

El polinomio de Alexander: un invariante topológico de nudos

Ernesto Alejandro Vázquez Navarro

24 de enero de 2019

ÍNDICE GENERAL

Prefacio	v
1. Polinomio de Alexander	1
1.1. Nudos y sus diagramas	1
1.2. Ecuaciones de un diagrama	3
1.3. El polinomio $\Delta_K(x)$	4
1.4. $\Delta_K(x)$ es un invariante de nudos	7
1.4.1. Matrices ε -equivalentes	7
1.4.2. Movimientos de Reidemeister	8
1.5. El grupo de un nudo	12
1.6. Propiedades de $\Delta_K(x)$	16
2. Interpretación topológica de las ecuaciones del diagrama y de $\Delta_K(x)$	21
2.1. Otros resultados sobre $\Delta_K(x)$	28
Referencias	28

En abril de 1928, James Waddell Alexander II publicó el artículo *Topological invariants of knots and links* [1], donde describe un invariante algebraico de nudos al que actualmente se le conoce como **polinomio de Alexander** y que estudiaremos en este trabajo.

Comenzaremos con la construcción del polinomio de Alexander que asignaremos a un nudo K ; dicha construcción se realiza de manera combinatoria al asignar una ecuación lineal con variable x por cada cruce de un diagrama. Estas ecuaciones determinan una **matriz de Alexander** que representa las incidencias del diagrama; daremos una manera de reducir esta matriz a una matriz cuadrada y veremos el determinante de dicha matriz es un polinomio en $\mathbb{Z}[x]$ que es independiente de la reducción que hagamos salvo un múltiplo de la forma $\pm x^r$ con $r \in \mathbb{Z}$. Veremos que dicho polinomio es un invariante de nudos al dar una relación de equivalencia entre matrices. También, con base en un diagrama de un nudo, daremos una presentación del grupo fundamental del exterior del nudo en \mathbb{R}^3 con un generador por cada región no acotada del diagrama cuyas relaciones dependen de la incidencia de las regiones en cada cruce del diagrama.

Alexander, al final del mencionado artículo, da la relación que hay entre el polinomio y las cubiertas ramificadas finitas de $\mathbb{R}^3 \setminus K$. Posteriormente se descubrió que la matriz reducida de Alexander proporciona una presentación como módulo sobre el anillo $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ del primer grupo de homología de la cubriente cíclica infinita del complemento del nudo en \mathbb{R}^3 y el polinomio de Alexander es el generador del ideal de orden del módulo.

En este trabajo obtendremos este resultado partiendo de la definición original de Alexander. A lo largo del mismo proporcionaremos otros resultados que se conocen sobre el polinomio de Alexander, por ejemplo que el polinomio de Alexander es simétrico y que evaluado en 1 es 1; que el polinomio de Alexander no depende de la orientación y que el polinomio de Alexander de un nudo y su imagen especular son iguales; que el polinomio de Alexander de la suma conexa de dos nudos es el producto de los polinomios de Alexander de los factores.

Algunos de estos resultados los hemos demostrado directamente de la definición del polinomio de Alexander y otros con el uso de la información que proporciona la homología de la cubriente cíclica infinita del complemento del nudo en \mathbb{R}^3 .

CAPÍTULO 1

POLINOMIO DE ALEXANDER

El polinomio de Alexander de un nudo K , que se denota como $\Delta_K(x)$, es un polinomio con coeficientes en \mathbb{Z} en donde el grado del polinomio y el valor de los coeficientes están en función del nudo. En esta sección analizaremos la manera de obtener el polinomio de Alexander de un nudo dado K .

1.1. Nudos y sus diagramas

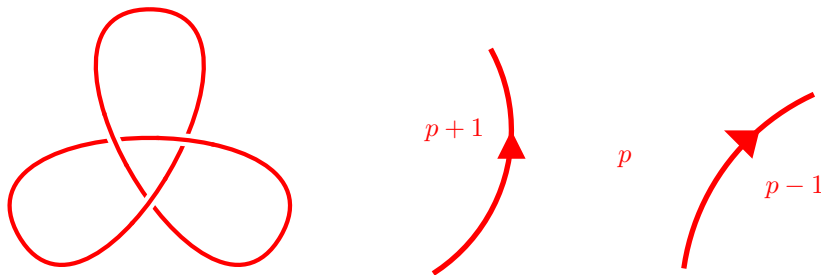
Un nudo K es una curva suave simple y cerrada en \mathbb{R}^3 ; es decir, K es un subconjunto de \mathbb{R}^3 que es difeomorfo a una circunferencia.

Diremos que dos nudos K y K' son del mismo **tipo** si podemos deformar continuamente el espacio tridimensional para llevar K a K' . Un nudo lo llamaremos **nudo trivial** si es del mismo tipo que una circunferencia en el plano $z = 0$.

Cada nudo puede orientarse de dos maneras distintas. Diremos que dos nudos orientados son del mismo tipo si hay una deformación del espacio que lleva uno al otro preservando su orientación.

Un nudo K puede ser representado esquemáticamente como una figura 2-dimensional al encontrar una proyección del espacio en un plano de manera que la imagen de K bajo dicha proyección solamente tenga una cantidad finita de puntos singulares. Pensaremos a las singularidades lo más simples posibles: preimágenes dobles en las que las rectas tangentes a la curva son rectas con vectores directores no paralelos.

A dicha representación de K la denotaremos como $D(K)$ y la llamaremos **diagrama de K** y al plano de proyección lo llamaremos el **plano del diagrama de K** . A las singularidades del diagrama de K las llamaremos **crucos del diagrama de K** y a las regiones del plano en las que el diagrama lo divide les llamaremos **regiones del diagrama de K** . En cada punto de cruce, indicaremos con una línea no continua al segmento de curva que está por debajo o por detrás de la línea continua.



(a) Diagrama del nudo trébol.

(b) Índice de las regiones.

Además, notemos que podemos asignar a cada región del diagrama un número entero al que le llamaremos **índice de la región**: puesto que $D(K)$ determina una región no acotada en el plano de proyección, si consideramos que el diagrama del nudo está orientado, podemos asignar a cada región del plano un número entero de manera que la región no acotada tenga índice cero y entre regiones que tienen un arco común en la frontera, al considerar la orientación del diagrama, se incremente el índice en una unidad si se cruza de región de derecha a izquierda y se decrezca el índice en una unidad si se cruza de región de izquierda a derecha. De esta manera, a todas las regiones se les puede asignar un índice.

Observación 1.1. La asignación del índice a cada región está bien definida: consideramos un punto x_j en una región r_j acotada del diagrama a la que buscamos asignar un índice, γ_1 y γ_2 un par de trayectorias basadas en un punto x_0 en la región no acotada del diagrama que terminan en x_j . Así, la concatenación de las trayectorias es una trayectoria γ cerrada.

Si γ es simple entonces, por el Teorema de Jordan, bordea un disco topológico. El diagrama cruza a dicho disco en arcos que empiezan y terminan en γ , por lo que si γ cruza al comienzo de un arco de izquierda a derecha entonces γ cruza al final de ese arco de derecha a izquierda y viceversa. Por lo tanto, a lo largo de γ hay el mismo número de cruces izquierdos y derechos, por lo que el incremento del índice al recorrer γ es cero. Si γ no es simple entonces se puede dividir (preservando la orientación) en trayectorias cerradas simples y, por lo anterior a lo largo de cada una hay el mismo número de cruces izquierdos y derechos, por lo tanto el incremento del índice al recorrer γ es cero.

De esta manera la región r_j tiene el mismo índice independientemente de qué camino se use.

Como en cada cruce del diagrama hay cuatro regiones incidentes en dicho cruce, notemos que dos de ellas tienen índice $p \in \mathbb{Z}$ y las otras dos tienen índices $p+1$ y $p-1$. Por lo tanto, si c es un punto de cruce de un diagrama de un nudo K diremos que c tiene índice p si c es un punto de cruce en el que las dos regiones con índices iguales tienen índice p .

Notemos que, para un diagrama de un nudo K , hay dos tipos de cruces que dependen solamente de la orientación del nudo: un diagrama tiene un **cruce derecho** si el arco que cruza por debajo en un punto de cruce cambia de región (transversal al sentido de la

orientación del arco en el que se llega) decreciendo el índice de las regiones; un diagrama tiene un **cruce izquierdo** si el arco que cruza por debajo en un punto de cruce cambia de región (transversal al sentido de la orientación del arco en el que se llega) creciendo el índice de las regiones.

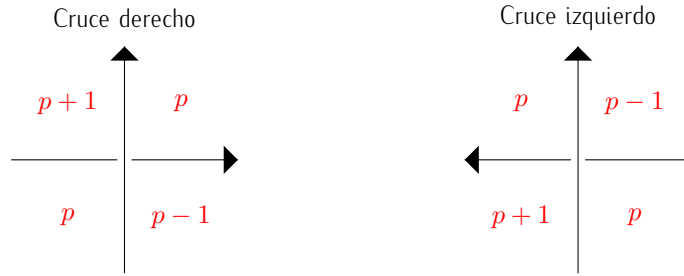


Figura 1.1: Tipos de cruces en un diagrama.

1.2. Ecuaciones de un diagrama

Como una consecuencia del Teorema de Euler tenemos que si un diagrama de un nudo K tiene n puntos de cruce entonces dicho diagrama determina $n + 2$ regiones en el plano del diagrama. Por lo que denotaremos como c_i a cada punto de cruce del diagrama y por r_j a cada región del diagrama.

