

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**TEORÍA DE NUDOS CON APLICACIONES A LA
ENZIMOLOGÍA.**

TESIS
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS.

PRESENTA:
PERLA REBECA SÁNCHEZ VARGAS.

ASESORES DE TESIS:
DR. MIGUEL ALEJANDRO XICOTÉNCATL MERINO
CAND. DR. RUBÉN SANTOS MANCIO TOLEDO.



MÉXICO D. F., OCTUBRE DE 2009

Índice general

Índice general	I
1. Nudos y Enlaces	1
1.1. Definición de Nudo	1
1.2. Equivalencia de Nudos	3
1.3. Enlaces	6
1.4. Proyecciones y Diagramas de Nudos	8
1.5. Simetrías de Nudos	10
2. Invariantes de Nudos	13
2.1. Movimientos de Reidemeister	13
2.2. Colorabilidad	15
2.3. El Número de Cruce	23
2.4. El Número de Puente	23
2.5. El Número de Desanudamiento	25
2.6. El Número de Enlace	26
2.7. El Polinomio de Alexander	27
2.8. El Polinomio de Conway	31
2.9. El Polinomio de Jones	37
3. Marañas	41
3.1. Definiciones Básicas	41
3.2. Marañas Triviales o Racionales	45
3.3. El Algoritmo de Conway	48
3.4. Fracciones Continuas	53
3.5. Teorema de Conway	55
3.6. Enlaces Racionales	55

ÍNDICE GENERAL

4. Aproximación Topológica a la Enzimología	71
4.1. Enrollamiento del ADN	73
4.2. ADN Topoisomerasas	75
4.3. Recombinación de Sitio Específico	78
4.4. Modelo matemático para la recombinación de sitio específico .	82
4.4.1. Recombinación de Sitio Específico por la enzima <i>Tn3</i> Resolvasa	84
4.4.2. Recombinación de Sitio Específico por la enzima fago λ integrasa (Int)	86
Bibliografía	95
Índice alfabético	97

El Señor es mi pastor, nada me falta.

Agradecimientos

A mis padres y a mi hermano Luis, por toda la paciencia y comprensión que me brindaron durante toda la carrera, en especial a mi mamá Luciana, por siempre animarme a seguir adelante.

Al Dr. Miguel Alejandro Xicoténcatl Merino por haber aceptado ser el asesor de mi tesis y por su ayuda para realizarla.

Al Cand. a Dr. Rubén Santos Mancio Toledo y al Dr. Pablo Lam Estrada por el apoyo y los valiosos consejos que me brindaron mientras fui su alumna además de haber revisado la tesis.

A la Dr. Flor de María Correa Romero y al M. en C. Santiago Marcos Zepeda Martínez por haber revisado la tesis.

A mi amigo incondicional Alfonso Hernández Montes.

Introducción

La Teoría de Nudos se ha desarrollado durante más de 100 años, es una rama de la topología que estudia los aspectos geométricos de las curvas simples cerradas, llamadas nudos, hace algunos años esta rama de las matemáticas, comenzó a tener aplicaciones importantes en otras ciencias como la Física, Química y la Biología Molecular, de hecho tuvo sus inicios con P. G. Tait, quien fue el primero en publicar una serie de escritos sobre este tema motivado porque su estudio era importante para el entendimiento de las propiedades químicas de los átomos. El problema principal de esta teoría ha sido la clasificación de los nudos, de manera que continuamente se buscan nuevas formas de poder identificar cuándo dos nudos o enlaces son equivalentes.

El presente trabajo está basado en dos artículos: *Lifting the Curtain: Using Topology to Probe the Hidden Action of Enzymes*, NOTICES OF THE AMS, Volumen 42, número 5, mayo 1995, de D. W. Sumners y *A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 108, págs 489 – 515, 1990 de C. Ernst and D. W. Sumners, donde los autores se enfocan en las 2–marañas racionales, los nudos (o enlaces) racionales y en una importante aplicación de la Teoría de Nudos en la Biología Molecular.

Una 2–maraña racional es un conjunto de dos arcos disjuntos contenidos en una bola tales que sus extremos intersectan a la bola en cuatro puntos y además es homeomorfa a dos líneas rectas paralelas encajadas en $D \times [0, 1]$; las 2–marañas racionales deben su nombre a que existe una biyección entre las 2–marañas racionales y los números racionales, de forma que dos 2–marañas racionales son equivalentes si y sólo si tienen asociado el mismo número racional. Por otro lado los nudos (o enlaces) racionales están completamente clasificados, estos se definen como aquellos nudos que se pueden descomponer

ÍNDICE GENERAL

en dos 2—marañas racionales, una de las características principales de éstos es que pueden ser encajados en el plano excepto por dos arcos.

C. Ernst y D. W. Sumners construyen un modelo matemático utilizando 2—marañas racionales y nudos racionales que describe el mecanismo de las enzimas *Tn3* e *Int*, las cuales actúan en la recombinación de sitio específico del ADN, donde el ADN es una macromolécula que en los últimos años se ha descubierto que dirige y regula la vida de toda célula en cualquier organismo, además de que por medio de éste se transfiere la información genética de una generación a otra.

Esta tesis está organizada como sigue:

En el Capítulo 1 se da la definición de lo que es un nudo, un enlace, bajo qué condiciones dos nudos (o enlaces) son equivalentes y que tipo de proyecciones de los nudos (o enlaces) al plano no dejan perder información acerca de éste.

En el Capítulo 2 se ven algunas invariantes clásicas de nudos las cuales son objetos asociados a los nudos (o enlaces), de forma que si dos nudos o enlaces son equivalentes, entonces tienen asociado el mismo objeto.

En el Capítulo 3 se definen las 2—marañas racionales, los nudos racionales, cómo se construyen 2—marañas racionales por el algoritmo de Conway y el Teorema de Conway para éstas, así como también la mayor parte de la clasificación de nudos racionales.

En el Capítulo 4 se ve la aplicación de las 2—marañas racionales y nudos racionales a la enzimología, en particular se describen los modelos de cómo se comporta la enzima *Tn3* resolvasa y el bacteriófago λ integrasa.

Capítulo 1

Nudos y Enlaces

En este capítulo se verán la bases para el estudio de nudos y enlaces, como son: las definiciones de nudo y enlace; cuándo dos nudos (o enlaces) son equivalentes, es decir cuándo se puede deformar uno en otro; dado un nudo que tipo de proyección al plano es la más adecuada sin que se pierda información esencial de éste y finalmente la asignación de una orientación a estos, donde a partir de una orientación dada al nudo (o enlace) se definen las simetrías de nudos.

1.1. Definición de Nudo

Dados $p, q \in \mathbb{R}^3$, se denota por $[p, q]$ al segmento determinado por p y q .

Definición 1.1.1 Sea $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ un conjunto ordenado (con respecto al subíndice) de puntos distintos en \mathbb{R}^3 . A la unión de $[p_1, p_2], \dots, [p_{n-1}, p_n]$ y $[p_n, p_1]$ se le llama **curva poligonal cerrada**.

Si $[p_{i-1}, p_i] \cap [p_i, p_{i+1}] = \{p_i\}$ para todo $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ y $[p_{n-1}, p_n] \cap [p_n, p_1] = \{p_n\}$, entonces se dice que la curva poligonal cerrada es **simple**.

Definición 1.1.2 Un **nudo** es una curva poligonal simple cerrada en \mathbb{R}^3

Sea (p_1, p_2, \dots, p_n) el conjunto ordenado de puntos que determinan un nudo K , si no existe un subconjunto propio de (p_1, p_2, \dots, p_n) que determine el mismo nudo, entonces a éstos puntos se les llaman *vértices*. Al nudo determinado por tres vértices se le llama **nudo trivial**.

