Guía de ejercicios para al Evaluación Parcial 01

FECHA DE EXAMEN PARCIAL 01
VIERNES 28-FEBRERO-2020
De 09:00 a 10:00 HORAS - Salón P-118

Instrucciones: La siguiente lista que fungirá como guía para el examen parcial, se recomienda resolver todos los ejercicios de la misma.

LISTA DE EJERCICIOS

1. Sea $G(V(G), A(G))$ y $H = (V(H), A(H))$ gráficas.
   Demostrar que la relación $G \sim H$ si y solamente si $G \cong H$, es una relación de equivalencia.
2. ¿Cuántas gráficas distintas de orden cuatro existen salvo isomorfismo?
3. Demostrar que, salvo isomorfismo, para cualquier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la gráfica completa de orden n es única.[1]
4. Demostrar que, salvo isomorfismo, para cualquier $\{n, m\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si $|X| = n$ y $|Y| = m$ entonces la gráfica bipartita completa $G[X, Y]$ es única.[2]
5. ¿Qué relación existe entre K_2 y $K_{1,1}$?
6. Demuestra que todo camino con extremos x y y contiene una trayectoria con extremos x y y.
7. Demostrar que en toda gráfica G se cumple que $|A(G)| \leq \binom{|V(G)|}{2}$. ¿En qué caso se da la igualdad?
8. Considerar a $G[X, Y]$ para demostrar que:
   - $|A(G[X, Y])| \leq |X||Y|$.
   - $4|A(G[X, Y])| \leq |V(G[X, Y])|^2$.
   - ¿En qué caso se cumple que $4|A(G[X, Y])| = |V(G[X, Y])|^2$?
9. Sea G una gráfica. Considerar lo siguiente:
   - $\delta(G) := \text{mín}(\{d_G(x) \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid x \in V(G)\})$[3]
   - $\Delta(G) := \text{máx}(\{d_G(x) \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid x \in V(G)\})$[4]

   Demostrar que
   $$\delta(G) \leq \frac{2|A(G)|}{|V(G)|} \leq \Delta(G)$$
10. Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, considerar $Q_n = (V(Q_n), A(Q_n))$ donde $X = \{0, 1\}$ y
    - $V(Q_n) = X^n$
    - $\{x, y\} \in A(Q_n) \Leftrightarrow x$ difiere de y en exactamente una coordenada.

    a) Dar un diagrama de Q_n para $n \in \{1, 2, 3, 4\}$
    b) Determinar el orden y el tamaño de Q_n para toda $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
    c) Demostrar que para toda $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se tiene que Q_n es bipartita.

[1] Por ello, a la gráfica completa de orden n la denotaremos como K_n.
[2] Por ello, a la gráfica bipartita completa $G[X, Y]$ la denotaremos como $K_{|X|,|Y|}$.
[3] A $\delta(G)$ se le conoce como el **grado mínimo de** G.
[4] A $\Delta(G)$ se le conoce como el **grado máximo de** G.

11. Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, considerar $B_n = (V(B_n), A(B_n))$ donde $X = \{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid 1 \leq m \leq n\}$ y
    - $V(B_n) = \wp(X)$
    - $\{x, y\} \in A(B_n) \Leftrightarrow |x \triangle y| = 1$.[5]

    a) Dar un diagrama de B_n para $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

    b) Determinar el orden y el tamaño de B_n para toda $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

    c) Demostrar que para toda $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se tiene que B_n es bipartita.
12. Considerar $G[X, Y]$ para demostrar que:
    - $\sum\limits_{v \in X} d_G(v) = \sum\limits_{v \in Y} d_G(v)$
    - Si $G[X, Y]$ es k-regular, con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, entonces $|X| = |Y|$.
13. Demostrar que para una gráfica G las siguientes son equivalentes:
    - G es conexa.
    - Para cualquier $\{x, y\} \subset V(G)$ con $x \neq y$ existe una trayectoria con extremos x y y.
    - Existe un camino cerrado en G que contiene a todos los vértices y a todas las aristas de G.
14. - Demostrar que en cualquier gráfica G, si $\binom{|V(G)|-1}{2} < |A(G)|$ entonces G es conexa.
    - Encontrar, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, una gráfica disconexa G de orden n tal que $\binom{|V(G)|-1}{2} = |A(G)|$.
15. - Demostrar que en cualquier gráfica G, si $\frac{|V(G)|-2}{2} < \delta(G)$ entonces G es conexa.
    - Encontrar, para cada $n \in \mathbb{N}$ par positivo, una gráfica disconexa G que sea $(\frac{n-2}{2})$-regular.
16. Demostrar o dar contraejemplo de las siguientes proposiciones:
    - $\overline{G}$ es conexa $\Rightarrow$ G es disconexa.
    - G es disconexa $\Rightarrow$ $\overline{G}$ es conexa.

[5] $x \triangle y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$