



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**LA LÍNEA DE SIMSON EN GEOMETRÍA  
HIPERBÓLICA**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**ACTUARIO**

**P R E S E N T A :**

**RAMIRO CLEMENTE GUERRERO**



**FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM**

**TUTOR**

**M. en C. LEOBARDO FERNÁNDEZ ROMÁN**

**2007**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**

**Tesis Digitales**

**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**

**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

<p>1. Datos del alumno</p> <p>Clemente Guerrero Ramiro 56 73 59 41 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Actuaría 099600033</p>
<p>2. Datos del tutor</p> <p>M. en C. Leobardo Fernández Román</p>
<p>3. Datos del sinodal 1</p> <p>Dr. Emilio Lluis Riera</p>
<p>4. Datos del sinodal 2</p> <p>M. en C. Francisco Struck Chávez</p>
<p>5. Datos del sinodal 3</p> <p>Dr. Rodolfo San Agustín Chi</p>
<p>6. Datos del sinodal 4</p> <p>Dra. María de la Paz Álvarez Scherer</p>
<p>7. Datos del trabajo escrito</p> <p>La línea de Simson en geometría hiperbólica 96 p 2007</p>

*Con todo cariño dedico este trabajo a mis padres y a todos aquellos que me han regalado siempre una sonrisa, así como a Leo, por su apoyo incondicional y comprensión.*

*<< Il n'existe aucune branche des mathématiques, si abstraite soit-elle, qui ne doive un jour trouver à s'appliquer aux phénomènes du monde réel. >>*

Nikolai Lobatchevsky

# Índice

Introducción.....	3
-------------------	---

## I. Geometría Euclidiana

1.1. Axiomas .....	4
1.2. Figuras congruentes .....	5
1.3. Polígonos semejantes.....	7
1.4. Medida de ángulos y arcos en una circunferencia.....	13

## II. Geometría Moderna

2.1. Líneas antiparalelas .....	17
2.2. Cuadriláteros cíclicos .....	18
2.3. Potencia de un punto .....	21
2.4. Eje radical .....	24
2.5. Circunferencias ortogonales .....	26
2.6. Circunferencias coaxiales .....	28
2.7. Inversión .....	30
2.8. Razón cruzada .....	37
2.9. La línea de Simson .....	40

## III. Breve historia del quinto postulado

3.1. Saccheri .....	44
3.2. Legendre .....	46
3.3. De la imposibilidad de demostrar el quinto postulado .....	48

## IV. Geometría Hiperbólica

4.1. Axiomas de geometría hiperbólica .....	49
4.2. Modelo del semiplano superior .....	50
4.3. Distancia en el modelo del semiplano superior de Poincaré .....	51
4.4. Construcciones hiperbólicas .....	57
4.5. Teoremas elementales de geometría hiperbólica .....	59

## **V. La línea de Simson hiperbólica**

<b>5.1. El cuadrilátero de Saccheri .....</b>	<b>62</b>
<b>5.2. El cuadrilátero de Legendre .....</b>	<b>63</b>
<b>5.3. La línea de Simson en el plano hiperbólico .....</b>	<b>66</b>
<b>5.4. Más aún .....</b>	<b>69</b>

## **A. Equivalencias del quinto postulado**

<b>A.1. Ocho afirmaciones equivalentes al quinto postulado de Euclides. ....</b>	<b>76</b>
<b>A.2. Equivalencia entre el quinto postulado de Euclides y el Axioma de Playfair ...</b>	<b>76</b>

## **B. Construcciones**

<b>B.1. Geometría neutra .....</b>	<b>79</b>
------------------------------------	-----------

## **C. Demostraciones de los criterios básicos de triángulos congruentes**

<b>C.1. Criterios LAL, ALA, LLL y AAL .....</b>	<b>88</b>
---	-----------

## **D. Modelos de geometría hiperbólica**

<b>D.1. Modelo de Poincaré .....</b>	<b>93</b>
<b>D.2. Equivalencia entre los modelos de Poincaré .....</b>	<b>94</b>

<b>Bibliografía. ....</b>	<b>96</b>
---------------------------	-----------

# Introducción

Trescientos años antes de nuestra era, aproximadamente, Euclides escribió su libro *Elementos de Geometría*, y desde entonces se generó una gran discusión con respecto a que si el quinto postulado (el de las paralelas) era independiente de los otros cuatro. Hoy en día sabemos que es independiente y que, modificando éste, es posible concebir dos nuevas geometrías; la geometría hiperbólica y la geometría elíptica. En este trabajo haremos una comparación entre la línea de Simson en el plano euclidiano y su homóloga hiperbólica.

En el primer capítulo presentaremos los cinco postulados de Euclides así como los criterios básicos de triángulos congruentes (demostrándolos en el Apéndice C) y triángulos semejantes (presentando el Teorema de Thales como una combinación de dos teoremas). También algunos teoremas sobre medidas de ángulos inscritos en la circunferencia, ángulos internos remotos, ángulos exteriores y líneas paralelas. .

En el segundo capítulo veremos resultados de geometría moderna que nos servirán para poder construir nuestro modelo de geometría hiperbólica en términos del modelo de geometría euclidiana (presentando una equivalencia entre modelos hiperbólicos en el Apéndice D) y la línea de Simson con algunas de sus propiedades.

En el tercer capítulo expondremos los intentos del jesuita Gerolamo Saccheri y el matemático francés Andre Marie Legendre para demostrar la independencia del quinto postulado y una breve reseña de cómo se desarrollaron las nuevas geometrías no euclidianas.

En el cuarto capítulo veremos el Axioma de Playfair (mostrando su equivalencia con el quinto postulado en el Apéndice A) y los axiomas de geometría hiperbólica junto en el modelo del semiplano superior de Poincaré (definiendo una distancia para este último) así como construcciones hiperbólicas y cuatro teoremas elementales en geometría hiperbólica.

En el quinto capítulo estudiaremos los cuadriláteros de Saccheri y Legendre en el modelo del semiplano superior observando su comportamiento en este último y también, en el mismo modelo daremos una definición para la línea de Simson en geometría hiperbólica, la cual no requerirá de un triángulo circunscrito por una circunferencia como sucede con su homóloga euclidiana, presentando así, una conjetura con dicha circunferencia que circunscribe al triángulo. Finalmente, expondremos los siguientes tres ejemplos:

1. Los diferentes triángulos (cuyos puntos de Simson están en la circunferencia que los circunscribe respectivamente) que tiene una misma línea de Simson dada en el plano hiperbólico.
2. Los puntos de Simson, en un triángulo hiperbólico dado, determinados por el lugar geométrico descrito por el centro de una circunferencia euclidiana, la cual representa la línea de Simson en el plano hiperbólico cuando dicho centro está en el eje  $x$ .
3. Los puntos de Simson (análogamente al ejemplo anterior) en un triángulo isósceles dado en el plano hiperbólico.

Facultad de Ciencias, U.N.A.M.  
Septiembre de 2007



# Capítulo 1

## Geometría Euclidiana

### 1.1. Axiomas

Alrededor de 300 A.C. Euclides de Alexandria organizó parte del conocimiento de su época en su libro, los *Elementos de Geometría*, el cual fue usado los siguientes 2000 años. Él escribió cinco postulados

1. Es posible trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.
2. Es posible prolongar una línea recta finita continuamente en una línea recta.
3. Para cada centro y radio es posible describir su círculo.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una línea recta intersecta a dos líneas rectas y forma ángulos interiores en el mismo lado que suman menos de dos ángulos rectos, entonces las dos líneas rectas, si son prolongadas indefinidamente, se cortan del lado en que los ángulos interiores suman menos de dos ángulos rectos (Fig.1.1).

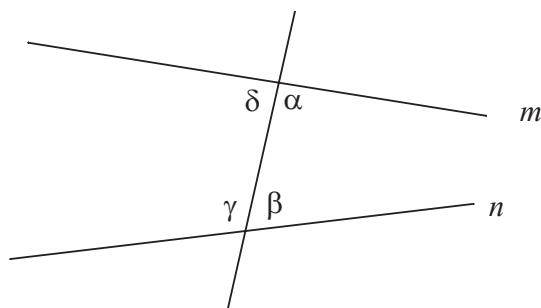


Figura 1.1: Las líneas  $m$  y  $n$  se cortan a la derecha ya que  $\alpha + \beta < 180^\circ$

Euclides define a las líneas rectas paralelas como líneas rectas que estando en el mismo plano y prolongándose indefinidamente en ambas direcciones no se encuentran en ninguna dirección.

Para indicar la expresión “es paralela con” utilizaremos el símbolo  $\parallel$ .

## 1.2. Figuras congruentes

**Definición 1.2.1.** *Se denomina figuras congruentes a las que tienen la misma forma y el mismo tamaño, es decir, una es la copia exacta de la otra u otras.*

Los ángulos que tienen el mismo número de grados son congruentes.

Para indicar la expresión “es congruente con” utilizaremos el símbolo  $\cong$ .

### Triángulos congruentes

Empezaremos con la definición de triángulos congruentes y como localizar sus partes correspondientes.

**Definición 1.2.2.** *Los triángulos congruentes son aquellos que tienen el mismo tamaño y la misma forma.*

**Observación 1.2.3.** *En triángulos congruentes, lados correspondientes son opuestos a ángulos iguales y ángulos correspondientes son opuestos a lados iguales.*

Si dos triángulos son congruentes, sus lados y sus ángulos correspondientes son iguales.

### Criterios básicos de triángulos congruentes

1. De la definición tenemos que si dos triángulos son congruentes, entonces sus partes correspondientes son congruentes (Fig.1.2).



Figura 1.2: Si  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  entonces  $\angle A \cong \angle A'$ ,  $\angle B \cong \angle B'$ ,  $\angle C \cong \angle C'$ ,  $a \cong a'$ ,  $b \cong b'$  y  $c \cong c'$ .

2. *Criterio Lado Angulo Lado* (LAL) Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro, entonces los triángulos son congruentes (Fig.1.3).



Figura 1.3: Si  $b \cong b'$ ,  $c \cong c'$  y  $\angle A \cong \angle A'$  entonces  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .

3. *Criterio Angulo Lado Angulo* (ALA) Si un lado y sus dos ángulos adyacentes de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro, entonces los triángulos son congruentes (Fig.1.4).



Figura 1.4: Si  $\angle A \cong \angle A'$ ,  $\angle C \cong \angle C'$  y  $b \cong b'$  entonces  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .

4. *Criterio Lado Lado Lado* (LLL) Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de otro, entonces los triángulos son congruentes (Fig.1.5).

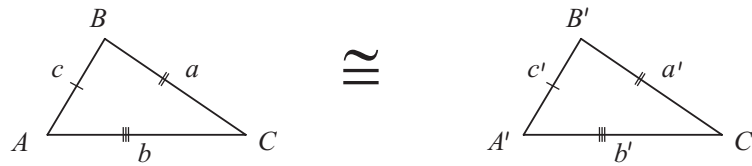


Figura 1.5: Si  $a \cong a'$ ,  $b \cong b'$  y  $c \cong c'$  entonces  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .

## 1.3. Polígonos semejantes

**Definición 1.3.1.** *La razón de dos cantidades o magnitudes es el cociente de la primera dividida por la segunda.*

Así la razón de  $a$  a  $a'$  es  $\frac{a}{a'}$  y se puede expresar como  $a : a'$ .

**Definición 1.3.2.** *Una proporción es una igualdad de dos razones.*

Los cuadriláteros  $\square ABCD$  y  $\square A'B'C'D'$  tienen lados proporcionales  $a, a', b$  y  $b'$  si la razón  $\frac{a}{a'}$  es igual la razón  $\frac{b}{b'}$  (Fig.1.6).

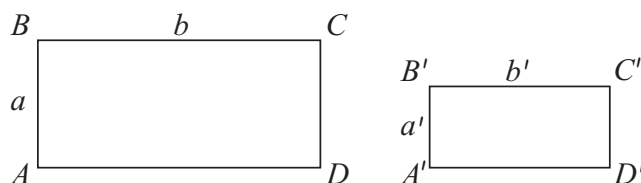


Figura 1.6: Los lados  $a, a', b$  y  $b'$  son proporcionales si  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

**Definición 1.3.3.** *Los polígonos semejantes son aquellos que tienen ángulos correspondientes congruentes y lados correspondientes proporcionales.*

Los polígonos semejantes tienen la misma forma aunque no el mismo tamaño.

Para indicar la expresión “es semejante con” utilizaremos el símbolo  $\sim$  y también para indicar la expresión “el área del triángulo  $\triangle ABC$ ” utilizaremos  $(\triangle ABC)$ .

### Triángulos semejantes

Al igual que los triángulos congruentes, empezaremos con la definición y como identificar sus partes correspondientes.

**Definición 1.3.4.** *Triángulos semejantes son aquellos que tienen la misma forma aunque no tengan, necesariamente, el mismo tamaño.*

**Observación 1.3.5.** *En triángulos semejantes, lados correspondientes se oponen ángulos iguales y ángulos correspondientes son determinados por pares de lados que tienen la misma razón.*

### Teoremas relativos a triángulos semejantes

Veamos ahora el teorema fundamental de proporcionalidad o primer teorema de Thales.

**Teorema 1.3.6. (*Primer teorema de Thales*)** En el triángulo  $\triangle ABC$  (Fig.1.7), si  $D$  y  $E$  están en los lados  $AB$  y  $CB$ , respectivamente, de tal forma que  $DE \parallel AC$  entonces

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}.$$

**Demostración.** Como los triángulos  $\triangle DEB$  y  $\triangle AEB$  (Fig.1.7(a)) tienen la misma altura ( $EF$ ), entonces

$$(\triangle AEB) = \frac{(BA)(EF)}{2} \text{ y } (\triangle DEB) = \frac{(BD)(EF)}{2}.$$

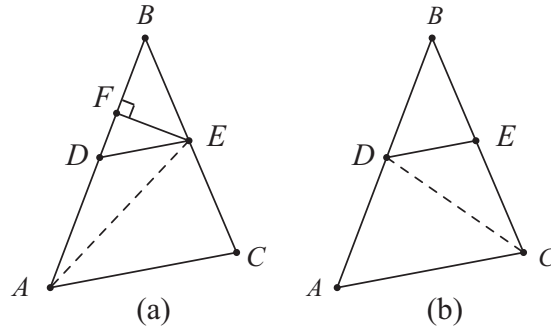


Figura 1.7:  $\triangle ABC \sim \triangle DEB$ .

Al dividir la primera igualdad entre la segunda obtenemos que

$$\frac{(\triangle AEB)}{(\triangle DEB)} = \frac{BA}{BD},$$

analogamente, usando la Figura 1.7(b), tenemos que

$$\frac{(\triangle BDC)}{(\triangle DEB)} = \frac{BC}{BE}.$$

Ahora, los triángulos  $\triangle BDC$  y  $\triangle AEB$  comparten el triángulo  $\triangle DEB$ . Y como los triángulos  $\triangle DEA$  y  $\triangle EDC$  tienen como base el segmento  $DE$  y las perpendiculares desde  $A$  y  $C$  a  $DE$  son iguales ya que  $DE \parallel AC$ , entonces

$$(\triangle AEB) = (\triangle BDC).$$

Por lo tanto

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE} \text{ y } \triangle ABC \sim \triangle DEB.$$

□

El recíproco del teorema anterior también es cierto, es decir,

**Teorema 1.3.7.** En el triángulo  $\triangle ABC$  (Fig.1.8), si  $D$  y  $E$  están en los lados  $AB$  y  $CB$ , respectivamente, de tal forma que

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE},$$

entonces  $DE \parallel AC$ .

**Demostración.** Suponemos que  $DE$  no es paralela a  $AC$  y encontramos un punto  $F$  en  $CB$  tal que  $DF \parallel AC$  (Fig.1.8).

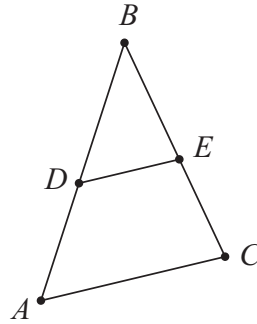


Figura 1.8:  $DE \parallel AC$ .

Entonces por el Teorema 1.3.6 y la hipótesis del Teorema 1.3.7 tenemos, respectivamente, que

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BF} \quad \text{y} \quad \frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$$

lo que implica que  $BF = BE$ , es decir,  $E = F$ .

Por lo tanto

$$DE = DF \quad \text{y} \quad DE \parallel AC.$$

□

**Observación 1.3.8.** La relación  $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$  del primer teorema de Thales es equivalente a

$$\frac{BD + DA}{BD} = \frac{BE + EC}{BE},$$

que es equivalente a

$$\frac{DA}{BD} = \frac{EC}{BE}.$$

Esto es, si tenemos dos rectas paralelas, la proporción que hay entre las rectas transversales que las cortan se conserva, sin importar quienes son estas rectas transversales.

El siguiente teorema es consecuencia inmediata del teorema fundamental de proporcionalidad.

**Teorema 1.3.9. (*Segundo teorema de Thales*)** Consideremos tres rectas y dos rectas transversales a éstas como se muestra en la Figura 1.9. Tenemos que si  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  son paralelas entonces  $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ . Recíprocamente, si  $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$  y dos de las rectas  $AD$ ,  $BE$  o  $CF$  son paralelas entonces las tres rectas son paralelas.

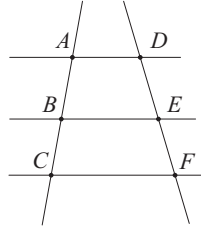


Figura 1.9: Las rectas  $AC$  y  $DF$  son transversales a  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$ .

**Demostración.** Consideramos la transversal  $AF$  a las tres rectas  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  y llamamos  $G$  al punto de intersección de  $AF$  con  $BE$  (Fig.1.10).

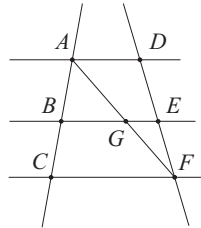


Figura 1.10:  $G$  es el punto de intersección de  $AF$  con  $BE$ .

Tenemos, aplicando la Observación 1.3.8 a los triángulos  $\triangle ACF$  y  $\triangle FAD$ , que las rectas  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  son paralelas si y sólo si

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GF} \text{ y } \frac{FG}{GA} = \frac{FE}{ED}.$$

Luego, son paralelas si y sólo si

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ED}{FE} = \frac{DE}{EF}.$$

Ahora, supongamos que  $BE$  y  $CF$  son paralelas y que la otra recta  $AD$  cumple que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

Sea  $G$  el punto de intersección de  $AF$  con  $BE$ . Como  $BE$  y  $CF$  son paralelas, tenemos que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GF}.$$

Ahora bien, como  $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$  tenemos que

$$\frac{DE}{EF} = \frac{AG}{GF}.$$

Luego, por el primer teorema de Thales,  $GE$  y  $AD$  son paralelas y por lo tanto  $BE$  es paralela a  $AD$ .

□

**Teorema 1.3.10. (Criterio AAA<sub>p</sub> para semejanza)** Si dos triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  tienen ángulos correspondientes iguales, entonces son semejantes.

**Demostración.** Suponemos que  $A'B' < AB$  (Fig.1.11). Encontramos el punto  $D$  en  $AB$  que cumpla que  $BD = A'B'$  y el punto  $F$  en  $BC$  tal que

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BD}.$$

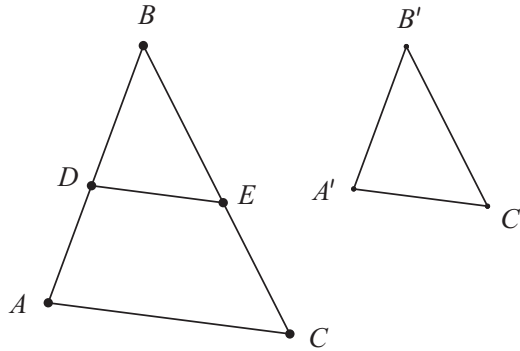


Figura 1.11: Los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  son semejantes.

Entonces por el Teorema 1.3.7,  $DE \parallel AC$ , por lo cual

$$\angle BDE = \angle BAC.$$



Ahora, por hipótesis el ángulo  $\angle BAC$  es igual al ángulo  $\angle B'A'C'$ , entonces los triángulos  $\triangle DBE$  y  $\triangle A'B'C'$  son congruentes por (ALA).

Como  $BE = B'C'$  y  $BD = B'A'$ , tenemos que

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{BA}{B'A'},$$

por lo tanto, los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  son semejantes.  $\square$

**Corolario 1.3.11.** *Dos triángulos rectángulos son semejantes si un ángulo agudo de uno de ellos es congruente con un ángulo agudo del otro.*

**Teorema 1.3.12. (Criterio LAL<sub>p</sub> para semejanza)** *Si dos triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  son tales que*

$$\angle ABC = \angle A'B'C' \quad \text{y} \quad \frac{BA}{B'A'} = \frac{BC}{B'C'},$$

*entonces son semejantes.*

**Demostración.** Sean los puntos  $D$  en  $BA$  y  $E$  en  $BC$  tales que  $BD = B'A'$  y  $BE = B'C'$  (Fig.1.12). Al sustituir ambas igualdades en la hipótesis obtenemos que

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}.$$

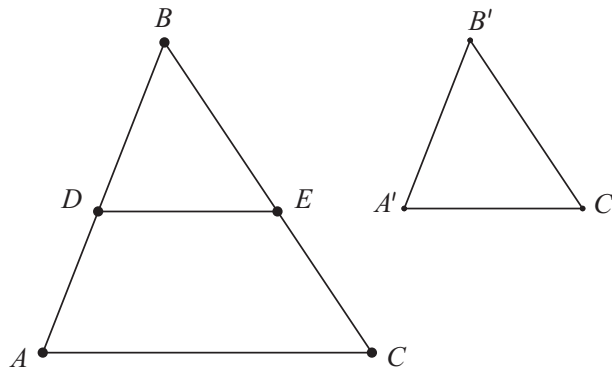


Figura 1.12: Los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  son semejantes.

Por el Teorema 1.3.7,  $DE \parallel AC$ , entonces

$$\angle BDE = \angle BAC, \angle BED = \angle BCA$$

y por el Teorema 1.3.10, los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  son semejantes.  $\square$

## 1.4. Medida de ángulos y arcos en una circunferencia

En este trabajo nos interesa el comportamiento de los ángulos en la circunferencia, por lo cual definiremos a continuación los ángulos centrales e inscritos.

**Definición 1.4.1.** *Un ángulo central tiene su vértice en el centro de una circunferencia  $\zeta$  y sus lados son radios de  $\zeta$ .*

**Definición 1.4.2.** *Un ángulo inscrito en una circunferencia  $\zeta$  tiene su vértice en  $\zeta$  y sus lados son cuerdas de  $\zeta$ .*

Un ángulo inscrito en un arco de la circunferencia  $\zeta$  tiene su vértice en  $\zeta$  y sus lados interseccan los puntos de  $\zeta$  que delimitan el arco.

### Teoremas sobre medidas de ángulos

**Teorema 1.4.3.** *Si  $A$  y  $B$  son dos puntos en una circunferencia, entonces para todos los puntos  $C$  en uno de los arcos que determinan  $A$  y  $B$ , el ángulo  $\angle ACB$  es constante.*

**Demostración.** Dados tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  en una circunferencia  $\zeta$  con centro  $O$ , también dada (Fig.1.13), trazamos las líneas que los unen con  $O$  determinando los triángulos isósceles  $\triangle AOC$  y  $\triangle BOC$ .

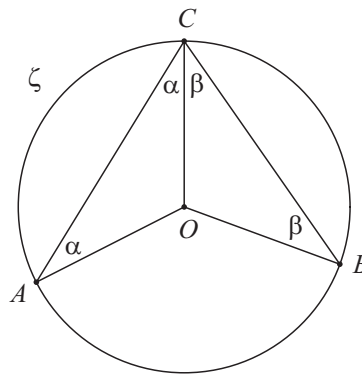


Figura 1.13:  $\alpha + \beta$  es constante.

Entonces los ángulos en los vértices  $A$  y  $C$  del triángulo  $\triangle AOC$  son iguales y lo mismo pasa en los vértices  $B$  y  $C$  del triángulo  $\triangle BOC$ . Ahora, ya que la suma de los ángulos en cualquier triángulo es  $\pi$ , tenemos que

$$\angle AOC = \pi - 2\alpha \quad \text{y} \quad \angle BOC = \pi - 2\beta,$$

y como el ángulo total alrededor de cualquier punto es  $2\pi$ , entonces

$$\angle AOB = 2\pi - ((\pi - 2\alpha) + (\pi - 2\beta)) = 2(\alpha + \beta).$$

Observamos que el ángulo  $\angle AOB$  es constante para cualquier punto  $C$  en los arcos determinados por  $A$  y  $B$ . Por lo tanto  $\alpha + \beta$  es constante.

□

Un caso especial del Teorema 1.4.3 es cuando  $A$ ,  $O$  y  $B$  están en una línea recta, entonces

$$2(\alpha + \beta) = \pi,$$

lo que implica que

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Con lo cual hemos demostrado el siguiente teorema.

**Teorema 1.4.4.** *Si  $A$  y  $B$  son dos puntos en una circunferencia en la que determinan un diámetro (Fig.1.14) y  $C$  es cualquier otro punto en la circunferencia, entonces el ángulo  $\angle ACB$  es recto.*

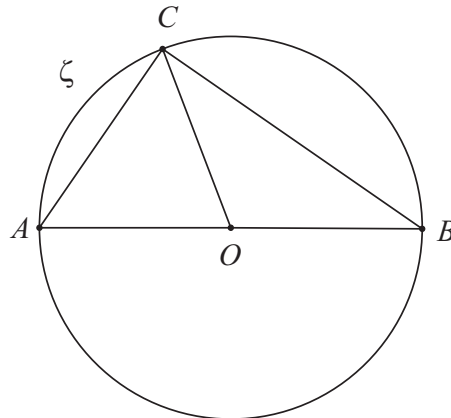


Figura 1.14: El ángulo  $\angle ACB$  es recto.