1.1. Definición de Nudo

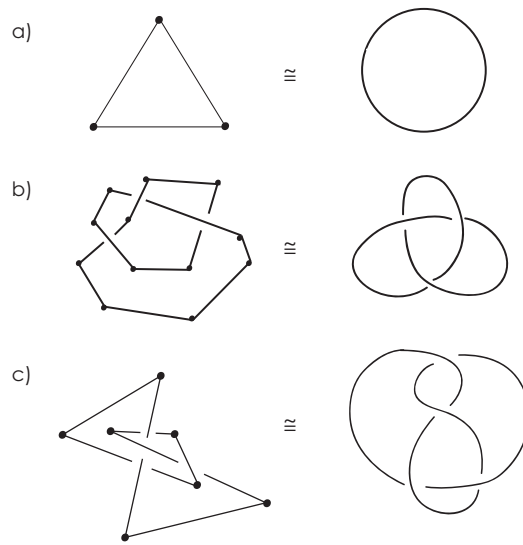


Figura 1.1: a) nudo trivial, b) nudo trébol y c) nudo 4_1

El orden del conjunto de puntos que determina a un nudo K es esencial, ya que si se cambia, no necesariamente se obtendrá el mismo nudo o puede que la curva poligonal cerrada que se obtenga no sea un nudo.

Ejemplo:

Si se tiene el nudo trébol, entonces al cambiar el orden de los puntos que lo determinan se puede obtener el nudo trivial.

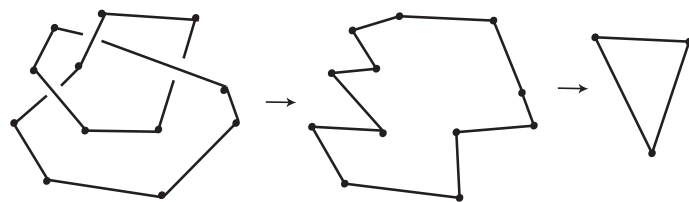


Figura 1.2: Cambio del orden de los vértices

1. Nudos y Enlaces

Nota:

Generalmente se define a un nudo como una curva simple cerrada en \mathbb{R}^3 , es decir, como la imagen de una función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que f es continua e inyectiva excepto en $x = 0$ y $x = 1$, con $f(0) = f(1)$.

Sin embargo esta definición permite la existencia de nudos con anudamientos infinitos, los cuales son llamados nudos salvajes, el estudio de éste tipo de nudos no se incluye en este trabajo. Por tanto dado que una curva simple cerrada puede ser aproximada por una curva poligonal cerrada simple, se trabajará con nudos que puedan ser representados por medio de la definición 1.1.2. En la figura 1.1 se muestran ambas representaciones del nudo trivial, del nudo trébol y del nudo 4_1 .

1.2. Equivalencia de Nudos

Definición 1.2.1 *Un nudo K' es una **deformación elemental** de un nudo K , si es producto de una de las siguientes operaciones:*

- i) Dado un segmento $[p_i, p_{i+1}]$ del nudo K , éste se puede dividir en dos segmentos al tomar cualquier punto del segmento, dígase $p \in [p_i, p_{i+1}]$ para formar $[p_i, p]$ y $[p, p_{i+1}]$.*
- ii) Dados dos segmentos consecutivos $[p_{i-1}, p_i]$ y $[p_i, p_{i+1}]$ tales que p_{i-1} , p_i y p_{i+1} son colineales, entonces $[p_{i-1}, p_i]$ y $[p_i, p_{i+1}]$ forman un sólo segmento $[p_{i-1}, p_{i+1}]$ determinado por p_{i-1} y p_{i+1} . Ésta operación es la inversa de i).*
- iii) Sea $p \in \mathbb{R}^3$. Si $p \notin K$ y para algún $p_i \in (p_1, p_2, \dots, p_n)$ el triángulo formado por (p_i, p, p_{i+1}) intersecta al nudo K sólo en el segmento $[p_i, p_{i+1}]$, entonces se puede remover el segmento $[p_i, p_{i+1}]$ y ser sustituido por los segmentos $[p_i, p]$ $[p, p_{i+1}]$.*
- iv) Dados dos segmentos consecutivos $[p_{i-1}, p_i]$ y $[p_i, p_{i+1}]$ tales que p_{i-1} , p_i y p_{i+1} no son colineales, entonces se puede tomar un punto $p \in [p_{i-1}, p_i]$ con $p \neq p_i$ y un punto $q \in [p_i, p_{i+1}]$ con $q \neq p_i$ de forma que los segmentos $[p, p_i]$ y $[p_i, q]$ se eliminan y se sustituyen por $[p, q]$. Ésta operación es la inversa de iii).*

A éstas operaciones se les llaman **movimientos elementales**.

1.2. Equivalencia de Nudos

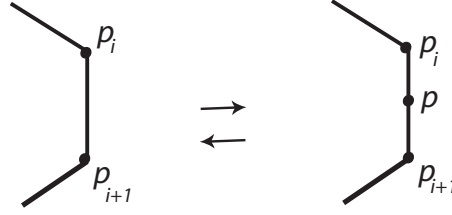


Figura 1.3: movimientos elementales

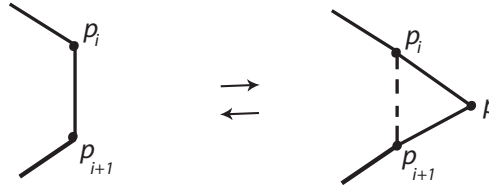


Figura 1.4: movimientos elementales

Definición 1.2.2 *Un nudo K es equivalente a un nudo K' , si existe una sucesión finita de deformaciones elementales tal que transforman K en K' .*

Ejemplo 1.2.3 *Si un nudo K en un plano limita una región convexa en el plano, entonces el nudo K es equivalente a un nudo con tres vértices.*

Una región convexa es aquella en la que si los puntos finales de un segmento están contenidos en la región, entonces se tiene que todo el segmento está contenido en la región. Se aplicará inducción sobre el número de vértices.

La prueba se realiza por inducción sobre el número de vértices n que tenga la región convexa. Para $n = 3$, ya se tiene el nudo de tres vértices,

Se supone cierto para $n = k$, se demostrará que es cierto para $n = k + 1$.

Sea $(p_1, p_2, \dots, p_{k+1})$ el conjunto ordenado de vértices del nudo K que limita una región convexa, se toma el triángulo formado por (p_1, p_{k+1}, p_k) , éste sólo intersecta a los segmentos $[p_{k+1}, p_1]$ y $[p_k, p_{k+1}]$, de forma que se puede realizar un movimiento elemental quitando el punto p_{k+1} , sustituyendo $[p_{k+1}, p_1]$ y $[p_k, p_{k+1}]$ por $[p_k, p_1]$, además, dado que p_k y p_1 están en la región convexa, entonces el segmento $[p_k, p_1]$ también lo está, es decir, también limita una región convexa, así se tiene un nudo con k vértices, luego el nudo K de $k + 1$ vértices es equivalente al nudo de tres vértices.

1. Nudos y Enlaces

La forma de asignar una orientación a un nudo K está dada por el orden del conjunto de vértices que lo determinan, puede ir en dirección ascendente o descendente con respecto a la numeración de los subíndices. De manera que sólo hay dos formas de asignar orientación salvo permutaciones cíclicas de el conjunto de vértices.

En la siguiente definición se considera a \mathbb{R}^3 como un espacio euclidiano.

Definición 1.2.4 *Dados dos nudos K y K' , se dice que son equivalentes con orientación si existe un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que preserva la orientación de \mathbb{R}^3 y que mapea K en K' .*

Una rotación sobre un punto fijo o sobre un eje y una traslación son ejemplos de homeomorfismos de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 , los cuales preservan la orientación de \mathbb{R}^3 , mientras que una reflexión o simetría dada por $\varphi(x, y, z) = (x, y, -z)$, invierte la orientación.

Ejemplos:

Sea una circunferencia fija, como se muestra en la figura 1.5, si se gira todo lo que está en el interior de la circunferencia con respecto a O dejando fijos la circunferencia y el exterior de ésta, se tiene que este mapeo es un homeomorfismo que preserva la orientación de \mathbb{R}^2 .

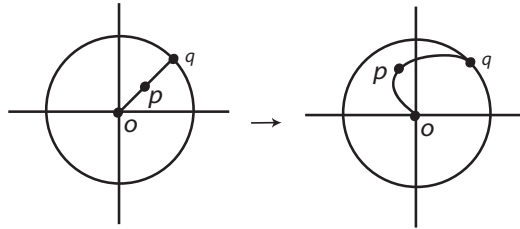


Figura 1.5: Giro con respecto al origen

Sean K y K' los nudos mostrados en la figura 1.6, se tiene que K y K' son equivalentes, ya que existe una rotación $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x, y, z) = (-x, -y, z)$.

