Nombre: ???

$* \to 7.5$
$8 \to 10$

8.88

3|A

Demostrar que si $\{A,B,C,D\} \subseteq \mathcal{C}(P,\rho)$ entonces el triángulo diagonal de $\square ABCD$ es autopolar respecto a $\mathcal{C}(P,\rho)$

Dem: Sean $\{A,B,C,D\} \subseteq \mathcal{C}(P,\rho)$ consideremos $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{P\}$, $\overline{BC} \cap \overline{AD} = \{Q\}$, $\overline{CA} \cap \overline{BD} = \{R\}$

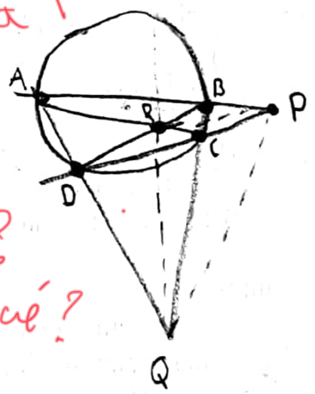
Sabemos que ΔPQR es el triángulo diagonal del cuadrángulo $\square ABCD$ y sabemos que tiene la característica que

¿Por qué?

$$Q\{\overline{QP}, \overline{QR}; \overline{QB}; \overline{QA}\} = -1$$

* Solo tienes un haz armónico ¿Cómo concluyes que $\overline{QR}$ es la polar?

Además, sabemos que la polar de P es la recta que contiene a los conjugados armónicos de P con respecto a X y Y t.q. $\{X,Y,P\} \subseteq \ell$ ¿Para qué ℓ?



$\Rightarrow$ $\overline{QR}$ es la polar de P y ¿$\overline{QP}$ es la polar de R? ¿Por qué?

Por teorema fundamental

$$\left.\begin{aligned} Q \in p &\iff P \in q \\ Q \in r &\iff R \in q \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{RP} \text{ es la polar de } Q$$

$\Rightarrow$ $\overline{QR}$ es el lado ~~contrario de~~ opuesto a P en ΔPQR y $\overline{QR}$ es polar de P
$\overline{QP}$ es el lado ~~contrario de~~ R en ΔPQR y $\overline{QP}$ es polar de R
$\overline{RP}$ es el lado ~~contrario de~~ Q en ΔPQR y $\overline{RP}$ es polar de Q

$\therefore$ ΔPQR es autopolar con respecto $\mathcal{C}(P,\rho)$ ■

1

8.- Sean $\mathcal{C}(A,\alpha)$ y $\mathcal{C}(B,\beta)$ circunferencias con la propiedad de tener a la recta t como una tangente común. Demostrar que si Γ es la familia de circunferencias coaxiales a las que pertenecen $\mathcal{C}(A,\alpha)$ y $\mathcal{C}(B,\beta)$, $\mathcal{C}(A,\alpha)\cap t=\{P\}$ y $\mathcal{C}(B,\beta)\cap t=\{Q\}$ $\Rightarrow$ P y Q son puntos conjugados con respecto a $\mathcal{C}(X,\xi)$ para cualquier $\mathcal{C}(X,\xi)\in\Gamma$

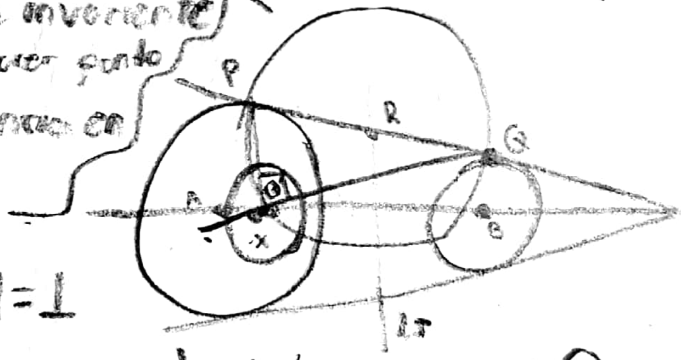
Dem: Sea λ_Γ el eje radical de Γ. Consideremos $\{R\}=\lambda_\Gamma\cap t$

Como $R\in\lambda_\Gamma \Rightarrow Pot_{\mathcal{C}(A,\alpha)}(R)=Pot_{\mathcal{C}(B,\beta)}(R)=RQ^2=RP^2 \Rightarrow$ Sacando raíz $|RQ|=|RP|$

$\Rightarrow$ Consideremos $\mathcal{C}(R,|RP|)$ Notemos que esta va a ser ortogonal a $\mathcal{C}(A,\alpha)$ Pues la tangente a $\mathcal{C}(A,\alpha)$ por P pasa por R y que la tangente por P a $\mathcal{C}(R,|RP|)$ pasa por A. Además, $R\in\lambda_\Gamma \Rightarrow \mathcal{C}(R,|RP|)$ es ortogonal a $\mathcal{C}(X,\xi)$ $\forall\, \mathcal{C}(X,\xi)\in\Gamma \Rightarrow I_{(\mathcal{C}(X,\xi))}[\mathcal{C}(P,|RP|)]=\mathcal{C}(P,|RP|)$ ⊛ $\forall\, \mathcal{C}(X,\xi)\in\Gamma$.

Ahora $\forall\, \mathcal{C}(X,\xi)$ podemos considerar $\overline{XQ}\cap\mathcal{C}(R,|PR|)\setminus\{Q\}=\{Q'\}$

Pues por ⊛ la circunferencia permanece invariante bajo la inversión y el inverso de cualquier punto es la otra intersección con la circunferencia en el mismo rayo.



$\Rightarrow$ Como $Q'\in\mathcal{C}(P,|PR|) \Rightarrow |\measuredangle QQ'P|=\perp$ (Pues P y Q son diametralmente opuestos) $\Rightarrow$ la polar de Q es $\overline{PQ'}$ ∴ $P\in q$ y por el teorema fundamental $P\in q \Leftrightarrow Q\in p$

Como se construyó $\forall\, \mathcal{C}(X,\xi)\in\Gamma$ entonces $\forall\, \mathcal{C}(X,\xi)\in\Gamma$ P y Q son conjugados.

OBS: Notemos que si $|\overline{XQ}\cap\mathcal{C}(R,|RP|)|=1 \Rightarrow Q'=Q$

$\Rightarrow$ la polar de Q es la tangente a $\mathcal{C}(X,\xi)$ por Q pero por la unicidad de la ortogonal solo $\mathcal{C}(A,\alpha)$ y $\mathcal{C}(B,\beta)$ cumplen esto y en este caso $P\in q$ por hipótesis