi iy)). \end{aligned}$$

Intuitivamente esto corresponde a ver los lados horizontales del cuadrado como la primera circunferencia, y a los lados verticales como la segunda.

Ahora daremos una aplicación f de $S^1 \times S^1$ en \mathbb{R}^3 cuya imagen $f(S^1 \times S^1)$ coincide con el subespacio de \mathbb{R}^3 que define al toro en (c). Para definir dicha función, es conveniente pensar a \mathbb{R}^3 como $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ y usar coordenadas polares $(r, \theta) = re^{i\theta}$ en \mathbb{C} . Así pues, un punto de \mathbb{R}^3 está representado por una terna (r, θ, z) . En estos términos, la función f está dada por:

$$f(\exp(i\phi), \exp(i\theta)) = (1 + \frac{1}{2} \cos \phi, \theta, \frac{1}{2} \sin \phi).$$

y $S^1 \times S^1$ es homeomorfo a la imagen $f(S^1 \times S^1)$. Véase la Figura 2.9.

Definición. Un nudo que yace sobre la superficie del toro es llamado **nudo tórico** y puede ser expresado de diferentes maneras.

- (I) La forma mas fácil de construir los nudos tóricos es utilizando la función f que da el homeomorfismo entre $S^1 \times S^1$ y la superficie de la dona. Sean m y n un par de enteros primos entre si. Definimos $K_{m,n}$ como el siguiente subconjunto del toro en \mathbb{R}^3

$$K_{m,n} = \{ f(\exp(2\pi imt), \exp(2\pi int)) \mid t \in I \}.$$

No es difícil comprobar que la aplicación $g: S^1 \rightarrow K_{m,n}$ definida por

$$g(\exp(2\pi it)) = f(\exp(2\pi imt), \exp(2\pi int))$$

es un homeomorfismo y por lo tanto, $K_{m,n}$ es un nudo. A $K_{m,n}$ se le llama **nudo tórico de tipo (m, n)** .

En el toro existen dos circunferencias estandar; la primera está dada por $f(\exp(2\pi it), 1)$, llamada **meridiano** y la segunda por $f(1, \exp(2\pi it))$, llamada **longitud**. Un nudo tórico de tipo (m, n) da n vueltas alrededor del meridiano y m vueltas alrededor de la longitud.

- (II) Si consideramos al toro T como el espacio cociente X/\sim descrito en (b), entonces $K_{m,n}$ es la imagen en T del segmento rectilíneo en \mathbb{R}^2 que pasa por el origen y tiene una pendiente n/m .
- (III) Una tercera forma de construir los nudos tóricos es la siguiente. Considere el cilindro de altura 1 y con base el círculo unitario en el plano xy . Consideremos los r puntos A_0, \dots, A_{r-1} en la base C_1 y los r puntos B_0, \dots, B_{r-1} en la tapa superior C_2 dados por las siguientes coordenadas (Figura 2.10):

$$\begin{aligned} A_0 &= (1, 0, 0), \quad A_1 = (\cos \frac{2\pi}{r}, \sin \frac{2\pi}{r}, 0), \dots, \quad A_{r-1} = (\cos \frac{2(r-1)\pi}{r}, \sin \frac{2(r-1)\pi}{r}, 0) \\ B_0 &= (1, 0, 1), \quad B_1 = (\cos \frac{2\pi}{r}, \sin \frac{2\pi}{r}, 1), \dots, \quad B_{r-1} = (\cos \frac{2(r-1)\pi}{r}, \sin \frac{2(r-1)\pi}{r}, 1) \end{aligned}$$

A continuación, conéctense los puntos A_k y B_k ($k = 0, 1, \dots, r-1$) en el cilindro mediante los segmentos α_k . Manteniendo fija la base C_1 , torcemos el cilindro rotando la tapa C_2 respecto al eje z por un ángulo de $\frac{2\pi q}{r}$, donde q es un entero que puede ser positivo o negativo y r y q son primos relativos. Finalmente identificando los puntos $(x, y, 0)$ de C_1 con los puntos $(x, y, 1)$ de C_2 obtenemos un toro con r segmentos $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$ los cuales se han unido formando el nudo $K_{q,r}$.

En la Figura 2.11 se dan algunos ejemplos de nudos tóricos, en particular el nudo trébol es un nudo tórico de tipo $(3, 2)$.

Podemos dar una orientación a los nudos tóricos $K_{m,n}$, una forma de hacerlo es asignándole a los segmentos α_i de la descripción (III) la orientación que fluye de A_i a B_i . Denotaremos a estos nudos tóricos orientados por $K(m, n)$ y también denotaremos por $K(-m, -n)$ al mismo nudo pero con la orientación invertida.

De la construcción se obtiene fácilmente la siguiente proposición.

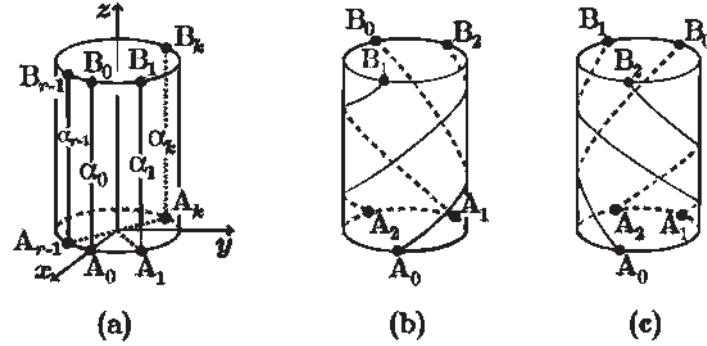


Figura 2.10: Construcción de nudos tóricos

2.2 Proposición. Sean q y r dos enteros primos relativos y $r \neq 0$. Entonces

1. Si $q = 0, \pm 1$ ó $r = \pm 1$, entonces $K(q, r)$ es el nudo trivial.
2. Si q, r son enteros tales que no son 0 ó ± 1 , entonces $K(-q, r)$ es la imagen especular de $K(q, r)$.

La esfera de dimensión 3, denotada por S^3 , se puede pensar como \mathbb{R}^3 con un punto ∞ añadido al infinito. A veces es conveniente pensar en los nudos metidos en S^3 en vez de en \mathbb{R}^3 . (Los ajustes necesarios en las definiciones de nudo y equivalencia de nudos consisten solamente en reemplazar \mathbb{R}^3 por S^3). El siguiente ejemplo muestra la ventaja de este punto de vista.

Un resultado conocido en topología es la siguiente descomposición de S^3 .

2.3 Proposición. La esfera tridimensional S^3 puede ser obtenida identificando las superficies de dos toros sólidos T_1 y T_2 de tal manera que el meridiano y la longitud de T_1 se identifican con la longitud y el meridiano de T_2 respectivamente.

Demostración. Ver [4, Prop. 7.2.3]. En el curso se dió una demostración intuitiva que me enseñó Carlos Robles Corbalá. \square

Usando la proposición anterior se prueba inmediatamente el siguiente

2.4 Teorema.

$$K(q, r) \cong K(r, q).$$

Los nudos tóricos están completamente clasificados. Dicha clasificación está dada por el siguiente Teorema ([4, Thm. 7.4.3] o [3, Teo. 27.6]).

2.5 Teorema. 1. Si q ó r es 0 ó ± 1 , entonces $K(q, r)$ es el nudo trivial.

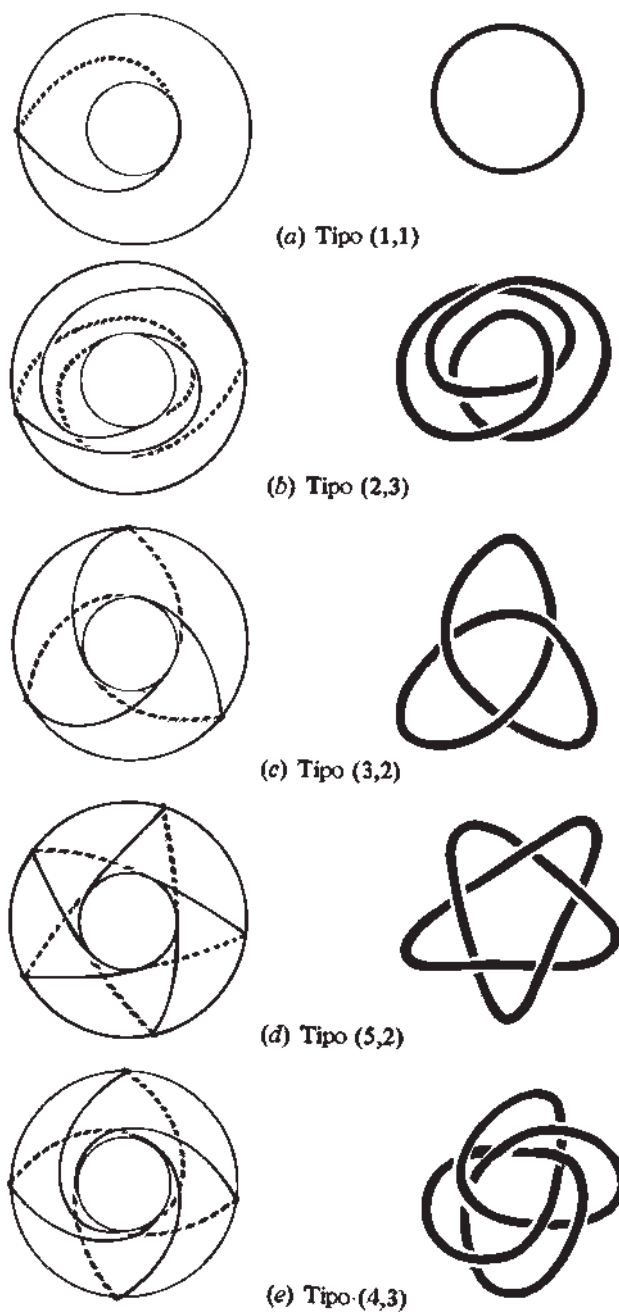


Figura 2.11: Nudos tóricos

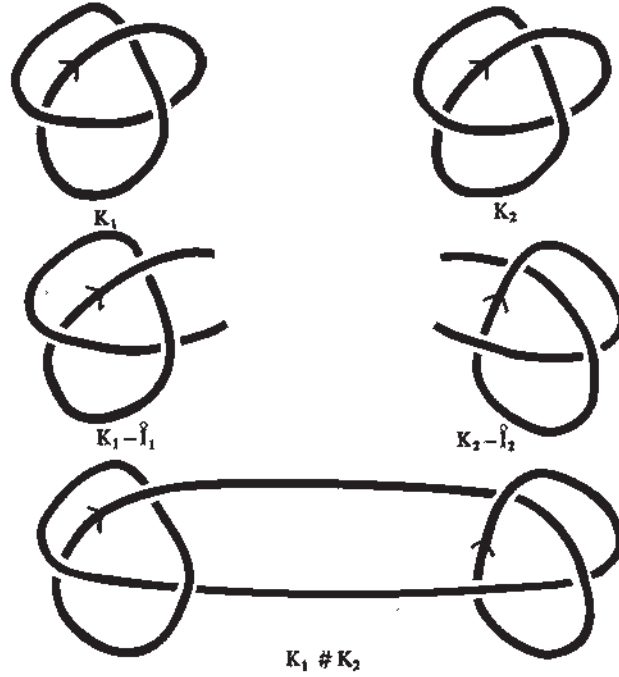


Figura 2.12: Suma conexa

2. Supongase que q, r, p, s no son 0 o ± 1 . Entonces

$$K(q, r) \cong K(p, s) \iff \{q, r\} = \{p, s\} \text{ ó } \{q, r\} = \{-p, -s\}.$$

Existe, pues, una infinidad de nudos distintos.