Los dos nudos K y K' , los cuales se muestran en la figura 1.7, son equivalentes dado que se gira la parte que se encuentra dentro de la circunferencia 270° a la izquierda con respecto al eje x para obtener el otro.

1.3. Enlaces

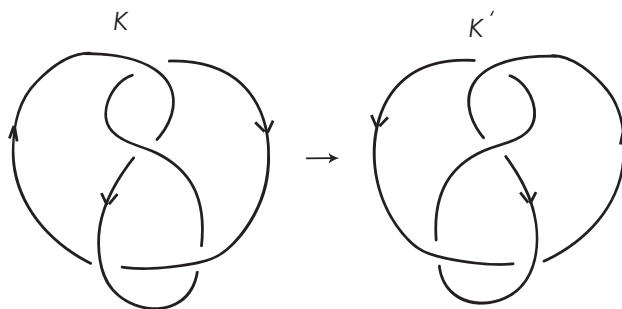


Figura 1.6: Rotación de 180° con respecto al eje z

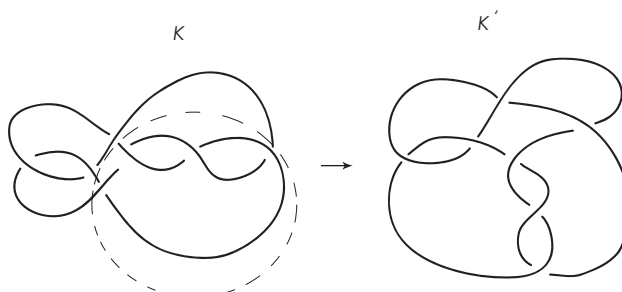


Figura 1.7: Giro con respecto al eje x

Observación 1.2.5 Sean K y K' dos nudos orientados. Si K y K' son equivalentes sin orientación, entonces no necesariamente se tiene que K y K' sean equivalentes con orientación.

1.3. Enlaces

Definición 1.3.1 Un **enlace** L es la unión finita disjunta de nudos. A cada nudo se le llama componente del enlace y será denotado por medio de sus componentes $L = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$.

En particular un nudo es un enlace con una sola componente. El **enlace trivial de m componentes** está determinado por la unión finita disjunta de nudos triviales.

1. Nudos y Enlaces

Definición 1.3.2 Un enlace $L = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$, se dice **orientado** si K_i está orientado para todo $i = 1, 2, \dots, m$.

Definición 1.3.3 Dos enlaces $L = \{K_1, \dots, K_m\}$ y $L' = \{K'_1, \dots, K'_l\}$ son equivalentes si cumplen las siguientes condiciones:

- a) $m = l$ (i.e. ambos enlaces tienen el mismo número de componentes).
- b) Existe una sucesión finita de deformaciones elementales tal que transforman L en L' , es decir, K_i es equivalente a K'_i , para todo i .

Nótese que al pasar de un enlace a otro por medio de deformaciones elementales los nudos de éstos no deben intersectarse.

Observación 1.3.4 Sean dos enlaces $L = \{K_1, \dots, K_m\}$ y $L' = \{K'_1, \dots, K'_l\}$ orientados, se dice que son equivalentes con orientación si cumplen las siguientes condiciones:

- a) $m = l$
- b) Existe una sucesión finita de deformaciones elementales con orientación tal que transforman L en L' , es decir K_i es equivalente con orientación a K'_i , para todo i .

Dado un enlace $L = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$, se tiene que para cada componente hay dos clases de equivalencia con respecto a la orientación, de manera que cada componente K_i con $i = 1, 2, \dots, m$, puede orientarse de dos formas, luego se tiene que a lo más hay 2^n enlaces orientados que determinan el mismo enlace sin orientación.

Ejemplo

Los enlaces que se muestran en la figura 1.8 son equivalentes.

De la componente K_2 se toma la parte encerrada en un círculo punteado y se aplica una rotación de 180° con respecto al eje y , luego se realiza un giro de 180° con respecto al eje z y luego a todo el enlace resultante se le aplica una rotación de 90° y así se obtiene el enlace L' .

1.4. Proyecciones y Diagramas de Nudos

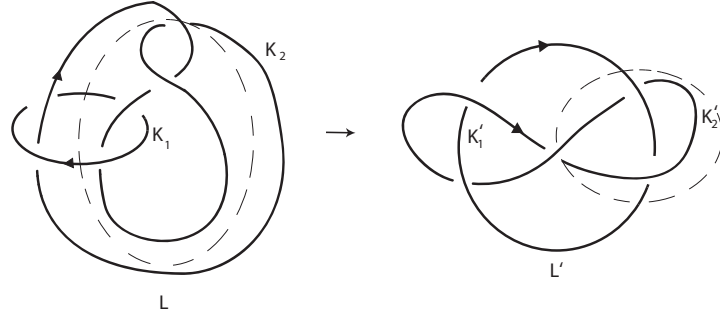


Figura 1.8: Enlace Whitehead

1.4. Proyecciones y Diagramas de Nudos

Una forma de estudiar a los nudos es por medio de sus proyecciones al plano. Nótese que no todas las proyecciones de un nudo al plano serán adecuadas, ya que habrá algunas en las que haya mucha pérdida de información y por lo tanto no nos serán de utilidad, así que se verán algunas condiciones necesarias para evitar este problema.

Definición 1.4.1 Dado un nudo K y $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una proyección de K , denotemos $p(K) = \hat{K}$ la imagen de la proyección, entonces se dice que p es una **proyección regular** si cumple lo siguiente:

- a) El número de intersecciones de \hat{K} es finito.
- b) Si q es un punto de intersección de \hat{K} , entonces $\{p^{-1}(q)\} \cap K$, tiene sólo dos puntos, es decir, no más de dos puntos pueden proyectarse al mismo punto en el plano.
- c) La proyección de un vértice no puede ser igual a la proyección de cualquier otro punto en el nudo.

Aún así hay cierta pérdida de información en las intersecciones, por lo que se hacen cortes antes de llegar a la intersección y después de ésta, de tal forma que se pueda identificar que partes pasan por arriba y cuáles por abajo, a esta proyección con estos determinados cambios se le llama **diagrama regular**. Se indicará por medio de una flecha la orientación del nudo.

1. Nudos y Enlaces

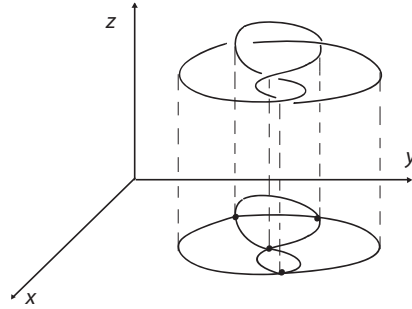


Figura 1.9: Proyección al plano

Como se puede ver en la figura 1.10 el diagrama regular de un nudo consta de arcos y puntos en los cuales hay una intersección, a éstos se les llaman **puntos del cruce**, se tiene que por cada cruce hay un arco que pasa por arriba.

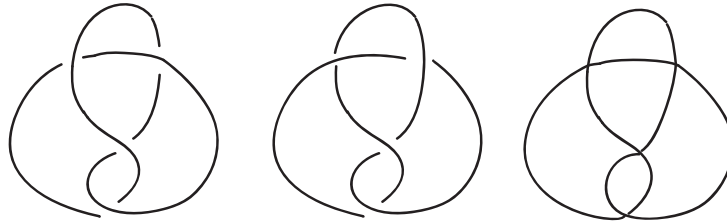


Figura 1.10: Diagramas regulares y Proyección al plano

Teorema 1.4.2 Sea K un nudo determinado por el conjunto de vértices (p_1, p_2, \dots, p_n) . Entonces se tiene lo siguiente:

- Para cada $\varepsilon > 0$ existe un nudo K' determinado por un conjunto de vértices (q_1, q_2, \dots, q_n) tal que $|q_i - p_i| < \varepsilon, \forall i = 1, 2, \dots, n$.
- K' es equivalente a K .
- La proyección de K' es regular.