Los siguientes dos teoremas nos muestran propiedades importantes respecto a los ángulos externos de un triángulo y las líneas paralelas.

**Teorema 1.4.5.** *Un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los ángulos internos remotos.*

**Demostración.** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo y  $D$  un punto en la extensión de  $BC$  por  $C$  (Fig.1.15).

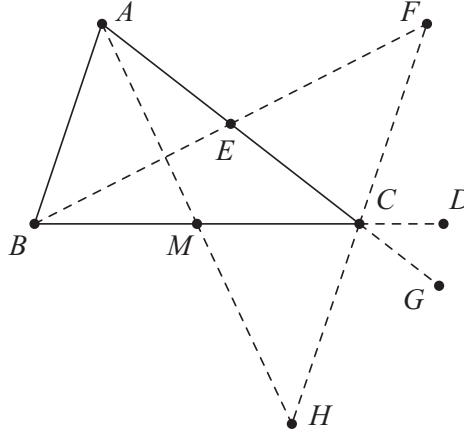


Figura 1.15:  $\angle ACD > \angle BAC$  y  $\angle ACD > \angle ABC$ .

Siendo  $E$  el punto medio de  $AC$ , trazamos  $BE$  y la prolongamos hasta un punto  $F$  tal que  $BE = EF$ . Por construcción observamos que

$$AE = EC, BE = EF \text{ y } \angle AEB = \angle CEF,$$

entonces los triángulos  $\triangle AEB$  y  $\triangle CEF$  son congruentes por LAL y por lo cual

$$\angle BAE = \angle FCE.$$

Ya que  $\angle ACD > \angle FCE$  entonces  $\angle ACD > \angle BAC$ .

Analogamente, como  $\angle ACD = \angle BCG$ , sea  $M$  el punto medio de  $BC$ . Trazamos  $AM$  y la prolongamos hasta un punto  $H$  tal que  $AM = MH$ .

Ahora, tenemos que

$$BM = MC, AM = MH \text{ y } \angle CMH = \angle AMB,$$

entonces los triángulos  $\triangle ABM$  y  $\triangle CHM$  son congruentes por LAL y por lo cual

$$\angle ABC = \angle HCM.$$

Ya que  $\angle ACD = \angle BCG > \angle HCM$ , entonces  $\angle ACD > \angle ABC$ . Por lo tanto

$$\angle ACD > \angle BAE \text{ y } \angle ACD > \angle ABC.$$

□

**Teorema 1.4.6.** *Si dos líneas son cortadas por una transversal y con ésta forman ángulos alternos internos iguales, entonces las líneas son paralelas.*

**Demostración.** Sea  $PQ$  una transversal que corta a las líneas  $l$  y  $m$  de tal forma que los ángulos  $\angle APQ$  y  $\angle PQD$  son iguales (Fig.1.16).

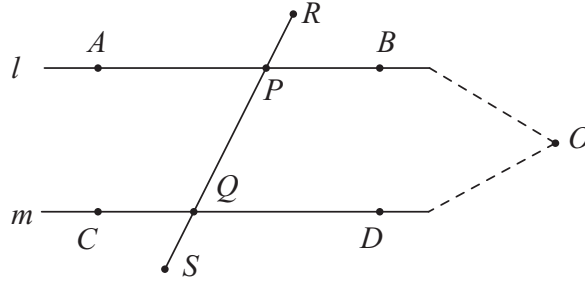


Figura 1.16: Las líneas  $l$  y  $m$  son paralelas.

Supongamos que  $l$  y  $m$  se intersectan en un punto  $O$  formando el triángulo  $\triangle OPQ$ . Pero si esto ocurre, tenemos que

$$\angle BPR = \angle APQ = \angle PQD,$$

lo cual contradice el Teorema 1.4.5, ya que el ángulo  $\angle BPR$  es un ángulo exterior del triángulo  $\triangle OPQ$ .

Por lo tanto las líneas  $l$  y  $m$  son paralelas.

□

# Capítulo 2

## Geometría Moderna

En este capítulo presentaremos algunos resultados de geometría moderna y serán de gran importancia para la construcción de nuestro modelo de geometría hiperbólica.

### 2.1. Líneas antiparalelas

Primeramente veamos la definición de líneas antiparalelas y algunas de sus propiedades

**Definición 2.1.1.** *Si dos pares de líneas están de tal forma que la bisectriz interior del ángulo formado por el primer par es transversal al segundo par y los ángulos interiores en el mismo lado de la transversal son iguales, las líneas del segundo par son antiparalelas la una a la otra con respecto a las líneas del primer par.*

Así, si en la Figura 2.1 las líneas  $c$  y  $d$  forman ángulos iguales  $\alpha$  y  $\beta$  con la bisectriz  $l$  de las líneas  $a$  y  $b$ , entonces, por la definición anterior,  $c$  y  $d$  son antiparalelas con respecto a  $a$  y  $b$ .

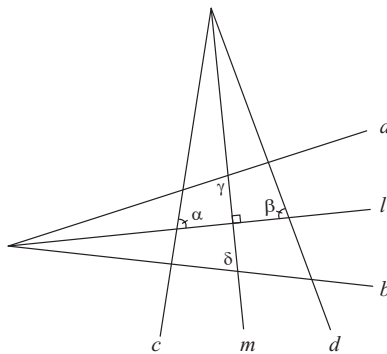


Figura 2.1: Las líneas  $c$  y  $d$  son antiparalelas con respecto a  $a$  y  $b$

**Observación 2.1.2.** Puesto que  $c, d$  y  $l$  determinan un triángulo isósceles (Fig.2.1), se sigue que la bisectriz  $m$  de  $c$  y  $d$  es perpendicular a  $l$ . Así,  $a, b$  y  $m$  determinan también un triángulo isósceles, entonces los ángulos  $\gamma$  y  $\delta$  son iguales.

Como consecuencia inmediata de la observación 2.1.2 tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.3.** Si dos pares de líneas están colocadas de tal forma que la líneas del primer par son antiparalelas con respecto a las líneas del segundo par, entonces las líneas del segundo par son antiparalelas con respecto a la líneas del primer par.

La siguiente proposición también es inmediata y la ejemplificamos en la Figura 2.2.

**Proposición 2.1.4.** Si con respecto a un par de líneas, dos líneas son antiparalelas a una misma tercera línea, ellas son paralelas.

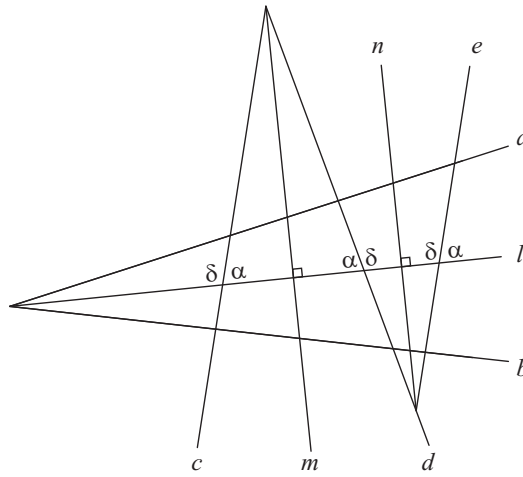


Figura 2.2: Las líneas  $c$  y  $e$  son paralelas

Así, en la Figura 2.2 las líneas  $c$  y  $d$  son antiparalelas con respecto a las líneas  $a$  y  $b$ , también las líneas  $d$  y  $e$  son antiparalelas con respecto a las líneas  $a$  y  $b$  observando que las líneas  $c$  y  $e$  son paralelas.

## 2.2. Cuadriláteros cíclicos

Ahora definiremos cuando un cuadrilátero es cíclico junto con sus propiedades y un resultado con respecto a las líneas antiparalelas.

**Definición 2.2.1.** A un conjunto de puntos que estén todos en una misma circunferencia se les llama puntos concíclicos. Un cudrilátero cuyos vértices son concíclicos le llamamos cuadrilátero cíclico.

**Teorema 2.2.2.** *Los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico son suplementarios, es decir, suman  $180^\circ$ .*

**Demostración.** Si suponemos que el centro de la circunferencia está dentro del cuadrilátero (Fig.2.3), los triángulos  $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCD, \triangle ODA$  son isósceles. También sabemos que la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es  $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$  entonces

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ.$$

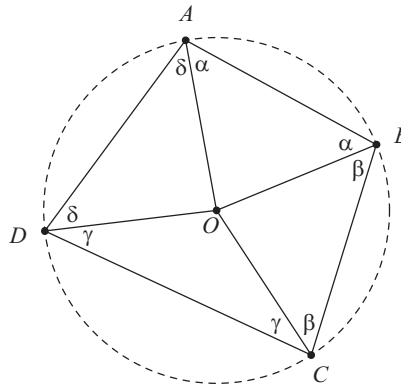


Figura 2.3: Cuadrilátero cíclico

Cuando el centro de la circunferencia está sobre un lado del cuadrilátero (Fig.2.4), tenemos que  $2\delta + 2\alpha + 2\beta = 360^\circ$  entonces

$$(\delta + \alpha) + \beta = 180^\circ \text{ y } (\alpha + \beta) + \delta = 180^\circ.$$

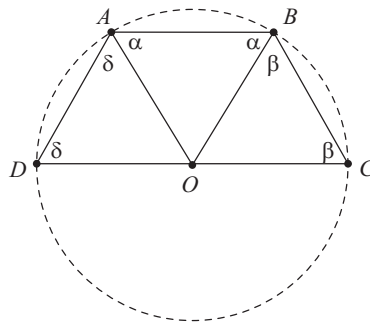


Figura 2.4: Cuadrilátero cíclico



Con el razonamiento anterior, si el centro de la circunferencia está fuera del cuadrilátero (Fig.2.5), observamos que el ángulo  $\angle CDA = (\delta - \gamma)$ , análogamente,  $\angle BCD = (\beta - \gamma)$ , teniendo así que  $(\delta - \gamma) + \delta + 2\alpha + \beta + (\beta - \gamma) = 2\alpha + 2\beta - 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$  entonces

$$\alpha + \beta - \gamma + \delta = \alpha + \beta + (\delta - \gamma) = 180^\circ.$$

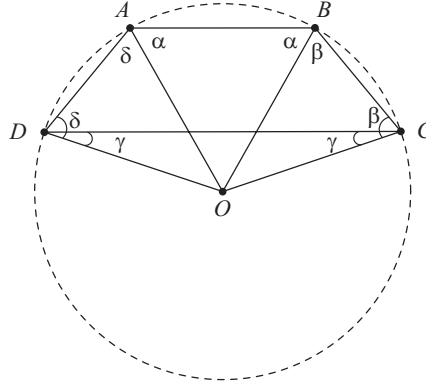


Figura 2.5: Cuadrilátero cíclico

□

El siguiente Teorema relaciona las líneas antiparalelas con los cuadriláteros cíclicos.

**Teorema 2.2.3.** *Si dos líneas que son antiparalelas con respecto a otras dos se cortan en cuatro puntos distintos, estos cuatro puntos son los vértices de un cuadrilátero cíclico e inversamente, cada par de lados opuestos en un cuadrilátero cíclico es antiparalelo con respecto al otro par.*

**Demostración.** Sean  $a$  y  $b$  junto con  $c$  y  $d$  dos pares de líneas antiparalelas (Fig.2.6) y  $O$  el punto de intersección de las bisectrices de cada par. Bastará con probar que la suma de los ángulos opuestos en un cuadrilátero determinado por los dos pares de líneas antiparalelas, ya mencionadas, suman  $180^\circ$ .

La suma de los ángulos del cuadrilátero  $\square ONDM$  es

$$90^\circ + \alpha + \delta + (180^\circ - \beta) = 360^\circ$$

obteniendo que

$$\delta = \beta - \alpha + 90^\circ.$$

Por otro lado la suma de los ángulos del cuadrilátero  $\square BKOL$  es

$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \varepsilon) + \beta + 90^\circ = 360^\circ$$

obteniendo que

$$\varepsilon = \beta - \alpha + 90^\circ$$

lo que implica  $\delta = \varepsilon$  y como  $\gamma = 180^\circ - \varepsilon$ , tenemos que

$$\delta + \gamma = \varepsilon + \gamma = \varepsilon + (180^\circ - \varepsilon) = 180^\circ$$

por lo tanto el cuadrilátero  $\square ABCD$  es cíclico.

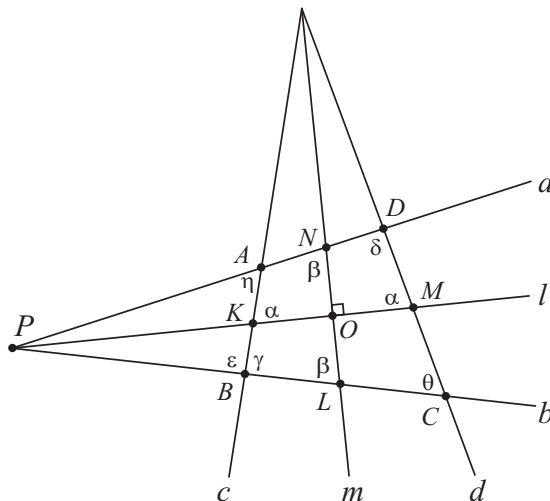


Figura 2.6:  $a$  y  $b$  son antiparalelas con respecto a  $c$  y  $d$ .

□

**Observación 2.2.4.** Como tenemos la igualdad de ángulos (Fig.2.6)

$$\delta = \varepsilon \text{ y } \eta = \theta,$$

entonces los triángulos  $\triangle PAB$  y  $\triangle PCD$  son inversamente semejantes por el criterio (LAL<sub>p</sub>).

## 2.3. Potencia de un punto

A continuación definiremos la potencia de un punto con respecto a una circunferencia para posteriormente definir el eje radical de dos circunferencias y después el eje radical de una familia de circunferencias.

**Definición 2.3.1.** La potencia de un punto  $P$  respecto a una circunferencia dada es el producto de sus distancias a cualquier par de puntos en la circunferencia que sean colineales con él.

**Observación 2.3.2.** La potencia de un punto es negativa, cero o positiva de acuerdo si el punto está dentro, en, o fuera de la circunferencia.

Verificaremos ahora que este producto es constante para un punto fijo.

Sea  $P$  un punto fuera de una circunferencia  $\zeta$ . Al trazar dos líneas  $l$  y  $m$  que intersectan a  $\zeta$  en cuatro puntos  $A, B, C$ , y  $D$  determinamos el cuadrilátero cíclico  $\square ABCD$  (Fig.2.7).

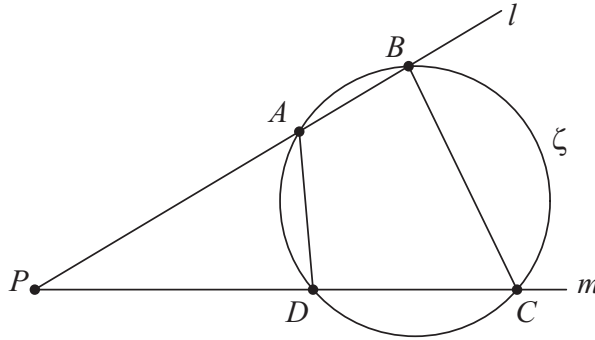


Figura 2.7: Potencia de un punto

Para los triángulos  $\triangle PAD$  y  $\triangle PCB$  tenemos que los ángulos  $\angle PBC$  y  $\angle PDA$  son iguales, ya que ambos son suplemento del ángulo  $\angle ADC$  en el cuadrilátero  $\square ABCD$ . También, dichos triángulos tienen ángulo común en  $P$ , por lo cual son semejantes ( $AAA_p$ ), lo que implica que

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$$

entonces  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$  para cualquier par de puntos en  $\zeta$ .

Si  $l$  es tangente a  $\zeta$  en el punto  $C$  y  $m$  es un diámetro de  $\zeta$  (Fig.2.8), observamos que

$$\angle PCO = 90^\circ \text{ y } \angle PCA = 90^\circ - \angle ACO.$$

El ángulo  $\angle ACB$  es recto ya que es un ángulo inscrito en un semicírculo, por lo cual

$$\angle OCB = 90^\circ - \angle ACO$$

lo que implica que

$$\angle PCA = \angle OCB.$$

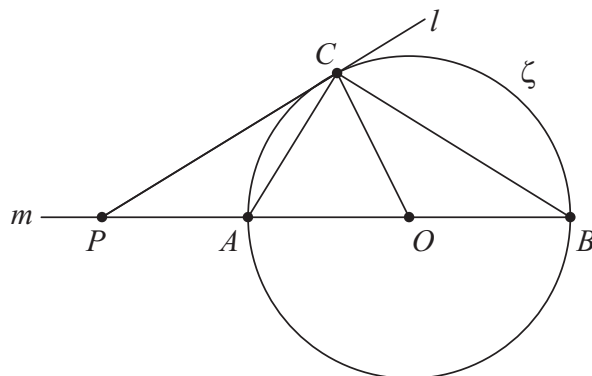


Figura 2.8:  $PC$  es tangente a  $\zeta$

Como el triángulo  $\triangle OCB$  es isósceles los ángulos  $\angle OCB$  y  $\angle PBC$  son iguales, entonces, para los triángulos  $\triangle PAC$  y  $\triangle PCB$  los ángulos  $\angle PCA$  y  $\angle PBC$  son iguales, así como el ángulo en  $P$ . Por lo tanto son semejantes ( $AAA_p$ ), implicando que

$$\frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PC}$$

y por lo tanto

$$\overline{PC}^2 = PB \cdot PA.$$

**Observación 2.3.3.** Por el teorema de Pitágoras, la potencia de  $P$  con respecto a una circunferencia  $\zeta$  con centro  $O$  y radio  $r$  es  $\overline{PO}^2 - r^2$ , ya que  $\overline{PO}^2 = r^2 + \overline{PC}^2$  (Fig.2.9). Es decir, si  $P$  está fuera de la circunferencia su potencia es igual al cuadrado de la longitud de una tangente de él a la circunferencia.

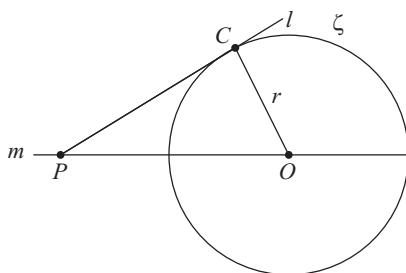


Figura 2.9: La potencia de  $P$  con respecto a una circunferencia  $\zeta$  con centro  $O$  y radio  $r$  es  $\overline{PO}^2 - r^2$

## 2.4. Eje radical

Después de definir al eje radical de dos circunferencias, el cuál va a resultar ser una línea recta, mostraremos su relación con las circunferencias ortogonales.

**Definición 2.4.1.** *El eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos cuyas potencias con respecto a las dos circunferencias es igual.*

Mediante los siguientes dos teoremas probaremos que el eje radical es una línea recta.

**Teorema 2.4.2.** *El lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a dos puntos dados es constante, es una línea recta perpendicular a la línea determinada por los dos puntos.*

**Demostración.** Sean  $A, B$  los puntos dados y sea  $D$  un punto tal que  $\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = d^2$ , donde el valor de  $d$  esta dado.

Si suponemos que  $DC$  es la perpendicular desde  $D$  a  $AB$  (Fig.2.10), entonces por el teorema de Pitágoras

$$\overline{AD}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{DC}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{BC}^2$$

sumando  $\overline{AC}^2$  y restando  $\overline{DB}^2$  nos da

$$\overline{AD}^2 - \overline{DB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = d^2.$$

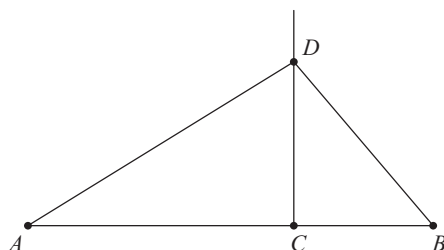


Figura 2.10:  $DC$  perpendicular a  $AB$

Como

$$\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 = (AC - CB)(AC + CB) = d^2$$

y

$$(AC + CB) = AB$$

tenemos que

$$AC - CB = \frac{d^2}{AB}.$$

Ahora hay sólo un punto  $C$  en  $AB$  que satisface esta igualdad, entonces los segmentos  $AC$  y  $BC$  pueden ser construidos con regla y compás. Por lo tanto  $C$ , que es el pie de la perpendicular desde cualquier punto  $D$  cuyas potencias a las circunferencias es igual, es un punto fijo de  $AB$ , por lo que el lugar geométrico de los puntos  $D$  es la perpendicular a  $AB$  por  $C$ .  $\square$

**Teorema 2.4.3.** *El eje radical de dos circunferencias es una línea recta que es perpendicular a la línea de los centros de las circunferencias.*

**Demostración.** Consideremos dos circunferencias no concéntricas cuyos centros son  $O$  y  $O'$  y cuyos radios son  $r$  y  $r'$  respectivamente.

Sea  $P$  un punto que tiene la misma potencia con respecto a estas circunferencias y dibujamos  $PC$  perpendicular a la línea  $OO'$  (Fig.2.11).

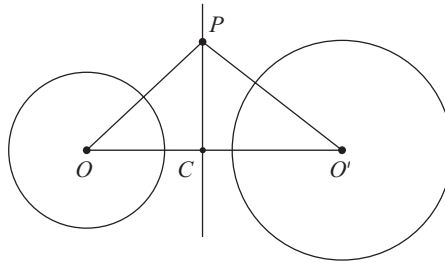


Figura 2.11: El eje radical es perpendicular a  $OO'$

Entonces

$$\overline{PO}^2 - r^2 = \overline{PO'}^2 - r'^2$$

sumando  $r^2$  y restando  $\overline{CP}^2$  nos da

$$\overline{OC}^2 - \overline{CO'}^2 = r^2 - r'^2.$$

Como

$$\overline{OC}^2 - \overline{CO'}^2 = (OC + CO')(OC - CO')$$

y

$$OC + CO' = OO'$$

tenemos que

$$OC - CO' = \frac{r^2 - r'^2}{OO'}.$$

Y por el teorema anterior, el lugar geométrico de los puntos  $P$  es una línea recta perpendicular a  $OO'$  que pasa por  $C$ .  $\square$

## 2.5. Circunferencias ortogonales

Estas circunferencias son de suma importancia en los capítulos posteriores para definir las líneas perpendiculares en nuestro modelo de geometría hiperbólica.

**Definición 2.5.1.** *Dos circunferencias  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  son ortogonales si existe un radio de  $\zeta_1$  que es tangente a  $\zeta_2$  en el punto de intersección de ambas circunferencias y viceversa (Fig.2.12).*

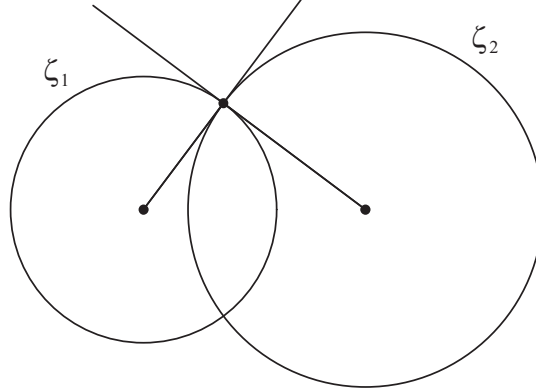


Figura 2.12: Circunferencias ortogonales

**Teorema 2.5.2.** *El centro de una circunferencia que corta ortogonalmente a dos circunferencias está en el eje radical de estas últimas; y si una circunferencia cuyo centro está en el eje radical de dos circunferencias es ortogonal a una de ellas, es también ortogonal a la otra.*

**Demostración.** Si  $P$  es el centro de la circunferencia  $\zeta_3$  que es ortogonal a las circunferencias  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  (Fig.2.13), entonces de los triángulos rectángulos  $\triangle PAO$  y  $\triangle O'A'P$  tenemos que

$$\overline{PA}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{OA}^2$$

y

$$\overline{PA'}^2 = \overline{PO'}^2 - \overline{O'A'}^2.$$

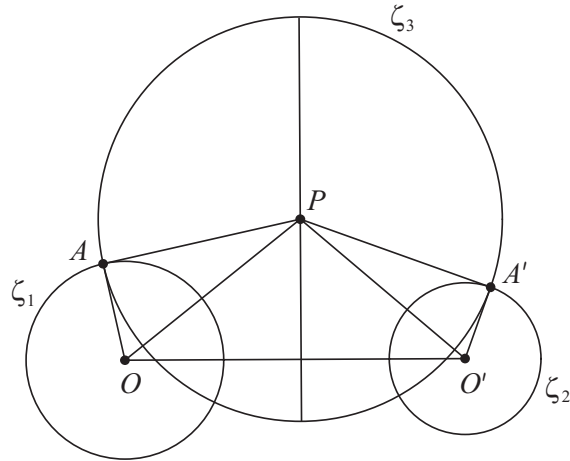


Figura 2.13:  $\zeta_3$  ortogonal a  $\zeta_1$

Como  $PA = PA'$  por ser radios de  $\zeta_3$ , entonces  $P$  tiene potencias iguales con respecto a la circunferencias  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  y por lo tanto está en su eje radical.

Ahora, sea  $Q$  un punto en el eje radical de  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  (Fig.2.14). Tracemos la circunferencia  $\zeta_4$  con centro en  $Q$  y ortogonal a la circunferencia  $\zeta_1$ . Entonces como  $Q$  tiene la misma potencia con respecto a  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  y el ángulo  $\angle OAQ$  es recto, se sigue que el ángulo  $\angle QA'O'$  también es recto y la circunferencia  $\zeta_4$  es ortogonal a  $\zeta_2$ .