Dado que cada punto de cruce del diagrama determina cuatro regiones en el plano del diagrama, en cada cruce consideraremos un orden de las regiones: como primer región consideraremos a la que, en sentido de la orientación del nudo, se encuentra primero y a la izquierda del arco que pasa por debajo en el cruce y las restantes en sentido levógiro. Es decir, si en el cruce c_i inciden las regiones r_j , r_k , r_l y r_m consideraremos el orden como lo hemos indicado anteriormente e ilustramos en la Figura 1.2. Nótese que el orden de las regiones no depende de la orientación del arco superior.

Así, existe una forma de asignar una ecuación lineal a cada punto de cruce: para cada $1 \leq i \leq n$ se considera el respectivo orden de las regiones que determina y se asigna la siguiente ecuación lineal

$$c_i(r) = -xr_j + r_k - r_l + xr_m = 0 \quad (1.1)$$

A las n ecuaciones determinadas por cada punto de cruce c_i las llamaremos **ecuaciones del diagrama**. La distribución de los coeficientes x está determinada por la parte a la izquierda del arco que pasa por debajo en cada cruce.

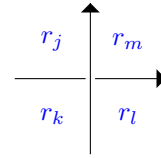


Figura 1.2: Orden de las regiones en el cruce c_i .

1.3. El polinomio $\Delta_K(x)$

Consideremos al conjunto $A = \{-x, -1, 0, 1, x\}$ y K un nudo.

Podemos asignar a cada diagrama $D(K)$ una matriz $M(D(K))$, que llamaremos una **matriz de Alexander**, de la siguiente manera: si el diagrama tiene n puntos de cruce (por lo que tendrá $n+2$ regiones) construiremos $M(D(K)) \in M_{n \times (n+2)}(A)$, de manera que las entradas de cada renglón correspondan a los coeficientes de las ecuaciones del diagrama de su respectiva incidencia en las regiones del diagrama. A las matrices cuadradas que resultan de eliminar de una matriz de Alexander dos columnas correspondientes a regiones con índices consecutivos se les llama **matrices reducidas de Alexander**.

Teorema 1.2. Sea K un nudo y $D(K)$ un diagrama de K . El determinante de cualquier matriz reducida de Alexander es independiente de las columnas que se hayan eliminado salvo un factor de la forma $\pm x^r$ con $r \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Sea $D(K)$ un diagrama del nudo K y $M(D(K)) \in M_{n \times (n+2)}(A)$.

Denotemos como \bar{r}_j al vector columna correspondiente a la j -ésima columna de $M(D(K))$, \bar{c}_i al vector renglón correspondiente al i -ésimo renglón de $M(D(K))$, $ind(r_j)$ al índice de la región r_j para cada $1 \leq j \leq n+2$ y $ind(c_i)$ al índice del punto de cruce c_i para cada $1 \leq i \leq n$. Para cada índice de las regiones del respectivo diagrama sea $I_p := \{\bar{r}_j \in A^n \mid ind(r_j) = p\}$. Así, podemos considerar a

$$R_p := \sum_{I_p} \bar{r}_j$$

Tenemos que la suma de los coeficientes de \bar{c}_i es cero, pues los únicos elementos distintos de cero son $-x, -1, 1, x$ y cada uno de ellos aparece exactamente una vez.

De esta manera, se tiene que

$$\sum_p R_p = \bar{0} \in A^n$$

Por otro lado, al multiplicar a cada \bar{r}_j por el factor $x^{-ind(r_j)}$ tenemos que

$$\sum_p x^{-p} R_p = \bar{0} \in A^n$$

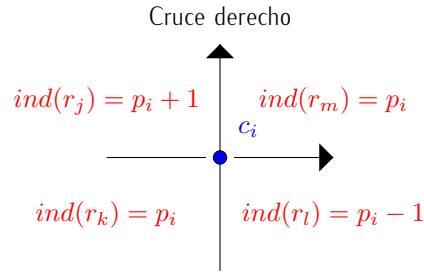
Para verificar esto, solamente es necesario observar que pasa en c_i dependiendo del tipo de cruce que exista en c_i si $ind(c_i) = p_i$:

Independientemente del tipo de cruce que exista, en c_i la respectiva ecuación es

$$c_i(r) = -xr_j + r_k - r_l + xr_m = 0$$

Por lo que tendremos que en el i -ésimo renglón de $M(D(K))$ todos los coeficientes serán cero excepto los correspondientes a las columnas j, k, l y m ; es decir, se verá de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & j & k & l & m \\ \hline i & -x & 1 & -1 & x \end{array}$$



- Puesto que la configuración en un cruce derecho es la siguiente

Al multiplicar por $x^{-ind(r_s)}$ la s -ésima columna, tenemos que el i -ésimo renglón se afecta de la siguiente manera:

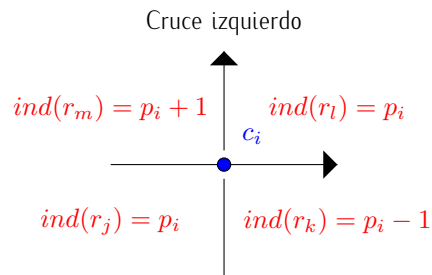
$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & j & k & l & m \\ \hline i & -x^{1-(p_i+1)} & x^{-p_i} & -x^{-(p_i-1)} & x^{1-p_i} \end{array}$$

Es decir, se puede simplificar como

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & j & k & l & m \\ \hline i & -x^{-p_i} & x^{-p_i} & -x^{1-p_i} & x^{1-p_i} \end{array}$$

Que al sumar los coeficientes del renglón i -ésimo, después de multiplicar por el respectivo factor cada columna, nos da lo requerido.

- De manera análoga, para el tipo de cruce izquierdo tenemos que la configuración es la siguiente



Al multiplicar por $x^{-ind(r_s)}$ la s -ésima columna, tenemos que el i -ésimo renglón se afecta de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & j & k & l & m \\ \hline i & -x^{1-p_i} & x^{-(p_i-1)} & -x^{-p_i} & x^{1-(p_i+1)} \end{array}$$

Es decir, se puede simplificar como

$$\frac{j}{i} \left| \begin{array}{c|c|c|c} & j & k & l & m \\ \hline & -x^{1-p_i} & x^{1-p_i} & -x^{-p_i} & x^{-p_i} \end{array} \right|$$

Nuevamente, al sumar los coeficientes del renglón i -ésimo, después de multiplicar por el respectivo factor cada columna, nos da lo requerido.

Por lo tanto,

$$\sum_p R_p = \bar{0} = \sum_p x^{-p} R_p \quad \Rightarrow \quad \bar{0} = \sum_p (x^{-p} - 1) R_p \quad (1.2)$$

donde el término R_0 desaparecerá.

Ahora, si denotamos como $M_{p,q}(D(K))$ a la matriz que resulta de eliminar en $M(D(K))$ una columna de índice p y una columna de índice q entonces podemos considerar al determinante de $M_{p,q}(D(K))$, dado que es una matriz cuadrada.

Denotemos como $\Delta_{p,q}(x) = \pm \det(M_{p,q}(D(K)))$.

Puesto que en (1.2) tenemos que si existe $1 \leq j \leq n+2$ tal que $\text{ind}(r_j) = p$ entonces $(x^{-p} - 1)\bar{r}_j$ es combinación lineal de las columnas \bar{r}_s con $1 \leq s \leq n+2$, $s \neq j$ y $\text{ind}(r_s) \neq 0$; es decir, $(x^{-p} - 1)\bar{r}_j$ es combinación lineal de las columnas de $M_{0,p}(D(K))$ y además, los coeficientes de las columnas de índice q son $-(x^{-q} - 1)$.

De esta manera tenemos que si r_p y r_q son regiones tales que $\text{ind}(r_p) = p$ y $\text{ind}(r_q) = q$ y las eliminamos para obtener $M_{0,p}(D(K))$ y $M_{0,q}(D(K))$ respectivamente, al calcular el determinante de $M_{0,p}(D(K))$ por la columna r_q y el determinante de $M_{0,q}(D(K))$ por la columna r_p se tiene que:

$$(x^{-q} - 1)\Delta_{0,p}(x) = \pm(x^{-p} - 1)\Delta_{0,q}(x) \quad (1.3)$$

y como los índices de cada región están determinados por una constante, la ecuación (1.3) implica que para cualquier región de índice s se tiene que

$$(x^{s-q} - 1)\Delta_{s,p}(x) = \pm(x^{s-p} - 1)\Delta_{s,q}(x)$$

de manera análoga, para cualquier región de índice t se tiene que

$$(x^{q-t} - 1)\Delta_{q,s}(x) = \pm(x^{q-s} - 1)\Delta_{q,t}(x)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{s,p}(x) &= \pm \frac{(x^{s-p} - 1)}{(x^{s-q} - 1)} \Delta_{s,q}(x) = \pm \frac{(x^{s-p} - 1)}{(x^{s-q} - 1)} \frac{(x^{q-s} - 1)}{(x^{q-t} - 1)} \Delta_{q,t}(x) \\ &= \pm \frac{(x^{s-p} - 1)x^{q-s}}{(x^{s-q} - 1)x^{q-s}} \frac{(x^{q-s} - 1)}{(x^{q-t} - 1)} \Delta_{q,t}(x) \\ &= \pm \frac{(x^{s-p} - 1)x^{q-s}}{(1 - x^{q-s})} \frac{(x^{q-s} - 1)}{(x^{q-t} - 1)} \Delta_{q,t}(x) \\ &= \pm \frac{(x^{s-p} - 1)x^{q-s}}{(x^{q-t} - 1)} \Delta_{q,t}(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando consideramos a pares de regiones con índices consecutivos,

$$\Delta_{p,p+1}(x) = \pm \frac{(x^{p-(p+1)} - 1)x^{q-p}}{(x^{q-(q+1)} - 1)} \Delta_{q,q+1}(x) = \pm x^{q-p} \Delta_{q,q+1}(x)$$

■

Este resultado nos permite considerar a un polinomio, que denotaremos como $\Delta_K(x)$ y llamaremos **el polinomio de Alexander del nudo K** , al dividir $\Delta_{p,p+1}(x)$ por un factor de la forma $\pm x^n$ de manera que el término de $\Delta_K(x)$ de grado menor sea una constante positiva.