2.6. Suma conexa de nudos

A continuación describiremos una operación asociada a los nudos. Dados dos nudos orientados K_1 y K_2 definimos su **suma conexa** denotada por $K_1 \# K_2$, como el nudo obtenido suprimiendo un intervalo en cada nudo y pegándolos a lo largo de este intervalo de manera que las orientaciones coincidan como lo muestra la Figura 2.12. Un nudo se dice **primo** si no puede expresarse como $K_1 \# K_2$ con K_1 y K_2 ambos no triviales.

La suma conexa satisface las siguientes propiedades:

- (a) Está bien definida salvo equivalencia, es decir, si $K_1 \cong K'_1$ y $K_2 \cong K'_2$ entonces $K_1 \# K_2 \cong K'_1 \# K'_2$
- (b) Es asociativa, es decir, $K_1 \# (K_2 \# K_3) \cong (K_1 \# K_2) \# K_3$.

(c) Es conmutativa: $K_1 \# K_2 \cong K_2 \# K_1$.

2.7. Enlaces

Los enlaces son una generalización de los nudos en la que podemos tener mas de una cuerda.

Definición. Un **enlace** es una colección ordenada finita de nudos que no se intersectan entre sí. Cada nudo K_i se dice que es una **componente** del enlace.

Análogamente a los nudos, tenemos una definición de cuando dos enlaces son equivalentes.

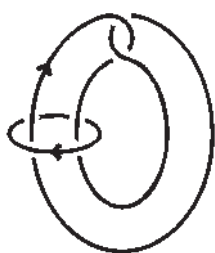
Definición. Dos enlaces $L = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ y $L' = \{K'_1, K'_2, \dots, K'_n\}$ son equivalentes si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $m = n$, es decir, L y L' tienen el mismo número de componentes.
2. Existe un homeomorfismo de \mathbb{R}^3 en si mismo que preserva la orientación que manda la colección $K_1 \cup \dots \cup K_m$ en la colección $K'_1 \cup \dots \cup K'_n$.

En la Figura 2.13 se muestran algunos ejemplos de enlaces. Si en la construcción (III) de nudos tóricos dada en la página 16 no pedimos que r y q sean primos relativos, entonces obtendremos un enlace cuyo número de componentes es el máximo comun divisor de r y q . Estos enlaces son conocidos como **enlaces tóricos**.



(a) Enlace trivial



(b) Enlace de Whitehead



(c) Anillos de Borromeo



(d) Enlace de Hopf

Figura 2.13: Enlaces

2.8. Diagramas regulares

Un nudo generalmente es especificado por una proyección, de hecho todos los ejemplos que hemos presentado son proyecciones de los nudos correspondientes.

Consideremos la proyección paralela dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{P}: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{P}(x, y, z) &= (x, y, 0).\end{aligned}$$

Si K es un nudo (o enlace) diremos que $\mathcal{P}(K) = \hat{K}$ es la proyección de K . Además, si K tiene asignada una orientación, \hat{K} hereda una orientación de manera natural. Sin embargo, \hat{K} no es una curva cerrada simple en el plano, ya que posee varios puntos de intersección. Un punto p de \hat{K} es llamado un **punto de cruce** si la imagen inversa $\mathcal{P}^{-1}(p) \cap K$ contiene mas de un punto de K . El orden de $p \in \hat{K}$ es la cardinalidad de $(\mathcal{P}^{-1}) \cap K$. Así, un punto doble es un punto de cruce de orden 2, un punto triple es uno de orden 3, etc.

En general, \hat{K} puede ser muy complicado en cuanto a número y tipo de puntos de cruce presentes. Es posible sin embargo, que K sea equivalente a otro nudo cuya proyección sea muy simple. Para un nudo poligonal, las proyecciones mas simples son las de los nudos que están en **posición regular**.

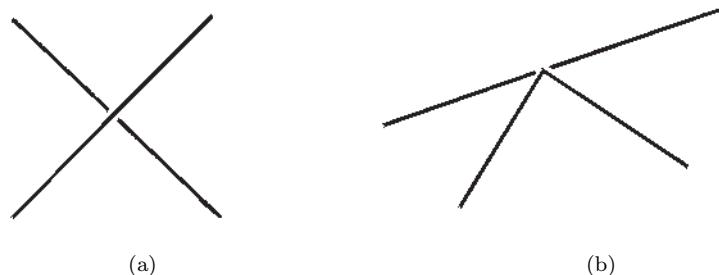


Figura 2.14: Cruces en una proyección regular

Definición. Un nudo (o enlace) K está en **posición regular** si su proyección satisface lo siguiente:

- (I) Los únicos puntos de cruce de \hat{K} son puntos dobles.
- (II) Ningún punto doble es la imagen de ningún vértice de K .

La segunda condición asegura que todo punto doble represente un punto de cruce genuino como en la Figura 2.14 (a); los puntos dobles como en (b) están prohibidos

La proyección de un nudo en posición regular se dice que es una **proyección regular**.

2.6 Teorema ([1, (3.1)]). *Todo nudo poligonal es equivalente bajo una rotación de \mathbb{R}^3 a un nudo poligonal en posición regular.*

Por lo tanto, todo nudo poligonal puede ser representado por una proyección regular. De ahora en adelante trabajaremos exclusivamente con proyecciones regulares. Sin embargo, aún tenemos que resolver un pequeño problema que tienen las proyecciones regulares: la ambigüedad en los puntos de cruce. En un punto doble de una proyección regular no es claro si el nudo pasa por arriba o por abajo de sí mismo, para eliminar esta ambigüedad cambiaremos un poco la proyección cerca de los puntos de cruce, dibujándola de tal manera que parezca *cortada*, indicando así que parte pasa por abajo y cual por arriba, tal y como lo hemos estado haciendo con los ejemplos que hemos mostrado hasta ahora. A una proyección dibujada de la manera anterior la llamaremos **diagrama regular**.

2.9. Nudos y enlaces alternantes

Sea D el diagrama regular de un nudo K y sea p un punto en D . Si al recorrer el diagrama D a partir de p pasamos por los puntos de cruce, por arriba y por abajo de manera alternada, decimos que el diagrama es **alternante**. Un nudo que posea al menos un diagrama alternante es llamado **nudo alternante**.



Figura 2.15: Nudo no alternante

Ejemplos de nudos alternantes son el nudo trébol y el nudo 8. No todos los nudos son alternantes, la Figura 2.15 muestra un ejemplo de un nudo que no es alternante. No es trivial probar que no es posible encontrar un diagrama alternante para dicho nudo.

La definición de **enlace alternante** se sigue directamente de la definición de nudo alternante.

Capítulo 3

Problemas Fundamentales de la Teoría de Nudos

Los problemas que surgen cuando se estudia teoría de nudos pueden ser divididos principalmente en dos tipos. Por un lado, están los problemas a los cuales llamaremos **Problemas Globales** los cuales tienen que ver con como se comporta el conjunto de *todos los nudos*. Por otro lado estan los **Problemas Locales** que tienen que ver con el comportamiento de *un nudo dado*. A continuación daremos ejemplos de ambos tipos de problemas y mencionaremos algunos resultados que se han obtenido al respecto.

3.1. Problemas globales

En esta sección describiremos tres problemas globales.

3.1.1. El problema de clasificación

El problema de clasificación consiste en crear una tabla de nudos (o enlaces) *completa*, es decir, una tabla en la cual no haya dos nudos equivalentes y que dado cualquier nudo (o enlace) arbitrario, este sea equivalente a algun nudo de la tabla. Este problema es muy complicado y esta lejos de ser resuelto. Un subproblema que puede ser mas fácil es clasificar solo cierto tipo de nudos, como en el caso de los nudos tóricos (Teorema 2.5).

3.1.2. Invariantes de nudos

Una forma de determinar si dos nudos son equivalentes o no, es encontrando alguna propiedad de los nudos que no cambie cuando estos se deforman y que sirva para distinguir nudos no equivalentes. A dichas propiedades se les llama **invariantes de nudos**.

Supongase que a cada nudo K se le asigna una cantidad (u objeto matemático, como por ejemplo un número, un grupo, etc.) $\rho(K)$. Si para dos nudos equivalentes, las cantidades asignadas son siempre la misma, entonces a dicha cantidad es un **invariante de nudos**.

En general, un invariante de nudos es unidireccional, es decir

si dos nudos son equivalentes \Rightarrow sus invariantes son iguales.

En muchos casos el recíproco no es cierto. Equivalentemente, si el invariante de dos nudos es diferente, entonces los nudos no pueden ser equivalentes, por lo tanto los invariantes de nudos nos proporcionan un método efectivo para distinguir nudos que **no** son equivalentes. En el siguiente capítulo se definirán algunos de los invariantes clásicos de nudos.

3.1.3. Una conjetura fundamental

Existe un teorema fundamental en el cual se basa la definición de algunos invariantes de nudos, como por ejemplo, el grupo de un nudo, que definiremos en la sección 4.6.

3.1 Teorema. *Si dos nudos K_1 y K_2 en S^3 son equivalentes, entonces sus complementos $S^3 \setminus K_1$ and $S^3 \setminus K_2$ son homeomorfos.*

La conjetura fundamental es el recíproco del Teorema 3.1.

3.2 Conjetura. *Sean K_1 y K_2 dos nudos. Si sus complementos $S^3 \setminus K_1$ y $S^3 \setminus K_2$ son homeomorfos, entonces los nudos son equivalentes.*

A finales de los 80's esta conjetura fue demostrada por C. McA Gordon y J. Luecke [2]. Como consecuencia de este resultado, el problema de los nudos en S^3 , el cual es un **problema relativo** pues tiene que ver con la forma del nudo en S^3 , se transforma en un **problema absoluto**, pues tiene que ver únicamente con el estudio de los espacios complementarios.

Sin embargo no siempre se puede transformar un problema relativo en uno absoluto. Un ejemplo de ello es que la conjetura anterior es falsa para el caso de enlaces. En la Figura 3.1 se muestran dos enlaces no equivalentes cuyos complementos son homeomorfos.

3.2. Problemas locales

En esta sección daremos ejemplos de problemas locales.

3.2.1. ¿Cuándo un nudo es anfiqueiral?

Recordemos que un nudo es anfiqueiral si es equivalente a su imagen especular. Como un ejemplo, vimos que el nudo 8 es anfiqueiral. Por otro lado, mencionamos que el nudo trébol no lo es, una forma de probarlo es usando el



Figura 3.1: Contraejemplo de la conjetura fundamental para enlaces

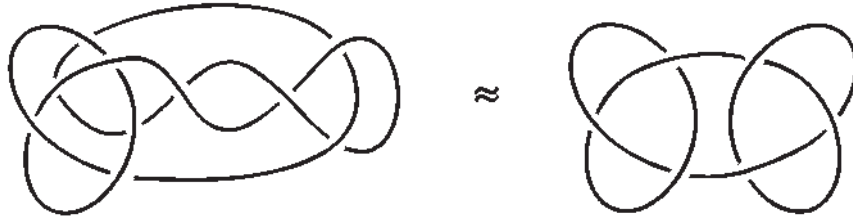


Figura 3.2: Nudo no primo

polinomio de Jones, que es un invariante que describiremos en la sección 4.7.2. Recordemos que el nudo trébol es un caso particular de nudos tóricos, en general tenemos que los nudos tóricos $K(q, r)$ no son anfiqueirales [4, Thm. 7.4.2].