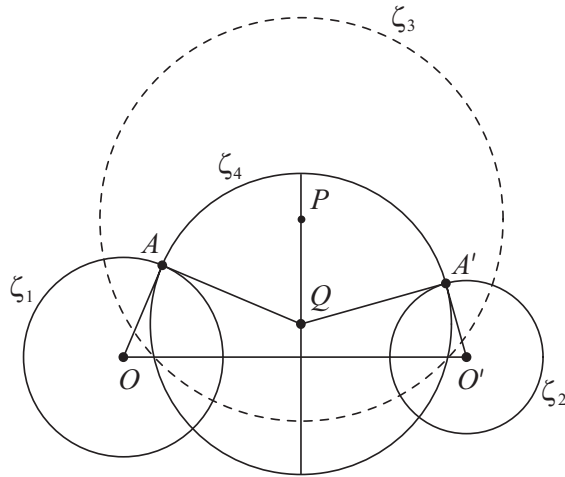


Figura 2.14:  $\zeta_4$  ortogonal a  $\zeta_1$

□



## 2.6. Circunferencias coaxiales

Las circunferencias coaxiales están intimamente relacionadas con las circunferencias ortogonales. Además nos serán de utilidad para las construcciones en nuestro modelo de geometría hiperbólica.

**Definición 2.6.1.** *Si un conjunto de circunferencias comparte el mismo eje radical por pares se dice que las circunferencias son coaxiales. El eje radical de los pares se llama eje radical del conjunto coaxial.*

Hay tres tipos de circunferencias coaxiales. Las que se cortan en dos puntos (Fig.2.15), las que se cortan en un solo punto (Fig.2.16) y las que no se cortan (Fig.2.17).

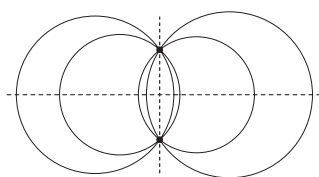


Figura 2.15: Circunferencias coaxiales que se cortan en dos puntos

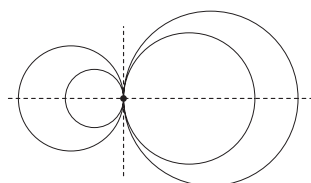


Figura 2.16: Circunferencias coaxiales que se cortan en un solo punto

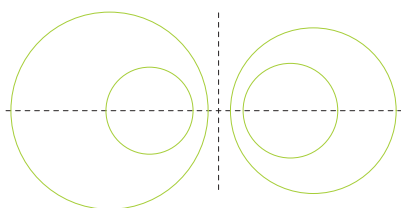


Figura 2.17: Circunferencias coaxiales que no se cortan

Una consecuencia inmediata del Teorema 2.5.2 es el siguiente teorema, el cual enunciaremos sin demostración.

**Teorema 2.6.2.** *Todas las circunferencias que son ortogonales a dos circunferencias dadas  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  pertenecen a una familia de circunferencias coaxiales cuya línea de los centros es el eje radical de las dos circunferencias.*

Tenemos tres posibles casos (Fig.2.18)

- (a)  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  no se cortan
- (b) se cortan en un punto
- (c) se cortan en dos puntos

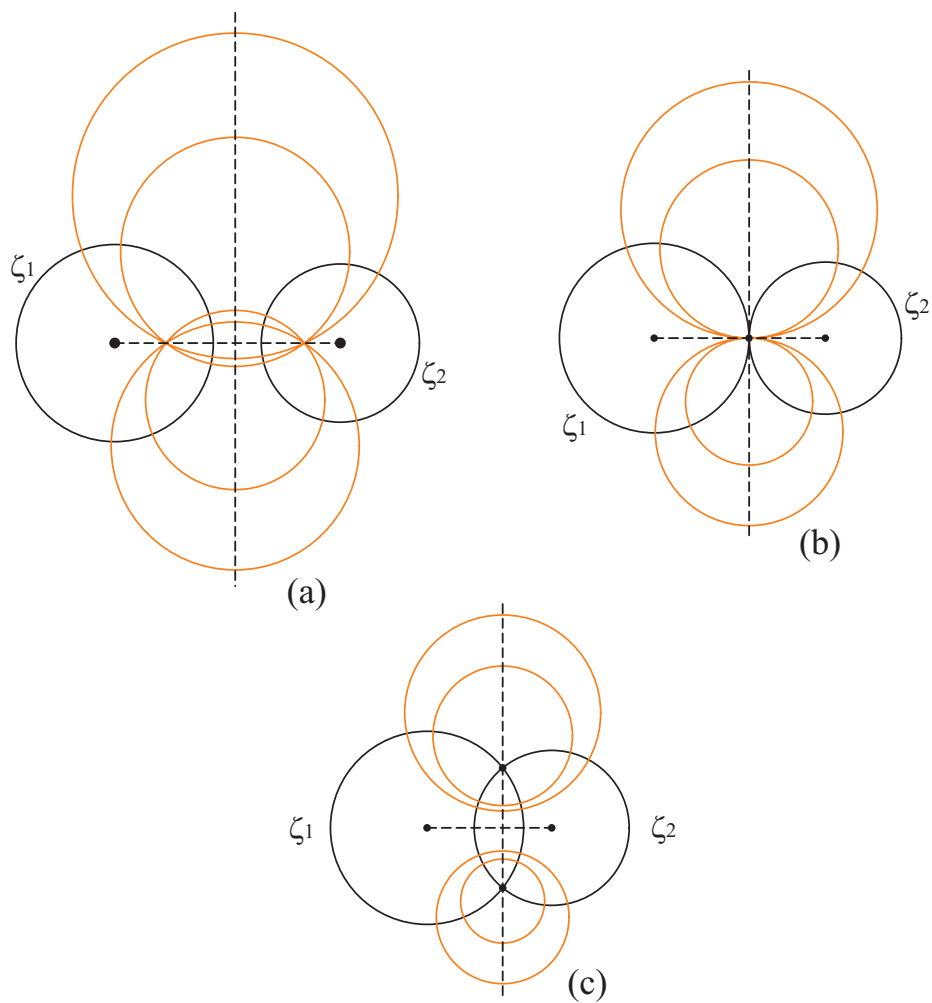


Figura 2.18: Familias de circunferencias coaxiales.

## Sistemas de circunferencias ortogonales

Se concluye, del Teorema 2.6.2, que una circunferencia que corta ortogonalmente a cada una de las circunferencias de una familia coaxial, formada por circunferencias que no se cortan, pertenece a una familia de circunferencias coaxiales que se cortan y tienen sus centros en el eje radical de la primera familia (Fig.2.19).

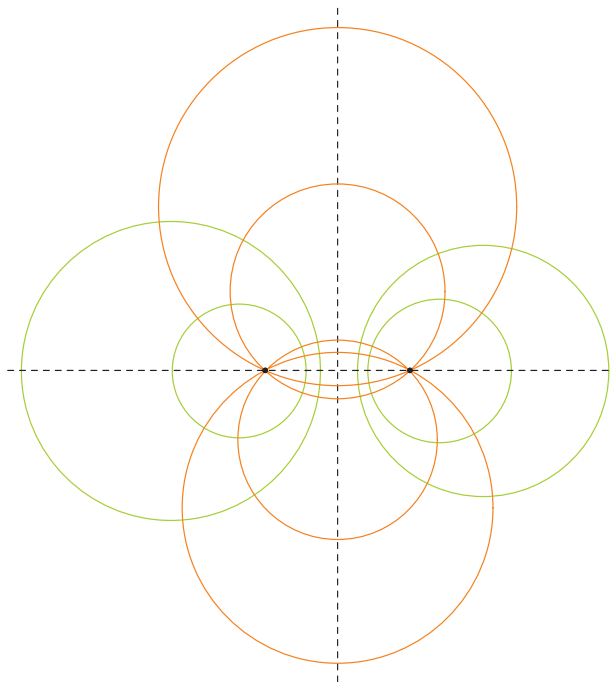


Figura 2.19: Sistema de circunferencias ortogonales

## 2.7. Inversión

Los resultados que mostraremos aquí serán útiles para poder construir ciertas líneas de nuestro modelo de geometría hiperbólica, así como la equivalencia entre modelos hiperbólicos.

**Definición 2.7.1.** Si  $P$  y  $P'$  son dos puntos colineales con el centro  $O$  de una circunferencia  $\zeta$  cuyo radio es  $r > 0$  de tal forma que  $OP \cdot OP' = r^2$ , se dice que cada uno de los puntos  $P$  y  $P'$  es inverso del otro con respecto a la circunferencia  $\zeta$ . El punto  $O$  es el centro de inversión, la circunferencia  $\zeta$  es la circunferencia de inversión y  $r$  es el radio de inversión.

Veamos como, dadas una circunferencia  $\zeta$  y un punto  $P$  que no está en  $\zeta$ , es posible construir el inverso de  $P$  con respecto a  $\zeta$ .

**Construcción 2.7.2.** Dado un punto  $P$  y una circunferencia  $\zeta$  con su centro encontrar el punto inverso ( $P'$ ) de  $P$ .

Sea  $P$  un punto dado y  $\zeta$  una circunferencia dada (Fig.2.20)

1. Trazamos la línea que une el centro  $O$  de la circunferencia con  $P$  y la perpendicular a  $OP$  en  $O$  siendo  $N$  y  $S$  las intersecciones de esta perpendicular con la circunferencia  $\zeta$ .
2. Trazamos la línea  $PN$  que intersecta a  $\zeta$  en  $R$ .
3. Trazamos la línea  $RS$  que intersecta a  $OP$  en  $P'$ .

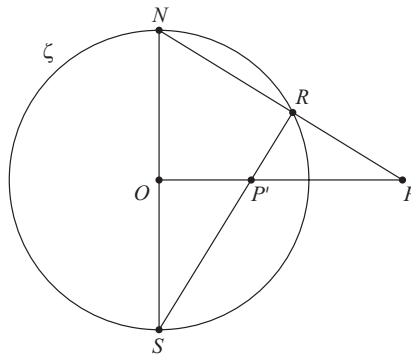


Figura 2.20: Construcción de un punto inverso

Afirmamos que  $P'$  es el inverso de  $P$  con respecto a  $\zeta$ .

Veamos ahora su demostración.

**Demostración.** Los triángulos  $\triangle RP'P$  y  $\triangle OP'S$  en la Figura 2.20 son semejantes ( $ALA_p$ ), puesto que sus ángulos respectivos  $\angle P'RP$  y  $\angle P'OS$  son rectos y los ángulos  $\angle RP'P$  y  $\angle OP'S$  son iguales, ya que son opuestos por el vértice. También, para los triángulos  $\triangle RP'P$  y  $\triangle NOP$ , sus ángulos respectivos  $\angle P'RP$  y  $\angle PON$  son rectos y tienen ángulo común en  $P$ , entonces son semejantes ( $ALA_p$ ). Teniendo que

$$\triangle OP'S \sim \triangle RP'P \text{ y } \triangle RP'P \sim \triangle NOP$$

por lo tanto

$$\triangle OP'S \sim \triangle NOP$$

la última semejanza implica que

$$\frac{OP'}{ON} = \frac{OS}{OP}$$

entonces

$$OP' \cdot OP = OS \cdot ON.$$

Como  $OS$  y  $ON$  son radios, se cumple que

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

□

**Observación 2.7.3.** *Nótese que la construcción vale tanto si  $P$  está fuera o dentro de  $\zeta$ .*

**Definición 2.7.4.** *La transformación que a cada punto  $P$  le pone en correspondencia su inverso  $P'$ , se llama inversión.*

Por las definiciones anteriores deducimos que:

1. La inversión determina, para cada punto  $P$  en un plano, un único punto inverso  $P'$  en el mismo plano.
2. Si  $OP > r$  entonces  $OP' < r$ .
3. Una línea que pasa por el centro de inversión se invierte en ella misma.
4. La circunferencia de inversión  $\zeta$  queda fija bajo la transformación.
5. Las circunferencias concéntricas con la circunferencia de inversión se invierten en circunferencias concéntricas con la circunferencia de inversión.

**Teorema 2.7.5.** *Cualquier circunferencia que pasa por dos puntos inversos distintos con respecto a una circunferencia de inversión, es su propia inversa y es ortogonal a la circunferencia de inversión, reciprocamente, cualquier circunferencia que es ortogonal a la circunferencia de inversión es su propia inversa.*

**Demostración.** Sean  $P$  y  $P'$  puntos inversos con respecto a una circunferencia  $\zeta$  de radio  $r$  y sea  $\zeta_1$  una circunferencia que pasa por  $P$  y  $P'$  (Fig.2.21).

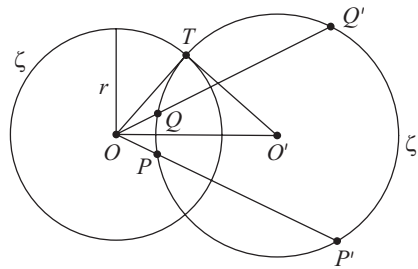


Figura 2.21:  $\zeta_1$  es su propia inversa y ortogonal a  $\zeta$

Por definición de puntos inversos  $OP \cdot OP' = r^2$  y como la potencia de  $O$  con respecto a  $\zeta_1$  está dada por

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = r^2$$

entonces  $Q$  y  $Q'$  también son puntos inversos con respecto a  $\zeta$ , es decir, la circunferencia  $\zeta_1$  es su propia inversa con respecto a  $\zeta$ .

Ahora, sea  $OT$  la tangente desde  $O$  a  $\zeta_1$  ( $T$  está en  $\zeta_1$ ), entonces el ángulo  $\angle OTO' = 90^\circ$ , por lo cual, la potencia de  $O$  con respecto a  $\zeta_1$  esta dada por

$$\overline{OT}^2 = r^2$$

lo que implica que  $OT = r$ , es decir,  $T$  está en  $\zeta$  y por lo tanto  $\zeta$  y  $\zeta_1$  son ortogonales.

Recíprocamente, sean  $\zeta$  y  $\zeta_1$  circunferencias ortogonales en  $T$  y sea  $r$  el radio de  $\zeta$ . Si  $P$  y  $P'$  son puntos en  $\zeta_1$  tales que son colineales con  $O$ , tenemos que

$$OP \cdot OP' = \overline{OT}^2 = r^2$$

por lo tanto  $P$  y  $P'$  son puntos inversos respecto a  $\zeta$ , es decir, cada punto de  $\zeta_1$  se invierte en un punto de  $\zeta$ , en otras palabras,  $\zeta_1$  se invierte en si misma.  $\square$

**Teorema 2.7.6.** *El inverso de una línea recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que pasa por el centro de inversión y el inverso de una circunferencia con radio finito que pasa por el centro de inversión es una línea recta que no pasa por el centro de inversión.*

**Demostración.** Sean  $A$  y  $A'$  puntos inversos con respecto a una circunferencia  $\zeta$ , de los cuales,  $A$  es el pie de la perpendicular desde el centro de inversión  $O$  a una línea recta  $a$  (Fig.2.22). Sea también  $\zeta_1$  la circunferencia de diámetro  $OA'$ .

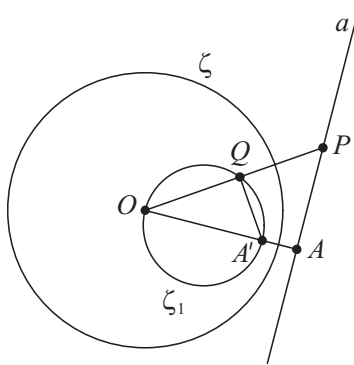


Figura 2.22: Inverso de la línea  $a$

Para cualquier punto  $P$  en  $a$  trazamos la línea  $OP$  que corta a  $\zeta_1$  en el punto  $Q$ . Observamos que los triángulos  $\triangle OPA$  y  $\triangle OA'Q$  son semejantes ( $LAL_p$ ), ya que sus ángulos respectivos  $\angle OAP$  y  $\angle OQA'$  son rectos y tienen ángulo común en  $O$ , por lo cual

$$\frac{OA}{OQ} = \frac{OP}{OA'}$$

lo que implica que

$$OA \cdot OA' = OP \cdot OQ$$

por lo tanto  $Q$  es el inverso de  $P$  con respecto a  $\zeta$ , mas aún, como  $Q$  está en  $\zeta_1$  se tiene que el inverso de la línea  $a$  es la circunferencia  $\zeta_1$ .  $\square$

**Teorema 2.7.7.** *El inverso de una circunferencia de radio finito que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia de radio finito que no pasa por el centro de inversión.*

**Demostración.** Sean  $\zeta$  la circunferencia de inversión y  $\zeta_1$  una circunferencia dada (Fig.2.23). Desde el centro de inversión trazamos un rayo que corte a  $\zeta_1$  en  $A$  y  $B$  y otro rayo que también corte a  $\zeta_1$  en  $C$  y  $D$ .

Como el cuadrilátero  $\square ABCD$  es cíclico entonces las líneas  $AD$  y  $BC$  son antiparalelas respecto a las líneas  $OA$  y  $OD$ .

Sea  $\xi$  la circunferencia que pasa por  $A, A'$  y  $D$ . Como  $\xi$  pasa por punto inversos entonces es ortogonal a  $\zeta$  y como pasa por  $D$  entonces pasa por  $D'$ , por lo cual,  $AD$  y  $A'D'$  son antiparalelas con respecto a  $OA$  y  $OD$ , es decir,  $A'D'$  y  $BC$  son paralelas. Análogamente  $AD$  y  $B'C'$  son paralelas. Por lo tanto, el cuadrilátero  $\square A'B'C'D'$  es cíclico.

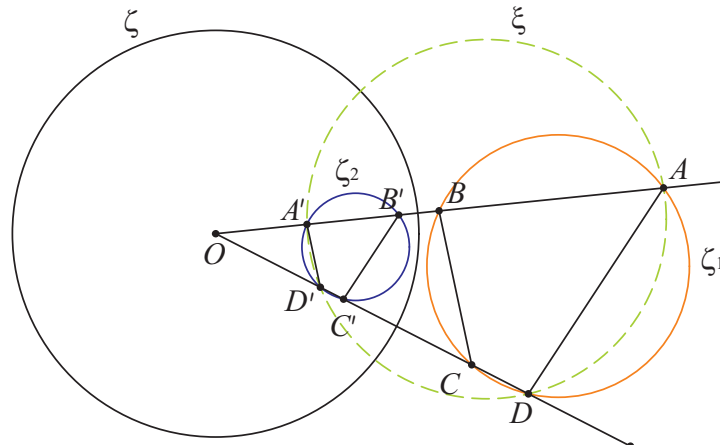


Figura 2.23: Circunferencias inversas  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$

$\square$

**Definición 2.7.8.** El ángulo entre circunferencias (y en general entre curvas) está dado por el ángulo que forman sus tangentes en el punto de intersección.

**Teorema 2.7.9.** La inversión preserva ángulos.

**Demostración.** Bastara con probar que la inversión preserva ángulos entre líneas rectas. Específicamente, emplearemos una línea que intersecte al centro de inversión por un punto dado  $A$  junto con cualquier línea que también pase por  $A$  (Fig.2.24), ya que si los ángulos  $\angle BAD$  y  $\angle BAC$  se preservan bajo la inversión, entonces también se preserva su diferencia ( $\angle CAD$ ). Teniendo que probar dos casos en dicha intersección (dentro y fuera de la circunferencia de inversión).

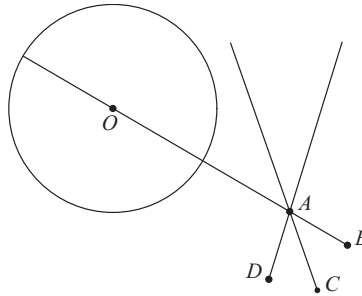


Figura 2.24: Angulos entre líneas rectas

Caso 1. Curvas que se intersectan dentro de la circunferencia de inversión.

Sean  $\zeta$  la circunferencia de inversión,  $P$  un punto dentro de  $\zeta$  y  $a$  una línea que pasa por  $P$  e intersecta a  $\zeta$  en los puntos  $A$  y  $B$  (Fig.2.25), estos últimos se invierten en ellos mismos al igual que la línea  $OP$ .

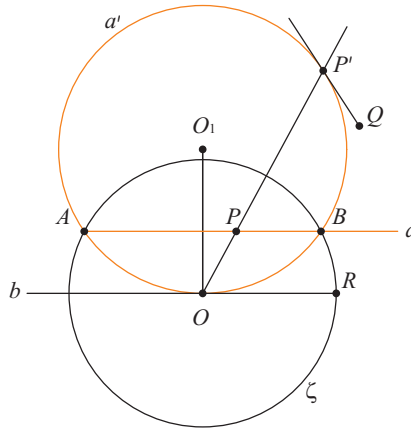


Figura 2.25: Intersección dentro de  $\zeta$



Por el Teorema 2.7.6 el inverso de  $a$  es la circunferencia  $a'$  que pasa por  $O$ . Observamos que el centro de  $a'$  ( $O_1$ ) está en la mediatriz de del segmento  $AB$ ; también  $a'$  está determinada por los puntos  $A, B$  y  $Q$ . Por lo tanto, la perpendicular  $b$  a  $OO_1$  por  $O$  es paralela a  $AB$  (y tangente a  $a'$ ).

Por lo que

$$\angle P'PB = \angle POR$$

donde  $P'$  es el inverso de  $P$ . Además

$$\angle P'OR = \angle OP'Q$$

debido a que son los ángulos que forman las tangentes a una circunferencia con los extremos de la cuerda  $OP'$ .

Entonces el ángulo formado por las líneas  $OP$  y  $AB$  que se intersectan dentro de  $\zeta$ , es igual al ángulo formado por los inversos respectivos  $OP$  y  $a'$ .

Caso 2. Curvas que se intersectan fuera de la circunferencia de inversión.

Sean  $\zeta$  la circunferencia de inversión,  $P$  un punto fuera de  $\zeta$ ,  $n$  una línea que no pasa por  $\zeta$  e intersecta a  $P$ ,  $Q$  el pie de la perpendicular desde  $O$  a  $n$  y  $AB$  la paralela a  $n$  por  $O$  (Fig.2.26).

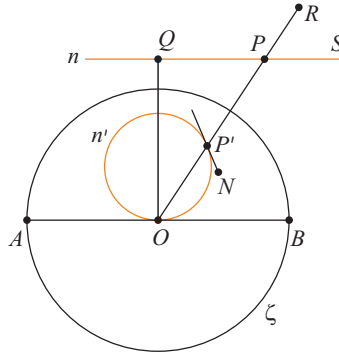


Figura 2.26: Intersección fuera de  $\zeta$

Por construcción observamos que

$$\angle RPS = \angle POA$$

y también, por el mismo argumento del caso anterior tenemos que

$$\angle POA = \angle NP'O$$

entonces

$$\angle RPS = \angle NP'O.$$

Por lo tanto, el ángulo formado por  $n$  y  $OP$  fuera de  $\zeta$  es igual al ángulo determinado por sus inversos  $n'$  y  $OP$  respectivamente.

□

## 2.8. Razón cruzada

Ahora definiremos el concepto de razón cruzada, la cual es un cociente de cocientes que es invariante bajo inversiones con respecto a cualquier centro de inversión y también bajo proyecciones. Estas propiedades serán de gran utilidad para definir una distancia en nuestro modelo de geometría hiperbólica.

**Definición 2.8.1.** *La razón cruzada de cuatro puntos  $A, B, C, D$  en el plano se define como el cociente:*

$$\delta = \{ABCD\} = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}}$$

Ya que hay veinticuatro permutaciones de las letras  $A, B, C, D$  debería haber veinticuatro valores distintos de la razón cruzada, pero estas veinticuatro permutaciones no nos dan siempre valores distintos de la razón cruzada; de hecho, solamente hay seis valores dados por:

$$\delta, \frac{1}{\delta}, 1 - \delta, \frac{1}{1 - \delta}, \frac{\delta - 1}{\delta}, \frac{\delta}{\delta - 1}.$$

Con la definición de razón cruzada vemos que:

$$\delta = \{ABCD\} = \{BADC\} = \{CDAB\} = \{DCBA\}$$

$$\frac{1}{\delta} = \{ABDC\} = \{BACD\} = \{CDBA\} = \{DCAB\}$$

Para calcular los demás valores se utiliza el teorema de Euler y la definición de razón cruzada, siendo

$$\delta \text{ y } \frac{1}{\delta}$$

los valores que nos interesan junto con tres valores particulares que se pueden calcular a partir de la definición y son los siguientes:

$$\{AACD\} = 1, \{ABAD\} = 0, \{ABCA\} = \infty.$$

Para el siguiente teorema es inmediata su demostración utilizando la definición de razón cruzada por lo que no la presentaremos.

**Teorema 2.8.2.** *Para cinco puntos  $A, B, C, U, V$  en el plano se cumple que*

$$\{ACUV\} = \{ABUV\} \cdot \{BCUV\}$$

**Teorema 2.8.3.** *La razón cruzada de cuatro puntos colineales es igual a la razón cruzada de sus inversos con respecto a cualquier punto de inversión.*

**Demostración.** Sean  $A, B, C, D$  cuatro puntos dados sobre la línea  $a$ ,  $\zeta$  la circunferencia de inversión con respecto a la cual vamos a invertir (Fig.2.27) y  $A', B', C', D'$  los inversos de  $A, B, C, D$  respectivamente.