1.4. $\Delta_K(x)$ es un invariante de nudos

Si tenemos diferentes diagramas del mismo nudo, al hacer el procedimiento de la sección anterior, posiblemente obtengamos diferentes matrices y por ende diferentes $\Delta_K(x)$. Definiremos una relación de equivalencia entre matrices de manera que diferentes diagramas del mismo nudo tengan matrices en la misma clase de equivalencia.

1.4.1. Matrices ε -equivalentes

Definición 1.3. Sea $A = \{0, \pm x^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ y M, N matrices cuadradas con coeficientes en A . M y N son ε -**equivalentes** si y solamente si es posible transformar M en N por medio de una cantidad finita de las siguientes operaciones:

- α) Multiplicar un renglón o una columna por -1 .
- β) Intercambiar dos renglones o columnas.
- γ) Sumar un renglón o una columna a otro renglón o columna.
- δ) Agregar o eliminar el primer renglón y la primera columna en la que todos los elementos sean cero excepto el elemento de intersección que sea uno; es decir,

$$\begin{pmatrix} a & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c & \cdots & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & b \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c & \cdots & d \end{pmatrix}$$

- ε) Multiplicar o dividir un renglón o una columna por x .

Observación 1.4. Por las propiedades de los determinantes, las operaciones $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y ε cambiarán el determinante de una matriz por, a lo más, un factor de $\pm x^k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Así, si dos matrices M y N son ε -equivalentes entonces para algún $k \in \mathbb{Z}$

$$\det(M) = \pm x^k \det(N)$$

Para demostrar que $\Delta_K(x)$ es un invariante de nudos, usaremos que dos diagramas de nudos D_1 y D_2 son equivalentes si D_1 se puede transformar en D_2 por medio de una sucesión finita de movimientos de Reidemeister. Mostraremos que si los diagramas de nudos D_1 y D_2 son equivalentes entonces tienen matrices ε -equivalentes.

1.4.2. Movimientos de Reidemeister

Kurt Reidemeister demostró¹ en 1927 que todos los diagramas de un nudo se pueden relacionar por una sucesión finita de tres movimientos locales del diagrama de dicho nudo [12]. A dichos movimientos, indicados en la Figura 1.3, se les conoce como **movimientos de Reidemeister**.

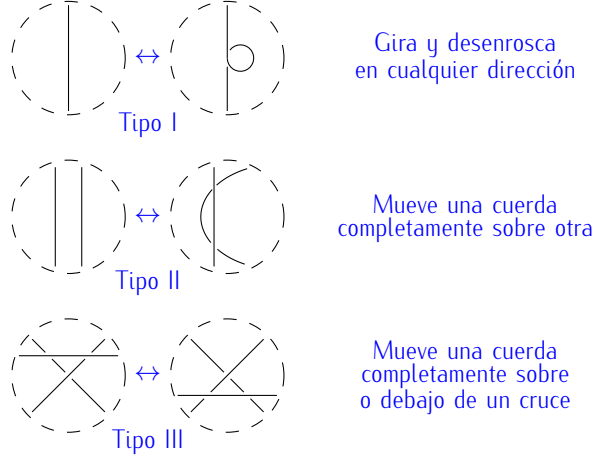


Figura 1.3: Movimientos de Reidemeister.

Teorema 1.5. Sea K un nudo, $D_1(K)$ y $D_2(K)$ dos diagramas del nudo K .

Si, para $i \in \{1, 2\}$, $M_i(D_i(K))$ es una matriz cuadrada obtenida al eliminar dos columnas correspondientes a regiones con índices consecutivos de $M(D_i(K))$ entonces $M_1(D_1(K))$ y $M_2(D_2(K))$ son matrices ε -equivalentes.

Demostración: Dado que la orientación del arco superior no modifica la configuración de las regiones y las pruebas son análogas para todas las orientaciones, sin pérdida de generalidad, haremos una elección de la orientación para cada tipo de movimiento y veremos el comportamiento de cada matriz al realizar cada movimiento de Reidemeister:

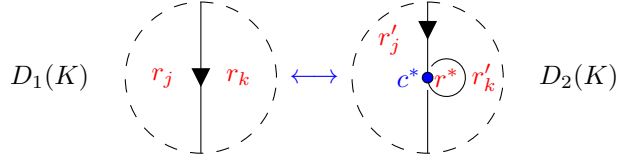
Tipo I: Al realizar este movimiento, el diagrama contará con un cruce y una región más que el original:

De esta manera,

$$c^*(r) = -xr^* + r'_k - r'_j + xr'_k = -xr^* - r'_j + (1+x)r'_k = 0$$

Si consideramos que $M(D_1(K))$ tiene como primer columna a los coeficientes de la región r_j y como segunda columna a los coeficientes de la región r_k entonces en $M(D_2(K))$ podemos colocar como primer columna a los coeficientes de r^* , segunda

¹De manera independiente, en 1926 James Waddell Alexander y Garland Baird Briggs también lo demostraron [2].

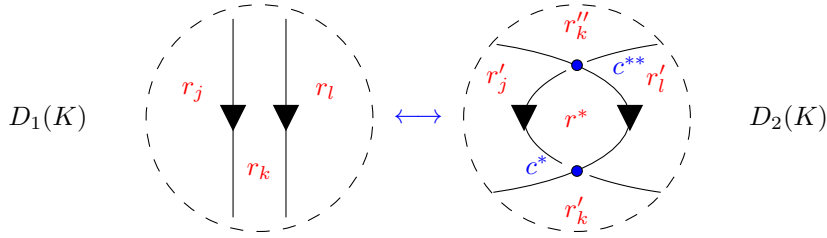


columna a los coeficientes de r'_j y tercer columna a los coeficientes de r'_k . Así, tendremos que

$$M(D_2(K)) = \begin{pmatrix} -x & -1 & 1+x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ M(D_1(K)) \end{matrix}$$

Dado que las regiones r_j y r_k son adyacentes, así como las regiones r'_j y r'_k , tenemos que respectivamente los índices de cada par son consecutivos, por lo que podemos aplicar las operaciones ε , α y δ para obtener el resultado.

Tipo II: En este caso, el diagrama contará con dos cruces y dos regiones más que el diagrama original:



De esta manera,

$$\begin{aligned} c^*(r) &= -xr^* + r'_j - r'_k + xr'_l = 0 \\ c^{**}(r) &= -xr'_l + r''_k - r'_j + xr^* = 0 \end{aligned}$$

Así, si los coeficientes en $M(D_2(K))$ del primer renglón son los de c^* y los del segundo renglón son los de c^{**} tenemos que al ordenar las columnas de $M(D_2(K))$ en el siguiente orden $(r^*, r'_j, r'_k, r''_k, r'_l, \dots)$, tenemos que

$$M(D_2(K)) = \begin{pmatrix} -x & 1 & -1 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & -1 & 0 & 1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & | & | & | & & & & \\ \vdots & \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & & & M_1(D_1(K)) & \\ 0 & | & | & | & & & & \end{pmatrix}$$

donde $M_1(D_1(K))$ es la matriz cuadrada que resulta de eliminar en $M(D_1(K))$ las columnas correspondientes a las regiones r_j y r_k ; \bar{a} es la columna correspondiente a los coeficientes de la región r_j y dado que se dividió en dos la región r_k tenemos que los coeficientes de $\bar{b} + \bar{c}$ son los coeficientes correspondientes a la región r_k .

Por lo tanto, podemos elegir eliminar en $M(D_2(K))$ las columnas correspondientes a las regiones r'_j y r'_k para así tener

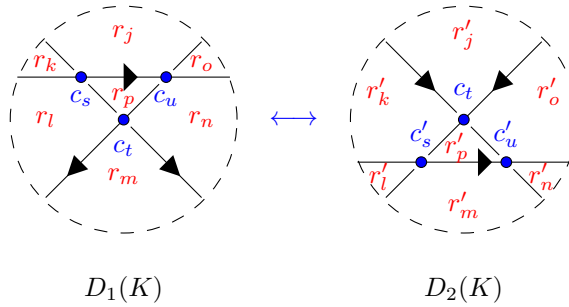
$$M_2(D_2(K)) = \begin{pmatrix} -x & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & | & & & & \\ \vdots & \bar{c} & & & M_1(D_1(K)) & \\ 0 & | & & & & \end{pmatrix}$$

Ahora, podemos sumar la primera columna a la tercera (operación γ), multiplicar la primera columna por $-x^{-1}$ (operación α y ε), sumar el primer renglón al segundo renglón (operación γ) y aplicar la operación δ para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ | & & & & \\ \bar{c} & & & M_1(D_1(K)) & \\ | & & & & \end{pmatrix}$$

Ahora, podemos realizar una sucesión finita de operaciones α y ε al primer renglón para, por medio de la operación γ por renglones, modificar los coeficientes de \bar{c} a cero y así terminar el proceso con la operación δ para obtener $M_1(D_1(K))$.