También se sabe que los nudos alternantes cuyo número mínimo de puntos de cruce (ver la definición en la Sección 4.2) es impar, no puede ser anfiqueiral.

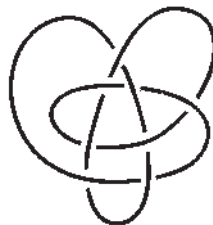
3.2.2. ¿Cuándo un nudo es primo?

En muchas ocasiones no es obvio ver que un nudo no es primo a partir de un diagrama dado. En la Figura 3.2 se muestran dos diagramas del mismo nudo. Con el primero de ellos, no es obvio que el nudo no es primo, mientras que con el segundo diagrama es inmediato verlo.

Este problema ha sido totalmente resuelto para el caso de nudos alternantes [4, Thm. 11.5.3], es decir, se puede determinar cuando un nudo alternante es primo o no. También se ha demostrado que los nudos con **número de puentes 2** (ver Sección 4.3 (3)) son primos. Ejemplos de este tipo de nudos son el trébol y el nudo 8.



(a) Nudo de Trotter



(b) Nudo no invertible mas simple

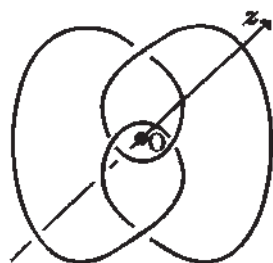
Figura 3.3: Nudos no invertibles

3.2.3. ¿Cuándo un nudo es invertible?

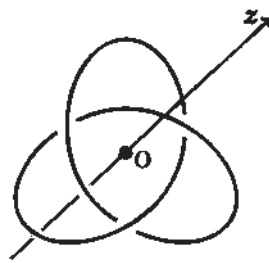
Los nudos con un número pequeño de puntos de cruce son por lo general invertibles. Vimos en la Figura 2.6 que el nudo trébol es invertible. La existencia de nudos no invertibles fue probada por H. F. Trotter en 1963. En la Figura 3.3 (a) se muestra el ejemplo de un nudo no invertible dado por Trotter; después de este descubrimiento, muchos otros nudos no invertibles fueron encontrados. De hecho ahora podríamos decir que casi todos los nudos son no invertibles. En la Figura 3.3 (b) se muestra el nudo no invertible más simple.

3.2.4. ¿Cuál es el periodo de un nudo?

Si rotamos el nudo 8 de la Figura 3.4 (a) por un ángulo de π radianes alrededor del eje Oz , la figura rotará a su forma original. Por lo que decimos que el nudo 8 tiene **periodo 2**. Analogamente, si rotamos el nudo trébol de la Figura 3.4 (b) por un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$ radianes alrededor del eje Oz , también llegará a su forma original. En general, si podemos rotar un nudo por un ángulo de $\frac{2\pi}{n}$ radianes alrededor de algún eje, de tal suerte que llegue a su forma original, entonces decimos que tiene **periodo n** . En este caso el problema local es determinar todos los periodos de un nudo dado. Este problema ha sido completamente resuelto para el caso de los nudos tóricos: el nudo $K(q, r)$ tiene periodos $|q|$ y $|r|$ [4, Ex 7.5.7].



(a) Periodo del 8



(b) Periodo de trébol

Figura 3.4: Periodos del 8 y del trébol

Capítulo 4

Invariantes

En la Sección 3.1.2 vimos que por definición, un invariante de nudos es una cantidad u objeto matemático que no cambia si transformamos un nudo en otro equivalente. Dichos invariantes nos permiten diferenciar nudos que no son equivalentes, para ello basta mostrar que hay un invariante cuyo valor es distinto para dichos nudo.

Un ejemplo sencillo de invariante de enlaces, que se obtiene inmediatamente de la definición de equivalencia de enlaces, es el número de componentes. Dos enlaces que tienen distinto número de componentes no pueden ser equivalentes. Sin embargo este invariante no es muy poderoso pues existen muchos enlaces con el mismo número de componentes que no son equivalentes, por ejemplo todos los nudos son enlaces de una componente.

En el presente capítulo describiremos algunos de los invariantes de nudos (y enlaces) mas importantes.

4.1. Movimientos de Reidemeister

Como vimos en la Sección 2.8, muchas veces es útil proyectar los nudos en el plano y despues estudiarlos mediante sus diagramas regulares. Para hacer esto, necesitamos preguntarnos como se transforma el diagrama regular de un nudo si lo transformamos mediante una *isotopía* en otro nudo equivalente en posición regular. ¿Existen algunas reglas que nos permitan pasar directamente del primer diagrama regular al segundo sin tener que fijarnos en la transformación del nudo original? Esta pregunta fué estudiada por K. Reidemeister en los a nos 20's y describió dichas reglas que ahora se conocen como **movimientos de Reidemeister**. Con la ayuda de dichos movimientos, muchos invariantes de nudos fueron definidos; para demostrar que una cantidad es un invariante de nudos, solo basta ver que no cambia al aplicarle los movimientos de Reidemeister.

Los movimientos de Reidemeister son tres y se conocen como movimiento de tipo I (agregar o remover un rizo), tipo II (agregar o remover dos cruces por arriba (por abajo) consecutivos) y tipo III (movimiento triangular). Los tres

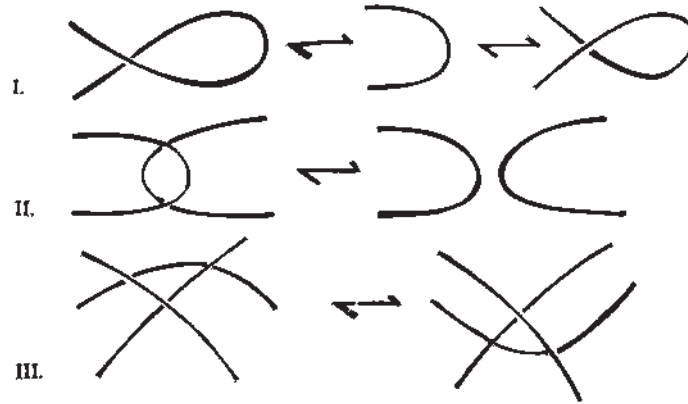


Figura 4.1: Movimientos de Reidemeister

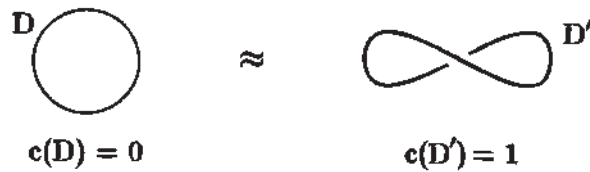


Figura 4.2: Dos diagramas regulares del nudo trivial

tipos de movimientos están representados en la Figura 4.1.

Reidemeister demostró que estos tres movimientos junto con equivalencias topológicas planas de los diagramas son suficientes para generar la *isotopía espacial*. En otras palabras, Reidemeister demostró que dos nudos (o enlaces) en el espacio pueden ser deformados el uno en el otro (*isotopía espacial*) si y solo si sus diagramas regulares pueden ser transformados uno en el otro mediante *isotopías planas* y los tres movimientos (y sus inversos).

4.2. Número mínimo de cruces

Un diagrama regular D de un nudo (o enlace) K tiene un número finito de puntos de cruce. Sin embargo, este número, denotado por $c(D)$ no es un invariante de nudos. Por ejemplo, la Figura 4.2 muestra dos diagramas regulares D y D' del nudo trivial que tienen diferente número de puntos de cruce: $c(D) = 0$ y $c(D') = 1$.

Consideremos en cambio todos los diagramas regulares del nudo K y deno-

temos por $c(K)$ el número mínimo de puntos de cruce de todos los diagramas regulares, es decir

$$c(K) = \min_{\mathcal{D}} c(D),$$

donde \mathcal{D} es el conjunto de todos los diagramas regulares de K . El número $c(K)$ es un invariante de nudos [4, Thm. 4.2.1].

Se sabe lo siguiente respecto a $c(K)$:

1. El nudo trivial es el único nudo que posee diagramas regulares tales que $c(D) = 0, 1, 2$.
2. El nudo trébol (ya sea dextrógiro o levógiro) tiene $c(K) = 3$. Mas aún, entre todos los nudos y enlaces es el único con $c(K) = 3$.
3. El número mínimo de puntos de cruces del enlace tórico $K(q, r)$ es

$$c(K(q, r)) = \min\{|q|(|r| - 1), |r|(|q| - 1)\}.$$

Existe la conjetura de que este invariante es aditivo bajo la suma conexas.

4.1 Conjetura. Sean K_1 y K_2 dos nudos (o enlaces) arbitrarios. Entonces

$$c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2).$$

Se ha demostrado que esta conjetura es cierta cuando K_1 y K_2 son nudos (o enlaces) alternantes [4, §11.5].

4.3. Número de puentes

Sea K un nudo (o un enlace) y D un diagrama regular de K . En cada punto de cruce de D quitemos un pequeño segmento AB que pase sobre el punto de cruce. El resultado de quitar estos segmentos es una colección de curvas disconexas, un ejemplo se muestra en la Figura 4.3. Podemos pensar al diagrama regular original D , como el diagrama resultante de agregar los segmentos AB (que pasan por arriba) a este conjunto disconexo de curvas en el plano. Como los segmentos AB pasan sobre los segmentos en el plano, son llamados **puentes**. Para un diagrama dado D , el número de puentes es denotado por $br(D)$.

Como sucede con el número de cruces, el número de puentes de un diagrama regular, no es un invariante de nudos, pero si lo es el mínimo número de puentes de todos los diagramas regulares de un nudo dado. Por lo tanto definimos el número de puentes de un nudo por

$$br(K) = \min_{\mathcal{D}} br(D)$$

donde nuevamente \mathcal{D} es el conjunto de diagramas regulares de K .

Se saben los siguientes hechos sobre el número de puentes:

1. Un nudo K es trivial si y solo si $br(K) = 1$.

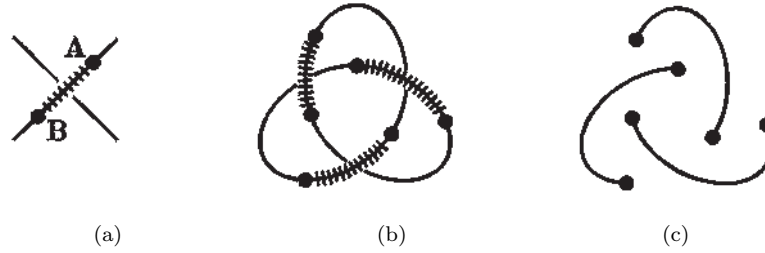


Figura 4.3: Puentes en un diagrama regular

2. Si L es un enlace de n componentes, entonces $br(L) \geq n$. A diferencia del nudo trivial, si $br(L) = n$ entonces no necesariamente el enlace L es trivial. Por ejemplo, el enlace de Hopf (Figura 2.13 (d)) tiene $br(L) = 2$.
3. Los nudos trébol y 8 tienen $br(K) = 2$. Todos los **nudos con número de puente 2** forman una familia especial de nudos que ha sido totalmente clasificada.
4. Si K_1 y K_2 son dos nudos (o enlaces) arbitrarios. Entonces

$$br(K_1 \# K_2) = br(K_1) + br(K_2) - 1.$$

Por lo tanto, existen nudos con número de puentes arbitrariamente grandes. Por ejemplo, la suma conexa de n copias del trébol tiene número de puentes $n + 1$.