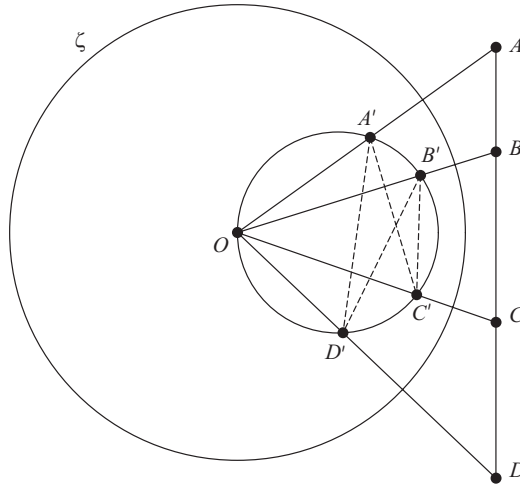


Figura 2.27: Razón cruzada de cuatro puntos colineales

Observamos las siguientes semejanzas de triángulos

$$\triangle OAC \sim \triangle OC'A' \Rightarrow AC = \frac{OA}{OC'} \cdot C'A'$$

$$\triangle OBC \sim \triangle OC'B' \Rightarrow CB = \frac{OB}{OC'} \cdot B'C'$$

$$\triangle OAD \sim \triangle OD'A' \Rightarrow AD = \frac{OA}{OD'} \cdot D'A'$$

$$\triangle OBD \sim \triangle OD'B' \Rightarrow DB = \frac{OB}{OD'} \cdot B'D'$$

Entonces sustituyendo las ecuaciones anteriores en los terminos correspondientes a la razón cruzada de los puntos  $A, B, C, D$  tenemos que

$$\{ABCD\} = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{\frac{A'C'}{C'B'}}{\frac{A'D'}{D'B'}}$$

debido a que todos los terminos con  $O$  se cancelan, por lo que la razón cruzada de cuatro puntos colineales se conserva bajo la inversión.

□

**Teorema 2.8.4.** *La razón cruzada de cuatro puntos concíclicos es igual a la razón cruzada de sus inversos con respecto a cualquier centro de inversión.*

**Demostración.** Analogamente a la demostración del teorema anterior tenemos las mismas semejanzas de triángulos. Esto se muestra de la siguiente manera:

Sean  $A, B, C, D$  puntos concíclicos,  $\zeta$  la circunferencia de inversión con respecto a la cual vamos a invertir y  $A', B', C', D'$  los inversos de  $A, B, C, D$  respectivamente (Fig.2.28).

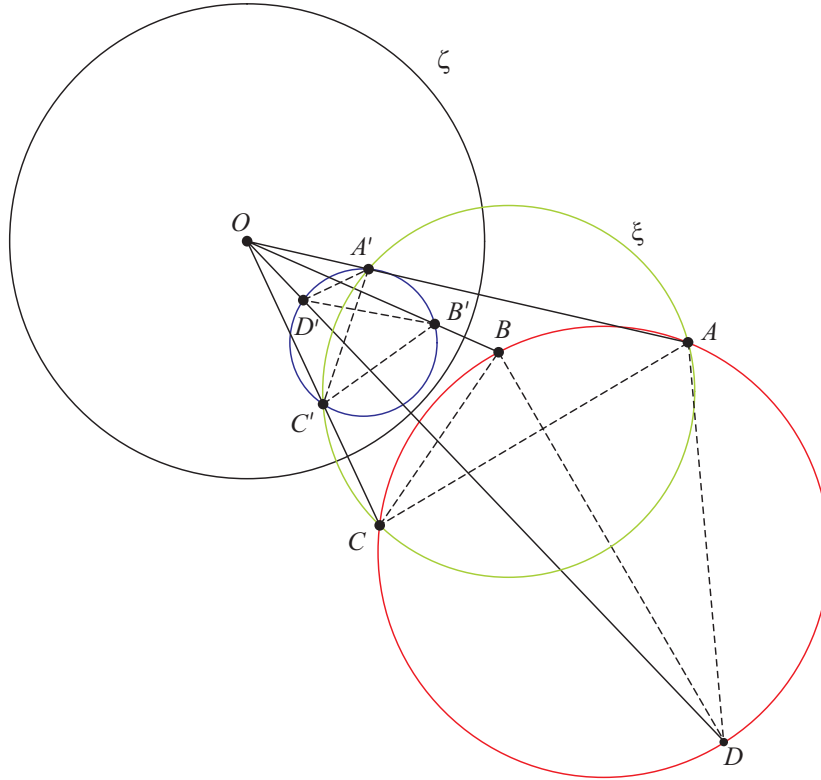


Figura 2.28: Razón cruzada de cuatro puntos concíclicos

Sea  $\xi$  la circunferencia que pasa por  $A, A'$  y  $C$  entonces está pasara por  $C'$  y es ortogonal a  $\zeta$  (Teorema 2.7.5 y Observación 2.2.4) por lo tanto

$$\triangle OAC \sim \triangle OC'A' \Rightarrow AC = \frac{OA}{OC'} \cdot C'A'.$$

De forma similar obtenemos las demás semejanzas para la demostración, por lo tanto la razón cruzada de cuatro puntos concíclicos  $A, B, C, D$  se preserva bajo la inversión con respecto a cualquier centro de inversión.

□

## 2.9. La línea de Simson

El principal estudio en esta tesis es la línea de Simson en geometría hiperbólica, por lo cual mostraremos a continuación cómo se define para geometría euclídea junto con algunas de sus propiedades.

Antes de definir la línea de Simson presentaremos el siguiente teorema que muestra con detalle la colinealidad de los puntos que la determinan.

**Teorema 2.9.1.** *Los pies de las tres perpendiculares a los lados de un triángulo que pasan por un punto son colineales si y sólo si el punto se encuentra sobre la circunferencia circunscrita del mismo triángulo.*

**Demostración.** Sean  $\triangle ABC$  el triángulo,  $P$  el punto y  $L, M$  y  $N$  las proyecciones de  $P$  sobre los lados  $BC, CA$ , y  $AB$  respectivamente (Fig.2.29).

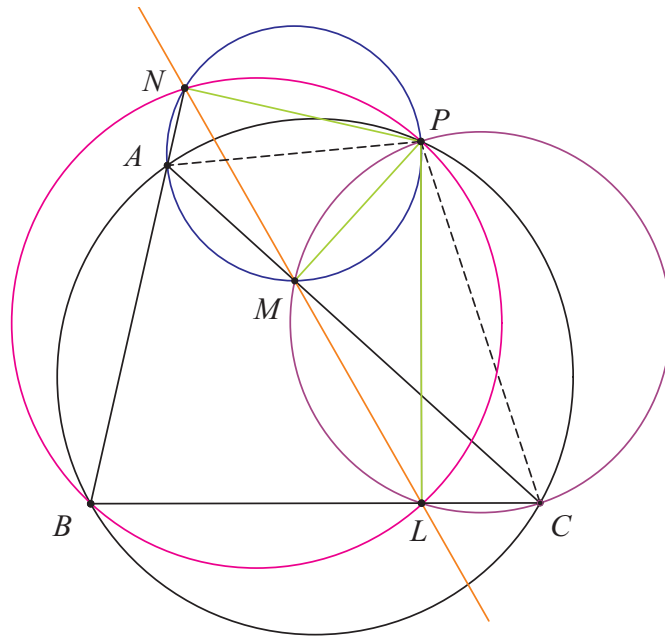


Figura 2.29: El punto  $P$  está en la circunferencia circunscrita del triángulo  $\triangle ABC$

La clave de la demostración está en observar que los cuadriláteros

$$\square PMAN, \square PLBN \text{ y } \square PCLM$$

son cíclicos, esto se debe a que los ángulos

$$\angle PLC, \angle PMC \text{ y } \angle PNB$$

son rectos.

Veamos primero que la condición es suficiente. Supongamos entonces que  $P$  se encuentra sobre la circunferencia circunscrita del triángulo  $\triangle ABC$ , podemos suponer que está sobre el arco  $CA$  que no contiene al punto  $B$ , los demás casos se abordan de manera semejante.

Como los cuadriláteros  $\square ABCP$  y  $\square PLBN$  son cíclicos, tenemos que

$$\angle APC = 180^\circ - \angle ABC = \angle NPL;$$

restando estos ángulos iguales, en el orden apropiado, al ángulo  $\angle NPC$ , tenemos que

$$\angle NPA = \angle LPC.$$

Para concluir que  $L, M$  y  $N$  son colineales, bastará observar que los segmentos  $MN$  y  $ML$  forman, con el segmento  $AC$ , ángulos iguales. En el cuadrilátero cíclico  $\square PMAN$  se tiene la igualdad

$$\angle NMA = \angle NPA$$

y como el cuadrilátero  $\square PCLM$  también es cíclico se tiene que

$$\angle LMC = \angle LPC,$$

entonces

$$\angle NMA = \angle NPA = \angle LPC = \angle LMC,$$

por lo que  $L, M$  y  $N$  son colineales.

Veamos que la condición es necesaria. Si  $L, M$  y  $N$  son colineales, entonces

$$\angle NMA = \angle LMC,$$

por ser ángulos opuestos por el vértice y como los cuadriláteros  $\square PCLM$  y  $\square PMAN$  son cíclicos, tenemos que

$$\angle LMC = \angle LPC \text{ y } \angle NMA = \angle NPA,$$

entonces

$$\angle LPC = \angle LMC = \angle NMA = \angle NPA;$$

sumando el ángulo  $\angle APL$  a cada uno de estos ángulos iguales, tenemos que

$$\angle APC = \angle NPL.$$

Como el cuadrilátero  $\square PLBN$  es cíclico, el ángulo  $\angle NPL$  es suplementario al ángulo  $\angle ABC$ , luego también  $\angle APC + \angle ABC = 180^\circ$ , por lo que el cuadrilátero  $\square ABCP$  es cíclico.

□

**Definición 2.9.2.** Sean  $L, M$  y  $N$  los pies de las perpendiculares bajadas a los lados del triángulo  $\triangle ABC$  (Fig. 2.29), desde cualquier punto de su circunferencia circunscrita. Entonces los puntos  $L, M$  y  $N$  son colineales y la línea que ellos determinan es la línea de Simson del triángulo  $\triangle ABC$  con respecto al punto  $P$ .

Veamos ahora algunos teoremas referentes a la línea de Simson.

**Teorema 2.9.3.** *Si tres cuerdas que pasan por un mismo punto de una circunferencia son tomadas como diámetros de tres circunferencias, entonces estas tres circunferencias se intersectan por pares en tres puntos que son colineales.*

**Demostración.** Sean  $PA, PB$  y  $PC$  tres cuerdas de la circunferencia  $\zeta$  (Fig.2.30). Entonces las tres circunferencias  $\zeta_1, \zeta_2$  y  $\zeta_3$  cuyos diámetros son  $PA, PB$  y  $PC$  respectivamente pasan por pares a través de los pies ( $L, M, N$ ) de las perpendiculares de  $P$  a las líneas  $BC, CA$  y  $AB$ , los cuales son colineales (Teorema 2.9.1).

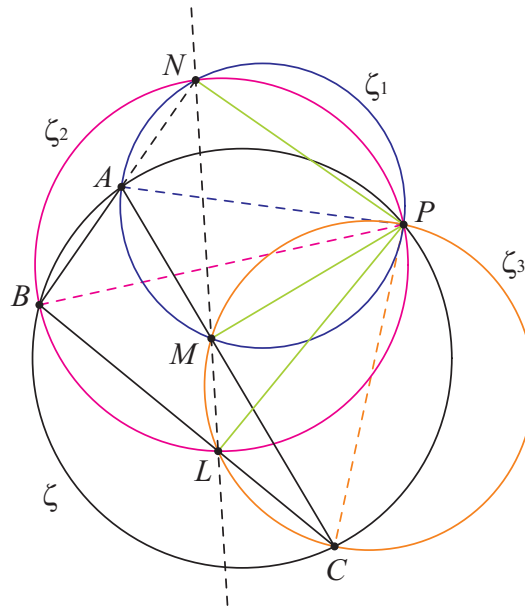


Figura 2.30: Las circunferencias  $\zeta_1, \zeta_2$  y  $\zeta_3$  intersectan por pares a los pies  $L, M$  y  $N$

□

**Teorema 2.9.4.** *Si las perpendiculares desde un punto  $P$  en la circunferencia circunscrita  $\zeta$  del triángulo  $\triangle ABC$  a los lados del mismo triángulo intersectan a  $\zeta$  nuevamente en los puntos  $L', M'$  y  $N'$ , entonces las líneas  $AL', BM'$  y  $CN'$  son paralelas a la línea de Simson del triángulo  $\triangle ABC$  con respecto a  $P$ .*

**Demostración.** Sea  $\zeta$  la circunferencia circunscrita del triángulo  $\triangle ABC$  y sean  $L', M'$  y  $N'$  los puntos de intersección con  $\zeta$  de las perpendiculares desde  $P$ , en  $\zeta$ , a los lados  $BC, CA$  y  $AB$  respectivamente (Fig.2.31).





## Capítulo 3

# Breve historia del quinto postulado

Durante siglos se pensó que el quinto postulado se podía demostrar a partir de los primeros cuatro. Pero en muchos casos las pruebas contenían un hecho equivalente a lo que se quería demostrar.

En 1763 G.S. Kluegel, un estudiante de Kestner, escribió un tratado en el que expone y critica todos los intentos significativos por probar el quinto postulado durante casi 2000 años. Él encontró que todas las pruebas eran falsas, obteniendo notable importancia los intentos del jesuita Gerolamo Saccheri (1667-1733) y el matemático francés Adrien Marie Legendre (1752-1833).

### 3.1. Saccheri

Una gran parte de la obra:

*Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia*, [Milan,1733],

de Girolamo Saccheri, está dedicada a la demostración del quinto postulado.

Saccheri, al igual que Euclides, utiliza un particular método de razonamiento:

*suponiendo que la proposición, a demostrar, es falsa, uno mismo es llevado a la conclusión de que es verdadera.*

Asumiendo esta idea esperaba encontrar entre las consecuencias alguna proposición que lo llevara a la verdad acerca del quinto postulado.

La figura fundamental de Saccheri es un cuadrilátero con dos ángulos rectos, el cuál definiremos a continuación ya que es de suma importancia para intentar probar el quinto postulado.

**Definición 3.1.1.** *Un cuadrilátero de Saccheri es un cuadrilátero  $\square ABCD$  en el que los ángulos de los puntos  $A$  y  $B$  son rectos y  $AC = BD$  (Fig.3.1).*

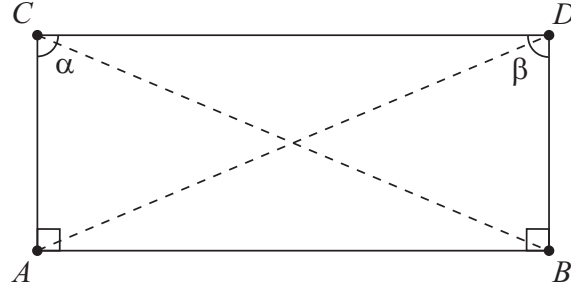


Figura 3.1: Cuadrilátero de Saccheri

**Proposición 3.1.2.** *Los ángulos en la base superior de un cuadrilátero de Saccheri son iguales.*

**Demostración.** Ya que los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle ABD$  (Fig.3.1) tienen en común el segmento  $AB$  y también

$$90^\circ = \angle CAB = \angle DBA \text{ y } AC = BD$$

tenemos que  $\triangle ABC \cong \triangle ABD$  (LAL) lo que implica que

$$AD = BC.$$

Este último hecho implica que

$$\triangle ACD \cong \triangle BCD$$

entonces

$$\alpha = \beta.$$

□

Posterior a determinar la naturaleza de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , en un cuadrilátero de Saccheri, veamos a continuación su relación con la suma de los ángulos en un triángulo.

Sean  $D$  y  $E$ , en un triángulo  $\triangle ABC$ , los puntos medios de los segmentos  $AC$  y  $BC$ , respectivamente, (Fig.3.2); sean  $F, G$  y  $H$  los pies de las perpendiculares desde los puntos  $C, A$  y  $B$  en la línea  $DE$ . Observamos que  $\triangle DFC \cong \triangle ADG$  por AAL (Apéndice C) así como  $\triangle EFC \cong \triangle BEH$ , entonces

$$FC = AG = BH.$$

Por lo anterior el cuadrilátero  $\square AGHB$  es un cuadrilátero de Saccheri con ángulos rectos en  $G$  y  $H$ . Lo que nos conduce a que los ángulos en  $A$  y  $C$  son congruentes, es decir,

$$\alpha + \gamma_1 = \beta + \gamma_2.$$

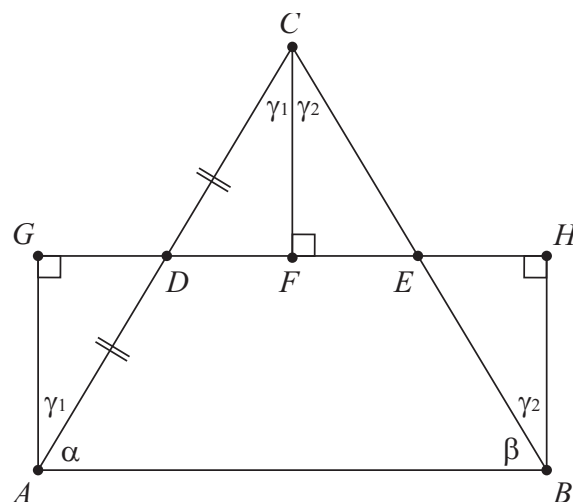


Figura 3.2: Suma de los ángulos de un triángulo.

Si  $(\alpha + \gamma_1 + \beta + \gamma_2) = W$  es la suma de los ángulos en un triángulo  $\triangle ABC$  entonces cada ángulo en  $A$  y  $B$  es igual a  $W/2$ .

Por lo tanto:

1. La hipótesis del ángulo agudo,  $W/2 < 90^\circ$ , implica que la suma de los ángulos en un triángulo es  $< 180^\circ$ .
2. La hipótesis del ángulo obtuso,  $W/2 > 90^\circ$ , implica que la suma de los ángulos en un triángulo es  $> 180^\circ$ .
3. La hipótesis del ángulo recto,  $W/2 = 90^\circ$ , implica que la suma de los ángulos en un triángulo es  $= 180^\circ$ .

Saccheri trató de eliminar las dos primeras hipótesis mostrando que se llegaría a contradicciones, implicando que la hipótesis válida es la tercera, demostrando así el quinto postulado. Con la primera hipótesis nunca llegó a una contradicción, a diferencia de la segunda en la que llegó a contradecir las proposiciones 16, 17 y 18, junto con el segundo postulado. La hipótesis del ángulo recto ( $W \equiv 2R$ ) es un equivalencia del quinto postulado.

## 3.2. Legendre

En 1823 Legendre pensó haber probado el quinto postulado. El razonamiento fue el siguiente.

Si  $(\alpha + \beta + \gamma) < 180^\circ$ , entonces existe un ángulo  $\delta$  tal que  $(\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ - \delta$ .

Llamando a  $\delta$  como el defecto del triángulo, sea el triángulo  $\triangle ABC$  (Fig.3.3) dividido por una transversal, a través de un vértice, en dos triángulos  $\triangle ADC$  y  $\triangle BDC$ , entonces el

defecto del  $\triangle ABC$  es la suma de los defectos de sus partes. Es decir:

$$\delta = 180^\circ - ((\alpha + \varepsilon + \gamma_1) + (\beta + \gamma_2 + (180^\circ - \varepsilon))).$$

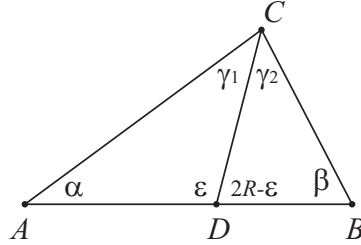


Figura 3.3: Suma de los defectos de un triángulo.

Legendre reflejó el triángulo  $\triangle ABC$  a través del segmento  $AB$  y dibujó por el punto  $D'$  (imagen de  $C$  bajo la reflexión) una línea que intersecte los rayos  $CA$  y  $CB$  en  $E$  y  $F$  respectivamente (Fig.3.4).

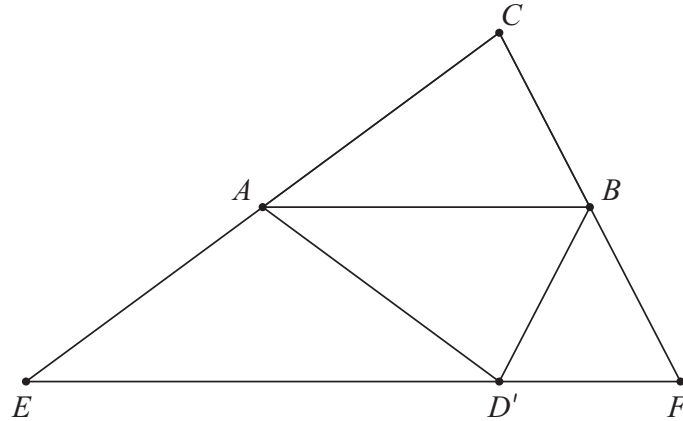


Figura 3.4: Defecto de un triángulo.

El defecto del triángulo  $\triangle CEF$  es mayor o igual a los defectos de los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle ABD$ , *i.e.*,  $2\delta$ . Aplicando otra reflexión al triángulo  $\triangle CEF$  obtenemos un triángulo con defecto  $\geq 4\delta$ . Después de  $n$  reflexiones encontramos un triángulo con defecto  $2^n\delta$ . Para una  $n$  suficientemente grande,  $2^n\delta$  sería mayor a  $180^\circ$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $\delta = 0$ .

La equivalencia al quinto postulado utilizada por Legendre fue que siempre es posible trazar una línea a través de un punto ( $D'$  Figura 3.4) en el interior de un ángulo ( $\angle ACB$  Figura 3.4), la cual intersecta ambos rayos del mismo ángulo ( $E$  y  $F$ ).

Queda, por último, definir el cuadrilátero de Legendre, ya que este nos ayudará a ejemplificar un importante hecho en Geometría Hiperbólica, así como el cuadrilátero de Saccheri.

**Definición 3.2.1.** *Un cuadrilátero de Legendre es un cuadrilátero  $\square ABCD$  el cuál tiene tres vértices cuyos ángulos son rectos (Fig.3.5).*

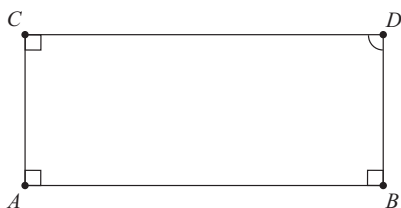


Figura 3.5: Cuadrilátero de Legendre

### 3.3. De la imposibilidad de demostrar el quinto postulado

Muchos intentos por demostrar el quinto postulado utilizaron el método indirecto: si el quinto postulado es falso, entonces la suma de los ángulos interiores en un triángulo es menor a dos ángulos rectos.

Con este argumento se esperaba llegar a una contradicción, pero nadie pudo encontrarla. Sugiriendo que el quinto postulado es independiente de los otros cuatro y la construcción de una geometría en la que es preferible la negación del quinto postulado, concibiendo que la suma de los ángulos de un triángulo es aproximada a dos ángulos rectos.

Siguiendo este razonamiento, Gauss (1777-1855) encontró una geometría diferente a la euclidiana que a su vez era consistente. Sus resultados no fueron difundidos por temor a la crítica, siendo publicados después de su muerte en 1855.

La primera publicación referente a esta nueva geometría fue en 1831 por el húngaro Johann Bolyai (1802-1860), como un apéndice en un libro de su padre, Frankas Wolfgang Bolyai (1775-1856), luego de haber tenido una amplia comunicación con él en el problema de la paralelas.

Anticipadamente en 1826 el Ruso Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) expuso un artículo en la Universidad de Kasan, sugiriendo una nueva geometría en la que es posible trazar más de una paralela por un punto dado a una línea dada y que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor a  $180^\circ$ . Posteriormente en 1829 Lobachevsky hace su primera publicación referente a geometrías no euclidianas en el *Kasan Bulletin*.

Varias décadas pasaron antes de que un gran número de matemáticos conocieran los trabajos de Bolyai y Lobachevsky, resultando así, los modelos de geometría no euclidiana del disco y del semiplano superior, debidos a Felix Klein y Henri Poincaré.

# Capítulo 4

## Geometría Hiperbólica

En el capítulo anterior se observó la imposibilidad de demostrar el quinto postulado y cómo a partir de su negación se descubrieron las geometrías no euclidianas. Una equivalencia al quinto postulado es el axioma de Playfair que tiene dos negaciones.

**Axioma de Playfair.** *Por un punto exterior a una recta es posible trazar una y sólo una recta paralela a la recta dada.*

**Negaciones al axioma de Playfair.** Por un punto exterior a una recta:

1. no se puede trazar ninguna recta paralela a la recta dada.
2. se puede trazar más de una recta paralela a la recta dada.

Utilizando la primera negación obtenemos la geometría conocida como Geometría Elíptica, la cual no se mencionará en este trabajo. Con la segunda negación concebimos otra geometría, la Geometría Hiperbólica, que es la geometría que estudiaremos de ahora en adelante. En el Apéndice A mostraremos la equivalencia entre el quinto postulado de Euclides y el Axioma de Playfair.

### 4.1. Axiomas de geometría hiperbólica

1. Es posible trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.
2. Es posible prolongar una línea recta finita continuamente en una línea recta.
3. Para cada centro y radio es posible describir su círculo.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Por un punto exterior a una recta se puede trazar más de una paralela a la recta dada.

El matemático francés Henri Poincaré (1854-1912) propuso dos modelos que describen la geometría hiperbólica a partir del modelo que conocemos de geometría euclidiana.

Presentaremos, a continuación, el model del semiplano superior para el cual definiremos una distancia. En el Apéndice C encontraremos el otro modelo de Poincaré junto con su equivalencia con el modelo del semiplano superior.

Identificaremos a los elementos hiperbólicos con el prefijo  $h$  para evitar confusión con sus homólogos euclidianos que tendrán el prefijo  $e$ .

## 4.2. Modelo del semiplano superior

Conocido también como el modelo del semiplano de Poincaré. Los  $h$ -puntos de este modelo están dados por el conjunto  $P_s = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ , es decir, son los  $e$ -puntos en la parte superior de  $\mathbb{R}^2$  y tienen por frontera al eje  $x$ .