Demostración:

Véase C. Livingstone, *Knot Theory*, The Carus Mathematical Monographs, número 24. \square

1.5. Simetrías de Nudos

Teorema 1.4.3 *Sea K un nudo determinado por el conjunto de vértices (p_1, p_2, \dots, p_n) el cual tiene una proyección regular. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que si K' es un nudo determinado por el conjunto de vértices (q_1, q_2, \dots, q_n) que cumple $|q_i - p_i| < \varepsilon$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, se tiene que K' es equivalente a K y tiene una proyección regular.*

Demostración:

Véase C. Livingstone, *Knot Theory*, The Carus Mathematical Monographs, número 24. \square

Teorema 1.4.4 *Sean K y K' dos nudos, donde K y K' tienen proyecciones regulares y diagramas regulares iguales, entonces K y K' son equivalentes.*

Demostración:

Véase C. Livingstone, *Knot Theory*, The Carus Mathematical Monographs, número 24. \square

Dado un diagrama regular D de un nudo K , si se puede recorrer D , empezando en un punto arbitrario de K , de forma que se pase por arriba y por abajo alternadamente en los cruces, entonces se dice que D es **alternante**.

1.5. Simetrías de Nudos

Sea L un nudo (o enlace) orientado, se denota por $-L$ al nudo (o enlace) con la orientación en sentido contrario a L .

Un nudo o enlace L orientado se dice **reversible** si L y $-L$ son equivalentes con orientación. Si L no está orientado entonces se dice reversible si para alguna orientación dada es reversible. De esta manera para cualquier nudo o enlace L hay dos clases de equivalencia con respecto a la orientación.

Sea $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función que refleja un punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ con respecto a un plano E a la cual se le llama reflexión.

Definición 1.5.1 *La **imagen especular** de un nudo (o enlace) L denotada por L^* es la imagen de L bajo una reflexión ψ .*

La imagen especular es independiente de la reflexión que se tome. La función $\psi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\psi_1(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ es la reflexión con respecto al origen. La función $\psi_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\psi_2(x, y, z) = (x, y, -z)$ es la reflexión con respecto al plano $z = 0$.

1. Nudos y Enlaces

Un nudo o enlace L se dice **+ amphicheiral** (nombre en inglés) si L es equivalente a L^* , L se dice **- amphicheiral** si L es equivalente a $-L^*$ y L se dice **completamente simétrico** si $L = -L = L^* = -L^*$.

Capítulo 2

Invariantes de Nudos

En este capítulo usaremos los diagramas de nudo para estudiar invariantes clásicos de nudos. Un invariante de enlaces es una regla que asigna a todo enlace un objeto algebraico, de modo que a enlaces equivalentes les asigna el mismo objeto, como la corolabilidad, el número mínimo de cruces, el número de puente, el número de desanudamiento, el número de enlace, el polinomio de Jones, el polinomio de Conway etc., de manera mas precisa:

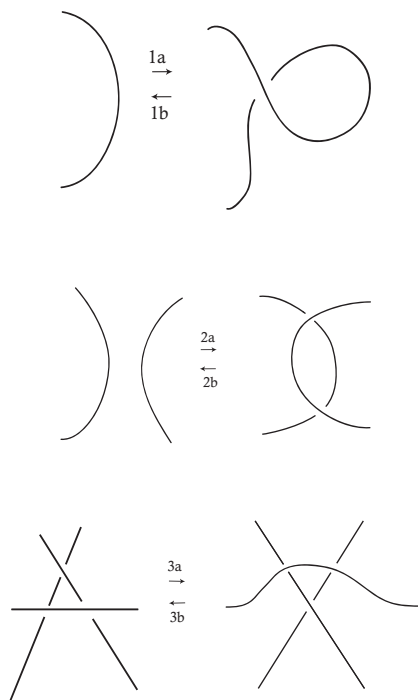
2.1. Movimientos de Reidemeister

Definición 2.1.1 *Sea X el conjunto de todos los enlaces y Y cualquier otro conjunto. Un **invariante de enlaces** con valores en Y es una función $f : X \rightarrow Y$ tal que para dos enlaces $L, L' \in X$ equivalentes, se tiene que $f(L) = f(L')$.*

En particular cuando f se restringe al conjunto X_0 de los enlaces de una sólo componente, se obtiene el concepto de invariante de nudos. De manera que un **invariante de nudos** es una función $f : X_0 \rightarrow Y$ tal que para dos nudos $K, K' \in X$ equivalentes, se tiene que $f(K) = f(K')$. Nótese que al deformar un nudo K por medio de movimientos elementales se produce una proyección diferente del nudo al plano y por tanto el diagrama regular de K se ve modificado también.

2.1. Movimientos de Reidemeister

Definición 2.1.2 Si D es un diagrama regular de nudo (o enlace), las siguientes operaciones se llaman **movimientos reidemeister**



Definición 2.1.3 Sean D, D' diagramas regulares de nudo (o enlace). Si al aplicar los movimientos reidemeister un número finito de veces al diagrama D se obtiene D' , entonces se dice que D y D' son **equivalentes** y se le denota por $D \approx D'$.

Teorema 2.1.4 Si D y D' son diagramas regulares de dos nudos K y K' respectivamente, entonces

$$K \approx K' \iff D \approx D'$$

Demostración:

Véase C. Livingstone, *Knot Theory*, The Carus Mathematical Monographs, número 24. \square

2. Invariantes de Nudos

Ejemplos:

En las figuras 2.1 y 2.2 se muestra el uso de movimientos Reidemeister.

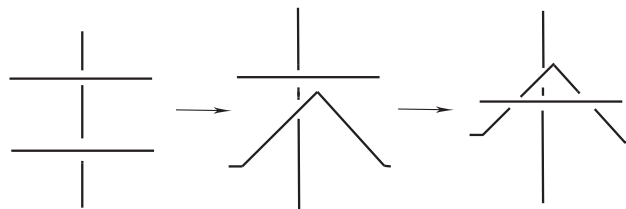


Figura 2.1:

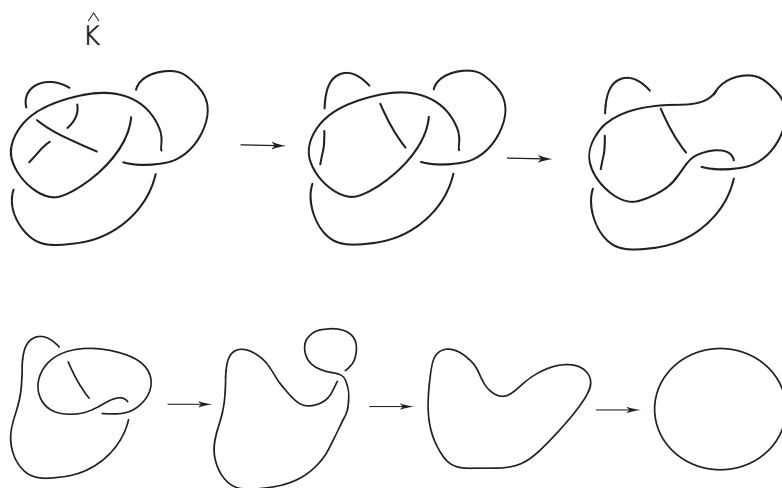


Figura 2.2: El diagrama regular \hat{K} es equivalente al diagrama regular del nudo trivial

2.2. Colorabilidad

Sea \hat{K} un diagrama regular con n cruces de un nudo K , se tiene que por cada cruce c_i de \hat{K} hay un arco A_i que pasa por arriba, entonces se tiene que \hat{K} tiene n arcos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$.

2.2. Colorabilidad

Definición 2.2.1 Sean \hat{K} un diagrama regular de un nudo K y tres colores diferentes, dígase violeta, verde y azul, a los cuales se les denotará por v , r y b . Se dice que \hat{K} es 3-coloreable si existe una función $f : \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\} \rightarrow \{v, r, b\}$ que asigna a cada arco un color, tal que:

- a) Al menos dos arcos deben tener asignados colores diferentes.
- b) Para todo cruce, o bien, los tres arcos correspondientes al cruce tienen el mismo color ó los tres arcos tienen diferente color.