5. Sea $K(q, r)$ un nudo (o enlace) tórico con q o $r \neq 0$. Entonces

$$br(K(q, r)) = \min\{|q|, |r|\}.$$

En comparación con el número de cruces $c(K)$, $br(K)$ es en general pequeño. La siguiente conjetura (aún por demostrar) relaciona ambos invariantes.

4.2 Conjetura. Si K es un nudo, entonces

$$c(K) \geq 3(br(K) - 1),$$

dándose la identidad cuando K es el nudo trivial, el trébol o la suma conexa de tréboles.

4.4. Número de enlace

Hasta ahora solamente hemos visto invariantes de nudos (o enlaces) que son independientes de la orientación asignada a los nudos. En esta sección definiremos un invariante para *enlaces orientados* llamado el **número de enlace**. Este

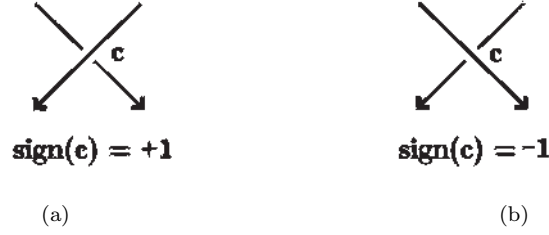


Figura 4.4: Cruces orientados

invariante mide que tanto dos curvas se enredan una en la otra. Para definirlo, necesitamos la noción de cruce orientado, la cual consiste en asignar los valores $+1$ o -1 a los puntos de cruces de un diagrama regular *orientado*. En la Figura 4.4 se muestran las dos posibles configuraciones de puntos de cruce y el valor que se les asigna.

Definición. Sea D el diagrama regular de un enlace con dos componentes $L = \{K_1, K_2\}$. Sea $K_1 \sqcap K_2$ el conjunto de puntos de cruce de D en los cuales las proyecciones de K_1 y K_2 se intersectan. Nótese que $K_1 \sqcap K_2$ no contiene a los puntos de cruce de las proyecciones de K_1 y K_2 que son autointersecciones de las componentes del nudo. Entonces **el número de enlace** de K_1 y K_2 está definido por la fórmula

$$lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \sum_{p \in K_1 \sqcap K_2} \text{sign}(p).$$

Denotemos por $-K_2$ la componente K_2 del enlace $L = \{K_1, K_2\}$ pero con la orientación invertida. Entonces tenemos

$$lk(K_1, -K_2) = -lk(K_1, K_2).$$

Por lo tanto, el número de enlace depende de la orientación. Como un ejemplo, calculemos el número de enlace del enlace de Hopf (Figura 2.13 (d)) cambiando la orientación de una de sus componentes.

$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

$$lk(\alpha', \beta') = \frac{1}{2}(-1 - 1) = -1$$

Estos ejemplos bastan para demostrar que el enlace de Hopf está realmente enlazado, es decir, que no es equivalente al enlace trivial de dos componentes.

Sin embargo, hay nudos cuyo número de enlace es 0 y no son triviales. Un ejemplo es el enlace de Whithead, que aparece en la Figura 2.13 (b). Calcule su número de enlace como un ejercicio.

Ahora supongamos que L es un enlace con n componentes K_1, K_2, \dots, K_n . Para cualesquiera dos componentes K_i y K_j ($1 \leq i < j \leq n$) de L podemos calcular su número de enlace como antes. De esta manera obtendremos $\frac{n(n-1)}{2}$ números de enlace y su suma,

$$lk(L) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} lk(K_i, K_j),$$

es llamada el **número de enlace total** de L .

4.5. Número de coloración

Definición. Sea D el diagrama regular de un nudo (o enlace) K . Decimos D es 3-coloreable si al colorear los arcos de D con tres colores, digamos, rojo, azul y verde, en cada uno de los puntos de cruce se satisfacen una de las siguientes condiciones.

- Aparecen los tres colores.
- Aparece un solo color.

Dado un nudo K , si existe un diagrama regular de K que es 3-coloreable, entonces todo diagrama regular de K también es 3 coloreable (la 3-coloración es preservada por los movimientos de Reidemeister). Entonces decimos que el nudo K es 3-coloreable.

El ser 3-coloreable es un invariante de nudos. Por ejemplo el nudo trébol es 3-coloreable, mientras que ni el nudo 8 ni el nudo trivial lo son, por lo tanto concluimos que dichos nudos no son equivalentes al trébol. En particular, esta es la prueba mas sencilla de que el nudo trébol no es trivial.

Se puede demostrar que si un nudo (o enlace) es 3-coloreable, entonces su imagen especular es también 3-coloreable. Por lo tanto este invariante no nos permite encontrar nudos que no sean anfiqueirales.

Como ejercicio, muestrese que los nudos de la Figura 4.5 son 3-coloreables.

4.6. Grupo del nudo

En la Sección 3.1.3 enunciamos el Teorema 3.1 que nos dice que dos nudos equivalentes tienen complementos homeomorfos. Usando este hecho, si tenemos un invariante de espacios topológicos, aplicando dicho invariante a los complementos de los nudos obtendremos un invariante de los nudos mismos.

Uno de los primeros invariantes para espacios topológicos fué el **grupo fundamental**. Nótese que en este caso, el invariante no es un número como en los ejemplos anteriores de invariantes, sino un grupo, que es un objeto matemático mas complejo.

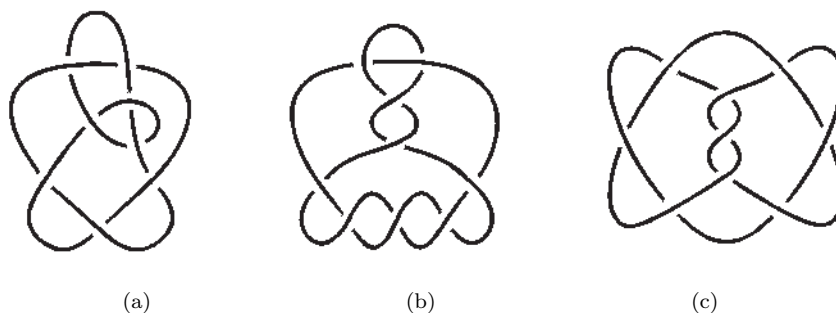


Figura 4.5: Nudos 3-coloreables

4.6.1. Grupo fundamental

La construcción del **grupo fundamental** es la siguiente. Sea X un espacio topológico. Consideremos el conjunto Ω de todas las **trayectorias cerradas** (o **lazos**) que salen de un punto fijo $p \in X$ (llamado **punto base**). El conjunto Ω puede ser dividido en clases de equivalencia, donde dos lazos son equivalentes si uno puede ser deformado en el otro continuamente. Dos lazos que son equivalentes se dice que son **homotópicos**.

En la Figura 4.6 los lazos a_1 y a_2 son homotópicos y estos a su vez son homotópicos al lazo e que permanece constante en el punto p . Por otro lado, los lazos a_3 y a_4 son homotópicos, pero estos no son homotópicos a e , pues no se pueden contraer por que rodean al agujero.

A la clase de lazos homotópicos a un lazo particular α se le representa como $[\alpha]$. Si α es homotópico a β , las clases $[\alpha]$ y $[\beta]$ son idénticas. Podemos definir ahora de manera natural una multiplicación entre las clases de lazos de la siguiente manera: tomamos dos representantes de las clases $[\alpha]$ y $[\beta]$ que queremos multiplicar, digamos α y β respectivamente, entonces $[\alpha][\beta]$ es la clase del lazo que sale de p , recorre α , regresa a p , recorre β y vuelve a regresar a p . Se puede demostrar sin mucha dificultad que esta operación está bien definida, es decir, que no depende de los representantes que se elijan y que además, el conjunto de clases de equivalencia con dicha multiplicación tiene una estructura de grupo, es decir, la multiplicación es asociativa, existe un elemento neutro (la clase del lazo constante e) tal que $[\alpha][e] = [e][\alpha] = [\alpha]$ y para todo elemento $[\alpha]$ existe un inverso $[\alpha]^{-1}$ tal que $[\alpha][\alpha]^{-1} = [\alpha]^{-1}[\alpha] = [e]$. Sin embargo, esta multiplicación no necesariamente es conmutativa, $[\alpha][\beta] \neq [\beta][\alpha]$.

Al grupo de clases de lazos homotópicos del espacio X con punto base p se denota por $\pi_1(X, p)$ y es llamado el **grupo fundamental de X con punto base p** .

Definición. Si K es un nudo y p es cualquier punto en $\mathbb{R}^3 \setminus K$, entonces el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p)$ es llamado el **grupo del nudo K** .

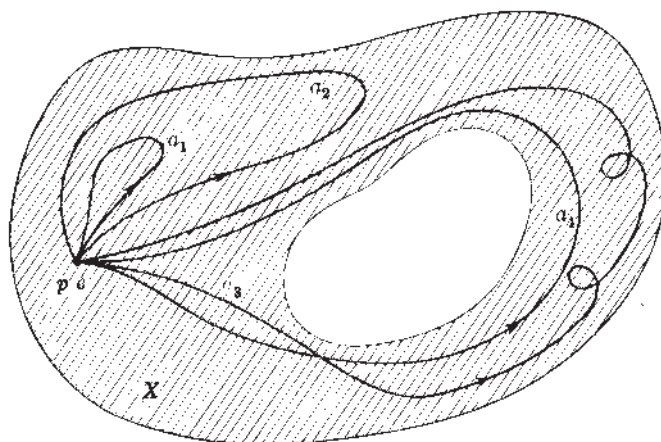


Figura 4.6: Lazos homotópicos

4.6.2. Grupo del nudo trivial

Vamos a calcular el grupo del nudo trivial con lo que hemos visto. En la Figura 4.7 podemos notar que existe dos tipos de lazos en $\mathbb{R}^3 \setminus K$, los que le dan la vuelta a K como α y γ y los que no como β y β' . Además tenemos que $[\alpha] = [\alpha']$ y $[\beta] = [\beta']$. Es fácil convencerse que los lazos que son homotópicos entre sí son las que le dan el mismo número de vueltas a K . Por lo tanto tenemos la clase del lazo constante $[e]$, la clase de lazos que le dan una vuelta a K como $[\alpha]$, la clase de lazos que le dan dos vueltas como $[\gamma]$ y tenemos que $[\alpha][\alpha] = [\gamma]$. En general, $[\alpha^n]$ es la clase de lazos que le dan n vueltas a K y tenemos que $[\alpha^n][\alpha] = [\alpha^{n+1}]$. Por otro lado, los inversos están dados por los lazos que le dan vuelta a K en el otro sentido. Por lo tanto es fácil ver que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p) \cong \mathbb{Z}$, es decir, el **grupo del nudo trivial** es un grupo cíclico infinito, o en otras palabras, *isomorfo* a los números enteros.