La  $h$ -líneas rectas en este modelo son arcos en la parte superior de  $\mathbb{R}^2$  que pertenecen a  $e$ -circunferencias con sus centros en el eje  $x$  (Fig.4.1), también los  $e$ -rayos perpendiculares al eje  $x$  son considerados  $h$ -líneas rectas. Los  $e$ -puntos en el eje  $x$  no pertenecen a nuestro modelo.

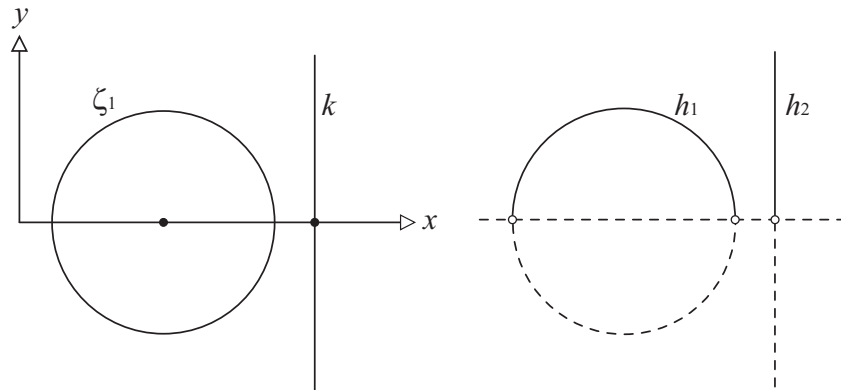


Figura 4.1: Las  $h$ -líneas  $h_1$  y  $h_2$  son representadas por un arco de la  $e$ -circunferencia  $\zeta_1$  y un  $e$ -rayo  $k$  perpendicular a  $x$  respectivamente.

El quinto postulado hiperbólico se muestra en la Figura 4.2, donde las  $h$ -líneas  $h_1$  y  $h_2$  son paralelas a la  $h$ -línea  $g$  por el  $h$ -punto  $P$ , es decir,  $h_1$  y  $h_2$  no se intersectan con  $g$  y ambas pasan por  $P$  el cual no pertenece a  $g$ . Las  $h$ -líneas que unen a  $P$  con algún  $e$ -punto del segmento  $LU$ , o  $VM$ , serán llamadas ultraparalelas. A los puntos  $U$  y  $V$  se les llama *puntos límite* de  $g$ .

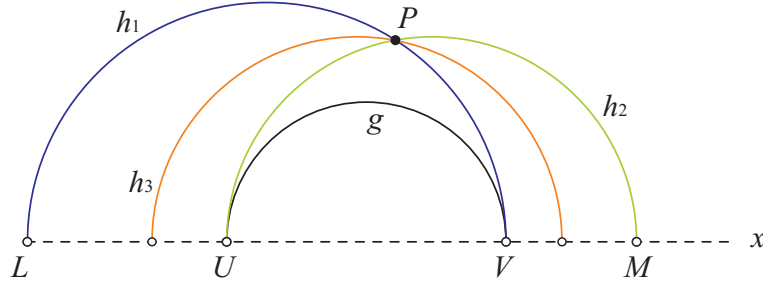


Figura 4.2: Las  $h$ -líneas  $h_1$  y  $h_2$  son paralelas a la  $h$ -línea  $g$  por el  $h$ -punto  $P$ ,  $h_3$  es llamada ultraparalela.

### 4.3. Distancia en el modelo del semiplano superior de Poincaré

Gracias a que la razón cruzada se preserva bajo inversiones con respecto a circunferencias, es posible definir una distancia en términos de razón cruzada que sea invariante bajo cualquier traslación o reflexión (es decir isometrías) en el plano hiperbólico. En esta sección veremos que las isometrías hiperbólicas son, en el modelo del semiplano superior, inversiones euclidianas que mandan  $h$ -líneas en  $h$ -líneas preservando la  $h$ -distancia entre sus puntos, la cual es aditiva.

**Definición 4.3.1.** La distancia ( $d$ ) entre dos puntos es el valor numérico o valor absoluto de la longitud del segmento rectilíneo que une esos dos puntos.

Una distancia debe de cumplir las siguientes tres propiedades:

- i)  $d(A, B) \geq 0$ ;  $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ .
- ii)  $d(A, B) = d(B, A)$ .
- iii)  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$  ;  $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$  si  $A, B$  y  $C$  son colineales y  $C$  esta entre  $A$  y  $B$ .

**Definición 4.3.2.** Sea  $AB$  un  $h$ -segmento en una  $e$ -circunferencia que intersecta al eje  $x$  en los  $e$ -puntos  $U$  y  $V$  (Fig.4.3). Definiremos la distancia hiperbólica,  $h$ -distancia, del segmento  $AB$  como:

$$d(A, B) = |\ln\{ABUV\}|$$

si el segmento  $CD$  esta en un  $e$ -rayo que intersecta al eje  $x$  en  $W$ , entonces su  $h$ -distancia se define como:

$$d(C, D) = |\ln\frac{DW}{CW}|$$



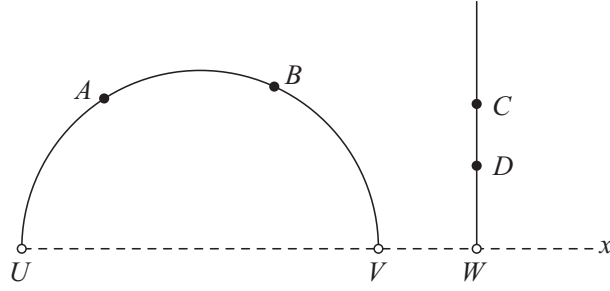


Figura 4.3: Distancia hiperbólica

Debido a las propiedades de la razón cruzada y de la inversión, vistas en el Capítulo 2, tenemos los siguientes dos resultados:

- (1) Sean  $A$  y  $B$  dos  $h$ -puntos en la  $h$ -línea  $h_1$  la cual intersecta al eje  $x$  en  $U$  y  $V$  (Fig.4.4). Al invertir con respecto a una  $e$ -circunferencia  $\zeta$  de  $e$ -radio  $r > UV$  con centro en  $U$ ,  $h_1$  se invierte en el  $e$ -rayo que intersecta al eje  $x$  en  $V'$ ,  $A$  y  $B$  se invierten en los  $h$ -puntos  $A'$  y  $B'$  respectivamente,  $V$  se invierte en  $V'$  y  $U$  se invierte en el punto al infinito  $U^*$ .

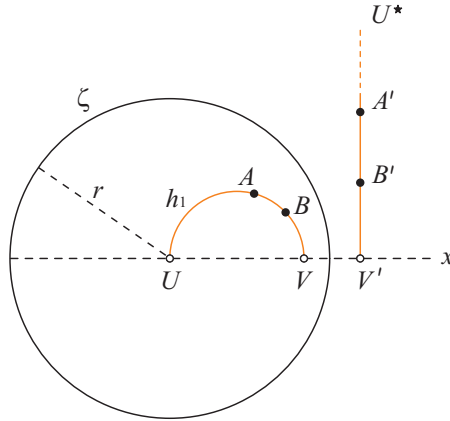


Figura 4.4:  $d(A, B) = d(A', B')$

Como la razón cruzada se preserva bajo la inversión, tenemos que:

$$\{ABUV\} = \{A'B'U^*V'\}$$

los segmentos  $U^*B'$  y  $A'V'$  tienen un sentido positivo y los segmentos  $A'U^*$  y  $V'B'$  tienen un sentido negativo, también los segmentos  $A'U^*$  y  $U^*B'$  tienen una magnitud

infinita, entonces

$$\begin{aligned}
\{A'B'U^*V'\} &= \frac{A'U^*}{U^*B'} \cdot \frac{V'B'}{A'V'} \\
&= (-1) \cdot \frac{V'B'}{A'V'} \\
&= -\frac{V'B'}{A'V'} \\
&= -\left(-\frac{B'V'}{A'V'}\right) \\
&= \frac{B'V'}{A'V'}
\end{aligned}$$

por lo cual

$$d(A, B) = d(A', B').$$

- (2) Queremos que la distancia, definida por medio de la razón cruzada, sea aditiva con respecto a puntos colineales. Para ello sean  $A, B$  y  $C$   $h$ -puntos en la  $h$ -línea  $h_1$  que intersecta al eje  $x$  en  $U$  y  $V$  (Fig.4.5).

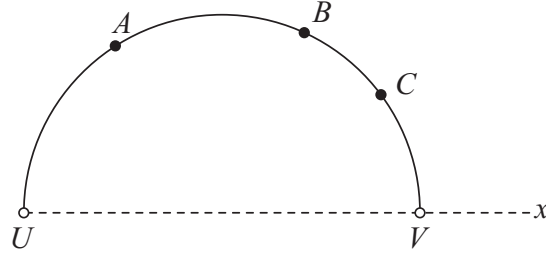


Figura 4.5:  $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$

Como para cinco puntos  $A, B, C, U, V$  en el plano se cumple que:

$$\{ACUV\} = \{ABUV\} \cdot \{BCUV\}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\ln|\{ACUV\}| &= |\ln(\{ABUV\} \cdot \{BCUV\})| \\
&= |\ln\{ABUV\}| + |\ln\{BCUV\}|
\end{aligned}$$

es decir

$$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$$

comprobando así, que la distancia definida con la razón cruzada es aditiva si los puntos son colineales en nuestro moedelo.

A continuación comprobaremos que la  $h$ -distancia, definida anteriormente, satisface las propiedades de una distancia.

i)  $d(A, B) \geq 0; d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$

Por haber definido a la  $h$ -distancia como valor absoluto de la razón cruzada tenemos que

$$d(A, B) \geq 0$$

si

$$d(A, B) = |\ln\{ABUV\}| = 0$$

entonces

$$\{ABUV\} = \frac{AU}{UB} \cdot \frac{VB}{AV} = \frac{AU}{BU} \cdot \frac{BV}{AV} = 1$$

lo que implica que  $A = B$ , ya que siempre tenemos que  $U \neq V$ . Recíprocamente, si  $A = B$ , entonces

$$\{ABUV\} = 1$$

por lo cual

$$d(A, B) = |\ln\{ABUV\}| = 0.$$

ii)  $d(A, B) = d(B, A).$

Por la definición de razón cruzada tenemos que, si  $\{ABUV\} = \delta$ , entonces

$$\{BAUV\} = \frac{1}{\delta},$$

por lo que

$$\begin{aligned} d(A, B) &= |\ln\{ABUV\}| \\ &= |\ln(\delta)| \\ &= |\ln(\frac{1}{\delta})| \\ &= |\ln\{BAUV\}| \\ &= d(B, A). \end{aligned}$$

iii)  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$  ;  $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$  si  $A, B$  y  $C$  son colineales y  $C$  está entre  $A$  y  $B$ .

Por los resultados mostrados previamente junto con la definición de  $h$ -distancia, observamos que, si  $A, B$  y  $C$  son colineales y  $C$  está entre  $A$  y  $B$  (Fig.4.6).

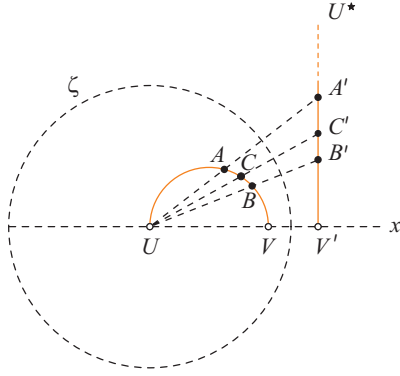


Figura 4.6:  $A, B$  y  $C$  son colineales y  $C$  esta entre  $A$  y  $B$ .

Entonces

$$d(A, B) = d(A', B')$$

$$d(A, C) = d(A', C')$$

$$d(C, B) = d(C', B')$$

donde  $A', B'$  y  $C'$  son los inversos de  $A, B$  y  $C$  respectivamente. Además

$$\begin{aligned} \{A'B'U^*V'\} &= \frac{B'V'}{A'V'} \\ &= \frac{B'V'}{A'V'} \cdot \frac{C'V'}{C'V'} \\ &= \frac{C'V'}{A'V'} \cdot \frac{B'V'}{C'V'} \\ &= \{A'C'U^*V'\} \cdot \{C'B'U^*V'\} \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} d(A', B') &= |\ln \{A'B'U^*V'\}| \\ &= d(A', C') + d(C', B'). \end{aligned}$$

Ahora, si  $A, B$  y  $C$  no son colineales (Fig.4.7), sean  $\zeta_1$  la  $h$ -circunferencia con  $h$ -centro en  $A$  y  $h$ -radio  $AC$  y  $\zeta_2$  la  $h$ -circunferencia con  $h$ -centro en  $B$  y  $h$ -radio  $BC$ . Sean  $P$  el  $h$ -punto donde  $\zeta_1$  intersecta el segmento  $AB$  y  $Q$  el  $h$ -punto donde  $\zeta_2$  intersecta el segmento  $BA$ .

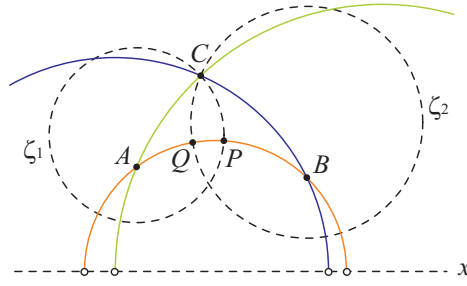


Figura 4.7:  $A, B$  y  $C$  no son colineales

Teniendo así, los siguientes tres casos:

1.  $P = B$  o  $AB < AP$

Por construcción observamos que

$$d(A, C) = d(A, P)$$

y como los  $h$ -puntos  $A, B$  y  $P$  son colineales tenemos que

$$d(A, P) = d(A, B) + d(B, P).$$

Cuando  $d(B, P) \neq 0$  notamos que

$$d(A, B) < d(A, P)$$

y si  $d(B, P) = 0$  obtenemos que

$$d(A, B) = d(A, P).$$

Es decir

$$d(A, B) \leq d(A, P)$$

por lo que

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

2.  $Q = A$  o  $BA < BQ$

Este caso se puede demostrar de forma análoga al caso anterior concluyendo que

$$d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A)$$

ya que por construcción  $d(B, C) = d(B, Q)$  y los  $h$ -puntos  $B, A$  y  $Q$  son colineales.

3.  $P$  y  $Q$  están contenidos en el segmento  $AB$

Por construcción  $d(A, C) = d(A, P)$ ,  $d(B, C) = d(B, Q)$  y los  $h$ -puntos  $A, Q, P$  y  $B$  son colineales, por lo cual

$$d(A, B) = d(A, Q) + d(Q, P) + d(P, B)$$

entonces

$$\begin{aligned} d(A, Q) + d(Q, P) + d(P, B) &\leq d(A, Q) + d(Q, P) + d(Q, P) + d(P, B) \\ &= d(A, P) + d(Q, P) \\ &= d(A, C) + d(C, B) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

## 4.4. Construcciones hiperbólicas

A continuación presentaremos una serie de construcciones básicas para el modelo del semiplano superior de Poincaré, las cuales nos ayudarán a exponer y demostrar los teoremas de geometría hiperbólica.

**Construcción 4.4.1.** *Dados dos puntos trazar la línea hiperbólica que los une.*

Sean  $A$  y  $B$  dos  $h$ -puntos (Fig.4.8).

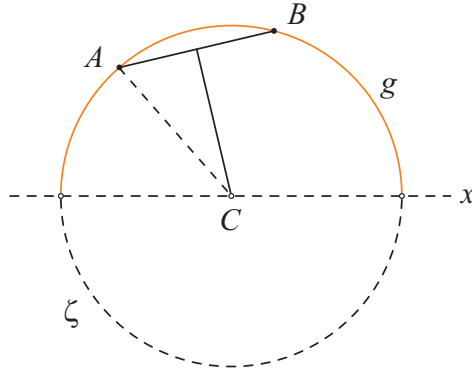


Figura 4.8:  $g$  es la  $h$ -línea que contiene a los puntos  $A$  y  $B$ .

1. Trazamos la mediatriz euclidiana del segmento  $AB$ , la cual intersecta al eje  $x$  en el punto  $C$ .

2. Trazamos la  $e$ -circunferencia  $\zeta$  con centro  $C$  y radio  $CA$  o  $CB$ .

La semicircunferencia  $g$  es la  $h$ -línea que contiene a los puntos  $A$  y  $B$  (Fig.4.8).

**Construcción 4.4.2.** *Dados dos puntos trazar la mediatriz hiperbólica.*

Sean  $A$  y  $B$  dos  $h$ -puntos en la  $e$ -circunferencia  $\zeta$  (Fig.4.9).

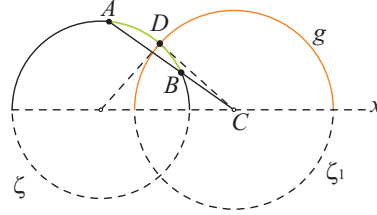


Figura 4.9:  $g$  es la  $h$ -mediatriz del  $h$ -segmento  $AB$

1. Trazamos la  $e$ -línea  $AB$  que intersecta al eje  $x$  en el punto  $C$ .
2. Trazamos la  $e$ -tangente desde  $C$  al  $e$ -arco  $AB$  de  $\zeta$  y sea  $D$  el punto de tangencia.
3. Trazamos la  $e$ -circunferencia  $\zeta_1$  con centro en  $C$  y radio  $CD$ .

La semicircunferencia  $g$  es la  $h$ -mediatriz del  $h$ -segmento  $AB$ .

**Observación 4.4.3.** *En la Construcción 4.4.2, tenemos que  $A$  y  $B$  son puntos inversos con respecto a  $\zeta_1$  ya que las circunferencias  $\zeta$  y  $\zeta_1$  son ortogonales. Mas aún,  $D$  es el  $h$ -punto medio del  $h$ -segmento  $AB$ .*

**Construcción 4.4.4.** *Dada una  $h$ -línea  $g$  y un  $h$ -punto  $P$  fuera de ella trazar la perpendicular a  $g$  que pasa por  $P$ .*

Sea  $P$  un  $h$ -punto que no pertenece a la  $h$ -línea  $g$  (Fig.4.10).

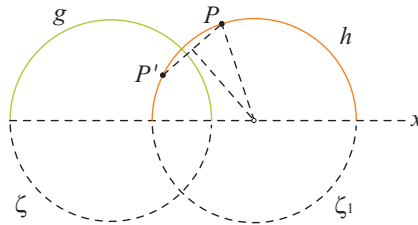


Figura 4.10:  $h$  es la  $h$ -perpendicular a  $g$  que pasa por  $P$ .

1. Encontramos  $P'$  inverso de  $P$  respecto a la  $e$ -circunferencia  $\zeta$ , la cual contiene a la  $h$ -línea  $g$ .
2. Trazamos la  $h$ -línea  $h$  que une los puntos  $P$  y  $P'$  (Construcción 4.4.1).

La  $h$ -línea  $h$  es la  $h$ -perpendicular a  $g$  que pasa por  $P$ .

**Observación 4.4.5.** En la Construcción 4.4.4 observamos que  $P$  y  $P'$  son puntos inversos respecto a  $\zeta$ , la  $e$ -circunferencia  $\zeta_1$  que contiene a  $h$  es ortogonal a  $\zeta$ .

## 4.5. Teoremas elementales de geometría hiperbólica

**Teorema 4.5.1.** Sea  $m$  una  $h$ -línea con puntos límite  $U$  y  $V$ . El lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $m$  es un arco de la  $e$ -circunferencia  $\zeta$  que pasa por  $U$  y  $V$ .

**Demostración.** Sea  $l$  el arco de la  $e$ -circunferencia  $\zeta$  que pasa por  $U$  y  $V$ , sean  $A$  y  $B$  dos  $h$ -puntos en  $l$  y sean  $C$  y  $D$  los pies de la perpendiculares a  $m$  desde  $A$  y  $B$  respectivamente (Fig.4.11).

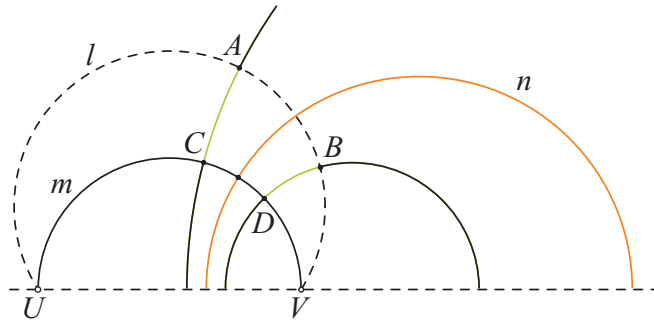


Figura 4.11: El lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $m$  es el arco  $l$ .

Al trazar la  $h$ -mediatriz  $n$  del segmento  $CD$  las  $e$ -circunferencias  $\zeta$  y  $\zeta_1$  que contienen el arco  $l$  y la  $h$ -línea  $m$  respectivamente pueden ser vistas como  $e$ -circunferencias coaxiales las cuales son cortadas ortogonalmente por la  $e$ -circunferencia  $\zeta_2$  que contiene a  $n$ .

Si invertimos respecto a  $\zeta_2$  tenemos que  $\zeta$  y  $\zeta_1$  quedan invariantes (Teorema 2.7.5), también  $C$  y  $D$  son puntos inversos respecto a  $n$  y lo mismo sucede para  $A$  y  $B$ . Por lo anterior los segmentos  $AC$  y  $BD$  son inversos respecto a  $n$ , en otras palabras,  $AC$  y  $BD$  son congruentes y por lo tanto  $A$  y  $B$  están a la misma distancia de  $m$ .

□



**Teorema 4.5.2.** *La suma de los ángulos de cualquier triángulo es menor que  $180^\circ$ .*

**Demostración.** Sea el triángulo  $\triangle ABC$  un  $h$ -triángulo rectángulo cuyos lados son el  $e$ -rayo  $a$  perpendicular al eje  $x$ , la  $e$ -circunferencia  $\zeta_1$  con centro  $M$  en el eje  $x$  y la  $e$ -circunferencia  $\zeta_2$  con centro  $N$  en el eje  $x$  (Fig.4.12).

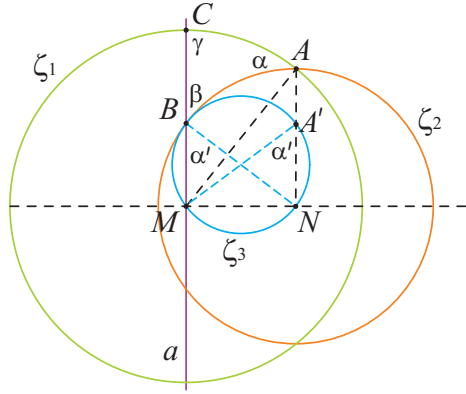


Figura 4.12: El triángulo  $\triangle ABC$  es un triángulo rectángulo

Por definición tenemos que el ángulo  $\alpha$  es el ángulo formado por las tangentes de  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  en el punto  $A$  o, lo que es lo mismo, el ángulo entre los radios  $MA$  y  $NA$  de  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  respectivamente. Análogamente el ángulo  $\beta$  es igual al ángulo  $\angle BNM$ . Por último el ángulo  $\gamma$  es recto.

La  $e$ -circunferencia  $\zeta_3$  cuyo diámetro es el segmento  $BN$  intersecta a  $\zeta_2$  en el punto  $B$ , como el punto  $A$  está fuera de  $\zeta_3$ , entonces

$$\alpha = \angle MAN < \angle MA'N = \angle MBN = \alpha'.$$

Y como  $\alpha' + \beta = 90^\circ$ , entonces

$$\alpha + \beta < 90^\circ,$$

por lo cual  $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$ .

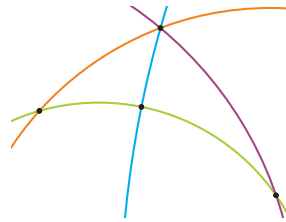


Figura 4.13:  $h$ -triángulo

Ahora, si se trata de un  $h$ -triángulo cualquiera se divide éste mediante una de sus alturas en dos  $h$ -triángulos rectángulos, y la suma de los ángulos agudos de estos dos  $h$ -triángulos

rectángulos es igual a la suma de los ángulos del  $h$ -triángulo dado (Fig.4.13).  $\square$

**Teorema 4.5.3.** *La suma de los ángulos de un cuadrilátero es menor a  $360^\circ$ .*

Para la demostración es suficiente dividir diagonalmente el cuadrilátero en dos triángulos.

**Teorema 4.5.4.** *Dos rectas tienen una y solamente una perpendicular común.*

**Demostración.** Sean  $p$  un  $e$ -rayo perpendicular al eje  $x$  y  $\zeta_1$  una  $e$ -circunferencia con centro  $L$  en el eje  $x$  dos  $h$ -líneas rectas divergentes (Fig.4.14).

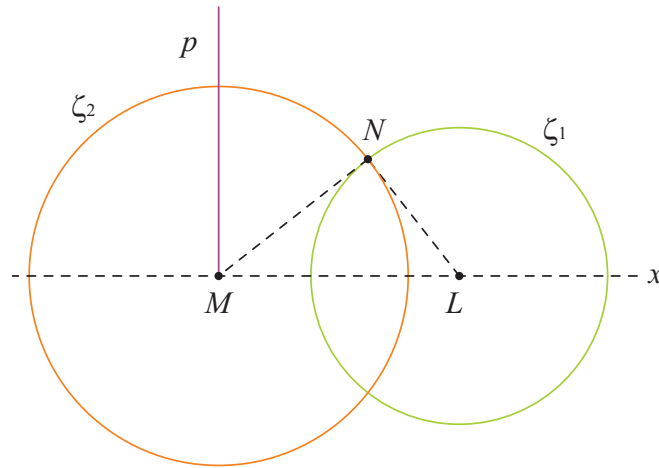


Figura 4.14:  $\zeta_2$  es la perpendicular común a  $p$  y  $\zeta_1$ .

