

# TEORÍA DE GRÁFICAS

2020-2 (02 abril 2020)

## EXAMEN PARCIAL 02

### INSTRUCCIONES:

- Justificar y argumentar todos los resultados que se realicen.
- De no haber recibido un correo electrónico por parte de los profesores argumentando que se ha obtenido el **Derecho a Examen**, no se considerará a revisión
- Resolver y enviar por correo electrónico, a ambos profesores, **cinco** de los siguientes ejercicios. De entregar mas de cinco ejercicios, se evaluarán todos los ejercicios pero no se considerará para el promedio el ejercicio de mayor puntaje.
- La fecha límite de envío del examen p

- 
- a) Demostrar que toda gráfica autocomplementaria<sup>1</sup> es conexa.
    - b) Demostrar que si  $G$  es una gráfica autocomplementaria entonces  $|V(G)| \equiv x \pmod{4}$  donde  $x \in \{0, 1\}$ .
    - c) Construir, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , una gráfica autocomplementaria de orden  $4k$ .
    - d) Construir, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , una gráfica autocomplementaria de orden  $4k + 1$ .
  2. Demostrar que la siguiente gráfica  $G$  no es una gráfica de intervalos:
    - $V(G) = \{P, Q, R, S, T, U\}$
    - $A(G) = \{\{P, Q\}, \{Q, R\}, \{R, P\}, \{Q, S\}, \{S, T\}, \{T, Q\}, \{R, T\}, \{T, U\}, \{U, R\}\}$
  3. Demostrar que si  $G$  es una gráfica conexa de orden mayor que uno entonces
    - $1 \leq c(G - \{v\}) \leq d_G(v)$  para cualquier  $v \in V(G)$ .
    - $1 \leq c(G \setminus \{a\}) \leq 2$  para cualquier  $a \in A(G)$ .
  4. Demostrar que toda gráfica desconexa puede expresarse como una suma de gráficas conexas.
  5. Demostrar que si  $G$  es una gráfica donde  $2 \leq \delta(G)$  entonces  $G$  contiene un ciclo de longitud al menos  $\delta(G) + 1$ .
  6. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes para una gráfica conexa  $G$  de orden al menos tres:
    - $G$  es un bloque<sup>2</sup>.
    - Para cualquier  $\{u, v\} \subseteq V(G)$  con  $u \neq v$  existe un ciclo  $C$  en  $G$  tal que  $\{u, v\} \subset V(C)$ .
    - Para cualquier  $u \in V(G)$  y  $a \in A(G)$  existe un ciclo  $C$  en  $G$  tal que  $u \in V(C)$  y  $a \in A(C)$ .
    - Para cualquier  $\{a, b\} \subseteq A(G)$  con  $a \neq b$  existe un ciclo  $C$  en  $G$  tal que  $\{a, b\} \subset A(C)$ .

<sup>1</sup> $G$  es una gráfica **autocomplementaria** si y solamente si  $G \cong \overline{G}$ .

<sup>2</sup> $G$  es un **bloque** si y solamente si  $G$  es una gráfica conexa sin vértices de corte.

7. Demostrar que si  $G$  es un bloque tal que  $3 \leq |V(G)|$ ,  $\{u, v\} \subseteq V(G)$  tal que  $v \neq u$  y  $T_{uv}$  es una trayectoria en  $G$  con extremos  $u$  y  $v$  entonces existe una trayectoria  $T_{uv}^*$  con extremos  $u$  y  $v$  tal que  $V(T_{uv}) \cap V(T_{uv}^*) = \{u, v\}$ .
8. Sea  $G$  una gráfica con cuatro bloques tal que  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ . Demostrar que si para cualquier  $1 \leq i \leq 6$  se tiene que  $v_i$  pertenece a exactamente un bloque de  $G$  y que  $v_7$  y  $v_8$  pertenecen exactamente a dos bloques de  $G$  entonces  $G$  es desconexa.
9. Demostrar que si  $v \in V(G)$  es vértice de corte en  $G$  entonces  $v$  no es vértice de corte en  $\overline{G}$
10. Sea  $G$  una gráfica conexa con al menos un vértice de corte. Demostrar que  $G$  contiene, por lo menos, dos bloques cada uno de los cuales contiene exactamente un vértice de corte de  $G$ <sup>3</sup>.
11. Sea  $G$  una gráfica conexa con al menos un vértice de corte. Demostrar que  $G$  contiene un vértice de corte  $v$  con la propiedad de que, con a lo más una excepción, todos los bloques que contienen a  $v$  son bloques terminales.
12. Demostrar que si  $G$  es una gráfica que no contiene ciclos pares entonces todo bloque de  $G$  es isomorfo a  $K_2$  o es un ciclo impar.
13. Demostrar que el número de bloques de una gráfica  $G$  es igual a

$$c(G) + \sum_{v \in V(G)} (b(v) - 1)$$

donde  $b(v)$  denota al número de bloques de  $G$  que contienen a  $v$ .

14. Demostrar que si  $G$  es una gráfica conexa con exactamente dos vértices que no son vértices de corte entonces  $G$  es una trayectoria.
15. Demostrar que en cualquier gráfica  $G$  si  $a \in A(G)$  entonces  $c(G) \leq c(G \setminus \{a\}) \leq c(G) + 1$ .

---

<sup>3</sup>Los bloques de una gráfica que contienen exactamente un vértice de corte de dicha gráfica se llaman **bloques terminales** de  $G$