4.6.3. Presentaciones de grupos

Muchas veces es mas fácil definir a un grupo mediante algunos de sus elementos llamados **generadores** y algunas **relaciones** entre ellos. Para que el concepto quede mas claro, veamos un ejemplo.

Sea G el grupo formado por el conjunto $\{1, a, b\}$ y la multiplicación dada por la siguiente tabla:

	1	a	b
1	1	a	b
a	a	b	1
b	b	1	a

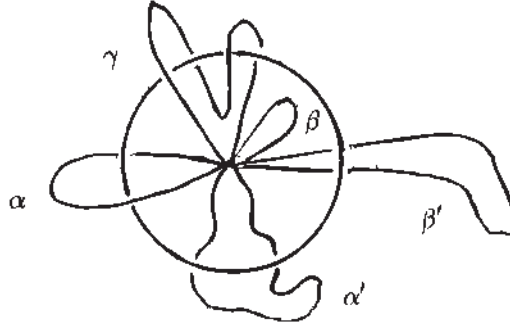


Figura 4.7: Grupo del nudo trivial

La tabla anterior, tiene 9 entradas, pero usando el hecho (obtenido de la entrada de enmedio) que $b = a^2$, podemos reducir la información necesaria para determinar el grupo diciendo que los elementos del grupo son 1, a y a^2 y el hecho de que $a^3 = 1$. Así, el grupo en cuestión es descrito mas eficientemente si notamos que el elemento a genera al grupo, que la ecuación $a^3 = 1$ es satisfecha y que ninguna de las ecuaciones $a^2 = 1$ o $a = 1$ se cumple. Lo anterior, se denomina una **presentación** del grupo G , dada por el **generador** a y la **relación** $a^3 = 1$ y esto se denota por

$$\langle a \mid a^3 = 1 \rangle.$$

En general, una **presentación** consta de un conjunto de **generadores** $\hat{x} = \{x_1, x_2, \dots\}$ y un conjunto de **relaciones** $\hat{r} = \{r_1, r_2, \dots\}$ denotados por

$$\langle \hat{x} \mid \hat{r} \rangle.$$

A las combinaciones posibles de los elementos de \hat{r} , se les llama la **consecuencia** de \hat{r} . Por ejemplo, si tenemos las relaciones $\hat{r} = \{a^3 = 1, b = a^2\}$ entonces $ba = 1$ es una consecuencia de \hat{r} .

Algunos ejemplos de presentaciones de grupos son las siguientes:

$$\begin{aligned} &\langle x, y \mid xyx = yxy \rangle \\ &\langle x, y \mid xy^2 = y^3x, yx^2 = x^3y \rangle. \end{aligned}$$

Un grupo puede tener muchas presentaciones diferentes y una cuestión importante al respecto es saber cuando dos presentaciones diferentes corresponden al mismo grupo.

Definición. Decimos que dos presentaciones son **equivalentes** si corresponden a grupos isomorfos.

Una respuesta a este problema es dada por el Teorema de Tietze. Para enunciarlo, necesitamos primero definir las operaciones de Tietze:

Definición. Las **operaciones de Tietze** son las siguientes:

Operación Tipo I Sea $\langle \hat{x} \mid \hat{r} \rangle$ una presentación y s cualquier consecuencia de \hat{r} . Considérese la presentación $\langle \hat{x} \mid \hat{s} \rangle$ con $\hat{s} = \hat{r} \cup \{s\}$. Entonces $\langle \hat{x} \mid \hat{r} \rangle$ y $\langle \hat{x} \mid \hat{s} \rangle$ son equivalentes.

Operación Tipo I' Sea $\langle \hat{x} \mid \hat{r} \rangle$ una presentación. Si r es una relación de \hat{r} que es consecuencia de las demás relaciones de \hat{r} , entonces la presentación $\langle \hat{x} \mid \hat{r}' \rangle$ dada por $\hat{r}' = \hat{r} \setminus \{r\}$ es equivalente a $\langle \hat{x} \mid \hat{r} \rangle$.

Operación Tipo II Sea $\langle \hat{x} \mid \hat{r} \rangle$ una presentación. Sea y un generador que no pertenezca a \hat{x} y sea ξ cualquier producto de los elementos de \hat{x} . Considérese la presentación $\langle \hat{y} \mid \hat{s} \rangle$ con $\hat{y} = \hat{x} \cup \{y\}$ y $\hat{s} = \hat{r} \cup \{y = \xi\}$. Entonces $\langle \hat{x} \mid \hat{r} \rangle$ y $\langle \hat{y} \mid \hat{s} \rangle$ son equivalentes.

Operación Tipo II' La inversa de la anterior.

Veamos un ejemplo mostrando que las presentaciones $\langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$ y $\langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle$ son equivalentes.

$$\begin{aligned}
& \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle \\
& \Downarrow \quad \text{II} \quad a, a = xy \\
& \langle x, y, a \mid xyx = yxy, a = xy \rangle \\
& \Downarrow \quad \text{II} \quad b, b = xyx \\
& \langle x, y, a, b \mid xyx = yxy, a = xy, b = xyx \rangle \\
& \Downarrow \quad \text{I} \quad a^3 = b^2 \quad (xyx)(xyx) = (xy)(xy)(xy) \\
& \langle x, y, a, b \mid xyx = yxy, a = xy, b = xyx, a^3 = b^2 \rangle \\
& \Downarrow \quad \text{I} \quad x = a^{-1}b \quad xyx = yxy \Rightarrow x = y^{-1}x^{-1}yxy \Rightarrow x = a^1b \\
& \langle x, y, a, b \mid xyx = yxy, a = xy, b = xyx, a^3 = b^2, x = a^{-1}b \rangle \\
& \Downarrow \quad \text{I} \quad x = b^{-1}a^2 \quad xyxy = xyxy \Rightarrow x^{-1}y^{-1}x^{-1}xyxy = y \Rightarrow b^{-1}a^2 = y \\
& \langle x, y, a, b \mid xyx = yxy, a = xy, b = xyx, a^3 = b^2, x = a^{-1}b, y = b^{-1}a^2 \rangle \\
& \Downarrow \quad \text{I}' \text{ (tres veces)} \\
& \langle x, y, a, b \mid a^3 = b^2, x = a^{-1}b, y = b^{-1}a^2 \rangle \\
& \Downarrow \quad \text{II}' \text{ (dos veces)} \\
& \langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle.
\end{aligned}$$

4.6.4. Presentación del grupo del trébol

Existe un algoritmo para calcular las presentaciones del grupo de cualquier nudo poligonal (o dócil). Veamos en que consiste este algoritmo mediante el cálculo de una presentación del nudo trébol.

1. Primero tomemos un diagrama regular del nudo.

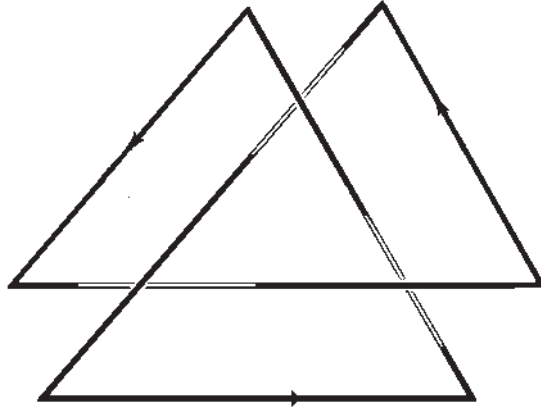


Figura 4.8: Pasos por arriba y abajo

2. Sobre el diagrama, elegimos dos puntos cercanos a cada lado de cada cruce por abajo, por lo que el nudo queda dividido en $2n$ segmentos (n = número de cruces). Los segmentos que tienen a un cruce por arriba se llaman **pasos por arriba** y los que tienen un cruce por abajo se llaman **pasos por abajo**. Esto se muestra en la Figura 4.8.
3. Damos una orientación al nudo y trazamos en cada uno de los pasos superiores una flecha perpendicular a ellos que vaya de izquierda a derecha respecto a la orientación dada, asignándole una letra a cada una. Cada una de estas letras será un generador de la presentación. Véase Figura 4.9.
4. Trazamos rectángulos alrededor de cada paso inferior y les damos orientación en contra de las manecillas del reloj como se muestra en la Figura 4.10.
5. Obtenemos una relación de cada rectángulo escribiendo una letra por cada paso por arriba que cruce un lado del rectángulo siguiendo el orden y la orientación de este, poniendo como exponente $+1$ o -1 dependiendo si la orientación del lado del rectángulo coincide o es contraria a la flecha del paso correspondiente. Por ejemplo, en el rectángulo B_1 de la Figura 4.10 tenemos

$$x^{-1}yz y^{-1} = 1.$$

En el rectángulo B_2

$$y^{-1}zxz^{-1} = 1.$$

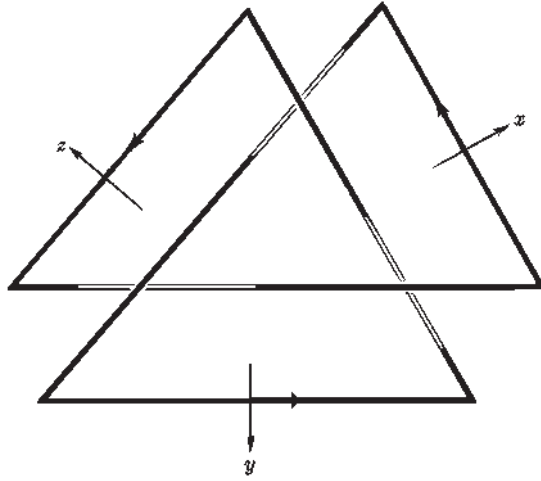


Figura 4.9: Orientación y flechas

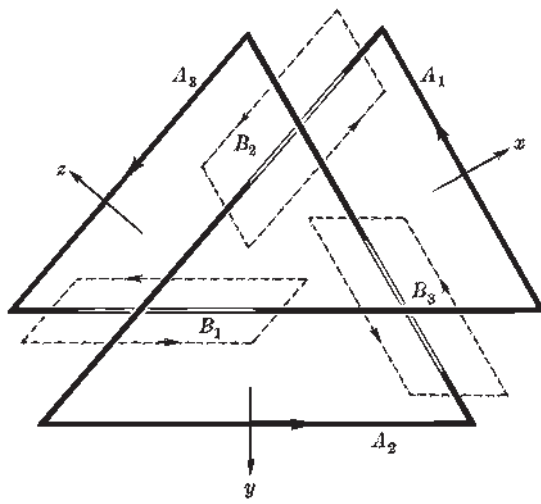


Figura 4.10: Rectángulos orientados

Y finalmente en B_3

$$z^{-1}xyx^{-1} = 1.$$

Se demuestra que cualquiera de las relaciones obtenidas es consecuencia de las otras, por lo que se puede descartar cualquiera de ellas (la tercera por ejemplo), y se obtiene así una presentación del grupo del nudo trébol

$$\langle x, y, z \mid x = yzy^{-1}, y = zxz^{-1} \rangle.$$

Supongamos que incluimos en la presentación las tres relaciones obtenidas

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle x, y, z \mid x = yzy^{-1}, y = zxz^{-1}, z = xyx^{-1} \rangle.$$

Substituimos $z = xyx^{-1}$ en las otras y realizamos una operación de Tietze de Tipo II'

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle x, y \mid x = yxyx^{-1}y^{-1}, y = xyxy^{-1}x^{-1} \rangle.$$

Si multiplicamos por la derecha la segunda relación por $xyx^{-1}y^{-1}$ obtenemos la primera, esta es una verificación empírica de que cualquiera de las relaciones obtenidas es consecuencia de las otras. Finalmente obtenemos la siguiente presentación del grupo del nudo trébol:

$$\langle x, y \mid xyx = yxy \rangle,$$

que ya vimos es equivalente a la presentación

$$\langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle.$$

4.7. Polinomios

En esta sección describiremos un tipo nuevo de invariantes de nudos. En esta ocasión, en vez de asignar a los nudos un número o un grupo, les asignaremos polinomios.