Al trazar desde  $M$  la tangente euclidea  $MN$  a  $\zeta_1$  determinamos la  $e$ -circunferencia  $\zeta_2$  con centro  $M$  en el eje  $x$  y radio  $MN$  la cual es perpendicular (hiperbólicamente hablando) a  $\zeta_1$  y  $p$ . Dos  $h$ -líneas rectas no pueden tener dos perpendiculares comunes pues, de lo contrario, existiría un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos, lo cual contradice el Teorema 4.5.3.  $\square$

## Capítulo 5

# La línea de Simson hiperbólica

En este último capítulo estudiaremos los cuadriláteros de Saccheri y Legendre en el modelo del semiplano superior. También daremos una definición para la línea de Simson en geometría hiperbólica y veremos su comportamiento con respecto a su homóloga euclidiana.

Ya que una equivalencia al quinto postulado es la existencia de un rectángulo, en geometría hiperbólica no hay rectángulos, por eso estudiaremos los cuadriláteros de Saccheri y Legendre.

### 5.1. El cuadrilátero de Saccheri

La siguiente proposición muestra un resultado importante referente a la naturaleza de los ángulos en un cuadrilátero de Saccheri para el cual existe la circunferencia que lo circunscribe en el modelo del semiplano superior.

**Proposición 5.1.1.** *Si en un cuadrilátero de Saccheri, los dos pies de las perpendiculares de la base inferior y uno de los vértices en la base superior están en una circunferencia, entonces el otro vértice de la base superior también está en la circunferencia.*

**Demostración.** Sea  $\square ABCD$  un cuadrilátero de Saccheri con base inferior  $AD$  y base superior  $BC$  (Fig.5.1) y sean  $E$  y  $F$  los puntos medios de  $AD$  y  $BC$ , respectivamente.

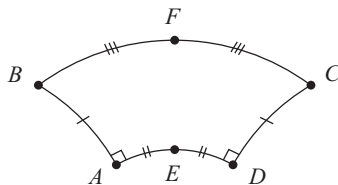


Figura 5.1: Cuadrilátero de Saccheri  $\square ABCD$

Entonces, si  $A, D$  y  $B$  están en la  $h$ -circunferencia  $\zeta$  con centro  $O$  de tal forma que el rayo  $EF$  pasa por  $O$  tenemos los siguientes dos casos:

**Caso 1.** La base superior ( $BC$ ) pasa por el centro  $O$ , es decir,  $O = F$  (Fig.5.2). Entonces los triángulos  $\triangle BFA$  y  $\triangle CFD$  son congruentes por LLL ya que

$$BF = FC \text{ y } AB = CD$$

y además  $FA = FD$  por ser radios de  $\zeta$ . Por lo cual  $C$  está en  $\zeta$ .

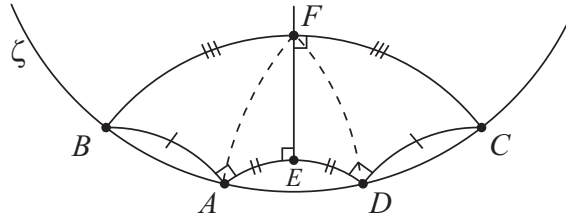


Figura 5.2:  $O = F$

**Caso 2.** La base superior ( $BC$ ) no pasa por el centro  $O$  (Fig.5.3). Entonces los triángulos  $\triangle BFO$  y  $\triangle CFO$  también son congruentes (LLL) y por lo cual  $C$  está en  $\zeta$ .

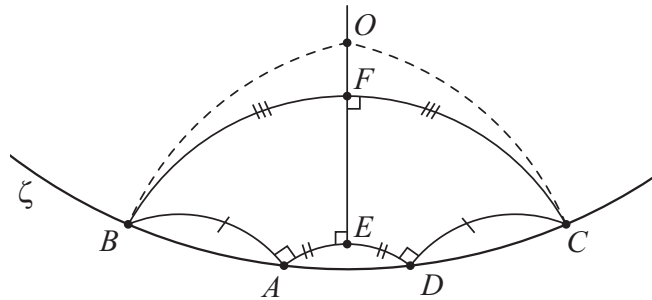


Figura 5.3:  $O \neq F$

Por lo tanto si tres vértices de un cuadrilátero de Saccheri determinan una circunferencia, entonces el cuarto vértice del cuadrilátero está en tal circunferencia.  $\square$

## 5.2. El cuadrilátero de Legendre

En geometría euclídea si tres de los cuatro ángulos de un cuadrilátero son rectos entonces el cuarto ángulo también es recto, lo cual es una afirmación equivalente al quinto postulado y nos ayudara a mostrar la siguiente proposición.

**Proposición 5.2.1.** *En un cuadrilátero de Legendre, si hay una circunferencia que pasa por los tres vértices que tienen ángulo recto, entonces esa circunferencia no pasa por el cuarto vértice del cuadrilátero.*

**Demostración.** Sea  $\zeta$  una circunferencia con centro  $O$  la cual pasa por  $A, B$  y  $C$ . Estos tres últimos son los vértices de un cuadrilátero de Legendre con ángulo recto (Fig.5.4).

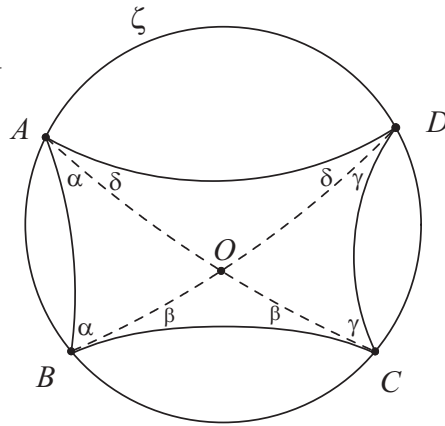


Figura 5.4: Ningún  $h$ -cuadrilátero de Legendre es inscriptible.

Hay que probar que  $D$  no está en  $\zeta$ . Supongamos que  $\zeta$  pasa por  $D$ , entonces los triángulos

$$\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle COD, \triangle DOA$$

son isósceles, así

$$\alpha + \delta = \alpha + \beta = \beta + \gamma = 90^\circ,$$

lo que implica que

$$\delta = \beta$$

entonces

$$\beta + \gamma = \delta + \gamma = 90^\circ$$

observando que

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

lo cual no puede ser, ya que en este caso,  $A, B, C$  y  $D$  forman un rectángulo y esto es una equivalencia del quinto postulado.

□

En la siguiente proposición mostraremos un resultado inmediato de la Proposición 5.2.1 para un triángulo rectángulo circunscrito en el modelo del semiplano superior.

**Proposición 5.2.2.** *En un triángulo rectángulo  $\triangle ABC$ , cuya circunferencia circunscrita existe, el punto  $D$  para el cual los pies de las perpendiculares a los lados son colineales en la hipotenusa, está fuera de la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo.*

**Demostración.** La demostración es inmediata de la Proposición 5.2.1, es decir, en la Figura 5.5 tenemos una idea más clara respecto a que  $\zeta$  no pasa por el vértice  $D$ .

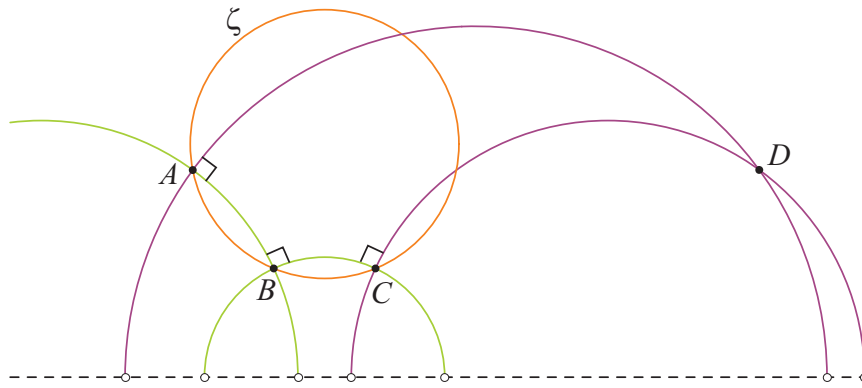


Figura 5.5: El vértice  $D$  no está en  $\zeta$ .

□

Ahora, si trazamos la línea  $AC$  obtenemos el triángulo rectángulo  $\triangle ABC$  para el cual los pies de las perpendiculares desde  $D$  a los lados son colineales (Fig.5.6), y  $D$  no está en  $\zeta$ .

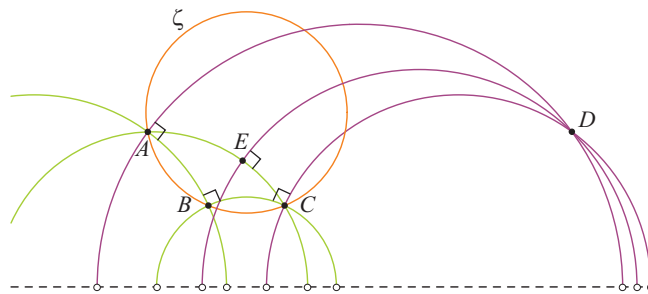


Figura 5.6: Al trazar la línea  $AC$  obtenemos el triángulo rectángulo  $\triangle ABC$ .

### 5.3. La línea de Simson en el plano hiperbólico

En esta sección definiremos la línea de Simson para geometría hiperbólica en el modelo del semiplano superior. Veremos que, a diferencia de como ocurre en geometría euclidiana, en geometría hiperbólica no todos los puntos en la circunferencia que circunscribe al triángulo (cuando existe) determinan línea de Simson, por lo cual dicha definición no requerirá que el triángulo sea inscriptible.

**Definición 5.3.1.** Si para un  $h$ -triángulo  $\triangle ABC$  se tiene que los pies  $L, M$  y  $N$  de las perpendiculares desde un punto  $P$  a los lados  $BC, AC$  y  $AB$ , respectivamente, son colineales entonces decimos que la línea que pasa por  $L, M$  y  $N$  es la línea de Simson del  $h$ -triángulo  $\triangle ABC$  con respecto a  $P$  (Fig.5.7). Al punto  $P$  le llamaremos punto de Simson.

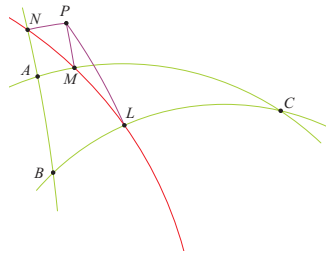


Figura 5.7: La línea de Simson del  $h$ -triángulo  $\triangle ABC$  con respecto a  $P$

Cabe mencionar que en geometría euclidiana el punto de Simson siempre está en la circunferencia que circunscribe al triángulo  $\triangle ABC$ . Esto, como veremos más adelante, no siempre pasa en geometría hiperbólica.

**Ejemplo 5.3.2.** En geometría euclidiana los vértices del triángulo  $\triangle ABC$  y el punto de Simson forman un cuadrilátero cíclico. En la figura 5.8 (b) la línea de Simson coincide con uno de los lados del triángulo  $\triangle ABC$ .

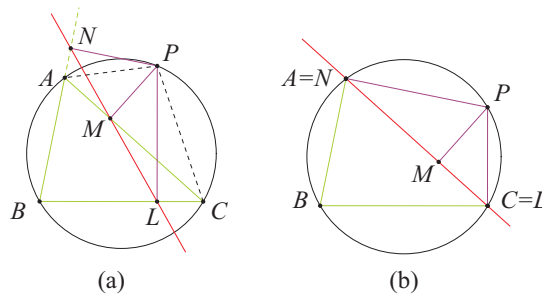


Figura 5.8: Ejemplo de la línea de Simson en geometría euclidiana.

Otra cosa que cabe mencionar ahora es que, por el Teorema 4.5.3, no tenemos la caracterización de cuadriláteros cíclicos como aquellos para los cuales la suma de ángulos opuestos es  $180^\circ$ .

En la siguiente proposición observaremos el comportamiento de la línea de Simson en geometría hiperbólica con relación al Ejemplo 5.3.2.

**Proposición 5.3.3.** *Si para un  $h$ -triángulo  $\triangle ABC$  tal que existe la  $h$ -circunferencia  $\zeta$  que lo circunscribe la línea de Simson coincide con la hipotenusa del triángulo  $\triangle ABC$  (Fig.5.6), entonces el punto de Simson está fuera de  $\zeta$ .*

**Demostración.** La demostración es inmediata de la Proposición 5.2.2.  $\square$

Al construir, en el modelo del semiplano superior, un triángulo  $\triangle ABC$  tal que existe la  $h$ -circunferencia  $\zeta$  que lo circunscribe junto con las perpendiculares desde un punto  $P$  en  $\zeta$  a los lados del mismo triángulo, observamos que los pies de las perpendiculares no determinan una  $h$ -línea para todos los puntos  $P$  en  $\zeta$  como ocurre en geometría euclideana y por lo cual tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 5.3.4.** *Dado un triángulo isósceles  $\triangle ABC$  para el cual existe la circunferencia  $\zeta$  que lo circunscribe, no todos los puntos sobre  $\zeta$  determinan una línea de Simson, es decir, dado  $P \in \zeta$ , no necesariamente los pies de las perpendiculares a los lados son colineales.*

**Demostración.** Sean  $\zeta$  la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo isósceles  $\triangle ABC$  y  $PC$  un diámetro de  $\zeta$  colocado de forma tal que sea un  $e$ -rayo (Fig.5.9). Entonces, sea  $M$  el pie de la perpendicular al lado  $AB$  que pasa por  $P$ .

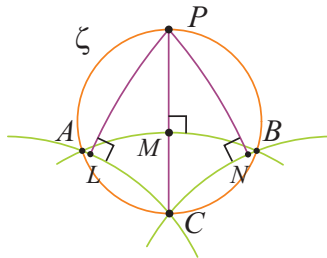


Figura 5.9: El punto  $P$  no determina la línea de Simson.

Para el pie  $N$  de la perpendicular al lado  $BC$  que pasa por  $P$  tenemos que es diferente del vértice  $B$ , es decir, no está en el lado  $AB$  ya que  $\angle PBC < 90^\circ$ , de lo contrario tendríamos una afirmación equivalente al quinto postulado. Análogamente el pie  $L$  de la perpendicular al lado  $AC$  que pasa por  $P$  se encuentra en el lado  $AC$  y es diferente del vértice  $A$ .



Por lo tanto los puntos  $L$ ,  $M$  y  $N$  no son colineales en el modelo del semiplano superior, es decir, la  $e$ -circunferencia que pasa por  $L$ ,  $M$  y  $N$  tiene su centro fuera del eje  $x$ .  $\square$

La siguiente conjetura nos muestra que en geometría hiperbólica, existen puntos sobre la circunferencia que circunscribe a un triángulo que determinan la línea de Simson así como sucede para todos los puntos sobre la circunferencia que circunscribe a un triángulo euclidiano.

**Conjetura** *Existe un  $h$ -triángulo  $\triangle ABC$  con  $h$ -circunferencia circunscrita  $\zeta$  para el cual existe una línea de Simson con respecto algún punto de  $\zeta$ .*

Para esto, veamos que en la Figura 5.10 tenemos un  $h$ -triángulo  $\triangle ABC$  circunscrito por una  $h$ -circunferencia  $\zeta$ , así como, un punto  $P_1$  en  $\zeta$  para el cual los pies de las perpendiculares desde  $P_1$  a los lados del mismo triángulo no son colineales, es decir, dichos pies determinan una  $e$ -circunferencia  $\zeta_1$  cuyo centro  $O_1$  se encuentra por encima del eje  $x$ .

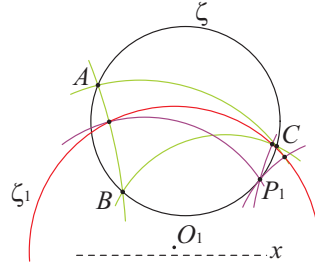


Figura 5.10:  $O_1$  se encuentra por encima del eje  $x$ .

Ahora, en la Figura 5.11 tenemos el mismo triángulo  $\triangle ABC$  de la Figura 5.10 con un punto  $P_2$  para el cual los pies de las perpendiculares desde  $P_2$  a los lados del mismo triángulo no son colineales y determinan una  $e$ -circunferencia  $\zeta_2$  cuyo centro  $O_2$  se encuentra por debajo del eje  $x$ .

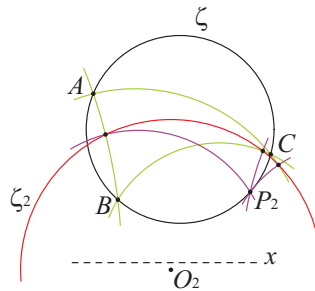


Figura 5.11:  $O_2$  se encuentra debajo del eje  $x$ .

Entonces, la conjetura dice que en el arco  $P_1P_2$  se encuentra un punto  $P_k$  que cumple con la Definición 5.3.1.

## 5.4. Más aún

A continuación expondremos los siguientes tres ejemplos.

- ◊ Los diferentes triángulos que tiene una línea de Simson (Def.5.3.1) dada en el plano hiperbólico cuyos puntos de Simson se encuentran en las circunferencias que circunscriben a los triángulos (Ejemplo 5.4.1).
- ◊ Los puntos de Simson en la circunferencia que circunscribe a un triángulo dado en el plano hiperbólico, determinados por el lugar geométrico descrito por el centro de una circunferencia, la cual representa a la línea de Simson en geometría hiperbólica cuando el centro de esta circunferencia esté en el eje  $x$  (Ejemplo 5.4.2).
- ◊ Los puntos de Simson en la circunferencia que circunscribe un triángulo isósceles dado en el plano hiperbólico (Ejemplo 5.4.3).

**Ejemplo 5.4.1.** Sea  $s$  una  $h$ -línea determinada por tres puntos dados,  $L, M$  y  $N$ . Para un punto  $(P_0)$  en una  $h$ -circunferencia  $\zeta_1$ , también dada, cuyo diámetro es diferente de  $s$ , trazamos las líneas  $LP_0, MP_0$  y  $NP_0$  y sus perpendiculares en los puntos  $L, M$  y  $N$  respectivamente (Fig.5.12).

Dichas perpendiculares determinan el  $h$ -triángulo  $\triangle ABC$  que es circunscrito por la  $h$ -circunferencia  $\zeta_2$ , el cual tiene como su  $h$ -línea de Simson a la  $h$ -línea  $s$ .

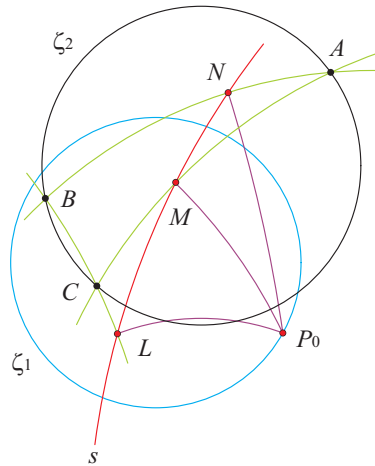


Figura 5.12:  $P_0$  es un punto de Simson.

En las Figuras 5.13 y 5.14 encontramos tres puntos de Simson en la  $h$ -circunferencia  $\zeta_2$ .

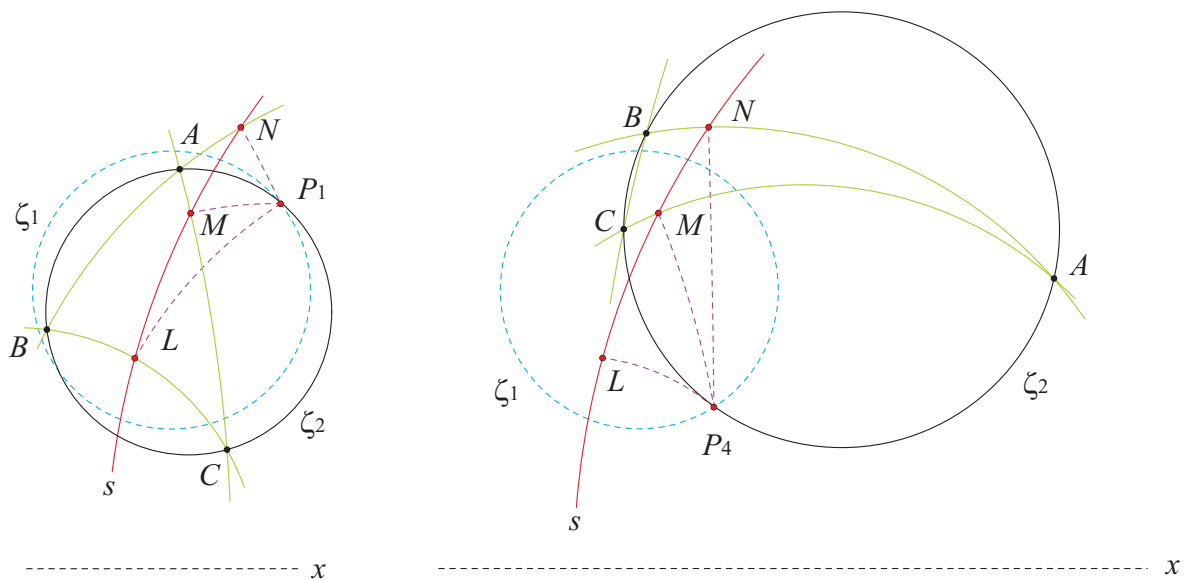


Figura 5.13:  $P_1$  y  $P_4$  son puntos de Simson.

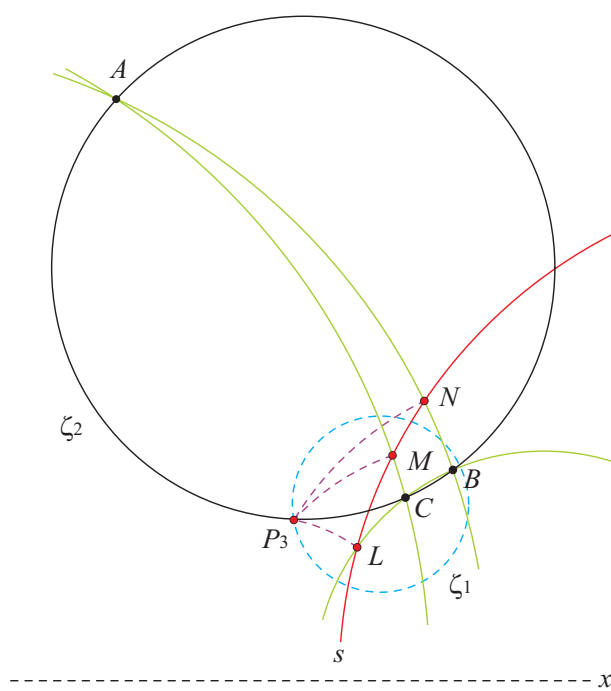


Figura 5.14:  $P_3$  es un punto de Simson.

En la Figura 5.15 tenemos que el punto  $P_2$  se encuentra en la circunferencia  $\zeta_2$  la cual no es hiperbólica.

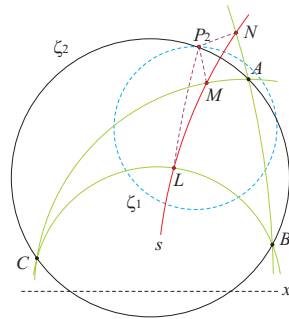


Figura 5.15:  $P_2$  es un punto de Simson.

En la Figura 5.16 podemos observar en conjunto todos los triángulos determinados por los puntos  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  expuestos anteriormente.

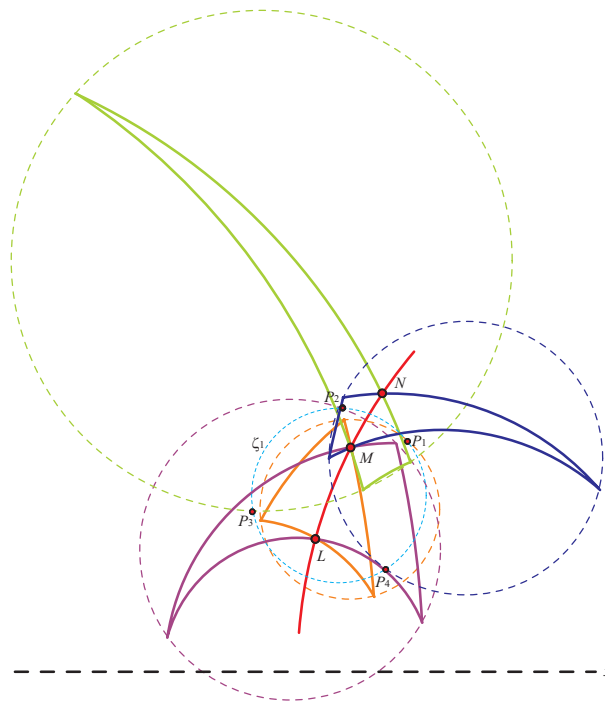


Figura 5.16: Triángulos determinados por los puntos  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$ .

Ahora expondremos cuatro puntos de Simson para un  $h$ -triángulo dado.

**Ejemplo 5.4.2.** Sea  $\triangle ABC$  un  $h$ -triángulo dado circunscrito por la  $h$ -circunferencia  $\zeta_1$  (Figura 5.17). Para un punto ( $Q_0$ ) en  $\zeta_1$  trazamos las perpendiculares  $Q_0L$ ,  $Q_0M$  y  $Q_0N$  a los lados  $BC$ ,  $AC$  y  $AB$  siendo  $L$ ,  $M$  y  $N$  los pies de dichas perpendiculares respectivamente.

Sea  $\zeta_2$  la  $e$ -circunferencia determinada por  $L$ ,  $M$  y  $N$  con  $e$ -centro  $O$ . Al trazar el lugar geométrico  $\lambda$  descrito por  $O$  al mover el punto  $Q_0$  sobre  $\zeta_1$  observamos tres puntos de intersección ( $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  y  $\Lambda_3$ ) con el eje  $x$ .