Teorema 2.2.2 Si \hat{K} es un diagrama regular de un nudo K que es 3-coloreable, entonces todo diagrama regular de K es 3-coloreable.

Demostración :

Sea \hat{K} un diagrama regular de K 3-coloreable y sea \tilde{K} otro diagrama regular de K , entonces existe una sucesión de movimientos Reidemeister que transforman a \hat{K} en \tilde{K} , por tanto basta con demostrar que para cualquier movimiento Reidemeister que se aplique a \hat{K} , el diagrama regular obtenido sea 3-coloreable.

Sean r , v b , tres colores diferentes.

caso i) movimiento 1a

Sea A_i un arco de \hat{K} al cual se le asigna el color r como se muestra en la figura 2.3, al aplicar la operación 1a se obtienen A_l , A_j y A_k , donde $A_j = A_k$, luego a A_l y A_j se les asigna el color r de forma que el diagrama regular obtenido es 3-coloreable.

caso ii) movimiento 1b

Sean A_l , A_j y A_k arcos de \hat{K} , donde $A_j = A_k$, como se ven en la parte derecha de la figura 2.3, dado que \hat{K} es 3-coloreable se tiene que en el cruce, o bien A_l , A_j y A_k tienen asignados diferentes colores ó A_l , A_j y A_k tienen asignado el mismo color, pero $A_j = A_k$, de manera que a A_l y a A_j se les asigna el mismo color r , luego al aplicar el movimiento 1b se obtiene A_i , al cual se le asigna el color r , de forma que el diagrama regular obtenido es 3-coloreable.

2. Invariantes de Nudos

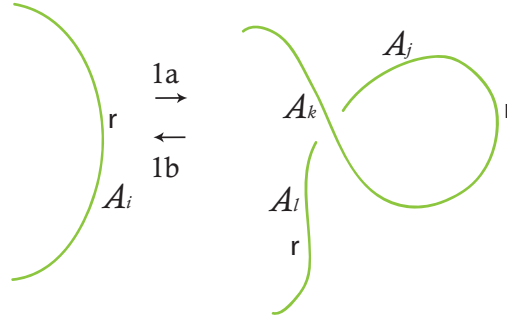


Figura 2.3: casos i) e ii)

caso iii) movimiento 2a

Sean A_i y A_k dos arcos de \hat{K} , considérese que A_i y A_k tienen el mismo color r como se muestra en la figura 2.4, al aplicar el movimiento 2a se obtienen A_l , A_j , A_m y A_k . Los arcos A_i y A_k son solo una parte del diagrama, si se cambiará su color entonces no se podría asegurar que el diagrama obtenido fué 3—coloreable, por tanto A_j y A_m conservan el color r , luego a A_l se le asigna el color r , de forma que el diagrama regular obtenido es 3—coloreable. Ahora considérese que A_i y A_k tienen diferente color b y v respectivamente, al aplicar el movimiento 2a, se obtienen A_l , A_j , A_m y A_k . Se les asigna a A_j y a A_m el color b , luego se le asigna a A_l el color r , de esta manera el diagrama obtenido es 3—colorable como se muestra en la figura 2.5 .

caso iv) movimiento 2b

Sean A_l , A_j , A_m y A_k arcos de \hat{K} , se le asigna a A_k un color arbitrario, dígame r , luego a A_j se le asigna el mismo color que A_k , entonces para que esa parte del diagrama sea 3—coloreable, a A_l se le asigna el color r y finalmente a A_m también se le asigna el color r de esta manera se tiene una parte del diagrama que es 3—coloreable, al aplicar el movimiento 2b se obtienen A_i y A_k , a los cuales se les asigna el color r , de forma que el diagrama obtenido es 3—coloreable como se muestra en la figura 2.4. Ahora se le asigna a A_k un color arbitrario, sea v , luego a A_j se le asigna un color diferente de el que tiene A_k , se toma b , entonces para que esa parte del diagrama sea 3—coloreable, a A_l se le asigna el color r , luego a A_m se le asigna el color b , nótese que A_j y A_m tienen asignado el mismo color, al aplicar el movimiento 2b, A_k , se queda con el mismo color r , mientras que A_i toma el color de A_j y A_m que es b , de esta manera se obtiene un diagrama 3—coloreable como se muestra en la figura 2.5

2.2. Colorabilidad

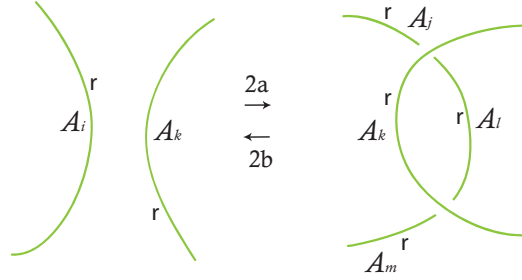


Figura 2.4: casos iii) e iv)

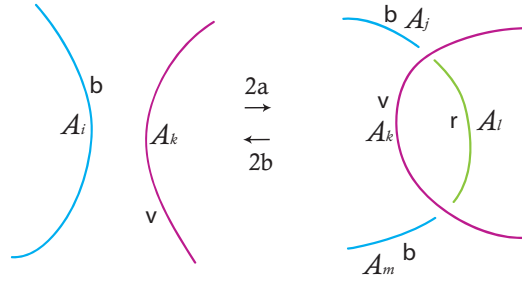


Figura 2.5: casos iii) e iv)

Existen varias formas de asignar los colores r , v y b a los arcos de \hat{K} de forma que sea 3-coloreable, para los casos v) y vi), los cuales se muestran en la parte izquierda de la figura 2.6, sin pérdida de generalidad se les asignará primero color a A_l , A_k y A_p y posteriormente a A_i , A_j y A_q .

caso v) movimiento $3a$

Sean A_i , A_j , A_k , A_l , A_p y A_q arcos de \hat{K} , en el caso trivial se les asigna el color r a A_l , A_k , A_p , A_i , A_j y A_q como se muestra en la figura 2.6, luego se aplica el movimiento $3a$, a los arcos obtenidos A'_i , A'_j , A'_k , A'_l , A'_p y A'_q se les asigna el color r , de forma que el diagrama obtenido es 3-coloreable.

Se les asigna el color r a A_k y a A_p y el color v a A_l como se muestra en la figura 2.7, se sigue que a A_j y A_q se les asigna el color b y a A_i se le asigna el color v , luego al aplicar el movimiento $3a$, a A'_i y A'_l se les asigna el color v , a A'_q se le asigna el color b , a A'_k el color r , mientras que A_p tiene asignado el color r , se sigue que a A'_j se le asigna el color r , así se tiene que el

2. Invariantes de Nudos

diagrama obtenido es 3-coloreable, si se tiene que A_p y A_l tienen asignado el mismo color r y A_k tiene asignado el color v o A_k y A_l tienen asignado el mismo color r y A_p tiene asignado el color v se demuestran análogamente.