En la historia de la teoría de nudos hay dos momentos importantes los cuales revitalizaron y ahondaron el entendimiento de dicha area. Esos momentos son el descubrimiento del polinomio de Alexander en 1928 y el descubrimiento del polinomio de Jones en 1984.

4.7.1. Polinomio de Alexander–Conway

El polinomio de Alexander asocia a cada nudo K un polinomio $\Delta_K(t)$ en una variable t . Alexander probablemente descubrió este polinomio pensando acerca de espacios cubrientes, pero su artículo era estrictamente combinatorio y usaba algebra lineal, determinantes y los movimientos de Reidemeister. Demostró que si dos nudos o enlaces orientados K_1 y K_2 son equivalentes, entonces $\Delta_{K_1}(t) \stackrel{\circ}{=} \Delta_{K_2}(t)$, donde $\stackrel{\circ}{=}$ significa igualdad salvo un múltiplo de $\pm t^n$, para algún entero

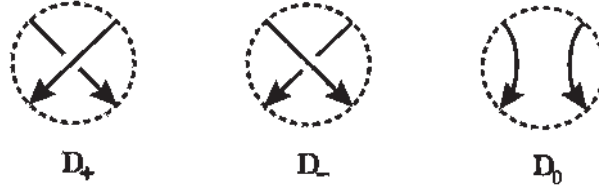


Figura 4.11: Diagramas de madejas

n . Se encontró que este polinomio era bastante bueno para distinguir nudos y enlaces, sin embargo no distinguía nudos o enlaces de su imagen especular.

El polinomio de Alexander ha sido una herramienta muy útil en el estudio de los nudos desde su descubrimiento. Con el tiempo se fueron encontrando diferentes puntos de vista y métodos para calcularlo. Uno de los más notables fue el descubrimiento de R. H. Fox [1] del **cálculo diferencial libre**, que es una técnica para obtener el polinomio de Alexander de un nudo a partir de cualquier presentación del grupo fundamental de su complemento.

En 1970, John Norton Conway demostró que el polinomio de Alexander podía ser generalizado a un nuevo invariante que tiene una definición recursiva muy simple. El polinomio de Conway $\nabla_K(z)$ está determinado por los dos axiomas siguientes:

Axioma 1 Si K es el nudo trivial, entonces $\nabla_K(z) = 1$.

Axioma 2 Supongamos que D_+ , D_- y D_0 son los diagramas regulares de los nudos (o enlaces) K_+ , K_- y K_0 respectivamente. Estos diagramas regulares son exactamente los mismos *excepto* en una vecindad de un punto de cruce. En esta vecindad, los diagramas regulares difieren en la manera mostrada en la Figura 4.11.

Entonces, los polinomios de Laurent de los tres nudos están relacionados de la siguiente manera:

$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z\nabla_{K_0}(z). \quad (*)$$

Los diagramas D_+ , D_- y D_0 son llamados **diagramas de madejas** y la relación (*) entre los polinomios de Laurent de los correspondientes nudos K_+ , K_- y K_0 es llamada la **relación de madejas**. También, a una operación que reemplaza uno de los diagramas D_+ , D_- y D_0 por algún otro de ellos es llamada una **operación de madejas**.

El polinomio $\nabla_K(z)$ definido por los axiomas anteriores, es llamado el **polinomio de Conway** y su relación con el polinomio de Alexander está dada por el siguiente teorema.

4.3 Teorema.

$$\Delta_K(t) = \nabla_K(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}).$$

En otras palabras, si reemplazamos z por $\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$ en el polinomio de Conway, obtenemos el polinomio de Alexander. Por esta razón, el polinomio $\nabla_K(z)$ se conoce también como el **polinomio de Alexander–Conway**.

Un resultado útil para calcular este polinomio es el siguiente.

4.4 Proposición. *El polinomio de Conway del enlace trivial con μ componentes ($\mu \geq 2$) es 0.*

La manera mas efectiva de calcular el polinomio de Conway es usando un **diagrama de arbol de madejas**. La mejor forma de describirlo es mediante un ejemplo. Para facilitar los cálculos, reescribiremos la **relación de madejas** (*) de la siguientes formas:

$$\begin{aligned}\nabla_{D_+}(z) &= \nabla_{D_-}(z) + z\nabla_{D_0}(z) \\ \nabla_{D_-}(z) &= \nabla_{D_+}(z) - z\nabla_{D_0}(z)\end{aligned}\tag{◇}$$

En la Figura 4.12 se muestra el **diagrama de árbol de madejas** del nudo trébol. Primero se comienza con el diagrama regular del nudo al que se le quiere calcular el polinomio de Conway, en este caso, el trébol. El siguiente nivel en el árbol, consiste en los dos diagramas regulares, obtenidos al aplicar las dos posibles **operaciones de madejas** a un punto de cruce del diagrama original, uniéndolos mediante un segmento en el cual se anota el coeficiente correspondiente, obtenido de las relaciones (◇). Se repite el proceso hasta obtener solamente nudos y enlaces triviales a los cuales ya no se les puede aplicar **operaciones de madejas**. El polinomio de Conway se obtiene sumando los polinomios de los nudos (o enlaces) triviales de los extremos de cada una de las ramas del árbol, multiplicándolos por los coeficientes que aparecen en el camino que une el diagrama original, con el diagrama de dichos nudos o enlaces triviales. En este caso tenemos

$$\nabla_K(z) = 1\nabla_O(z) + z\nabla_{OO}(z) + z^2\nabla_O(z).$$

Donde $\nabla_O(z)$ y $\nabla_{OO}(z)$ son, respectivamente, los polinomios de Conway del nudo trivial y del enlace trivial de dos componentes. Como $\nabla_O(z) = 1$ y $\nabla_{OO}(z) = 0$, el cálculo se reduce a $\nabla_K(z) = 1 + z^2$. Aplicando el Teorema 4.3 obtenemos el polinomio de Alexander:

$$\Delta_K(t) = t^{-1} - 1 + t.$$

Siguiendo el mismo procedimiento, tenemos que el polinomio de Alexander del nudo 8 es

$$\Delta_K(t) = -t^{-1} + 3 - t.$$

El polinomio de Alexander es bastante útil respecto al problema global de clasificación de nudos y enlaces. Sin embargo no sirve para atacar los problemas locales de invertibilidad y anfiqueiralidad.

4.5 Teorema. *Sea K un nudo.*

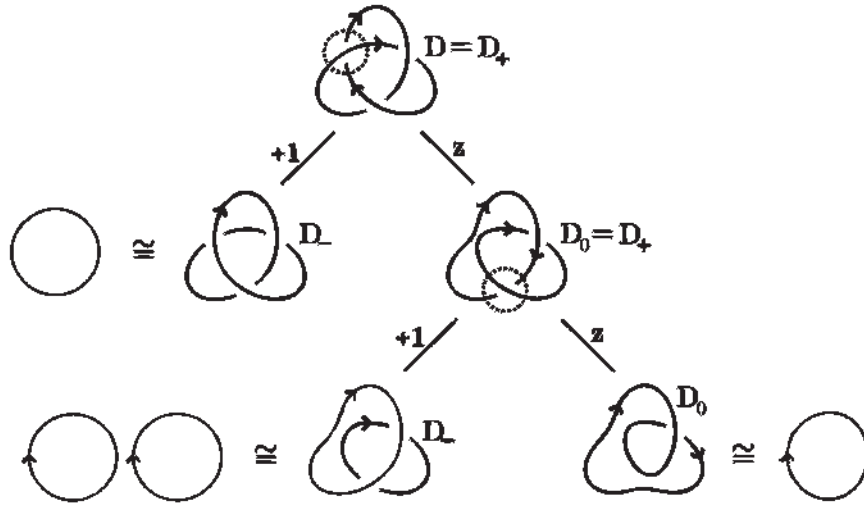


Figura 4.12: Árbol de madejas del trébol

(i) Si $-K$ es el nudo obtenido de K invirtiendo su orientación, entonces

$$\Delta_K(t) = \Delta_{-K}(t).$$

(ii) Si K^* es la imagen especular de K , entonces

$$\Delta_{K^*}(t) = \Delta_K(t). \quad (4.1)$$

Por lo tanto, el polinomio de Alexander no nos sirve para demostrar que los tréboles dextrógiro y levógiro no son equivalentes.

Por último, veamos el comportamiento del polinomio de Alexander bajo la suma conexa.

4.6 Teorema. Sea $K_1 \# K_2$ la suma conexa de dos nudos (o enlaces). Entonces

$$\Delta_{K_1 \# K_2}(t) = \Delta_{K_1}(t) \Delta_{K_2}(t).$$

4.7.2. Polinomios de Jones

Después de la aparición del polinomio de Conway, hubo muchos trabajos relacionados con él, pero curiosamente nadie intentó generalizar el esquema recursivo de Conway. No fue sino hasta 1984 que Vaughan Jones anunció su polinomio, derivado de una representación del grupo de trenzas de Artin en un álgebra de von Neumann. Jones demostró (entre otras cosas) que su polinomio de Laurant está determinado por dos axiomas, de manera análoga al polinomio de Conway.

Definición. Sea K un nudo (o enlace) orientado y D un diagrama regular (orientado) de K . Entonces el polinomio de Jones $V_K(t)$ es un polinomio de Laurent en \sqrt{t} el cual está definido de manera única por los dos axiomas siguientes:

Axioma 1 Si K es el nudo trivial, entonces $V_K(t) = 1$.

Axioma 2 Sean D_+ , D_- y D_0 diagramas de madejas (Figura 4.11), entonces se tiene la siguiente relación.

$$\frac{1}{t}V_{D_+}(t) - tV_{D_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{D_0}(t).$$

El algoritmo para calcular el polinomio de Jones es completamente análogo al del polinomio de Conway que describimos en la Sección 4.7.1. Para poder aplicarlo, necesitamos saber cual es el polinomio de Jones de los enlaces triviales.

4.7 Proposición. *El polinomio de Jones del enlace trivial de μ componentes O_μ es*

$$V_{O_\mu}(t) = (-1)^{\mu-1} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\mu-1}.$$

Como antes, reescribamos la relación de madejas para facilitarnos los cálculos usando el diagrama de árbol de madejas.

$$\begin{aligned} V_{D_+}(t) &= t^2V_{D_-}(t) + tzV_{D_0}(t) \\ V_{D_-}(t) &= t^{-2}V_{D_+}(t) - t^{-1}zV_{D_0}(t) \end{aligned} \quad (\diamond)$$

Donde por claridad hemos puesto $z = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Sin embargo, como los coeficientes de estas dos relaciones de madejas para el polinomio de Jones son diferentes, el cálculo de éste es un poco mas difícil.