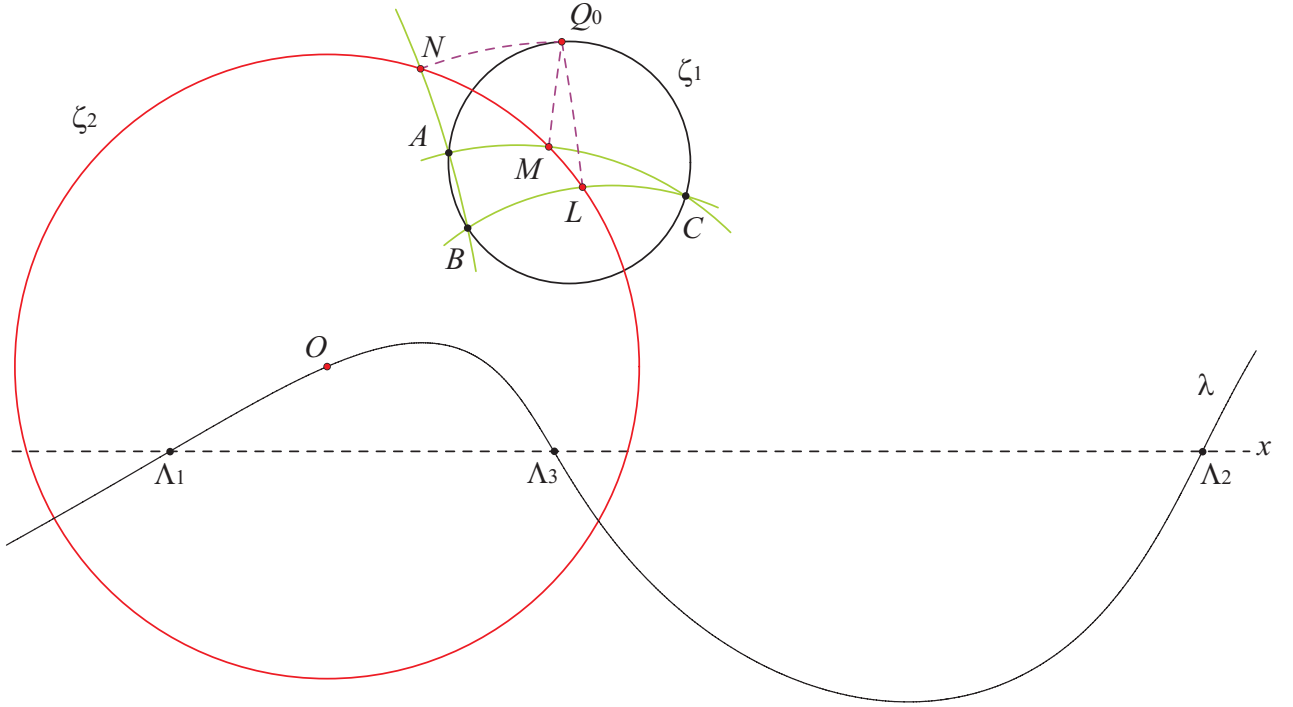


Figura 5.17:  $Q_0$  es un punto de Simson.

Ahora, en la (Figura 5.18) el punto  $Q_1$  en  $\zeta_1$  determina la  $h$ -línea de Simson  $q_1$  del  $h$ -triángulo  $\triangle ABC$ , es decir,  $\zeta_2$  es la  $h$ -línea  $q_1$  cuando  $\Lambda_1 = O$ . Análogamente, el punto  $Q_2$  en  $\zeta_1$  determina la  $h$ -línea de Simson  $q_2$  donde  $\Lambda_2 = O$ .

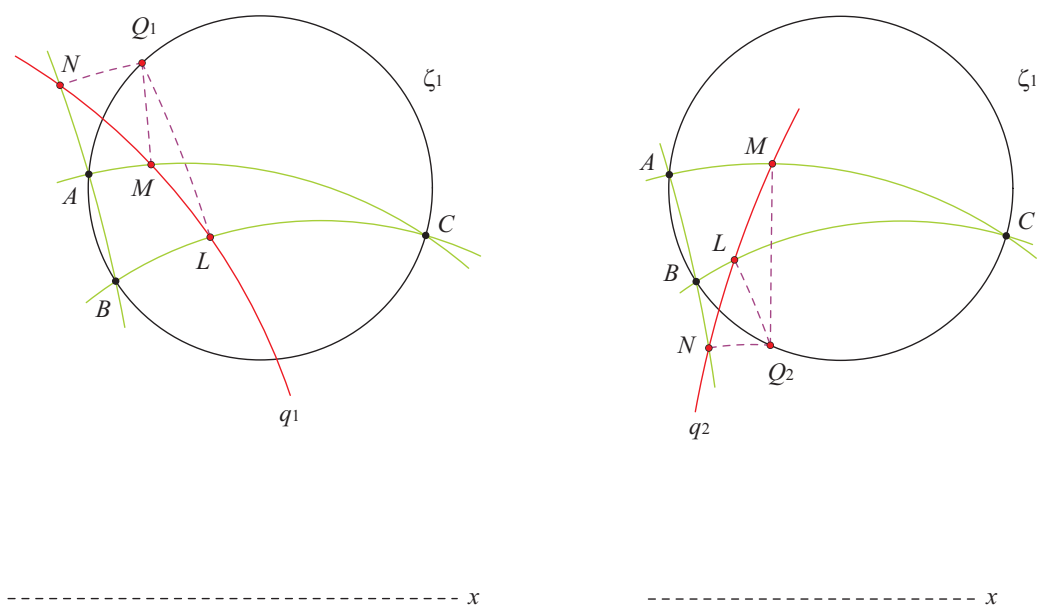


Figura 5.18:  $Q_1$  y  $Q_2$  son puntos de Simson.

También en la Figura 5.19 encontramos un tercer punto  $Q_3$  que determina la  $h$ -línea de Simson  $q_3$ , es decir,  $\zeta_2$  es la  $h$ -línea  $q_3$  cuando  $\Lambda_3 = O$ .

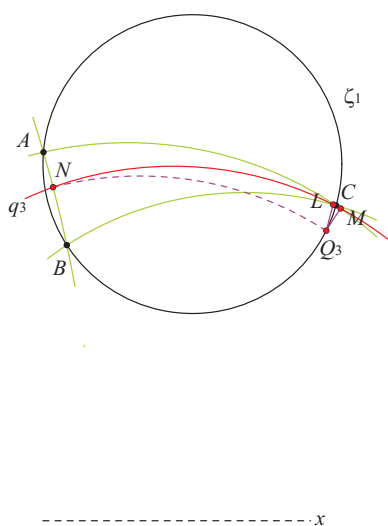


Figura 5.19:  $Q_3$  es un punto de Simson.

A continuación expondremos tres puntos de Simson para un  $h$ -triángulo isósceles.

**Ejemplo 5.4.3.** Sea  $\triangle ABC$  un  $h$ -triángulo isósceles dado circunscrito por la  $h$ -circunferencia  $\zeta_1$  (Figura 5.20). Para un punto ( $R_0$ ) en  $\zeta_1$  trazamos las perpendiculares  $R_0L, R_0M$  y  $R_0N$  a los lados  $BC, AC$  y  $AB$  siendo  $L, M$  y  $N$  los pies de dichas perpendiculares respectivamente.

Sea  $\zeta_2$  la  $e$ -circunferencia determinada por  $L, M$  y  $N$  con  $e$ -centro  $O$ . Al trazar el lugar geométrico  $\mu$  descrito por  $O$  al mover el punto  $R_0$  sobre  $\zeta_1$  observamos dos puntos de intersección ( $M_1$  y  $M_2$ ) con el eje  $x$ .

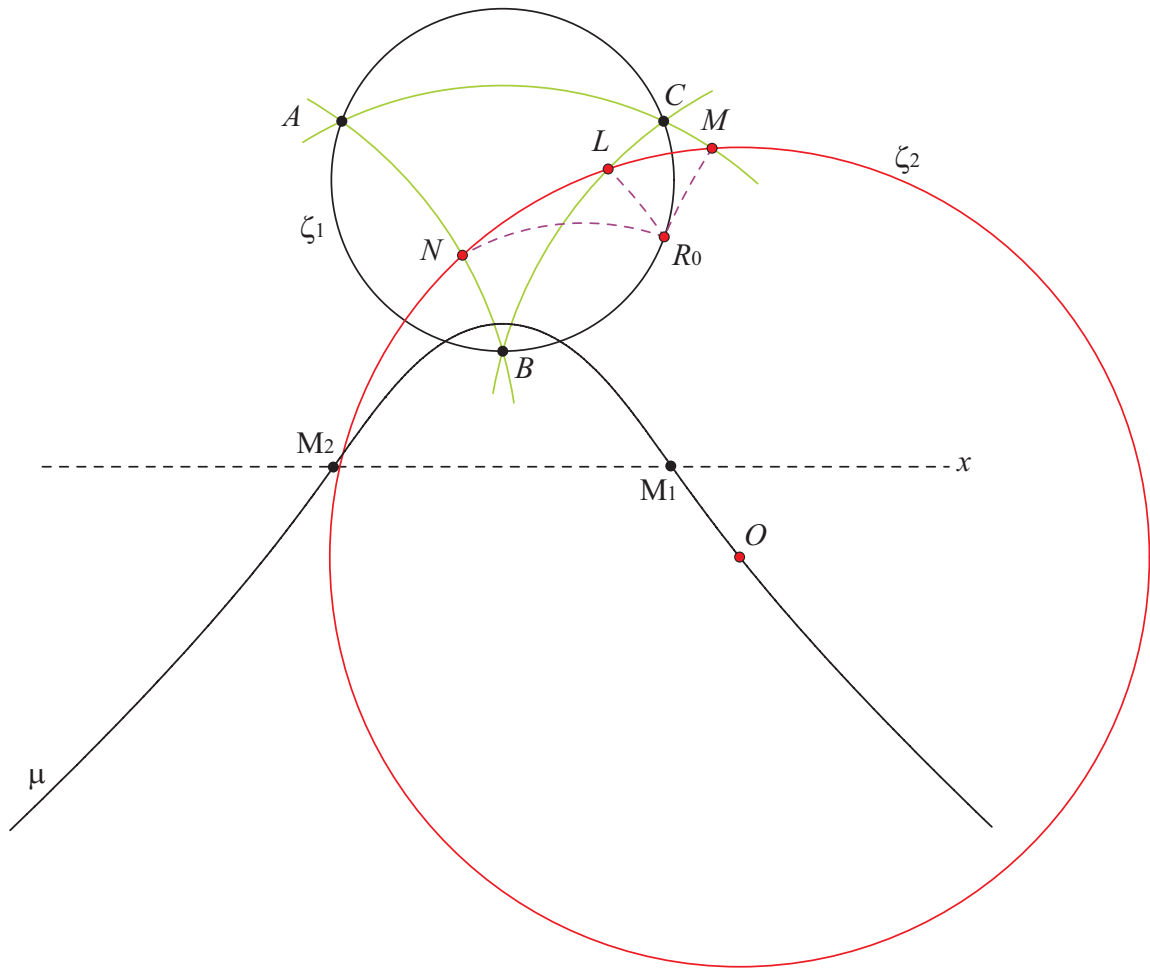


Figura 5.20:  $R_0$  es un punto de Simson.

Análogamente  $\zeta_2$  es la  $h$ -línea  $r_2$  cuando  $M_2 = O$ .



# Apéndice A

## Equivalencias del quinto postulado

### A.1. Ocho afirmaciones equivalentes al quinto postulado de Euclides.

1. Por un punto exterior a una recta es posible trazar una y sólo una recta paralela a la recta dada (Axioma de Playfair).
2. Si el punto  $C$  está fuera de  $AB$  pero en la circunferencia de diámetro  $AB$ , entonces el ángulo  $\angle ACB$  es recto.
3. Si el ángulo  $\angle ACB$  es recto, entonces  $C$  está en la circunferencia de diámetro  $AB$ .
4. Existe un triángulo tal que la suma de sus ángulos es  $180^\circ$ .
5. Existe un rectángulo (Hipótesis del ángulo recto de Saccheri).
6. Si tres de los cuatro ángulos de un cuadrilátero son rectos entonces el cuarto ángulo también es recto.
7. Dos rectas paralelas están a la misma distancia en cualquiera de sus puntos.
8. A través de cualquier punto en el interior de un ángulo existe una línea que intersecta a ambos rayos del ángulo que no pasa por el vértice del ángulo.

### A.2. Equivalencia entre el quinto postulado de Euclides y el Axioma de Playfair

A continuación probaremos la equivalencia entre el quinto postulado de Euclides y el Axioma de Playfair.

**Proposición A.2.1.** *Son equivalentes:*

(a) *Quinto postulado de Euclides: Si una línea recta intersecta a dos líneas rectas y forma ángulos interiores en el mismo lado que suman menos de dos ángulos rectos, entonces las dos líneas rectas, si son prolongadas indefinidamente, se cortan del lado en que los ángulos interiores suman menos de dos ángulos rectos.*

(b) *Axioma de Playfair: Por un punto exterior a una recta es posible trazar una y solo una recta paralela a la recta dada.*

**Demostración.**

$$a \Rightarrow b$$

Sean  $l$  una línea recta dada y  $M$  un punto que no está en  $l$ . Por  $M$  trazamos la perpendicular a  $l$  cortando a esta en el punto  $L$  (Construcción B.1.8) y trazamos la perpendicular ( $m$ ) a  $LM$  que pasa por  $M$  (Construcción B.1.7), es decir,  $LM$  corta transversalmente a  $l$  y  $m$  en  $L$  y  $M$  respectivamente (Fig.A.1).

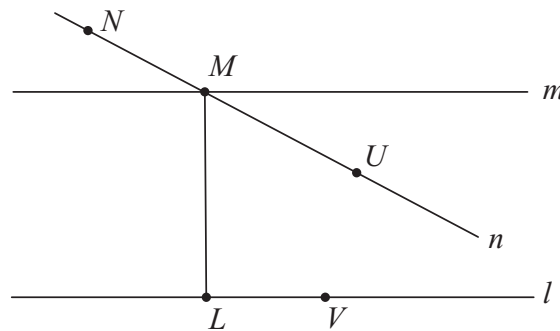


Figura A.1: La única paralela a  $l$  por  $M$  es  $m$ .

Entonces, por construcción, tenemos que  $l$  y  $m$  son paralelas. Sea  $n \neq m$  cualquier línea que pasa por  $M$ , entonces los ángulos  $\angle NML$  y  $\angle LMU$  no son ángulos rectos, de lo contrario  $m$  y  $n$  coincidirían.

Al suponer que el ángulo  $\angle LMU$  es menor que un ángulo recto tenemos que

$$\angle LMU + \angle MLV < 180^\circ,$$

entonces por el quinto postulado  $l$  y  $n$  se intersectan, por lo que la única paralela a  $l$  que pasa por  $M$  es  $m$ .

$$b \Rightarrow a$$

Sean  $l$  y  $m$  dos líneas cortadas por la transversal  $n$  en los puntos  $P$  y  $Q$  respectivamente (Fig.A.2) formando los ángulos  $\angle LPQ$ ,  $\angle MQP$  y  $\angle PQN$  para los cuales tenemos que

$$\angle LPQ + \angle MQP < 180^\circ \text{ y } \angle MQP + \angle PQN = 180^\circ,$$

entonces

$$\angle LPQ < \angle PQN.$$

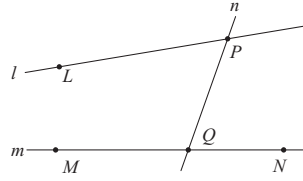


Figura A.2:  $\angle LPQ < \angle PQN$ .

Construimos la línea  $u$  que pasa por  $P$  (Fig.A.3) tal que

$$\angle QPU = \angle PQN.$$

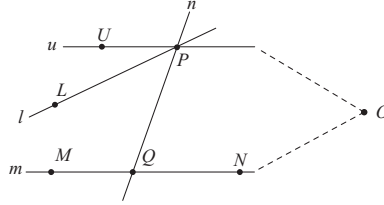


Figura A.3:  $l$  y  $m$  se intersectan.

Entonces

$$\angle QPL < \angle QPU$$

teniendo que  $u \neq l$ .

Ahora, por el Teorema 1.4.6  $u$  es paralela a  $m$ , entonces por el Axioma de Playfair  $l$  no es paralela  $m$ . Por lo tanto  $l$  y  $m$  se intersectan.

Al suponer que  $l$  y  $m$  no se intersectan del lado de  $L$  y  $M$ , es decir, suponemos que  $l$  y  $m$  se intersectan en  $O$ , entonces el ángulo  $\angle LPQ$  es un ángulo exterior del triángulo  $\triangle OPQ$  implicando que

$$\angle LPQ > \angle PQN$$

lo cual es una contradicción, ya que  $\angle LPQ < \angle PQN$ . Por lo tanto  $l$  y  $m$  se intersectan y lo hacen del del lado de  $L$  y  $M$ .

□

# Apéndice B

## Construcciones

### B.1. Geometría neutra

En esta sección elaboraremos construcciones y teoremas sin utilizar el quinto postulado con el propósito de trabajar con ellos indistintamente en geometría hiperbólica y geometría euclidiana.

**Construcción B.1.1.** *Dada una línea recta finita construir un triángulo equilátero.*

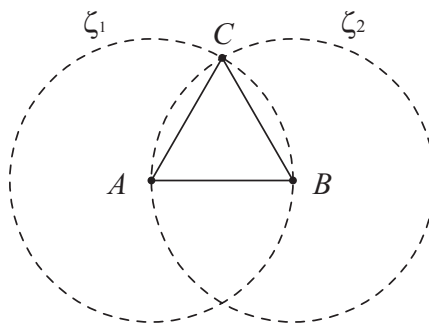


Figura B.1:  $AB$  es una línea recta finita dada.

Sea  $AB$  una línea recta finita dada (Fig.B.1).

1. Dibujamos la circunferencia  $\zeta_1$  con centro en  $A$  y radio  $AB$ .
2. Dibujamos la circunferencia  $\zeta_2$  con centro en  $B$  y radio  $AB$ .
3. Siendo  $C$  un punto de intersección de  $\zeta_1$  con  $\zeta_2$  trazamos los segmentos  $AC$  y  $BC$

El triángulo  $\triangle ABC$  es un triángulo equilátero.

**Demostración.** Tenemos que

$$AC = AB \text{ y } BC = AB$$

ya que son radios de  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  respectivamente, implicando que

$$AC = BC,$$

por lo tanto el triángulo  $\triangle ABC$  es un triángulo equilátero.

□

**Construcción B.1.2.** *Dados un punto y una línea recta finita construir una línea recta finita igual a la recta dada que tenga al punto dado como uno de sus puntos que la delimitan.*

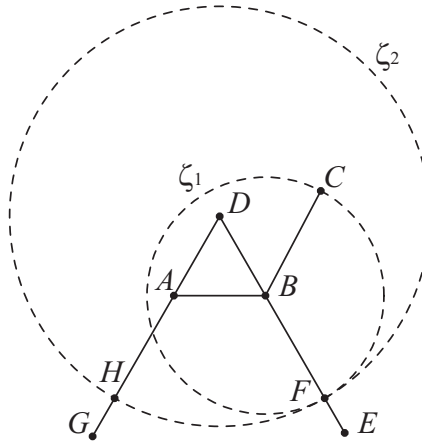


Figura B.2:  $AH = BF$ .

Sean  $A$  un punto y  $BC$  una línea recta finita (Fig.B.2).

1. Trazamos el segmento  $AB$  y dibujamos el triángulo equilátero  $\triangle ABD$  (Construcción B.1.1).
2. Dibujamos la circunferencia  $\zeta_1$  con centro  $B$  y radio  $BC$ .
3. Prolongamos el segmento  $DB$  hacia un punto ( $E$ ) fuera de la circunferencia siendo  $F$  el punto de intersección de  $ED$  y  $\zeta_1$ .
4. Dibujamos la circunferencia  $\zeta_2$  con centro  $D$  y radio  $DF$ .
5. Prolongamos el segmento  $DA$  hacia un punto ( $G$ ) fuera de la circunferencia siendo  $H$  el punto de intersección de  $GD$  y  $\zeta_2$ .

La línea recta finita  $AH$  es delimitada por el punto  $A$  y es igual a la línea recta finita  $BC$ .

**Demostración.** Tenemos que

$$DH = DF \text{ y } BC = BF$$

ya que son radios de  $\zeta_2$  y  $\zeta_1$  respectivamente, también los segmentos  $DA$  y  $DB$  son iguales por pertenecer al triángulo equilátero  $\triangle ABD$ .

Entonces

$$(DH - DA) = AH = BF = (DF - DB)$$

y como  $BC = BF$  tenemos que

$$AH = BC,$$

por lo tanto la línea recta finita  $AH$  es delimitada por el punto  $A$  y es igual a la línea recta finita  $BC$ .

□

**Construcción B.1.3.** *Dados dos segmentos diferentes (en magnitud) de líneas rectas construir en el segmento mas grande un segmento igual al mas pequeño.*

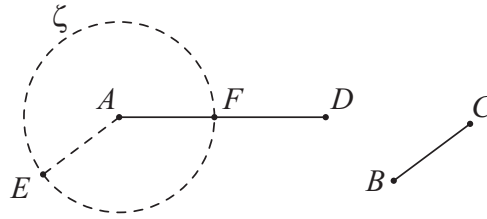


Figura B.3:  $AF = BC$ .

Sean  $AD$  y  $BC$  dos segmentos de líneas rectas dados tales que  $AD > BC$  (Fig.B.3).

1. Trazamos desde el punto  $A$  la línea  $AE = BC$  (Construcción B.1.2).
2. Trazamos la circunferencia  $\zeta$  con centro en  $A$  y radio  $AE$  siendo  $F$  el punto de intersección de  $\zeta$  y  $AD$ .

El segmento  $AF$  pertenece al segmento  $AD$  y es igual al segmento  $BC$ .

**Demostración.** Con ayuda de la Construcción B.1.2 observamos que  $AE = BC$ . También

$$AE = AF$$

por ser ambos radios de  $\zeta$ , además, el segmento  $AF$  pertenece al segmento  $AD$ .

Por lo tanto el segmento  $AF$  es igual al segmento  $BC$  y pertenece al segmento  $AD$ .

□

**Teorema B.1.4.** *En un triángulo isósceles los ángulos en la base son iguales.*

*Construcción para la demostración.*

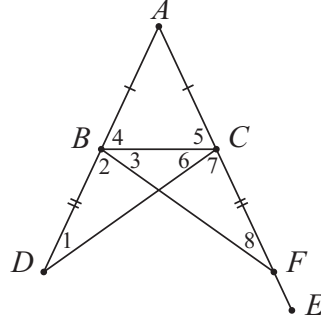


Figura B.4:  $\angle 4 = \angle 5$ .

Sea  $\triangle ABC$  un triángulo isósceles donde  $AB = AC$  (Fig.B.4).

1. Prolongamos el segmento  $AB$  siendo  $D$  un punto en la línea que contiene al segmento  $AB$ .
2. Prolongamos el segmento  $AC$  siendo  $E$  un punto en la línea que contiene al segmento  $AC$  tal que  $CE > BD$ .
3. Trazamos el segmento  $CF$  en la línea  $AC$  tal que  $CF = BD$  (Construcción B.1.3).
4. Trazamos los segmentos  $DC$  y  $FB$ .

**Demostración.** Por construcción tenemos que  $AD = AF$  y ambos segmentos determinan al ángulo  $\angle A$ , entonces

$$\triangle ABF \cong \triangle ADC \quad (\text{LAL})$$

lo que implica que

$$\angle 8 = \angle 1, \angle 4 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 6, BF = DC.$$

Análogamente por LAL observamos que

$$\triangle BCF \cong \triangle DBC$$

teniendo que

$$\angle 3 = \angle 6.$$

Por lo tanto  $\angle 4 = \angle 5$ .

□

**Construcción B.1.5.** *Dado un ángulo rectilíneo construir la bisectriz del mismo ángulo.*

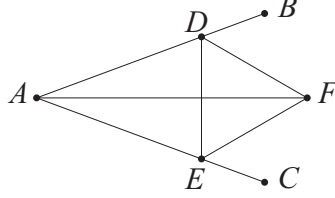


Figura B.5:  $AF$  es la bisectriz del ángulo  $\angle BAC$ .

Sea  $\angle BAC$  un ángulo rectilíneo dado (Fig.B.5).

1. Para un punto ( $D$ ) en el segmento  $AB$  diferente de  $A$  y  $B$  trazamos el punto  $E$  en el segmento  $AC$  tal que  $AE = AD$  (Construcción B.1.3).
2. Trazamos el segmento  $DE$  y construimos el triángulo equilátero  $\triangle DEF$  (Construcción B.1.1).
3. Trazamos el segmento  $AF$ .

$AF$  es la bisectriz del ángulo  $\angle BAC$ .

**Demostración.** Por construcción tenemos que el triángulo  $\triangle ADE$  es isósceles y el triángulo  $\triangle DEF$  es también un triángulo isósceles ya que  $DF = EF$ . Ahora, por el Teorema B.1.4 tenemos que

$$\angle ADE = \angle AED \text{ y } \angle FDE = \angle FED,$$

por lo cual

$$\angle ADF = \angle AEF,$$

y también

$$\triangle ADF \cong \triangle AEF \quad (\text{LAL})$$

lo que implica que

$$\angle DAF = \angle EAF$$

por lo tanto  $AF$  es la bisectriz del ángulo  $\angle BAC$ .

□



**Construcción B.1.6.** *Dada una línea recta finita construir el punto bisector de la misma.*

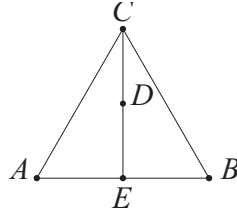


Figura B.6:  $E$  es el punto bisector de  $AB$ .