Finalmente supóngase que a A_l se le asigna el color v , a A_k se le asigna r y a A_p se le asigna el color b , se sigue que A_i , A_j y A_q se les asigna color b , b y r respectivamente como se muestra en la figura 2.8, luego al aplicar el movimiento 3a, a A_p y A'_i se les asigna el color b , a A'_i y A'_k se les asigna el color r y a A'_l se le asigna el color v de lo anterior se sigue que a A'_j se le asigna el color v , de forma que el diagrama obtenido es 3-coloreable.

caso vi) movimiento 3b

Se demuestra de forma análoga al *caso v)*. □

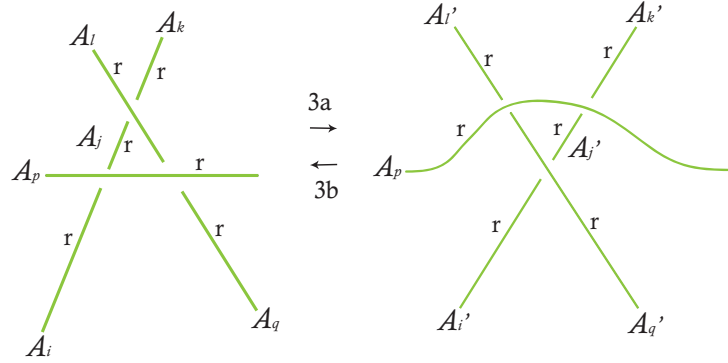


Figura 2.6: casos v) y vi)

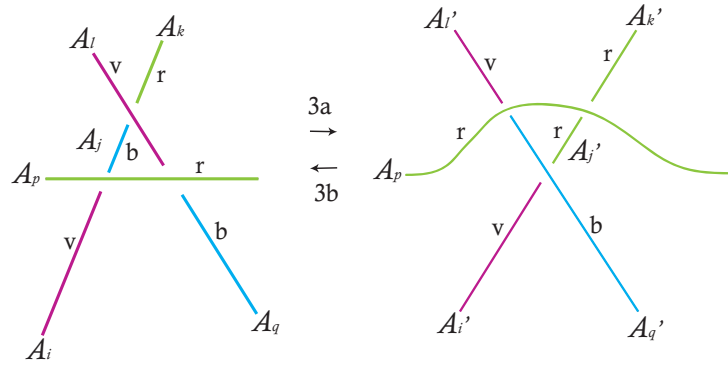


Figura 2.7: casos v) y vi)

2.2. Colorabilidad

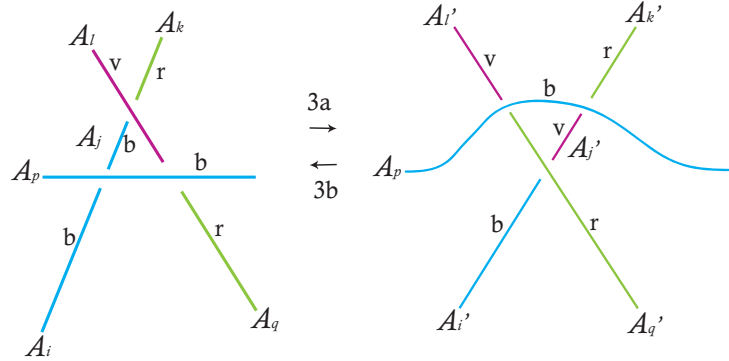


Figura 2.8: casos v) y vi)

La colorabilidad puede verse de otra forma, en vez de asignar a cada arco un color se le etiqueta con un número $i \in \{0, 1, 2\}$.

Definición 2.2.3 Sea \hat{K} un diagrama regular de un nudo K . Se dice que \hat{K} se **etiqueta mod 3** si cada arco de \hat{K} se etiqueta con un entero $i \in \{0, 1, 2\}$ tal que se cumple lo siguiente :

- a) Al menos dos arcos de \hat{K} deben tener asignados números diferentes.
- b) Para todo cruce, la relación $2x - y - z = 0 \pmod{3}$ se cumple, donde x es el número asignado al arco que cruza por arriba, mientras que y y z son los números de los otros dos arcos del cruce.

Teorema 2.2.4 Sea K un nudo, entonces los siguientes enunciados son equivalentes :

- a) \hat{K} un diagrama regular de K 3-coloreable.
- b) \hat{K} un diagrama regular de K se etiqueta mod 3.

Demostración :

Sean \hat{K} un diagrama regular de un nudo K que es 3-coloreable y tres colores diferentes denotados por r , v y b . A cada color se le asocia un y sólo un número entero $i \in \{0, 1, 2\}$ como sigue: sin pérdida de generalidad, a r , v y b se les asocia el 0, 1 y 2 respectivamente, de esta manera todos los arcos que tengan asignado el color r se les etiqueta con el 0, a todos los arcos que

2. Invariantes de Nudos

tengan asignado el color v se les etiqueta con el 1 y a todos los arcos que tengan asignado el color b se les etiqueta con el 2.

Dado que \hat{K} es 3-coloreable, se tiene que para todo cruce, o bien, los tres arcos correspondientes al cruce tienen el mismo color ó los tres arcos tienen diferente color.

Sean A_i , A_j y A_k los tres arcos del cruce, donde A_k es el arco que pasa por arriba.

caso i)

Supóngase que A_i , A_j y A_k tienen asignado el color r , se sigue que A_i , A_j y A_k tienen etiqueta 0, luego al evaluar en $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ se obtiene $2x - y - z = 2(0) - 0 - 0 = 0$, el cual es divisible por 3. Si A_i , A_j y A_k tienen asignado el color v , se sigue que A_i , A_j y A_k tienen etiqueta 1, luego al evaluar en $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$ se obtiene $2x - y - z = 2(1) - 1 - 1 = 0$, el cual es divisible por 3 y si A_i , A_j y A_k tienen asignado el color b , se sigue que A_i , A_j y A_k tienen etiqueta 2, luego al evaluar en $x = 2$, $y = 2$ y $z = 2$ se obtiene $2x - y - z = 2(2) - 2 - 2 = 0$, el cual es divisible por 3.

caso ii)

Supóngase que A_k tiene asignado el color r , mientras que A_i y A_j tienen asignados v y b respectivamente, de esta manera a A_k se le etiqueta con 0, a A_i se le etiqueta con 1 y a A_j se le etiqueta con 2, luego $2x - y - z = 2(0) - 2 - 1 = -3$, el cual es divisible por 3, por tanto se cumple la relación; supóngase que A_k tiene asignado el color v , mientras que A_i y A_j tienen asignados r y b respectivamente, de esta manera a A_k se le etiqueta con 1, a A_i se le etiqueta con 0 y a A_j se le etiqueta con 2, luego $2x - y - z = 2(1) - 0 - 2 = 0$, el cual es divisible por 3, por tanto se cumple la relación; supóngase que A_k tiene asignado el color b , mientras que A_i y A_j tienen asignados v y r respectivamente, de esta manera a A_k se le etiqueta con 2, a A_i se le etiqueta con 1 y a A_j se le etiqueta con 0, luego $2x - y - z = 2(2) - 0 - 1 = 3$, el cual es divisible por 3, por tanto se cumple la relación.

Además dado que al menos dos arcos deben tener asignados 2 colores diferentes, se sigue que al menos dos arcos de \hat{K} tienen asignados números diferentes.

Por lo tanto \hat{K} se puede etiquetar *mod* 3.

Ahora supóngase que \hat{K} se etiqueta *mod* 3. En las siguientes tablas se muestran todas las formas posibles de etiquetar a los arcos A_i , A_j y A_k del

2.2. Colorabilidad

cruce, sin embargo sólo las que están marcadas con asterisco son las que cumplen con la relación $2x - y - z = 0(mod3)$.

x	y	z	$2x - y - z$	
0	0	0	0	★
0	0	1	-1	
0	0	2	-2	
0	1	0	-1	
0	1	1	-2	
0	1	2	-3	★
0	2	0	-2	
0	2	1	-3	★
0	2	2	-4	
1	0	0	2	
1	0	1	1	
1	0	2	0	★
1	1	0	1	
1	1	1	0	★

x	y	z	$2x - y - z$	
1	1	2	-1	
1	2	0	0	★
1	2	1	-1	
1	2	2	-2	
2	0	0	4	
2	0	1	3	★
2	0	2	2	
2	1	0	3	★
2	1	1	2	
2	1	2	1	
2	2	0	2	
2	2	1	1	
2	2	2	0	★

Sean tres colores diferentes denotados por r , v y b , a cada entero $i \in \{0, 1, 2\}$ se le asocia un y sólo un color, sin pérdida de generalidad a 0, 1 y 2 se les asocia el color r , v y b , de esta manera a todos los arcos que tengan etiqueta 0 se les asigna el color r , a todos los arcos que tengan etiqueta 1 se les asigna el color v y a todos los arcos que tengan etiqueta 2 se les asigna el color b .

Nótese que los casos en los cuales se cumple la relación $2x - y - z = 0(mod3)$, o bien los tres arcos correspondientes al cruce tienen la misma etiqueta ó los tres arcos tienen diferente etiqueta, se sigue que, o bien los tres arcos correspondientes al cruce tienen el mismo color ó los tres arcos tienen diferente color. Además se tiene que al menos dos arcos tienen asignados números diferentes, se sigue que al menos dos arcos tienen asignados colores diferentes.