Para el caso del trébol dextrógiro, podemos usar nuevamente el diagrama de árbol de la Figura 4.12 pero en este caso, los coeficientes correspondientes son (de izquierda a derecha y de arriba a abajo): t^2 , tz , t^2 y tz . De esta manera, obtenemos que el polinomio de Jones del trébol dextrógiro es

$$\begin{aligned} V_K(t) &= t^2V_O(t) + t^3zV_{OO}(t) + t^2z^2V_O(t) \\ &= t + t^3 - t^4 \end{aligned}$$

El polinomio de Jones, al igual que el de Alexander, no es útil para decidir si un nudo es invertible o no.

4.8 Teorema. *Sea $-K$ el nudo con la orientación inversa del nudo K , entonces*

$$V_{-K}(t) = V_K(t).$$

Sin embargo, es bastante poderoso para decidir si un nudo es anfiqueiral o no.

4.9 Teorema. *Sea K^* la imagen especular de K , entonces*

$$V_{K^*}(t) = V_K(t^{-1}).$$

Por lo tanto, si un nudo es anfiqueiral, entonces $V_K(t) = V_K(t^{-1})$, es decir, $V_K(t)$ es simétrico.

En el caso del trébol dextrógiro, vemos que su polinomio de Jones no es simétrico, por lo tanto no es anfiqueiral.

Respecto a la suma conexa de dos nudos (o enlaces), el polinomio de Jones se comporta igual que el polinomio de Alexander.

4.10 Teorema. *Sea $K_1 \# K_2$ la suma conexa de dos nudos (o enlaces). Entonces*

$$V_{K_1 \# K_2}(t) = V_{K_1}(t)V_{K_2}(t).$$

Capítulo 5

Trenzas

Al principio de la década de los 30's, E. Artin introdujo el concepto (matemático) de **trenza** para aplicarlo al estudio de los nudos. Sin embargo, este punto de vista no fue muy exitoso en ese entonces y la investigación en dicho campo comenzó a disminuir. Mas tarde, en los 50's, se encontró que la teoría de trenzas tenía aplicaciones en otras áreas y eso impulso nuevas investigaciones al respecto.

Con la aparición del polinomio de Jones, puso en práctica la idea original de Artin, pues las trenzas jugaron un papel muy importante en la definición de dicho polinomio.

En el presente capítulo daremos una breve introducción a los conceptos básicos de la teoría de trenzas.

5.1. El grupo de trenzas

Definición. Considérese un cubo unitario B en \mathbb{R}^3 . Escójanse en la tapa superior de B n puntos A_1, A_2, \dots, A_n y otros n puntos A'_1, A'_2, \dots, A'_n en la tapa inferior, como se muestra en la Figura 5.1 (a).

Una n -**trenza** es una colección de cuerdas *no* anudadas que bajan cada una a partir de uno de los puntos A_1, A_2, \dots, A_n de la tapa superior de B y llegan cada una a un punto diferente de los n puntos A'_1, A'_2, \dots, A'_n de la tapa inferior, no necesariamente al punto correspondiente. Las cuerdas se van enlazando conforme van descendiendo. Un ejemplo de una 3-trenza se muestra en la Figura 5.1 (b). Consideraremos dos trenzas equivalentes si pueden ser deformadas una en la otra mediante *isotopías ambientales* que fijan los puntos extremos de las cuerdas.

De manera análoga a los nudos, podemos obtener diagramas regulares de las trenzas, proyectándolas sobre el plano yz , como se muestra en la Figura 5.1 (c).

Conectando directamente, mediante segmentos de línea recta los puntos A_i con los puntos A'_i ($i = 1, \dots, n$) obtendremos una trenza especial a la cual llamaremos n -**trenza trivial**, la cual se muestra en la Figura 5.2.

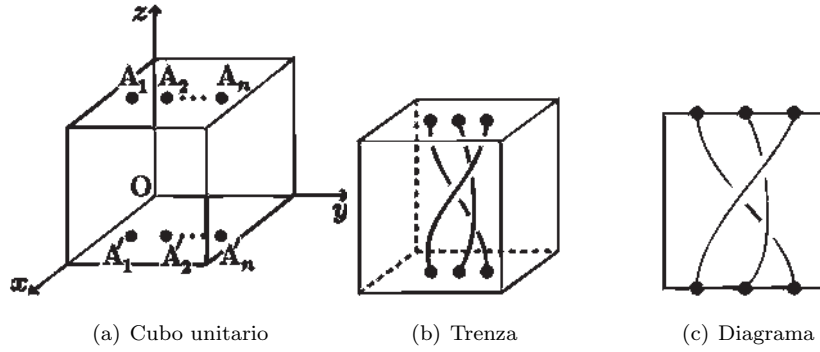


Figura 5.1: Cubo unitario

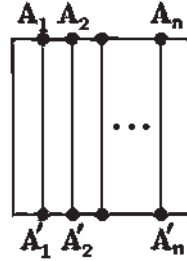


Figura 5.2: n -trenza trivial

Supóngase que una n -trenza α tiene conectadas sus cuerdas de la siguiente manera: A_1 con A_{i_1} , A_2 con A_{i_2} , \dots , A_n con A_{i_n} . Entonces podemos asignar a α la siguiente permutación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

Llamaremos a esta permutación, la **permutación de la trenza** α .

Nótese que la permutación de la n -trenza trivial es la permutación identidad. A todas las trenzas cuya permutación es la identidad se les llama **trenzas puras**.

Sea B_n el conjunto de todas las n -trenzas (de clases de equivalencia, para ser mas precisos). Sean α y β dos elementos de B_n , es posible definir un **producto** para las dos n -trenzas α y β . Este producto consiste en pegar la base del cubo que contiene a α con la tapa superior del cubo que contiene a β , obteniendo con ello un paralelepípedo que contiene una nueva trenza creada al sobreponer α y β , véase la Figura 5.3. Esta nueva trenza es llamada el **producto** de α y β y es denotada por $\alpha\beta$. En general no es cierto que $\alpha\beta = \beta\alpha$, es decir, el producto no es conmutativo.

Bajo este producto, B_n adquiere una estructura de grupo. Es fácil ver con

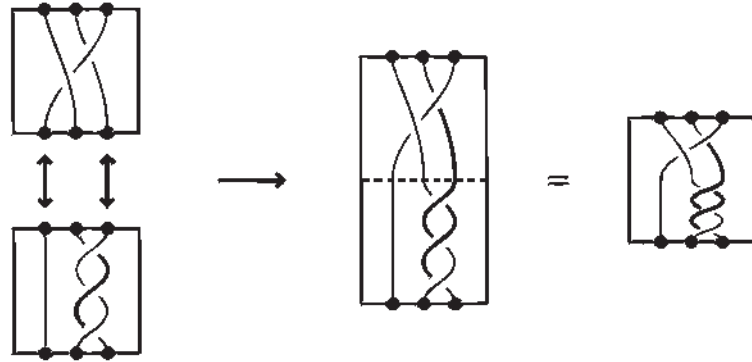


Figura 5.3: Producto de trenzas

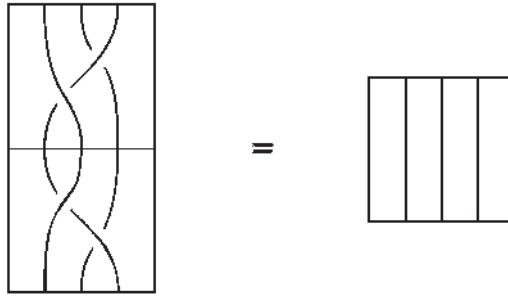


Figura 5.4: El inverso de una trenza

la ayuda de los diagramas de trenzas que el producto es asociativo y que el elemento neutro está dado por la n -trenza trivial a la cual denotaremos por e . Solo falta ver que todo elemento α en B_n tiene un elemento inverso α^{-1} .

Si consideramos la base del cubo que contiene a α como un espejo, entonces el reflejo de α en dicho espejo será el inverso α^{-1} . Esto se muestra en la Figura 5.4.

Tenemos entonces que $\alpha\alpha^{-1} = e$ y $\alpha^{-1}\alpha = e$. El grupo B_n , será llamado el **grupo de n -trenzas**.

5.2. Presentación de B_n

Veamos ahora como es la estructura de dichos grupos. En primer lugar, el grupo de 1-trenzas B_1 contiene solamente un elemento: la 1-trenza trivial. Por lo tanto $B_1 = \{e\}$. Para $n \geq 2$, los grupos B_n son de orden infinito, es decir, tienen un número infinito de elementos. Sin embargo, existe una manera muy

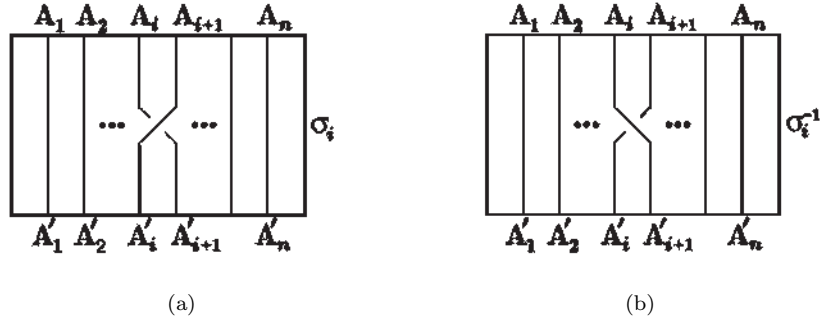


Figura 5.5: Generadores de B_n

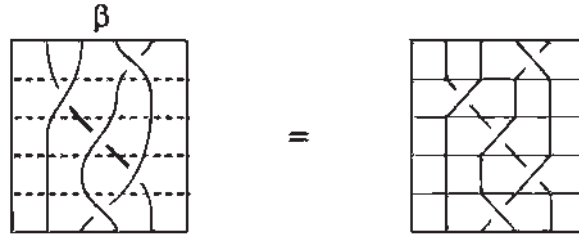


Figura 5.6: La trenza β como producto de los σ_i

fácil de describir los elementos de B_n dando una **presentación**.

Como vimos en la Sección 4.6.3, para dar una presentación, necesitamos dar la lista de generadores y las relaciones que satisfacen.

El grupo de n -trenzas B_n tiene $n - 1$ generadores denotados por σ_i ($i = 1, \dots, n - 1$) dados de la siguiente manera. El generador σ_i es la trenza que conecta a A_i con A'_{i+1} , a A_{i+1} con A'_i (este segundo cruzando por arriba) y conecta los restantes A_j con A'_j mediante segmentos rectos. En la Figura 5.5 se muestra el diagrama del generador σ_i y su inverso.

Multiplicando dichos generadores podemos obtener elementos del grupo de trenzas. Recíprocamente, todo elemento de B_n se puede expresar como producto de los generadores σ_i y sus inversos σ_i^{-1} . Para ver esto, dividimos el diagrama regular de una trenza mediante líneas horizontales paralelas, de tal manera que en cada rectángulo que obtengamos quede únicamente un punto de cruce. Si dos puntos de cruce están al mismo nivel, entonces moviendo uno de ellos un poco hacia arriba y el otro hacia abajo podemos eliminar este problema. Como un ejemplo, en la Figura 5.6 se muestra que la trenza β está dada por $\sigma_3^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2^{-1}$.