Sea  $AB$  una línea recta dada (Fig.B.6).

1. Trazamos el triángulo equilátero  $\triangle ABC$  (Construcción B.1.1).
2. Trazamos la bisectriz  $DC$  del ángulo  $\angle ACB$  (Construcción B.1.5).
3. Prolongamos el segmento  $CD$  siendo  $E$  el punto de intersección del segmento  $AB$  y la línea que contiene al segmento  $CD$ .

$E$  es el punto bisector del segmento  $AB$ .

**Demostración.** Por construcción tenemos que  $AC = BC$  y  $\angle ACE = \angle BCE$ , entonces

$$\triangle ACE \cong \triangle BCE \quad (\text{LAL}),$$

lo que implica que

$$AE = EB.$$

Por lo tanto  $E$  es el punto bisector del segmento  $AB$

□

**Construcción B.1.7.** *Dados una línea recta y un punto en la misma construir una línea recta que forme ángulos rectos con la línea dada a través del punto dado.*

Sean  $AB$  una línea recta y  $C$  un punto que pertenece al segmento  $AB$  diferente de  $A$  y  $B$  (Fig.B.7).

1. Para un punto ( $D$ ) en el segmento  $AC$  diferente de  $A$  y  $C$  trazamos el punto  $E$  en el segmento  $CB$  tal que  $CE = DC$  (Construcción B.1.3).
2. Trazamos el triángulo equilátero  $\triangle FDE$  (Construcción B.1.1).
3. Trazamos el segmento  $FC$ .

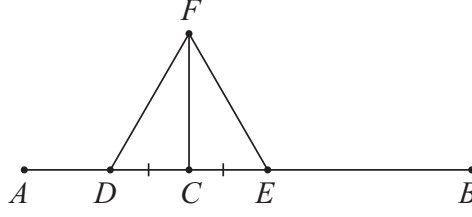


Figura B.7:  $FC$  forma ángulos rectos con la línea recta  $AB$ .

La línea recta  $FC$  forma ángulos rectos con la línea recta  $AB$ .

**Demostración.** Por construcción tenemos que  $FD = FE$  y  $DC = CE$ . También los ángulos  $\angle FDC$  y  $\angle FEC$  son iguales (Teorema B.1.4), entonces

$$\triangle FDC \cong \triangle FEC \quad (\text{LAL}),$$

lo que implica que

$$\angle FCD = \angle FCE.$$

Por lo tanto la línea recta  $FC$  forma ángulos rectos con la línea recta  $AB$  a través del punto  $C$ .

□

**Construcción B.1.8.** *Dados una línea recta y un punto fuera de ella construir una línea recta perpendicular a la línea dada a través del punto dado.*

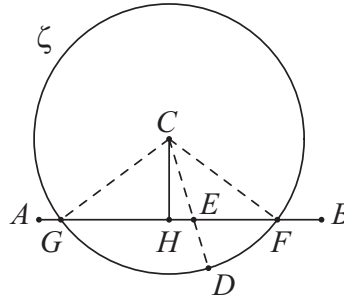


Figura B.8:  $CH$  es perpendicular a la línea recta  $AB$ .

Sean  $AB$  una línea recta y  $C$  un punto fuera de la misma (Fig.B.8).

1. Para un punto ( $D$ ) que no pertenece al mismo semiplano (determinado por  $AB$ ) que contiene al punto  $C$  trazamos el segmento  $CD$ .

2. Siendo  $E$  el punto de intersección de los segmentos  $AB$  y  $CD$  trazamos la circunferencia  $\zeta$  con centro  $C$  y radio  $CD$ .
3. Prolongamos el segmento  $EB$  que interseca a  $\zeta$  en los punto  $F$  y  $G$ , siendo  $H$  el punto bisector de  $GF$ .
4. Trazamos es segmento  $CH$ .

$CH$  es perpendicular a la línea recta  $AB$ .

**Demostración.** Por construcción tenemos que  $CG = CF$ . También los ángulos  $\angle CGH$  y  $\angle CFH$  son iguales (Teorema B.1.4), entonces

$$\triangle CGH \cong \triangle CFH \quad (\text{LAL}),$$

lo que implica que

$$\angle CHG = \angle CHF.$$

Por lo tanto  $CH$  es perpendicular a la línea recta  $AB$  a través del punto  $C$ .

□

**Construcción B.1.9.** *Dada una línea recta finita construir un cuadrilátero de Saccheri que tenga como base inferior a la línea recta finita dada.*

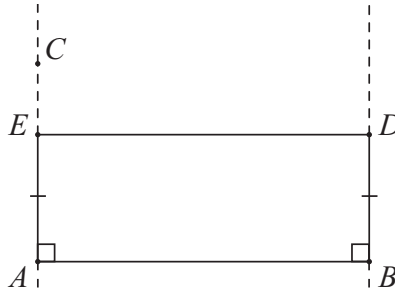


Figura B.9: Cuadrilátero de Saccheri  $\square AEDB$ .

Sea  $AB$  una línea recta finita (Fig.B.9).

1. Trazamos las perpendiculares al segmento  $AB$  a través de los puntos  $A$  y  $B$  (Construcción B.1.7).
2. Siendo  $C$  un punto en la perpendicular a través de  $A$  y  $D$  un punto en la perpendicular a través de  $B$  tales que  $AC > BD$ , trazamos el segmento  $AE = BD$  en la perpendicular a través de  $A$  (construcción B.1.3) de tal forma que los segmentos  $AE$  y  $BD$  estén en el semiplano superior determinado por  $AB$ .

3. Trazamos la perpendicular al segmento  $AE$  a través del punto  $E$  intersectando al segmento  $BD$  en el punto  $D$ .

El cuadrilátero  $\square AEDB$  es un cuadrilátero de Saccheri.

**Demostración.** Por construcción tenemos que

$$AE = BD \text{ y } \angle EAB = \angle DBA = 90^\circ,$$

entonces los triángulos  $\triangle ABE$  y  $\triangle ABD$  son congruentes (LAL).

Por lo tanto  $\square AEDB$  es un cuadrilátero de Saccheri.

□

**Construcción B.1.10.** *Dada una línea recta finita construir un cuadrilátero de Legendre que tenga como base inferior a la línea recta finita dada.*

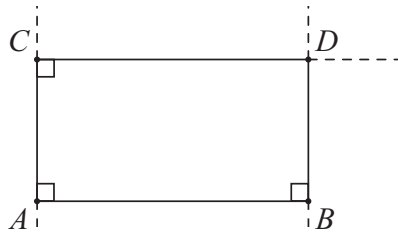


Figura B.10: Cuadrilátero de Legendre  $\square ACDB$ .

Sea  $AB$  una línea recta finita (Fig.B.10).

1. Trazamos las perpendiculares al segmento  $AB$  a través de los puntos  $A$  y  $B$  (Construcción B.1.7).
2. Siendo  $C$  un punto en la perpendicular a través de  $A$  trazamos la perpendicular al segmento  $AC$  a través de  $C$  intersectando a la perpendicular a través de  $B$  en el punto  $D$  de tal forma que los puntos  $C$  y  $D$  estén en el semiplano superior determinado por  $AB$ .

El cuadrilátero  $\square ACDB$  es un cuadrilátero de Legendre.

**Demostración.** Por construcción tenemos que los ángulos en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son rectos. Por lo tanto  $\square ACDB$  es un cuadrilátero de Legendre.

□

## Apéndice C

# Demostraciones de los criterios básicos de triángulos congruentes

### C.1. Criterios LAL, ALA, LLL y AAL

**Teorema C.1.1.** *Triángulos con la relación Lado Angulo Lado son congruentes (Fig.C.1).*

**Demostración.** Sean los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  (Fig.C.1) tales que

$$AB = A'B' , AC = A'C' \text{ y } \angle BAC = \angle B'A'C'.$$

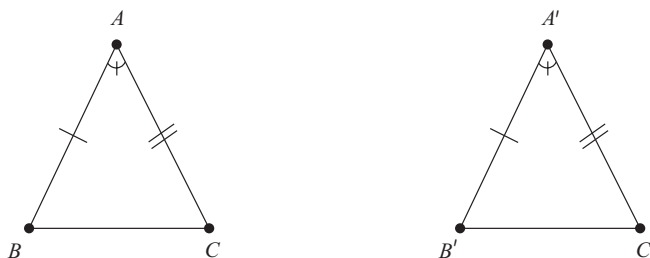


Figura C.1: Triángulos con la relación Lado Angulo Lado son congruentes.

Tomamos el triángulo  $\triangle ABC$  y lo colocamos sobre el triángulo  $\triangle A'B'C'$  de tal forma que el punto  $A$  coincida con el punto  $A'$  y que el segmento  $AB$  recorra el segmento  $A'B'$ .

Por hipótesis el punto  $B$  coincide con el punto  $B'$ , el segmento  $AC$  se encuentra a lo largo del segmento  $A'C'$  y el punto  $C$  coincide con el punto  $C'$ .

Entonces por el primer postulado hay una y solo una línea recta que une el punto  $B = B'$  con el punto  $C = C'$ , por lo cual el segmento  $BC$  coincide con el segmento  $B'C'$ , teniendo que

$$\angle ABC = \angle A'B'C' \text{ y } BC = B'C'.$$

Por lo tanto los triángulos con la relación LAL son congruentes.  $\square$

**Teorema C.1.2.** *Triángulos con la relación Angulo Lado Angulo son congruentes (Fig.C.2).*

**Demostración.** Basta ver que  $AC = A'C'$  y así, por LAL, tenemos el resultado.

Caso 1. Suponemos que  $AC > A'C'$ .

Sea  $E$  sobre el segmento  $AC$  tal que  $CE = C'A'$  (Fig.C.2).

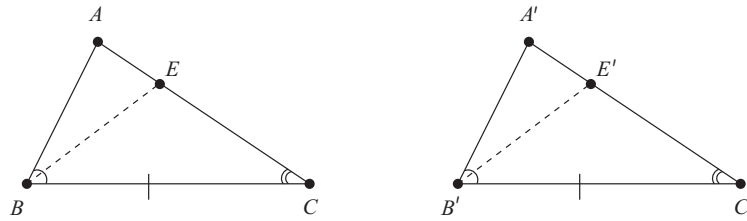


Figura C.2: Triángulos con la relación Angulo Lado Angulo son congruentes.

Ahora, los triángulos  $\triangle EBC$  y  $\triangle A'B'C'$  son congruentes por LAL, entonces

$$\angle EBC = \angle A'B'C'$$

y como por hipótesis los ángulos  $\angle ABC$  y  $\angle A'B'C'$  son iguales tenemos que

$$\angle EBC = \angle ABC$$

entonces

$$BA \parallel BE$$

esto es,  $E$  está en la línea  $BA$  y como  $E$  también está en la línea  $AC$  entonces  $E = A$  y así,  $AC = A'C'$  lo cual contradice la hipótesis ( $AC > A'C'$ ).

Caso 2. Suponemos que  $AC < A'C'$ .

Analogamente al caso anterior trazamos el segmento  $E'C' = AC$  (Fig.C.2) teniendo que los triángulos  $\triangle E'B'C'$  y  $\triangle ABC$  son congruentes por LAL, entonces

$$\angle E'B'C' = \angle ABC$$

y como por hipótesis los ángulos  $\angle ABC$  y  $\angle A'B'C'$  son iguales tenemos que

$$\angle E'B'C' = \angle A'B'C'$$

entonces

$$B'A' \parallel B'E'$$

esto es,  $E'$  está en la línea  $B'A'$  y como  $E'$  también está en la línea  $A'C'$  entonces  $E' = A'$  y así,  $A'C' = AC$  lo cual contradice la hipótesis ( $AC < A'C'$ ).

Por lo tanto los triángulos con la relación ALA son congruentes.  $\square$

**Teorema C.1.3.** *Triángulos con la relación Lado Lado Lado son congruentes (Fig.C.3).*

**Demostración.** Sean los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  (Fig.C.3) tales que

$$AB = A'B', \quad BC = B'C' \text{ y } CA = C'A'.$$

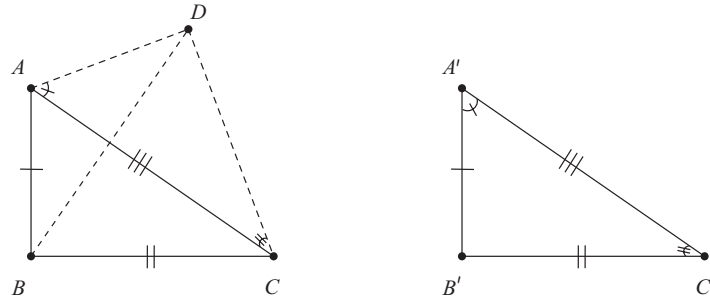


Figura C.3: Triángulos con la relación Lado Lado Lado son congruentes.

Y sea  $D$  un punto que no pertenece al semiplano (determinado por  $AC$ ) que contiene al punto  $B$  tal que (Fig.C.3)

$$\angle CAD = \angle B'A'C' \text{ y } \angle ACD = \angle B'C'A'.$$

Los triángulos  $\triangle ACD$  y  $\triangle A'B'C'$  son congruentes por ALA, lo que implica que

$$A'B' = AD \text{ y } B'C' = DC.$$

Ahora, por hipótesis, tenemos que

$$AB = AD \text{ y } BC = DC,$$

es decir, los triángulos  $\triangle ABD$  y  $\triangle CBD$  son isósceles, por lo cual

$$\angle ABD = \angle ADB \text{ y } \angle CBD = \angle BDC,$$

entonces

$$\angle ABD + \angle CBD = \angle ADB + \angle BDC$$

teniendo que  $\angle ABC = \angle ADC$  y así,

$$\triangle DAC \cong \triangle BAC$$

por LAL.

Por lo tanto  $\triangle ABC \cong \triangle ACD \cong \triangle A'B'C'$ .

□

**Teorema C.1.4.** *Triángulos con la relación Angulo Angulo Lado son congruentes (Fig.C.4).*

**Demostración.** Basta ver que  $AB = A'B'$  y así, por LAL, tenemos el resultado.

Caso 1. Suponemos que  $AB > A'B'$ .

Trazamos, sobre el segmento  $AB$ , el segmento  $BD$  congruente con  $A'B'$  y trazamos el segmento  $DC$  (Fig.C.4).

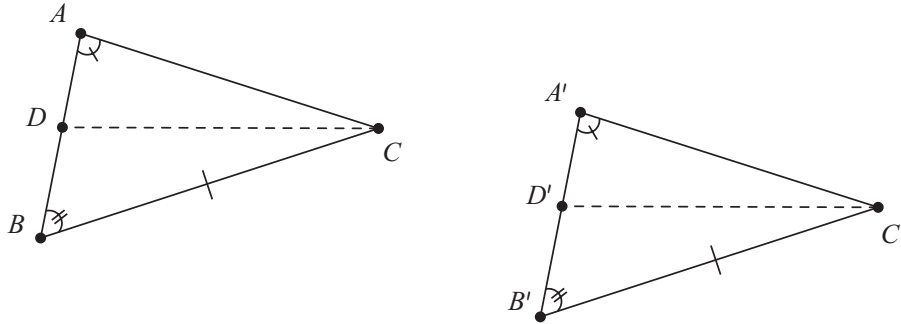


Figura C.4: Triángulos con la relación Angulo Angulo Lado son congruentes.

Ahora, los triángulos  $\triangle BCD$  y  $\triangle A'B'C'$  son congruentes por LAL, entonces

$$\angle CDB = \angle C'A'B'$$

y como por hipótesis los ángulos  $\angle CAB$  y  $\angle C'A'B'$  son iguales tenemos que

$$\angle CDB = \angle CAB,$$

entonces

$$AC \parallel DC$$



lo cual es una contradicción ya que  $AC$  y  $DC$  se cortan en  $C$ .

Caso 2. Suponemos que  $AB < A'B'$ .

Analogamente al caso anterior trazamos el segmento  $B'D' = AB$  (Fig.C.4) teniendo que los triángulos  $\triangle B'C'D'$  y  $\triangle ABC$  son congruentes por LAL, entonces

$$\angle C'D'B' = \angle CAB$$

y como por hipótesis los ángulos  $\angle CAB$  y  $\angle C'A'B'$  son iguales, tenemos que

$$\angle C'D'B' = \angle C'A'B'$$

lo que implica que

$$C'D' \parallel A'C'$$

lo cual es una contradicción ya que  $C'D'$  y  $A'C'$  se cortan en  $C'$ .

Por lo tanto los triángulos con la relación AAL son congruentes.

□

# Apéndice D

## Modelos de geometría hiperbólica

### D.1. Modelo de Poincaré

Conocido también como el modelo del disco de Poincaré. En este modelo los puntos están dados por el conjunto  $P_d = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < 1\}$ , es decir, los  $h$ -puntos de este modelo son los  $e$ -puntos en  $\mathbb{R}^2$  que están en el interior de un disco y tienen por frontera una  $e$ -circunferencia  $\zeta$  de radio  $r = 1$ .

Para este modelo, un diámetro de  $\zeta$  es considerado una  $h$ -línea recta (Fig.D.1) y también el arco de una  $e$ -circunferencia ortogonal a  $\zeta$  que queda dentro de  $\zeta$ . Los  $e$ -puntos en la circunferencia  $\zeta$  no pertenecen a nuestro modelo ya que son puntos en la frontera de  $P_d$ .

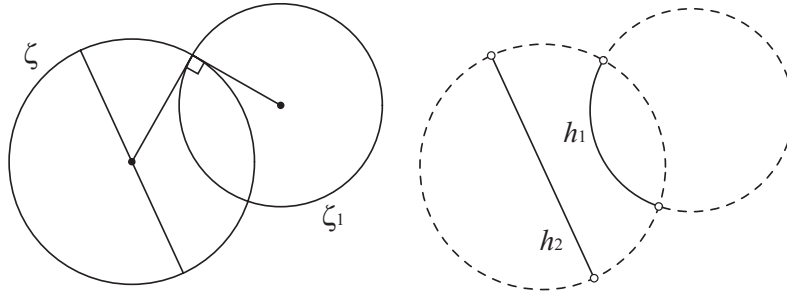


Figura D.1: Las  $h$ -líneas  $h_1$  y  $h_2$  son representadas por un arco de la  $e$ -circunferencia  $\zeta_1$  y un diámetro de  $\zeta$  respectivamente.

El quinto postulado se muestra en la Figura D.2, en donde las  $h$ -líneas  $h_1$  y  $h_2$  son paralelas a la  $h$ -línea  $g$  por el  $h$ -punto  $P$ . Las  $h$ -líneas que unen el  $h$ -punto  $P$  con algún  $e$ -punto del arco  $YW$ , o  $ZX$ , serán llamadas ultraparalelas.

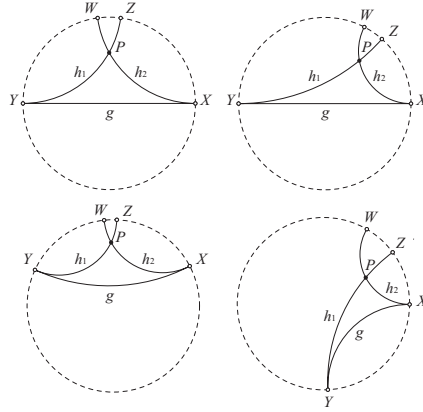


Figura D.2: Las  $h$ -líneas  $h_1$  y  $h_2$  son paralelas a la  $h$ -línea  $g$  por el  $h$ -punto  $P$ .

## D.2. Equivalencia entre los modelos de Poincaré

Para esta equivalencia utilizaremos la inversión en geometría euclidiana vista en el Capítulo 2.

Sea  $\Pi$  el  $e$ -semiplano superior que representa al modelo del semiplano de Poincaré y  $x$  la línea que lo delimita. Y sea  $\zeta$  una  $e$ -circunferencia tangente a  $x$  con centro  $O$  y radio  $r$  que no está en  $\Pi$  (Fig.D.3).

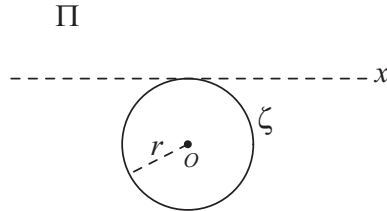


Figura D.3: El modelo del semiplano de Poincaré es representado por el  $e$ -semiplano superior  $\Pi$  y la  $e$ -circunferencia  $\zeta$  es tangente a  $x$ .

Al invertir con respecto a  $\zeta$  tenemos que  $x$  se convierte en la  $e$ -circunferencia  $\zeta_1$  dentro de  $\zeta$  (Fig.D.4), el inverso de un punto dado  $P$  en  $\Pi$  es el punto  $P'$  dentro de  $\zeta_1$ , es decir,  $\Pi$  se invierte en la parte interior de  $\zeta_1$ . Analogamente, las  $e$ -circunferencias  $\zeta_2$  y  $\zeta_3$ , que tienen sus centros en  $x$ , se invierten en las  $e$ -circunferencias  $\zeta'_2$  y  $\zeta'_3$  y la  $e$ -línea  $q$  perpendicular a  $x$  en el punto  $Q$  se invierte en la  $e$ -circunferencia  $\zeta_4$ .

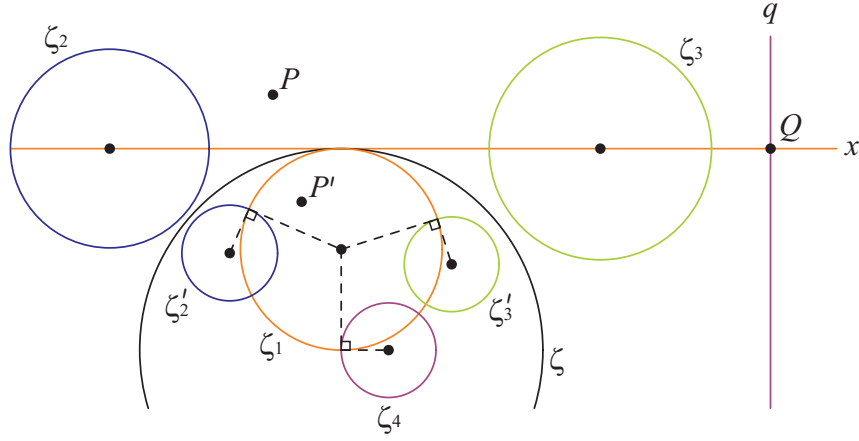


Figura D.4: Inversión respecto a la  $e$ -circunferencia  $\zeta$ .

Como la inversión preserva ángulos tenemos que  $\zeta_2', \zeta_3'$  y  $\zeta_4$  son ortogonales a  $\zeta_1$ , que es el inverso de  $x$  (Fig.D.4). Es decir, en el modelo del semiplano las  $h$ -líneas  $l, m$  y  $n$  (Fig.D.5) representadas por  $\zeta_2, \zeta_3$  y  $q$  respectivamente, se invierten en las  $h$ -líneas  $l', m'$  y  $n'$  representadas por  $\zeta_2', \zeta_3'$  y  $\zeta_4$  respectivamente en el modelo del disco  $\zeta_1$ .

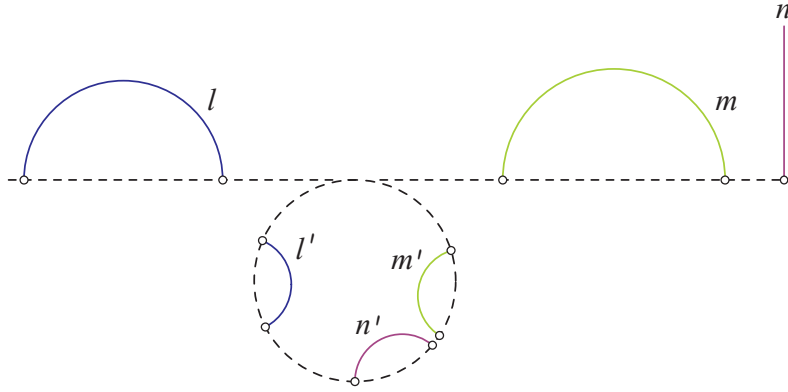


Figura D.5: Las  $h$ -líneas  $l, m$  y  $n$  se invierten en las  $h$ -líneas  $l', m'$  y  $n'$  respectivamente.

Así, la inversión respecto a  $\zeta$  transforma el modelo del semiplano en el modelo del disco. Análogamente, los inversos de  $l', m'$  y  $n'$  son  $l, m$  y  $n$  respectivamente, entonces esta misma inversión transforma el modelo del disco  $\zeta_1$  en el modelo del semiplano  $\Pi$ , por lo que ambos modelos son equivalentes.

# Bibliografía

- [1] Altshiller C., Nathan, *An introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, Barnes & Noble Inc., Nueva York, 1965.
- [2] Baragar, Arthur, *A Survey of Classical and Modern Geometries*, Prentice Hall Inc., New Jersey, 2001.
- [3] Bonola, Roberto, *Non-Euclidean Geometry*, Dover Publications Inc., New York, 1955.
- [4] Fernández R., Leobardo, *Jugando con el Triángulo Hiperbólico*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, Directora Maria de la Paz Álvarez Scherer, 2001.
- [5] García C., Montserrat, *Geometría Hiperbólica para Principiantes*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, Director Francisco Struck Chávez, 2001.
- [6] Meschkowski, Herbert, *Noneuclidean Geometry*, Academic Press, Nueva York, 1972.
- [7] Meyer, Walter, *Geometry and its Applications*, Elsevier Inc., New York, 2006.
- [8] Ramírez G., Ana I., Sienra L., Guillermo, *Invitación a las Geometrías no Euclidianas*, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2001.
- [9] Shively, Levi S., *An Introduction to Modern Geometry*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1953.
- [10] Stillwell, John, *The Four Pillars of Geometry*, Springer, New York, 2005.
- [11] Trudeau, Richard J., *The Non-Euclidean Revolution*, Birkhauser, Boston, 2001.