Por lo tanto \hat{K} 3-coloreable. □

2. Invariantes de Nudos

2.3. El Número de Cruce

Sea $c(\hat{K})$ el número de cruces de un diagrama regular \hat{K} de un nudo K .

Definición 2.3.1 *El **número de cruce** $c(K)$ de un nudo K se define como sigue:*

$$c(K) = \min\{c(\hat{K}) : \hat{K} \text{ es un diagrama regular de } K\}.$$

Sea K un nudo y \hat{K} un diagrama regular de K . Si $c(K)$ es igual al número de cruces de \hat{K} , entonces \hat{K} es llamado el *diagrama regular mínimo*.

Teorema 2.3.2 *El número de cruce $c(K)$ de un nudo K es una invariante de nudo.*

Demostración

Sea K un nudo y D_m un diagrama regular mínimo de K . Supóngase que K' es un nudo equivalente a K y D'_m es un diagrama regular mínimo de K' , por el teorema 3.1.3 se tiene que D'_m es un diagrama regular de K se sigue que $c(D_m) \leq c(D'_m)$, además D_m es un diagrama regular de K' , se sigue que $c(D'_m) \leq c(D_m)$, por lo tanto se tiene que $c(D_m) = c(D'_m)$. Así $c(D_m)$ es el mínimo número de cruces de todos los nudos equivalentes a K , de esta manera $c(K)$ es una invariante de nudo. \square

2.4. El Número de Puente

Dado \hat{K} un diagrama regular de un nudo K se define por **punto** a un arco de \hat{K} tal que pasa sólo por arriba en al menos un cruce de \hat{K} , un **punto maximal** es un punto tal que ya no existe otro cruce de \hat{K} por el cual el punto pase por arriba, es decir los puntos finales del punto maximal están antes de que el arco pase por debajo de algún cruce.

2.4. El Número de Puente

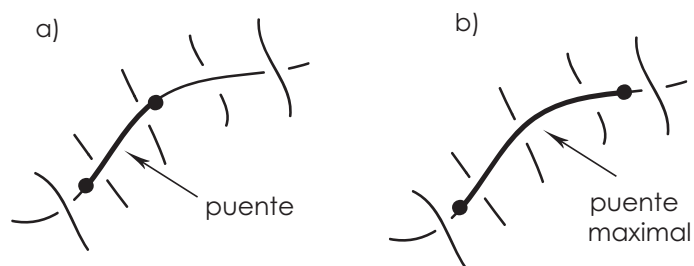


Figura 2.9: a)puente, b) puente maximal

El número de puentes $br(\hat{K})$ de un diagrama regular \hat{K} de un nudo K es el número de puentes maximales de \hat{K} .

Definición 2.4.1 *El **número de puente** $br(K)$ de un nudo K se define como sigue:*

$$br(K) = \min\{br(\hat{K}) : \hat{K} \text{ es un diagrama regular de } K\}.$$

Por convención el número de puente del nudo trivial es 1. En la figura 2.10 se muestran dos diagramas regulares del nudo trébol el cual tiene número de puente igual a 2.

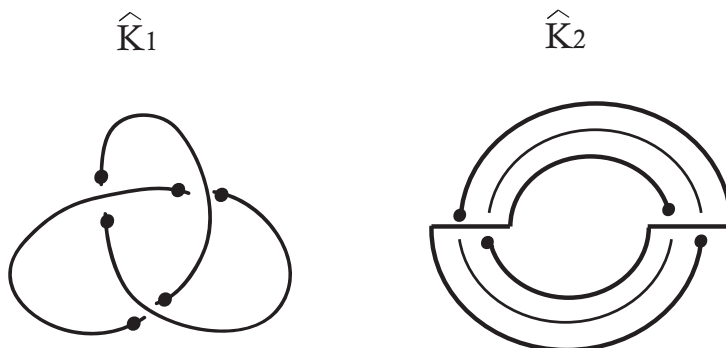


Figura 2.10: $br(\hat{K}_1) = 3$, $br(\hat{K}_2) = 2$

2. Invariantes de Nudos

Un nudo o enlace K puede ser encajado en el xy -plano excepto por algún número finito de puentes (este número está determinado por el número de puente de un nudo K), los cuales deben ser curvas simples de tal manera que su proyección en el plano sean líneas disjuntas a pares, a este encaje se le llama **presentación de puente**.

Teorema 2.4.2 *El número de puente $br(K)$ es una invariante de nudo.*

Demostración:

Véase K. Murasugi, *Knot Theory and its Applications*, Birkhäuser, 1996. \square

Definición 2.4.3 *El writhe (retorcimiento) de un diagrama regular \hat{K} de un nudo K , denotado por $W_r(\hat{K})$, es la suma de los signos de todos los cruces de \hat{K} .*

Esta definición será de utilidad en el capítulo 4.

2.5. El Número de Desanudamiento

Sea \hat{K} un diagrama regular de un nudo K , en un cruce de \hat{K} se intercambia el segmento que pasa por abajo del cruce por el segmento que pasa por arriba del cruce, como se muestra en la figura 2.11, de esta manera el diagrama resultante ya no es un diagrama del nudo K .

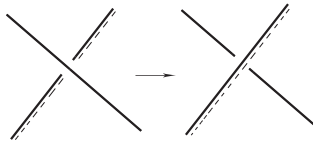


Figura 2.11: intercambio en el cruce

Proposición 2.5.1 *Un diagrama regular \hat{K} de un nudo K se puede transformar en el diagrama regular del nudo trivial, por medio del intercambio del segmento que pasa por abajo por el segmento que pasa por arriba de algunos o todos sus cruces.*

Demostración:

Véase K. Murasugi, *Knot Theory and its Applications*, Birkhäuser, 1996. \square

2.6. El Número de Enlace

Al número mínimo de intercambios necesarios para transformar un diagrama regular \hat{K} de un nudo K en un diagrama regular del nudo trivial, se le denota por $u(\hat{K})$.

Definición 2.5.2 *El número de desanudamiento $u(K)$ de un nudo K se define como sigue:*

$$u(K) = \min\{u(\hat{K}) : \hat{K} \text{ es un diagrama regular de } K\}.$$

Teorema 2.5.3 *El número de desanudamiento $u(K)$ es una invariante de nudo.*

Demostración:

Véase K. Murasugi, *Knot Theory and its Applications*, Birkhäuser, 1996. \square

2.6. El Número de Enlace

Sean L un enlace de dos componentes K_1 y K_2 orientados y \hat{L} un diagrama regular de L con \hat{K}_1 y \hat{K}_2 los diagramas regulares de K_1 y K_2 respectivamente. Para cada cruce $c \in \hat{K}_1 \cap \hat{K}_2$ se define el **signo** de éste como sigue:

$$\text{sign}(c) = \begin{cases} +1, & \text{si el cruce } c \text{ es positivo;} \\ -1, & \text{si el cruce } c \text{ es negativo.} \end{cases}$$

Un cruce positivo es aquel que siguiendo la dirección del arco que cruza por arriba se tiene que el arco que cruza por debajo va de derecha a izquierda, mientras que un cruce negativo es aquel que siguiendo la dirección del arco que cruza por arriba se tiene que el arco que cruza por debajo va de izquierda a derecha.

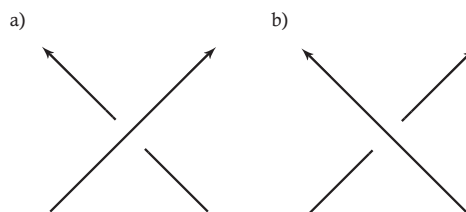


Figura 2.12: a) cruce positivo, b) cruce negativo

2. Invariantes de Nudos

Definición 2.6.1 Sean L un enlace de dos componentes K_1 y K_2 orientados y \hat{L} un diagrama regular de L con \hat{K}_1 y \hat{K}_2 los diagramas regulares de K_1 y K_2 respectivamente. El **número de enlace** $lk(K_1, K_2)$ se define como sigue:

$$lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \sum_{c \in \hat{K}_1 \cap \hat{K}_2} sign(c)$$

Teorema 2.6.2 El número de enlace $lk(K_1, K_2)$ de un enlace L de dos componentes K_1 y K_2 orientado está bien definido y es una invariante de enlace.