De esta manera, vemos que las n -trenzas σ_i generan al grupo B_n . En el caso

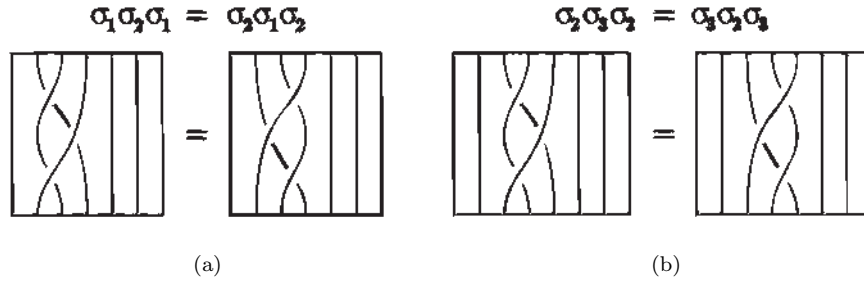


Figura 5.7: Relaciones en B_4

de B_2 , tenemos que hay un solo generador σ_1 y por lo tanto, todo elemento de B_2 es una potencia de σ o de su inverso σ_1^{-1} . Por lo tanto B_2 es un *grupo cíclico infinito*, es decir, es *isomorfo* al grupo de los *números enteros* \mathbb{Z} , donde el elemento σ_1^m ($m \in \mathbb{Z}$) corresponde al entero m . Intuitivamente esto corresponde a que la trenza se tuerza m veces hacia la izquierda si m es positivo o a la derecha si m es negativo.

Cuando $n \geq 3$ la descripción algebraica de un elemento de B_n como producto de las σ_i no es único. Por ejemplo las 4-trenzas $\sigma_1\sigma_3$ y $\sigma_3\sigma_1$ son equivalentes (dibújense sus diagramas para verlo). Por lo tanto, en el grupo de 4-trenzas, B_4 , se satisface la relación $\sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1$. Además, también las 4-trenzas $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ y $\sigma_2\sigma_1\sigma_2$ son equivalentes como lo muestra la Figura 5.7. Por lo tanto también tenemos la relación

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2.$$

Esta igualdad también se cumple si consideramos n -trenzas en general ($n \geq 3$). Estas igualdades son llamadas **relaciones de trenzas** del grupo B_n . De hecho, si dos n -trenzas son equivalentes podemos transformar una en la otra usando varias veces estas igualdades.

Por lo tanto tenemos que la presentación de B_n está dada por

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & (|i-j| \geq 2) \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & (i = 1, 2, \dots, n-2). \end{array} \right\rangle$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} B_1 &= \langle \sigma_1 \mid \text{—} \rangle, \\ B_2 &= \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle, \\ B_3 &= \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3 \rangle. \end{aligned}$$

5.3. Nudos y trenzas

Al principio del presente capítulo mencionamos que las trenzas jugaron un papel importante en la definición del polinomio de Jones. En esta sección des-

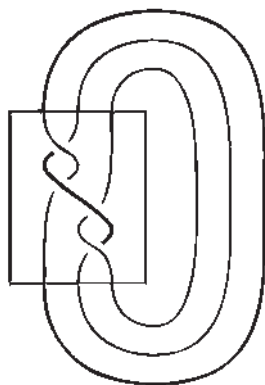


Figura 5.8: Cerradura de una trenza

cribiremos la relación que existe entre las trenzas y los nudos o enlaces.

Considremos una n -trenza y conectemos, respectivamente, los n puntos A_1, \dots, A_n de la tapa superior del cuadrado donde está la trenza, con los puntos A'_1, \dots, A'_n de la base del cuadrado, pero esta vez, mediante arcos paralelos que están fuera del cuadrado, como se muestra en la Figura 5.8.

Obtenemos de esta manera el diagrama regular de un nudo o enlace, al cual decimos que es la **cerradura de la trenza**. Usualmente asignamos una orientación a cada cuerda de la trenza que comienza desde el punto A_i y se mueve hacia abajo dentro del cubo de la trenza. Por lo tanto, a partir de cualquier trenza α podemos obtener un nudo o enlace orientado cerrando la trenza. El recíproco también es cierto y es conocido como el Teorema de Alexander.

5.1 Teorema (Teorema de Alexander). *Sea un nudo (o enlace) orientado arbitrario, entonces es equivalente (con orientación) a un nudo (o enlace) que es la cerradura de una trenza.*

Tenemos que si dos trenzas son equivalentes, entonces sus respectivas cerraduras, serán equivalentes como nudos o enlaces. Sin embargo, es posible obtener nudos (o enlaces) equivalentes a partir de dos trenzas que no son equivalentes. Un ejemplo de ello está dado por la trenza trivial $e \in B_1$ y el generador $\sigma_1 \in B_2$, cuyas cerraduras nos dan el nudo trivial y sin embargo la primera es una 1-trenza y la segunda una 2-trenza y por lo tanto no son equivalentes.

Por lo tanto, si queremos aplicarla teoría de trenzas a la teoría de nudos, debemos explicar claramente cual es la clase de trenzas cuya cerraduras nos dan nudos equivalentes. Para ello introduciremos el concepto de **M -equivalencia** y los **movimientos de Markov**.

Definición. Sea B_∞ la unión de los grupos $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$, es decir, $B_\infty = \bigcup_{k \geq 1} B_k$. Podemos aplicar en B_∞ las siguientes operaciones llamadas **movimiento de Markov**:

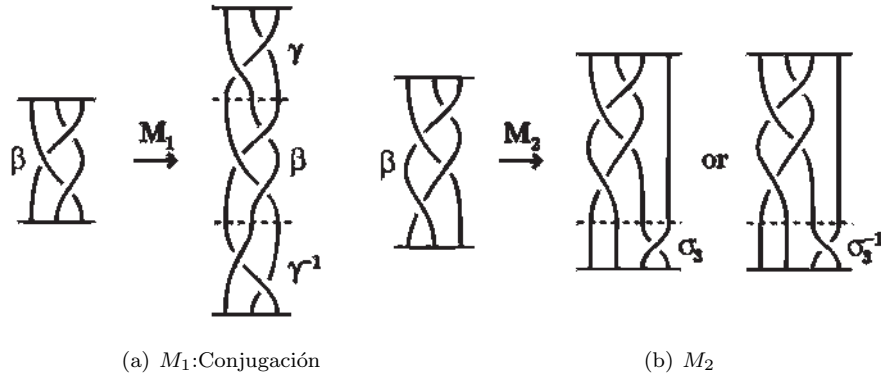


Figura 5.9: Movimientos de Markov

- (I) Si β es un elemento del grupo de trenzas B_n , entonces M_1 es la operación que transforma a β en la n -trenza $\gamma\beta\gamma^{-1}$, donde γ es algún elemento de B_n , véase la Figura 5.9 (a). Decimos que el elemento $\gamma\beta\gamma^{-1}$ es el **conjugado** de β .
- (II) La operación M_2 es la que transforma a una n -trenza β en alguna de las dos $(n+1)$ -trenzas $\beta\sigma_n$ o $\beta\sigma_n^{-1}$, donde σ_n es el generador de B_{n+1} , véase la Figura 5.9 (b).

Definición. Sean α y β dos elementos de B_∞ . Si podemos transformar α en β aplicando los movimientos de Markov M_1 y M_2 y sus inversos M_1^{-1} y M_2^{-1} un número finito de veces, entonces decimos que α es **Markov equivalente** (o simplemente **M -equivalente**) a β y lo denotaremos por $\alpha \sim_M \beta$.

El siguiente Teorema muestra que la M -equivalencia es el concepto fundamental que conecta a los nudos y a las trenzas.

5.2 Teorema (Teorema de Markov). *Sean K_1 y K_2 dos nudos (o enlaces) orientados, los cuales pueden ser formados a partir de las trenzas β_1 y β_2 respectivamente. Entonces*

$$K_1 \cong K_2 \iff \beta_1 \sim_M \beta_2.$$

5.4. El índice de trenza de un nudo

Tenemos por el Teorema de Markov que un nudo (o enlace) K puede ser obtenido a partir de un número infinito de trenzas. Dentro de este conjunto de trenzas, existe una trenza α que tiene el mínimo número de cuerdas. La trenza α es llamada la **trenza mínima** de K y el número de cuerdas de α es el **índice de trenza** de K y es denotado por $b(K)$ y es un invariante de nudos.

Se tiene la siguiente proposición que relaciona al número de puentes de un nudo con su índice de trenza.

5.3 Proposición ([4, Prop. 10.4.1]). *Sea $br(K)$ el número de puentes y $b(K)$ el índice de trenza de un nudo (o enlace) orientado K , entonces*

$$br(K) \leq b(K).$$

Casos para cuando se da la igualdad es cuando K es un nudo tórico de tipo (q, r) con $q, r > 0$. Entonces tenemos:

$$b(K(q, r)) = br(K(q, r)) = r = \min\{q, r\}.$$

En general para los nudos tóricos de tipo (q, r) , $q \neq 0 \neq r$ se tiene que

$$b(K) = \min\{|q|, |r|\}.$$

Capítulo 6

Aplicaciones

Como se mencionó en la introducción la teoría de nudos comenzó con el modelo atómico de Lord Kelvin, en el cual el universo entero estaba hecho de una sustancia llamada eter y que la materia podía ser explicada como vórtices tubulares anudados en él. Tiempo después, dicha teoría fué descartada como válida y la teoría de nudos paso a ser únicamente una rama de las matemáticas puras.

El primer lugar donde la teoría de nudos encontró aplicaciones fué en el estudio del ADN. En 1953, James Watson y Francis Crick descubrieron que el material genético básico de la vida en la tierra tomaba la forma de una doble hélice. A partir de dicho descubrimiento, las relaciones entre el ADN (ácido desoxiribonucleico) y la teoría de nudos han sido interminables. También se encontró que el ADN frecuentemente se encuentra anudado, lo cual dificulta que el ADN realice su función. Existen enzimas llamadas **topoisomerasas** que pueden realizar manipulaciones topológicas en el ADN.

Otra area de aplicación de la teoría de nudos es la mecánica estadística. Esta aplicación fué descubierta recientemente. Vaughan Jones descubrió dicha conexión cuando descubrió el nuevo invariante polinomial de nudos y enlaces que lleva su nombre. En este campo, los nudos pueden representar sistemas y por lo tanto se incrementa su facilidad de estudio.

La teoría de nudos es uno de los mas fascinantes campos de estudio dentro de las matemáticas, por si misma y por las múltiples aplicaciones que se han encontrado ultimamente.

Bibliografía

- [1] Richard H. Crowell and Ralph H. Fox. *Introduction to Knot Theory*. Ginn and Company, 1963.
- [2] C. McA. Gordon and J. Luecke. Knots are determined by their complements. *Journal of the American Mathematical Society*, 2:371–415, 1989.
- [3] C. Kosniowski. *Topología Algebraica*. Editorial Reverté, 1989.
- [4] Kinio Murasugi. *Knot Theory & Its Applications*. Birkhäuser, 1996.
- [5] P. G. Tait. On knots i, ii, iii. In *Scientific Papers*. Cambridge University Press, 1900.
- [6] W. H. Thomson. On vortex motion. *Trans. R. Soc. Edin.*, 25:217–260, 1869.