Tipo III: En este caso, el diagrama contará con el mismo número de cruces y de regiones, pero las ecuaciones en tres cruces cambiarán (aunque solamente dos cruces cambiarán):



De esta manera, los cruces que se verán modificados son

$$\begin{aligned} c_s(r) &= -xr_j + r_k - r_l + xr_p = 0 \\ c_t(r) &= -xr_p + r_l - r_m + xr_n = 0 \\ c_u(r) &= -xr_o + r_j - r_p + xr_n = 0 \end{aligned}$$

pues cambiarán a

$$\begin{aligned} c'_s(r) &= -xr'_p + r'_k - r'_l + xr'_m = 0 \\ c_t(r) &= -xr'_j + r'_k - r'_p + xr'_o = 0 \\ c'_u(r) &= -xr'_o + r'_p - r'_m + xr'_n = 0 \end{aligned}$$

Por lo que los coeficientes de los renglones correspondientes a estos cruces se verán de la siguiente manera:

- Para el diagrama $D_1(K)$

	r_j	r_k	r_l	r_m	r_n	r_o	r_p
c_s	$-x$	1	-1	0	0	0	x
c_t	0	0	1	-1	x	0	$-x$
c_u	1	0	0	0	x	$-x$	-1

- Para el diagrama $D_2(K)$

c'_s	0	1	-1	x	0	0	$-x$
c_t	$-x$	1	0	0	0	x	-1
c'_u	0	0	0	-1	x	$-x$	1

Por lo que se tiene que las respectivas matrices son:

- Para $D_1(K)$, al ordenar las columnas respecto al siguiente orden de las regiones $r'_j, r'_k, r'_l, r'_m, r'_n, r'_o$ y r'_p

$$M(D_1(K)) = \begin{pmatrix} -x & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & x & 0 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x & -x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ | & | & | & | & | & | & | & 0 & & \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} & \vdots & & M & \\ | & | & | & | & | & | & 0 & & & \end{pmatrix}$$

- Para $D_2(K)$, al ordenar las columnas respecto al siguiente orden de las regiones $r'_j, r'_k, r'_l, r'_m, r'_n, r'_o$ y r'_p

$$M(D_2(K)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & x & 0 & 0 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1 & 0 & 0 & 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x & -x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ | & | & | & | & | & | & | & 0 & & \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} & \vdots & & M & \\ | & | & | & | & | & | & 0 & & & \end{pmatrix}$$

donde $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}$ y M coinciden en ambas matrices, pues no se modificó esa configuración.

Así, tenemos que por medio de las operaciones $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y ε , si denotamos como R_i al i -ésimo renglón y como C_j a la j -ésima columna entonces al realizar las siguientes operaciones a $M(D_1(K))$ obtenemos $M(D_2(K))$:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1. α a C_1, C_3 y C_5 . | 9. γ con R_2 a R_3 . |
| 2. α a R_2 y R_3 . | 10. ε a R_2 . |
| 3. α y ε a R_3 . | 11. γ con C_7 a C_6 . |
| 4. γ con R_1 a R_3 . | 12. ε a C_7 . |
| 5. α y ε a C_7 . | 13. α a C_1, C_3, C_5 y C_7 . |
| 6. γ con C_7 a C_3 . | 14. α a R_2 . |
| 7. α y ε a C_7 . | 15. β entre R_1 y R_2 . |
| 8. ε a R_2 . | 16. β entre R_1 y R_3 . |

De esta manera concluimos que si, para $i \in \{1, 2\}$, $M_i(D_i(K))$ es una matriz cuadrada obtenida al eliminar dos columnas correspondientes a regiones con índices consecutivos de $M(D_i(K))$ entonces las matrices $M_1(D_1(K))$ y $M_2(D_2(K))$ son matrices ε -equivalentes.

■

Teorema 1.6. $\Delta_K(x)$ es un invariante de nudos.

Demostración: Es una consecuencia directa del Teorema 1.5 y la Observación 1.4.

■

1.5. El grupo de un nudo

En esta sección daremos una presentación del grupo fundamental del espacio $\mathbb{R}^3 \setminus K$ al que llamaremos **complemento del nudo** K .

Recordemos que el grupo fundamental de un espacio topológico X basado en un punto $p \in X$, denotado como $\pi_1(X, p)$, es el conjunto de clases de homotopía de lazos basados en p con la operación de concatenación de clases donde el elemento identidad es el lazo constante p . Cuando el espacio es arco conexo los grupos $\pi_1(X, p)$ y $\pi_1(X, q)$ son isomorfos y por lo tanto se denota simplemente como $\pi_1(X)$.

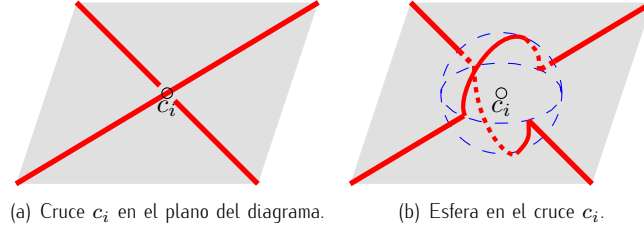
Teorema 1.7. Sea K un nudo y $D(K)$ un diagrama de K con n cruces. El grupo del nudo K está representado por

$$\langle r_1, r_2, \dots, r_n, r_{n+1} \mid R_1, R_2, R_3, \dots, R_n \rangle$$

dónde hay un generador r_j por cada región acotada del diagrama y $R_i = r_{j_i}^{-1} r_{k_i} r_{l_i}^{-1} r_{m_i}$ está determinada por la relación de incidencia de las regiones en el cruce c_i .

Demostración: Consideremos $D(K)$ con n cruces. Podemos dar un encaje en \mathbb{R}^3 del nudo K al partir de $D(K)$ al considerar en cada cruce c_i del diagrama una esfera de radio ε con centro en c_i de manera que localmente el nudo se vea como en la Figura 1.4 y las esferas sean ajenas por pares.

Consideremos a $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ tal que x_0 sea un punto en el plano del diagrama que se encuentre en la región no acotada de $D(K)$ y sea $\zeta_i := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid d(c_i, \bar{x}) < \varepsilon \}$ y

Figura 1.4: Encaje del nudo K .

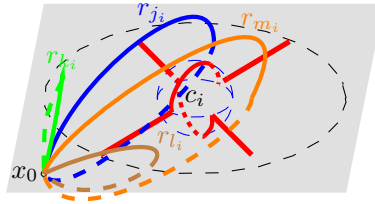
$\bar{\zeta}_i := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid d(c_i, \bar{x}) \leq \varepsilon \}$. También, para $1 \leq i \leq n$, consideremos una trayectoria $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus K$ tal que $\gamma_i(0) = x_0$ y $\gamma_i(1) = c_i$.

De esta manera, podemos considerar a los siguientes conjuntos

$$A = \mathbb{R}^3 \setminus \left(K \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \bar{\zeta}_i \right) \right) \quad ; \quad B = \bigcup_{i=1}^n (\bar{\zeta}_i \cup \gamma_i[0, 1]) \setminus K$$

Notemos lo siguiente:

- A y B son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^3 \setminus K$.
- B es simplemente conexo.
- A es un cubo con $n + 1$ asas, pues podemos pensar que A es la unión de la parte superior del plano del diagrama con la parte inferior del plano del diagrama al pegar por cada región del diagrama. De esta manera $\pi_1(A)$ es un grupo libre con $n + 1$ generadores, pues hay un generador r_j por cada región acotada del diagrama: cualquier lazo en $\mathbb{R}^3 \setminus K$ que no interseque a una región distinta de r_0 pertenece a la clase del lazo constante x_0 y por cada región del diagrama acotada r_j podemos definir el lazo, al que también denotaremos como r_j , como el lazo que comienza en x_0 y sigue por arriba del plano del diagrama hasta llegar a la región r_j y regresar a x_0 por la parte de abajo del plano (Figura 1.5).

Figura 1.5: Generadores del grupo determinados por las regiones de $D(K)$ en c_i .

Así, por el Teorema de van Kampen (cuya prueba se puede consultar en [6]), $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ es un grupo con $n + 1$ generadores y las relaciones están dadas por la relación en

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^n (\partial \bar{\zeta}_i \cup \gamma_i[0, 1]) \setminus K$$

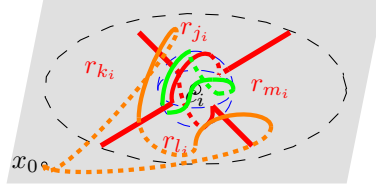


Figura 1.6: Relación de $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ en el cruce c_i .

El lazo $r_{j_i}^{-1} r_{k_i} r_{l_i}^{-1} r_{m_i}$ (indicado en la Figura 1.6 de color naranja) es homotópico al lazo generador de $\partial \bar{\zeta}_i$, que es una esfera con dos hoyos (indicado en la Figura 1.6 de color verde). Puesto que el lazo verde es trivial en B tenemos que las relaciones del grupo fundamental son $r_{j_i}^{-1} r_{k_i} r_{l_i}^{-1} r_{m_i} = 1$ para cada $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto,

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle r_1, r_2, \dots, r_n, r_{n+1} \mid R_1, R_2, R_3, \dots, R_n \rangle$$

donde $R_i = r_{j_i}^{-1} r_{k_i} r_{l_i}^{-1} r_{m_i} = 1$.

■

Ejemplo 1.8. Consideremos al nudo 5_2 .

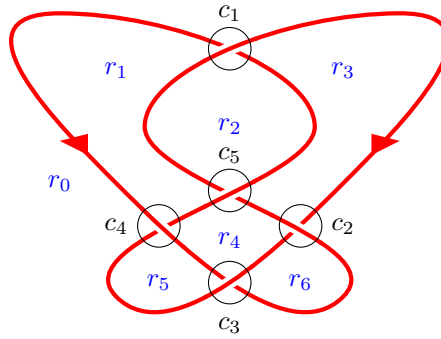


Figura 1.7: Diagrama con cinco cruces de un nudo 5_2 .

