Guía de ejercicios para al Evaluación Parcial 01

EXAMEN PARCIAL 01
VIERNES 08-MARZO-2019
De 19:00 a 21:00 HORAS - Salón P-108

Razón cruzada, hileras y haces armónicos

1. Demostrar que si en un haz armónico un par de rectas conjugadas es perpendicular una a la otra entonces estas rectas bisecan los ángulos formados por las otras dos.

2. Sean a, b, c y d cuatro rectas en el plano tales que $a \cap b \cap c \cap d = \{O\}$. Demostrar que si uno de los pares de rectas biseca a los ángulos formados por el otro par entonces el haz es armónico.

3. Sea O un punto en el plano, $r \in \mathbb{R}^+$ y consideremos a $\zeta(O, r)$. Demostrar que si l y m dos rectas en el plano tales que $l \cap m = \{O\}$; $l \cap \zeta(O, r) = \{A, B\}$ y $m \cap \zeta(O, r) = \{C, D\}$ entonces cualquier par de conjugados armónicos de A y B y cualquier par de conjugados armónicos de C y D pertenecen a una misma circunferencia.

4. Sea $\triangle ABC$ una triángulo y $L \in \overline{BC}$, $M \in \overline{CA}$ y $N \in \overline{AB}$ tales que $BL = LC$, $CM = MA$ y $AN = NB$. Demostrar que $L\{\overline{LM}, \overline{LN}; \overline{LA}, \overline{LB}\} = -1$.

5. Sea $\triangle ABC$, b_A la bisectriz del ángulo con vértice A y $b_a \cap \overline{BC} = \{P\}$; Q y R son los pies de las perpendiculares desde B y C sobre b_a respectivamente. Demostrar que $b_a\{A, P; Q, R\} = -1$.

6. Sean O un punto en el plano, $r \in \mathbb{R}^+$. $\zeta(O, r)$ una circunferencia en el plano, l y m dos rectas tangentes a $\zeta(O, r)$ por L y M respectivamente. Demostrar que si $m \cap l = \{A\}$ y $\overline{OA} \cap \zeta(O, r) = \{B, C\}$ entonces A y M están separados armónicamente por los puntos de intersección de $\overline{LB}$ y $\overline{LC}$ con $\overline{AM}$.

7. Construir

   a) Un cuadrángulo completo que tenga un triángulo dado como triángulo diagonal.

   b) Un cuadrilátero completo que tenga un trilátero dado como trilátero diagonal.

8. Demostrar que cada uno de los triángulos cuyos lados son tres de las cuatro rectas de un cuadrilátero completo están en perspectiva con el triángulo diagonal del cuadrilátero.

Circunferencias coaxiales

9. Considerar $\zeta(A, \alpha)$, $\zeta(B, \beta)$ y $k \in \mathbb{R}$. Determinar el lugar geométrico de los puntos X en al plano tales que:

   a) $Pot_{\zeta(A,\alpha)}(X) = k$

   b) $Pot_{\zeta(A,\alpha)}(X) + Pot_{\zeta(B,\beta)}(X) = k$

   c) $Pot_{\zeta(A,\alpha)}(X) - Pot_{\zeta(B,\beta)}(X) = k$

   d) $\frac{Pot_{\zeta(A,\alpha)}(X)}{Pot_{\zeta(B,\beta)}(X)} = k$

10. Sean $\zeta(A,\alpha)$, $\zeta(B,\beta)$ circunferencias tales que $A \neq B$ y para cualquier $X \in \zeta(A,\alpha)$ se tiene que $\beta < |BX|$. Construir una recta tangente a $\zeta(A,\alpha)$ y $\zeta(B,\beta)$.

11. Sea Γ una familia de circunferencias coaxiales.

    a) Demostrar que para cualquier P en el plano existe $\zeta(A,\alpha) \in \Gamma$ y $\zeta(B,\beta) \in \Gamma^{\perp}$ tal que $P \in \zeta(A,\alpha) \cap \zeta(B,\beta)$.

    b) Construir un elemento de Γ que sea tangente a una recta dada distinta del eje radical de Γ.

    c) Construir un elemento de Γ que sea tangente a una circunferencia dada que no pertenece a $\Gamma \cup \Gamma^{\perp}$.

12. Sea Γ una familia de circunferencias coaxiales y $\zeta(A,\alpha) \notin \Gamma$. Demostrar que los ejes radicales de $\zeta(A,\alpha)$ y cada circunferencia de Γ son rectas concurrentes.

13. Sea Γ la familia de circunferencias coaxiales determinada por las circunferencias $\zeta(A,\alpha)$, $\zeta(B,\beta)$. Demostrar que si $\zeta(A,\alpha)$, $\zeta(B,\beta)$ tienen como tangente a la recta l, $l \cap \zeta(A,\alpha) = \{P\}$ y $l \cap \zeta(B,\beta) = \{Q\}$ entonces para cualquier $\zeta(X,r) \in \Gamma$ se tiene que los elementos de $\zeta(X,r) \cap l$ son conjugados armónicos respecto a P y Q.

14. Sean $\{A,B,C\}$ un conjunto de puntos en posición general, $\{\alpha,\beta,\gamma\} \subseteq \mathbb{R}$ tales que $\zeta(A,\alpha)$, $\zeta(B,\beta)$ y $\zeta(C,\gamma)$ son circunferencias que no se intersecan por pares. Demostrar que los puntos seis puntos límite de las tres familias de circunferencias coaxiales que determinan por pares forman un conjunto concíclico de puntos.