Polinomio de Alexander

En un diagrama como el de la Figura 1.7, tenemos que las ecuaciones de los cinco puntos de cruce son

$$\begin{aligned} c_1(r) &= -xr_2 + r_3 - r_0 + xr_1 = 0 \\ c_2(r) &= -xr_0 + r_3 - r_4 + xr_6 = 0 \\ c_3(r) &= -xr_4 + r_5 - r_0 + xr_6 = 0 \\ c_4(r) &= -xr_0 + r_5 - r_4 + xr_1 = 0 \\ c_5(r) &= -xr_4 + r_3 - r_2 + xr_1 = 0 \end{aligned}$$

por lo que

$$M(D(K)) = \begin{pmatrix} -1 & x & -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & x \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -x & 1 & x \\ -x & x & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & x & -1 & 1 & -x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dado que r_4 es una región adyacente a r_5 tenemos que son regiones con índices consecutivos, por lo que podemos eliminar las respectivas columnas y así obtener

$$M_1(D(K)) = \begin{pmatrix} -1 & x & -x & 1 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 1 & x \\ -1 & 0 & 0 & 0 & x \\ -x & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y de esta manera se tiene que

$$\det(M_1(D(K))) = 2x^2 - 3x^3 + 2x^4$$

Al normalizar para obtener que el término de grado menor sea una constante positiva, tenemos que

$$\Delta_K(x) = 2 - 3x + 2x^2$$

Presentación del grupo

El grupo del nudo 5_2 tiene como una de sus presentaciones a

$$\langle r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 \mid R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 \rangle$$

dónde

$$\begin{aligned} R_1 &= r_2^{-1}r_3r_1 & ; & & R_2 &= r_3r_4^{-1}r_6 \\ R_3 &= r_4^{-1}r_5r_6 & ; & R_4 &= r_5r_4^{-1}r_1 & ; & R_5 &= r_4^{-1}r_3r_2^{-1}r_1 \end{aligned}$$

1.6. Propiedades de $\Delta_K(x)$

Teorema 1.9. Si K es un nudo y $\Delta_K(x)$ su respectivo polinomio de Alexander entonces la suma de los coeficientes de $\Delta_K(x)$ es ± 1 .

Demostración: Por los resultados de la Sección 1.3, tenemos que si K es un nudo con polinomio de Alexander $\Delta_K(x)$ entonces para cualesquiera dos columnas de índices consecutivos que eliminemos de la matriz determinada por las regiones y los cruces de cualquier diagrama de K se tiene que

$$\Delta_K(x) = \pm x^p \Delta_{r,r+1}(x)$$

De esta manera, la suma de los coeficientes de $\Delta_K(x)$ está dada por

$$\Delta_K(1) = \pm \Delta_{r,r+1}(1)$$

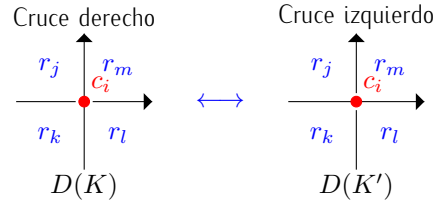


Figura 1.8: Cambio de cruce en c_i .

Notemos que si en un punto de cruce c_i realizamos un cambio de cruce, tendremos que $\Delta_K(1)$ permanece invariante, pues para el nudo K si en el cruce c_i inciden las regiones r_j, r_k, r_l y r_m como en la Figura 1.8, tenemos que en un cruce derecho

$$c_i(r) = -xr_j + r_k - r_l + xr_m = 0$$

al cambiarlo a un cruce izquierdo para obtener un nudo K' se tiene

$$c_i(r) = -xr_k + r_l - r_m + xr_j = 0$$

así, al colocar como primer renglón al correspondiente al cruce c_i y ordenar las primeras cuatro columnas como las respectivas a las regiones r_j, r_k, r_l y r_m , tendremos que

$$M(D(K)) = \begin{pmatrix} -x & 1 & -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ \mid & \mid & \mid & \mid & & & \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} & & & N \\ \mid & \mid & \mid & \mid & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$M(D(K')) = \begin{pmatrix} x & -x & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mid & \mid & \mid & \mid & & & \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} & & & N \\ \mid & \mid & \mid & \mid & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Puesto que las regiones r_j y r_k son adyacentes, tenemos que tienen índices consecutivos y por lo tanto podemos eliminarlas para encontrar una matriz cuadrada deseada; es decir,

$$\begin{aligned} M_1(D(K)) &= \begin{pmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ | & | & & & \\ \bar{c} & \bar{d} & & N & \\ | & | & & & \end{pmatrix} \\ M_1(D(K')) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ | & | & & & \\ \bar{c} & \bar{d} & & N & \\ | & | & & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Podemos calcular el determinante por el primer renglón para obtener

$$\begin{aligned} \det(M_1(D(K))) &= (-1) \det(\bar{d}N) - x \det(\bar{c}N) = (-1)[\det(\bar{d}N) + x \det(\bar{c}N)] \\ \det(M_1(D(K'))) &= \det(\bar{d}N) + \det(\bar{c}N) \end{aligned}$$

Y en el caso en el que $x = 1$ se tiene que $\det(M_1(D(K'))) = -\det(M_1(D(K)))$. Esto implica que si K' es el nudo obtenido al cambiar un cruce del nudo K entonces $\Delta_K(1) = \pm \Delta_{K'}(1)$. De esta manera, junto con el hecho de que un nudo trivial T puede obtenerse de cualquier nudo K al realizarle un número finito cambios de cruce en determinados puntos de cruce, tenemos que para cualquier nudo K se tiene que $\Delta_K(1) = \pm \Delta_T(1)$. Así, tenemos que para cualquier nudo K se tiene que $\Delta_K(1) = \pm 1$.

■

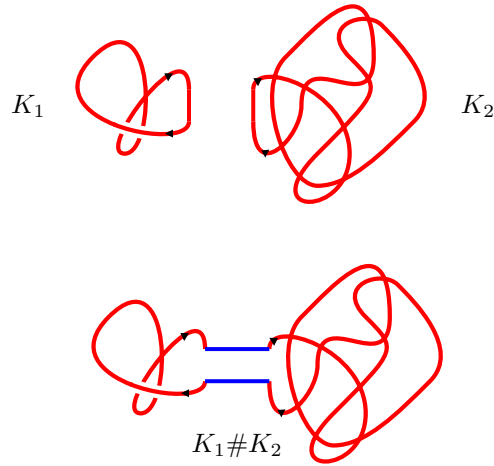


Figura 1.9: Suma conexa de K_1 con K_2 .

Para el siguiente resultado necesitamos considerar una operación entre nudos llamada **suma conexa**: Si K_1 y K_2 son un par de nudos orientados entonces $K_1 \# K_2$ es la suma conexa de K_1 con K_2 si $K_1 \# K_2$ es el nudo que se obtiene al suprimir un intervalo de cada nudo e identificando los extremos de cada nudo de manera que la orientación de $K_1 \# K_2$ coincida con la orientación de K_1 y K_2 (Figura 1.9).

De esta manera, podemos definir lo siguiente para un nudo K :

- K es **compuesto** si existen dos nudos K_1 y K_2 tales que $K = K_1 \# K_2$.
- K es **primo** si $K \neq K_1 \# K_2$ para cualesquiera dos nudos no triviales K_1 y K_2 .

Teorema 1.10. Si K es un nudo compuesto cuyos factores son K_1 y K_2 entonces

$$\Delta_K(x) = \Delta_{K_1}(x)\Delta_{K_2}(x)$$

Demostración: Sea K un nudo compuesto con factores K_1 y K_2 .

Consideremos al diagrama $D(K_i)$ del nudo K_i con $i \in \{1, 2\}$. De esta manera, si $K = K_1 \# K_2$ entonces el número de puntos de cruce de un diagrama de K es la suma del número de cruces de $D(K_1)$ con el número de cruces de $D(K_2)$.

Por otro lado, la cantidad de regiones que tiene $D(K_1 \# K_2)$ es la cantidad de regiones de $D(K_1)$ más la cantidad de regiones de $D(K_2)$ menos dos, pues compartirán la región no acotada de cada uno y al realizar la operación de la suma conexa se unirán dos regiones (Figura 1.10).

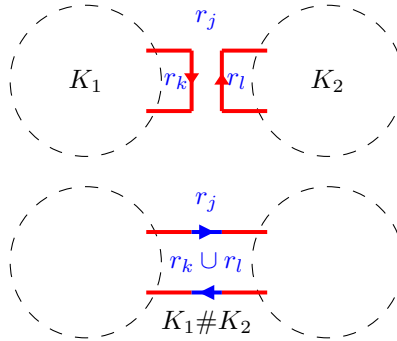


Figura 1.10: $K = K_1 \# K_2$

Ahora consideremos lo siguiente:

- De $D(K_1)$, podemos obtener su respectiva matriz en la que las últimas dos columnas sean las correspondientes a las regiones r_j y r_k de la Figura 1.10 para obtener la siguiente matriz:

$$M(D(K_1)) = \begin{pmatrix} M_1(D(K_1)) & \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix}$$

donde $M_1(D(K_1))$ es la matriz cuadrada obtenida al eliminar las columnas correspondientes a las regiones r_j y r_k que en $D(K_1)$ tienen índices consecutivos por ser adyacentes.

- De $D(K_2)$, podemos obtener su respectiva matriz en la que las primeras dos columnas sean las correspondientes a las regiones r_j y r_l de la Figura 1.10 para obtener la siguiente matriz:

$$M(D(K_2)) = \begin{pmatrix} \bar{c} & \bar{d} & M_2(D(K_2)) \end{pmatrix}$$

donde $M_2(D(K_2))$ es la matriz cuadrada obtenida al eliminar las columnas correspondientes a las regiones r_j y r_l que en $D(K_2)$ tienen índices consecutivos por ser adyacentes.

Notemos que los índices de las regiones de $D(K_1)$ y los índices de las regiones de $D(K_2)$ son compatibles (pues los índices de las regiones no acotadas de ambos diagramas coinciden y con ello se tiene que $\text{ind}(r_k \cup r_l)$ en $K_1 \# K_2$ coincide con $\text{ind}(r_k)$ en $D(K_1)$ y con $\text{ind}(r_l)$ en $D(K_2)$).

De esta manera, podemos ordenar las columnas de $M(D(K_1 \# K_2))$ de manera que las primeras columnas coincidan con las correspondientes regiones de $D(K_1)$ terminando con las regiones r_j y r_k ; prosiguiendo con las correspondientes a las regiones de $D(K_2)$ comenzando con las regiones r_j y r_l tomando en cuenta que en $D(K_1 \# K_2)$ las regiones r_k y r_l coinciden; es decir, tendemos

$$M(D(K_1 \# K_2)) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} & & & & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & M_1(D(K_1)) & & \bar{a} & \bar{b} & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \bar{c} & \bar{d} & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & & & & & M_2(D(K_2)) & \end{array} \right)$$

Así, al eliminar de $M(D(K_1 \# K_2))$ las columnas correspondientes a las regiones r_j y $r_k \cup r_l$, que tienen índices consecutivos por ser adyacentes, se obtiene una matriz $M_3(D(K_1 \# K_2))$ que satisface

$$\det(M_3(D(K_1 \# K_2))) = \det(M_1(D(K_1))) \det(M_2(D(K_2)))$$

y de aquí que

$$\Delta_{K_1 \# K_2}(x) = \Delta_{K_1}(x) \Delta_{K_2}(x)$$

■

Observación 1.11. Si K es un nudo con $\Delta_K(x)$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ no necesariamente K es un nudo primo, pues existen polinomios no triviales con polinomio 1. Así, al sumar uno de estos con cualquier nudo la suma conexa tendrá polinomio de Alexander igual al polinomio del segundo factor.

CAPÍTULO 2

INTERPRETACIÓN TOPOLÓGICA DE LAS ECUACIONES DEL DIAGRAMA Y DE $\Delta_K(X)$

En general, si X es un espacio topológico arco conexo se tiene que la abelianización de $\pi_1(X)$ es el primer grupo de homología de X , que se denota como $H_1(X)$. Como la abelianización de un grupo G es el cociente de G por su subgrupo conmutador, denotado por $[G, G]^1$, tenemos que $H_1(X) = \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]}$.

En nuestro caso, si K es un nudo y denotamos como $E_K = \mathbb{R}^3 \setminus K$ al exterior de K entonces $H_1(E_K) = \frac{\pi_1(E_K)}{[\pi_1(E_K), \pi_1(E_K)]}$. En adelante, consideremos la presentación de $\pi_1(E_K)$ dada en el Teorema 1.7 (página 12) a la que llamaremos presentación de Alexander.

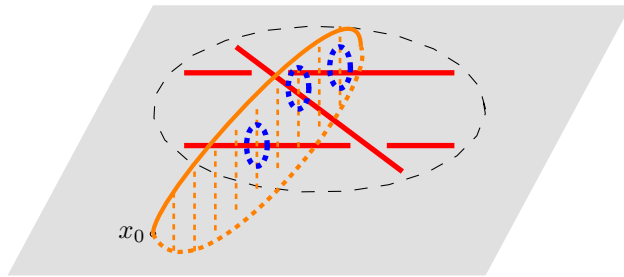


Figura 2.1: Meridianos del nudo.

Se sabe que para cualquier nudo K se tiene que $H_1(E_K) \cong \mathbb{Z}$; esto se puede ver de

¹ $[G, G]$ es el subgrupo generado por los elementos de la forma $ghg^{-1}h^{-1}$ con $\{g, h\} \subseteq G$.

la siguiente manera:

- $H_1(E_K)$ es un grupo cíclico:

En la presentación de Alexander, dado que $\pi_1(E_K)$ está generado por r_i con $1 \leq i \leq n$, su abelianización está generada por los mismos elementos considerados como elementos de homología. Cada generador r_i es homólogo a la suma de los meridianos cruzados por el disco que r_i bordea en \mathbb{R}^3 (Figura 2.1). Puesto que todos los meridianos son homólogos (salvo por signo), tenemos que $H_1(E_K)$ es un grupo cíclico generado por un meridiano.

- $H_1(E_K)$ es infinito:

Consideremos a la función $\psi : H_1(E_K) \rightarrow \mathbb{Z}$ definida en los generadores como $\psi(r_i) = \text{ind}(r_i)$. Para verificar que esta función determina un homomorfismo de grupos basta con notar que la función evaluada en cada una de las relaciones se anula. Lo cuál es evidente, dada la manera de definir los índices de las regiones en cada punto de cruce (Figura 1.1, página 3); es decir, para cada una de las relaciones R_i se tiene que

$$\begin{aligned} \psi(R_i) &= \psi(r_{j_i}^{-1} r_{k_i} r_{l_i}^{-1} r_{m_i}) \\ &= \psi(r_{j_i}^{-1}) + \psi(r_{k_i}) + \psi(r_{l_i}^{-1}) + \psi(r_{m_i}) \\ &= -\text{ind}(r_{j_i}) + \text{ind}(r_{k_i}) - \text{ind}(r_{l_i}) + \text{ind}(r_{m_i}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así, al elegir una región r_1 adyacente a la región no acotada en el diagrama de K , tenemos que $\psi(r_1) = \text{ind}(r_1) = \pm 1$. Por lo que ψ es un epimorfismo de grupos.

Por lo tanto, $H_1(E_K)$ es un grupo cíclico infinito, independientemente del tipo de nudo que se considere. En otras palabras, tenemos que $H_1(E_K)$ no distingue a los nudos.

Puesto que a cada subgrupo H de $\pi_1(X)$ le corresponde una cubierta de X cuyo grupo fundamental es H , si consideramos a la abelianización $\alpha : \pi_1(E_K) \rightarrow H_1(E_K)$ tenemos que $\ker(\alpha)$ es el subgrupo conmutador de $\pi_1(E_K)$ y a éste le corresponde una cubierta de E_K a la que llamaremos **cubierta cíclica infinita de E_K** y denotaremos como \tilde{E}_K . Podemos calcular $H_1(\tilde{E}_K)$ al abelianizar $\pi_1(\tilde{E}_K)$; es decir,

$$H_1(\tilde{E}_K) = \frac{[\pi_1(E_K), \pi_1(E_K)]}{[[\pi_1(E_K), \pi_1(E_K)], [\pi_1(E_K), \pi_1(E_K)]]}$$

Veremos que $H_1(\tilde{E}_K)$ si distingue a muchos nudos:

Como el subgrupo conmutador de $\pi_1(E_K)$ es normal se tiene que \tilde{E}_K es una cubierta regular de E_K ; es decir, el grupo de transformaciones cubrientes actúa transitivamente sobre las fibras de \tilde{E}_K y es isomorfo a $\pi_1(E_K)/\pi_1(\tilde{E}_K) \cong \mathbb{Z}$, por lo que si x es un generador del grupo de las transformaciones cubrientes entonces $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ actúa en $H_1(\tilde{E}_K)$ que, en general, tiene una cantidad infinita de generadores y de relaciones.

Veamos existe una presentación de finita de $H_1(\tilde{E}_K)$ como módulo sobre $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ cuya matriz de presentación tiene como determinante a $\Delta_K(x)$.

Lema 2.1. $\pi_1(E_K)$ tiene una presentación de la forma

$$\pi_1(E_K) \cong \langle g_0, g_1, g_2, \dots, g_n \mid R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$$

donde si $\alpha : \pi_1(E_K) \rightarrow \frac{\pi_1(E_K)}{[\pi_1(E_K), \pi_1(E_K)]} \cong \mathbb{Z}$ es la abelianización, $\alpha(g_0) = 1$ y para cualquier $1 \leq i \leq n$ se tiene que $\alpha(g_i) = 0$.

Demostración: Consideremos $D(K)$ un diagrama del nudo K . Si $D(K)$ tiene n cruces, tenemos que la presentación de Alexander es

$$\pi_1(E_K) = \langle r_1, r_2, \dots, r_n, r_{n+1} \mid R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$$

dónde r_j es un generador determinado por cada región de $D(K)$ distinta de la región no acotada y $R_i = r_{j_i}^{-1} r_{k_i} r_{l_i}^{-1} r_{m_i}$.

Como $\text{ind}(r_0) = 0$ se tiene que cualquier región adyacente a r_0 es una región que tiene índice ± 1 . Seleccionemos r_1 una región adyacente a r_0 tal que $\text{ind}(r_1) = 1$ y notemos lo siguiente:

- $\{r_1, r_1^{-\text{ind}(r_2)} r_2, r_1^{-\text{ind}(r_3)} r_3, \dots, r_1^{-\text{ind}(r_n)} r_n, r_1^{-\text{ind}(r_{n+1})} r_{n+1}\}$ genera a $\pi_1(E_K)$.
- Para cualquier $1 \leq s \leq n+1$ se tiene que $r_1^{-\text{ind}(r_s)} r_s \in [\pi_1(E_K), \pi_1(E_K)]$.

Para cada $1 \leq i \leq n$ si en el cruce c_i se tiene una incidencia como la de la Figura 1.2 (página 3) entonces R_i cumple

$$\begin{aligned} 1 &= r_j^{-1} r_k r_l^{-1} r_m \\ &= \left(r_1^{-\text{ind}(r_j)} r_j \right)^{-1} r_1^{\text{ind}(r_k) - \text{ind}(r_j)} \left(r_1^{-\text{ind}(r_k)} r_k \right) \\ &\quad \left(r_1^{-\text{ind}(r_l)} r_l \right)^{-1} r_1^{\text{ind}(r_m) - \text{ind}(r_l)} \left(r_1^{-\text{ind}(r_m)} r_m \right) \end{aligned}$$

Por lo que, si para cada $2 \leq s \leq n+1$ definimos $a_s := r_1^{-\text{ind}(r_s)} r_s$ se tiene

$$1 = (a_j)^{-1} r_1^{\text{ind}(r_k) - \text{ind}(r_j)} (a_k) (a_l)^{-1} r_1^{\text{ind}(r_m) - \text{ind}(r_l)} (a_m)$$

Por lo tanto, para cada $1 \leq i \leq n$ la relación R_i se puede escribir en términos de r_1 y a_s , con $2 \leq s \leq n+1$, como

$$R_i = (a_j)^{-1} r_1^{\text{ind}(r_k) - \text{ind}(r_j)} (a_k) (a_l)^{-1} r_1^{\text{ind}(r_m) - \text{ind}(r_l)} (a_m) \quad (2.1)$$

Entonces $\pi_1(x) \cong \langle r_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1} \mid R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$ donde $\alpha(r_1) = 1$ y para $2 \leq s \leq n+1$ se tiene que $\alpha(a_s) = 0$ dado que $a_s = r_1^{-\text{ind}(r_s)} r_s \in [\pi(E_K), \pi(E_K)]$.

■

Lema 2.2. Si $g \in \pi_1(E_K)$ entonces

$$g \in [\pi(E_K), \pi(E_K)] \Leftrightarrow g = \prod_{i=1}^t r_1^{\kappa_i} a_{j_i}^{\eta_i} \text{ donde } \sum_{i=1}^t \kappa_i = 0 \Leftrightarrow g = \prod_{i=1}^t (r_1^{\kappa_i} a_i^{\pm 1} r_1^{-\kappa_i})$$

Demostración: Para cualquier $g \in G_K$

$$\begin{aligned} g &= \prod_{i=1}^t r_1^{\kappa_i} a_{j_i}^{\eta_i} \\ &= (r_1^{\kappa_1} a_{j_1}^{\eta_1} r_1^{-\kappa_1}) (r_1^{\kappa_1 + \kappa_2} a_{j_2}^{\eta_2} r_1^{-\kappa_1 - \kappa_2}) \dots \left(r_1^{\sum_{i=1}^t \kappa_i} a_{j_t}^{\eta_t} r_1^{-\sum_{i=1}^t \kappa_i} \right) r_1^{\sum_{i=1}^t \kappa_i} \end{aligned}$$

Si denotamos por $G_K := \pi_1(E_K)$ y $C_K := [G_K, G_K]$ entonces para cualquier $2 \leq i \leq n+1$ tenemos que $a_i^{\pm 1} \in C_K$ y, dado que $C_K \triangleleft G_K$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $r_1^k a_i^{\pm 1} r_1^{-k} \in C_K$.

Puesto que $r_1^s \notin C_K$ para cualquier $s \neq 0$ tenemos que

$$g = \prod_{i=1}^t r_1^{\kappa_i} a_{j_i}^{\eta_i} \text{ donde } \sum_{i=1}^t \kappa_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g \in C_K \quad \Leftrightarrow \quad g = \prod_{i=1}^m (r_1^{\kappa_i} a_i^{\pm 1} r_1^{-\kappa_i})$$

■

Teorema 2.3. Si K un nudo y $\pi_1(E_K)$ con la presentación de Alexander entonces el subgrupo conmutador tiene una presentación como la siguiente

$$C_K \cong \langle r_1^k a_i^{\pm 1} r_1^{-k}, 1 \leq i \leq n, k \in \mathbb{Z} \mid r_1^{\text{ind}(c_i)} R_i r_1^{-\text{ind}(c_i)}, 1 \leq i \leq n \rangle$$

Demostración: Notemos que

- C_K está generado por $\{ r_1^k a_i^{\pm 1} r_1^{-k} \mid 2 \leq i \leq n+1, k \in \mathbb{Z} \}$ (Lema 2.2).
- Para cada $1 \leq i \leq n$, si $\text{ind}(c_i) = p_i \in \mathbb{Z}$ entonces $r_1^{p_i} R_i r_1^{-p_i} \in C_K$: De la ecuación (2.1) (página 23), para cada $1 \leq i \leq n$ tenemos que

$$\begin{aligned} R_i &= (a_j)^{-1} r_1^{\text{ind}(r_k) - \text{ind}(r_j)} (a_k) (a_l)^{-1} r_1^{\text{ind}(r_m) - \text{ind}(r_l)} (a_m) \\ &= r_1^{-\text{ind}(r_j)} \left(r_1^{\text{ind}(r_j)} (a_j)^{-1} r_1^{-\text{ind}(r_j)} \right) \left(r_1^{\text{ind}(r_k)} a_k r_1^{-\text{ind}(r_k)} \right) \left(r_1^{\text{ind}(r_l)} (a_l)^{-1} r_1^{-\text{ind}(r_l)} \right) \left(r_1^{\text{ind}(r_m)} a_m r_1^{-\text{ind}(r_m)} \right) \end{aligned}$$

Si en el i -ésimo cruce tenemos una configuración como el de la Figura 1.2 (página 3) y $\text{ind}(c_i) = p_i \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\text{ind}(r_j) = p_i + 1; \text{ind}(r_k) = p_i; \text{ind}(r_l) = p_i - 1; \text{ind}(r_m) = p_i$$

$$\begin{aligned} R_i &= r_1^{-p_i} \left(r_1^{p_i} (a_j)^{-1} r_1^{-p_i} \right) \left(r_1^{p_i-1} a_k r_1^{-(p_i-1)} \right) \\ &\quad \left(r_1^{p_i-1} (a_l)^{-1} r_1^{-(p_i-1)} \right) \left(r_1^{p_i} a_m r_1^{-p_i} \right) (r_1^{p_i}) \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} r_1^{p_i} R_i r_1^{-p_i} &= \left(r_1^{p_i} (a_j)^{-1} r_1^{-p_i} \right) \left(r_1^{p_i-1} a_k r_1^{-(p_i-1)} \right) \\ &\quad \left(r_1^{p_i-1} (a_l)^{-1} r_1^{-(p_i-1)} \right) \left(r_1^{p_i} a_m r_1^{-p_i} \right) \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que todas las relaciones propuestas son relaciones en C_K y se puede mostrar que no existen más relaciones usando el método de re-escritura de Reidemeister-Scheirer al considerar como elementos de la transversal de Sheirer a las clases laterales determinadas por r_1^m para $m \in \mathbb{Z}$ [10].

■

Corolario 2.4. Sea K un nudo y \tilde{E}_K la cubriente cíclica infinita de E_K . $H_1(\tilde{E}_K)$ tiene una presentación como módulo sobre $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ cuya matriz de la presentación es una matriz reducida de Alexander.

Demostración: Si $\beta : C_K \rightarrow \frac{C_K}{[C_K, C_K]}$ es la abelianización entonces para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que $\beta(a_i)$ es un generador y se puede escribir la relación $r_1^{\text{ind}(c_i)} R_i r_1^{-\text{ind}(c_i)}$ aditivamente al realizar la sustitución $\pm x^k \beta(a_i) = r_1^k a_i^{\pm 1} r_1^{-k}$; es decir, con dicha sustitución tenemos que si denotamos $\beta_i := \beta(a_i)$ y $\text{ind}(c_i) = p_i$ entonces

$$\begin{aligned} \overline{R_i} &= \left(r_1^{p_i} (a_j)^{-1} r_1^{-p_i} \right) \left(r_1^{p_i-1} a_k r_1^{-(p_i-1)} \right) \left(r_1^{p_i-1} (a_l)^{-1} r_1^{-(p_i-1)} \right) \left(r_1^{p_i} a_m r_1^{-p_i} \right) \\ &= -x^{p_i} \beta_j + x^{p_i-1} \beta_k - x^{p_i-1} \beta_l + x^{p_i} \beta_m \end{aligned}$$

Por lo que para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que

$$x^{-(p_i-1)} \overline{R_i} = -x \beta_j + \beta_k - \beta_l + x \beta_m$$

es decir, $x^{-(p_i-1)} \overline{R_i}$ es la ecuación del diagrama en el cruce c_i .

Así, tenemos una presentación de $C_K/[C_K, C_K]$ como módulo sobre $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ donde la matriz de la presentación es la matriz reducida de Alexander del diagrama $D(K)$ que resulta de eliminar las columnas correspondientes a r_0 y r_1 .

■

Observación 2.5. Esta presentación como módulo sobre $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ de la homología de \tilde{E}_K determina totalmente a $H_1(\tilde{E}_K)$. La matriz de la presentación tiene como determinante al polinomio de Alexander del nudo K que no determina totalmente a $H_1(\tilde{E}_K)$ pero en muchos casos es suficiente para distinguir entre distintos grupos de homología.

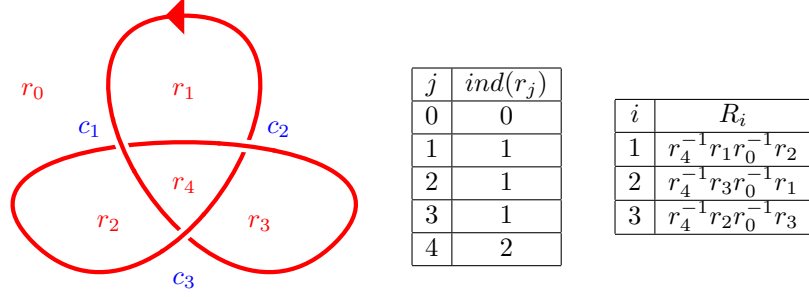
Ejemplo 2.6. Veamos el caso del nudo trébol 3_1 :

En este caso, los índices y las relaciones están indicadas en las tablas mostradas y, puesto que r_0 es el elemento identidad, tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus 3_1) = \langle r_1, r_2, r_3, r_4 \mid r_4^{-1} r_1 r_2, r_4^{-1} r_3 r_1, r_4^{-1} r_2 r_3 \rangle$$

Puesto que $\text{ind}(c_i) = 1$ para cualquier $1 \leq i \leq 3$, se tiene que

$$\begin{aligned} r_1 R_1 r_1^{-1} &= (r_1 a_4^{-1} r_1^{-1}) (r_1 a_2 r_1^{-1}) \\ r_1 R_2 r_1^{-1} &= (r_1 a_4^{-1} r_1^{-1}) (r_1^0 a_3 r_1^{-0}) \\ r_1 R_3 r_1^{-1} &= (r_1 a_4^{-1} r_1^{-1}) (r_1^0 a_2 r_1^{-0}) (r_1 a_3 r_1^{-1}) \end{aligned}$$

Figura 2.2: Nudo 3_1

Por lo que si $\beta : C_K \rightarrow \frac{C_K}{[C_K, C_K]}$ es la abelianización entonces al escribir las relaciones aditivamente con las sustituciones $\pm x^k \beta(a_i) = r_1^k a_i^{\pm 1} r_1^{-k}$ y $\beta_i := \beta(a_i)$ se tiene

$$\begin{array}{lcl}
 r_1 R_1 r_1^{-1} & = & -x\beta_4 + x\beta_2 \\
 r_1 R_2 r_1^{-1} & = & -x\beta_4 + \beta_3 \\
 r_1 R_3 r_1^{-1} & = & -x\beta_4 + \beta_2 + x\beta_3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|ccc}
 & r_1 R_1 r_1^{-1} & r_1 R_2 r_1^{-1} & r_1 R_3 r_1^{-1} \\
 \hline
 \beta_2 & x & 0 & 1 \\
 \beta_3 & 0 & 1 & x \\
 \beta_4 & -x & -x & -x
 \end{array}$$

De aquí,

$$\det \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ -x & -x & -x \end{pmatrix} \right) = x(-x + x^2 + 1)$$

Por lo tanto, $\Delta_{3_1}(x) = 1 - x + x^2$.

A continuación daremos algunas consecuencias de la interpretación topológica de $\Delta_K(x)$.

Corolario 2.7. Si K es un nudo orientado y K' el nudo que se obtiene al cambiar la orientación del nudo K entonces $\Delta_K(x) = \Delta_{K'}(x)$.

Demostración: Es consecuencia del hecho de que $\Delta(x)$ se puede calcular al dar una presentación de $H_1(\tilde{E}_K)$ como módulo sobre \mathbb{Z} donde \tilde{E}_K es la cubriente cíclica infinita del complemento de K y el complemento no depende de la orientación del nudo. ■

Recordemos que el polinomio de Alexander está bien definido salvo multiplicación por $\pm x^r$ con $r \in \mathbb{Z}$ y nosotros hemos elegido como representante al que tiene el término de

menor grado como una constante positiva. El siguiente resultado muestra que es posible elegir un representante de manera que $\Delta_K(x)$ sea un polinomio simétrico:

Corolario 2.8. Para cualquier nudo K se tiene que $\Delta_K(x) = \Delta_K(x^{-1})$.

Demostración: Por un lado, si K un nudo orientado y K' el nudo que se obtiene al cambiar la orientación de K entonces si en el cruce c_i inciden las regiones r_j, r_k, r_l y r_m como en la Figura 2.3, tenemos que

$$\begin{aligned} c_i(r) &= -xr_j + r_k - r_l + xr_m = 0 && \text{en } D(K) \\ c_i(r) &= -xr_l + r_m - r_j + xr_k = 0 && \text{en } D(K') \end{aligned}$$

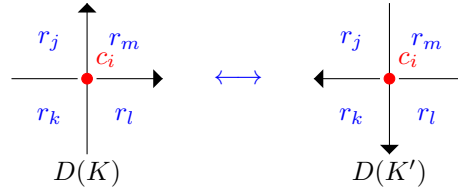


Figura 2.3: Cambio de orientación de un nudo K .

Por lo que el renglón correspondiente al cruce c_i en las cuatro columnas respectivas a las regiones r_j, r_k, r_l y r_m es

Para $M(D(K))$

Para $M(D(K'))$

	j	k	l	m
i	$-x$	1	-1	x

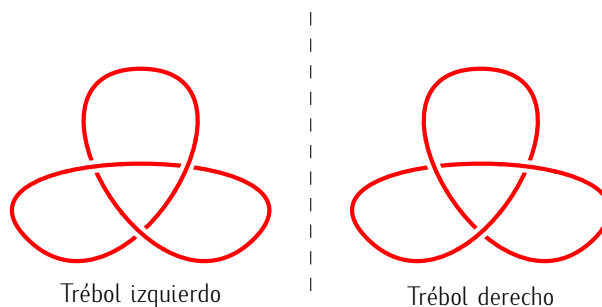
	j	k	l	m
i	-1	x	$-x$	1

Así, si dos regiones son adyacentes en $D(K)$ entonces esas mismas regiones son adyacentes en $D(K')$ por lo que en ambos diagramas son regiones de índices consecutivos. Por lo que podemos eliminar en $M(D(K))$ y $M(D(K'))$ las columnas correspondientes a las mismas regiones adyacentes para obtener $M_1(D(K))$ y $M_1(D(K'))$. Por ende, si el número de cruces es η entonces al multiplicar cada renglón de $M_1(D(K))$ por x^{-1} tendremos que el valor del determinante de la matriz resultante N , que tendrá como variable a x^{-1} , será $\det(N) = x^{-\eta} \det(M_1(D(K)))$. Por lo que, $\Delta_K(x) = \Delta_{K'}(x^{-1})$.

Por otro lado, en virtud del Corolario 2.7, tenemos que $\Delta_{K'}(x) = \Delta_K(x) = \Delta_{K'}(x^{-1})$. ■

Corolario 2.9. Si K^* es el nudo que se obtiene al cambiar todos los cruces de un nudo K entonces $\Delta_K(x) = \Delta_{K^*}(x)$.

Demostración: Puesto que intercambiar los cruces de un nudo K corresponde a realizar una reflexión por un plano, tenemos que K y K^* tienen complementos homeomorfos y por ello tienen cubiertas cíclicas infinitas homeomorfas. De esta manera, tienen los mismos polinomios de Alexander. ■



Así, un nudo K y su imagen especular K^* tienen el mismo polinomio de Alexander. Por lo que si K y K^* son nudos que no son equivalentes entonces el polinomio de Alexander no puede distinguirlos, como es el caso de del nudo trébol derecho e izquierdo que no son equivalentes (el primero que demostró esto fue Max Dehn en [4]).

Como el ideal de Alexander es principal $\Delta_K(x) = 1 \Leftrightarrow \pi_1(\tilde{E}_K) = [\pi_1(\tilde{E}_K), \pi_1(\tilde{E}_K)]$; es decir, existen nudos con polinomio de Alexander trivial que no son equivalentes al nudo trivial.

2.1. Otros resultados sobre $\Delta_K(x)$

Para concluir, mencionaremos algunos resultados sobre el polinomio de Alexander:

- En 1934 Herbert Seifert demostró que si f es un polinomio de Laurent con coeficientes enteros, $f(x) = f(x^{-1})$ y $|f(1)| = 1$ entonces f es el polinomio de Alexander de algún nudo K [13].
- En 1962 Ralph Fox encontró que existe otra manera de calcular el polinomio de Alexander a partir de una presentación de $\pi_1(E_K)$ por medio de un cálculo de derivadas establecido por él mismo en [5].
- En 1969 John Horton Conway desarrolló otro invariante de nudos, el polinomio de Conway del nudo K denotado como $\nabla_K(x)$, que puede obtenerse de manera recursiva cuya relación con el polinomio de Alexander es $\Delta_K(x^2) = \nabla_K(x - x^{-1})$ [3].
- El grado del polinomio de Alexander de un nudo (normalizado para que el término de menor grado sea una constante positiva) da una cota inferior para el doble del género del nudo [13].

REFERENCIAS

- [1] Alexander, J.W. (1928). Topological invariants of knots and links. *Trans. Amer. Math. Soc.* **30** 275–306.
- [2] Alexander, J. W. & Briggs, G. B. (1926). On types of knotted curves. *Annals of Mathematics.* **28** 562–586.
- [3] Conway, J. H. (1970) An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties. *Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967)* 329–358.
- [4] Dehn, M. (1987). *Papers on group theory and topology*. Traducido del alemán por John Stillwell. U.S.A.: Springer-Verlag.
- [5] Fox, R. H. (1962). A quick trip through knot theory en *Topology of 3-manifolds* (120–167). U.S.A.: Prentice-Hall.
- [6] Hatcher, A. (2001). *Algebraic topology*. Cambridge University Press.
- [7] Kauffman, L. H. (2001). *Knots & Physics*. (3 ed) U.S.A.: World Scientific Publishing.
- [8] Kawauchi, A. (1996). *A Survey of Knot Theory*. Birkhauser.
- [9] Lickorish, W. B. (1997). *An Introduction to Knot Theory*. U.S.A.: Springer Verlag.
- [10] Magnus, W., Karrass, A. & Solitar, D. (1966) *Combinatorial Group Theory*. U.S.A.: Wiley.
- [11] Milnor, J. (1968). Infinite cyclic coverings. *Conference on the Topology of Manifolds.* **13**.
- [12] Reidemeister, K. (1927). Elementare Begründung der Knotentheorie. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **5** (1): 24–32.
- [13] Rolfsen, D. (2003). *Knots and links*. U.S.A.: AMS Chelsea Publishing.