Demostración:

Basta con probar que es una invariante con respecto a los movimientos Reidemeister.

El cálculo del número de enlace no involucra cruces de una componente consigo misma, de forma que los movimientos Reidemeister tipo 1a y 1b no afectan su valor.

Si se tienen dos arcos de componentes distintas sin cruzarse como en la figura 2.5, al aplicar los movimientos Reidemeister 2a o 2b, se introducen o se remueven dos cruces de signos opuestos, por lo que el número de enlace tampoco se afecta.

Si se tienen cruces de componentes distintas como se muestra en la figura 2.7, al aplicar los movimientos Reidemeister 3a o 3b sólo se cambian las posiciones de los cruces, por tanto no se altera el número de enlace. \square

2.7. El Polinomio de Alexander

El polinomio de Alexander, inventado en 1928 por J. Alexander, fue el primer polinomio asignado a un nudo (o enlace) orientado. El método original de J. Alexander se basaba en las regiones que tenían como frontera a los arcos de un diagrama regular, después Reidemeister se enfocó sólo en considerar a los arcos de un diagrama regular. Una de las formas para calcular el polinomio de Alexander es la siguiente:

2.7. El Polinomio de Alexander

Sea \hat{K} un diagrama regular orientado de un nudo K . Supóngase que \hat{K} tiene n cruces y que los arcos y cruces de \hat{K} están numerados del 1 a n .

Se construye una matriz M de $n \times n$ con entradas en el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[t]$ donde las entradas de la l -ésima fila ($l = 1, 2, \dots, n$) están determinadas por el l -ésimo cruce. A saber:

Si el cruce l es positivo, con i el arco que pasa por arriba y j, k los arcos que cruzan por debajo, como se muestra en la figura 2.13 inciso a), entonces

$$M_{l,i} = 1 - t$$

$$M_{l,j} = -1$$

$$M_{l,k} = t$$

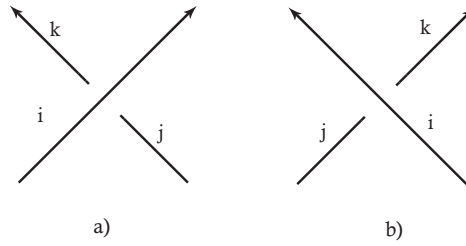


Figura 2.13: cruce positivo y negativo

Si el cruce l es negativo, con i el arco que pasa por arriba y j, k los arcos que cruzan por debajo, como se muestra en la figura 2.13 inciso b), entonces

$$M_{l,i} = 1 - t$$

$$M_{l,j} = t$$

$$M_{l,k} = -1$$

Si $j = k$, entonces se suman los valores de las columnas j y k , de manera que $M_{l,j} = M_{l,k} = t - 1$. Todas las demás entradas de la l -ésima fila son cero.

De la matriz anterior M , se eliminan la última fila y la última columna, para obtener una matriz de $(n-1) \times (n-1)$ M_A conocida como la matriz de Alexander.

2. Invariantes de Nudos

Definición 2.7.1 Si K es un nudo y \hat{K} un diagrama regular orientado de K , se define el **polinomio de Alexander** como:

$$A_k(t) = \det(M_A) \in \mathbb{Z}[t]$$

Sorprendentemente, aún cuando la forma de enumerar los arcos y los cruces es arbitraria, el polinomio de Alexander es una invariante de nudos.

Teorema 2.7.2 El polinomio de Alexander de un nudo K es una invariante de nudo, más aún, el polinomio de Alexander obtenido de dos diagramas regulares de K difieren por una potencia de t , $\pm t^k$, para algún entero k .

Demostración:

Véase C. Livingston, *Knot Theory*, The Carus Mathematical Monographs, volumen 24. \square

Teorema 2.7.3 Sea K un nudo, entonces $A_K(t)$ es un polinomio de Laurent simétrico, es decir,

$$A_K(t) = a_{-n}t^{-n} + a_{-(n-1)}t^{-(n-1)} + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + a_nt^n$$

donde

$$a_{-n} = a_n, a_{-(n-1)} = a_{n-1}, \dots, a_{-1} = a_1$$

Demostración:

Véase K. Murasugi, *Knot Theory and its Applications*, Birkhäuser, 1996. \square
par

El polinomio de Alexander obtenido de dos diagramas regulares \hat{K}_1, \hat{K}_2 de un nudo K cumplen $A_{\hat{K}_1}(t) = \pm t^k A_{\hat{K}_2}(t)$, más aún, se tiene que el grado del polinomio de Alexander es un número par y puede representarse como en el Teorema 2.7.3.

2.7. El Polinomio de Alexander

Ejemplo 2.7.4 *Se obtendrá el polinomio de Alexander del nudo 4_1*

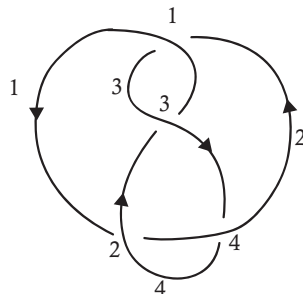


Figura 2.14: Nudo 4_1

El cruce 1 es un cruce positivo, donde $i = 1$ $j = 2$ y $k = 3$.
 El cruce 2 es un cruce negativo, donde $i = 4$ $j = 1$ y $k = 2$.
 El cruce 3 es un cruce positivo, donde $i = 3$ $j = 4$ y $k = 1$.
 El cruce 4 es un cruce negativo, donde $i = 2$ $j = 3$ y $k = 4$.

La matriz M de 4×4 es:

$$M = \begin{pmatrix} 1-t & -1 & t & 0 \\ t & -1 & 0 & 1-t \\ t & 0 & 1-t & -1 \\ 0 & 1-t & t & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego se elimina la última fila y la última columna obteniendo así a M_A

$$M_A = \begin{pmatrix} 1-t & -1 & t \\ t & -1 & 0 \\ t & 0 & 1-t \end{pmatrix}.$$

2. Invariantes de Nudos

El polinomio de Alexander del nudo 4_1 es:

$$\begin{aligned}
 A_{4_1}(t) &= \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & t \\ t & -1 & 0 \\ t & 0 & 1-t \end{pmatrix} \\
 &= (1-t)[(-1)(1-t) - 0] \\
 &\quad -(-1)[t(1-t) - 0] + t[0 + t] \\
 &= -t^2 + 3t - 1 \\
 &= -t + 3 - t^{-1} \text{ (representación en forma de polinomio de Laurent).}
 \end{aligned}$$

2.8. El Polinomio de Conway

Considérese \hat{K} un diagrama regular de un nudo (o enlace) K , se toma un cruce c_i de \hat{K} y una vecindad de este, sean \hat{K}_+ , \hat{K}_- y \hat{K}_0 diagramas regulares tales que son iguales a \hat{K} excepto en la vecindad de c_i .

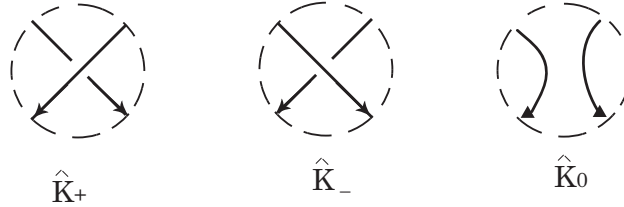


Figura 2.15: Vecindad del cruce

Esta diferencia se muestra en la figura 2.15, en \hat{K}_+ , c_i es positivo, en \hat{K}_- , c_i es negativo y en \hat{K}_0 , c_i se elimina de la siguiente forma: la vecindad que tiene como centro a c_i intersecta a \hat{K} en cuatro puntos, de manera que se borra el interior de dicha vecindad excepto los cuatro puntos de intersección, luego estos cuatro puntos se unen tal que no se vuelva a crear un cruce y además que al unirlos se preserve la orientación de \hat{K} , como lo muestra la figura 2.16. Siendo K_+ , K_- y K_0 los nudos de \hat{K}_+ , \hat{K}_- y \hat{K}_0 respectivamente.

2.8. El Polinomio de Conway

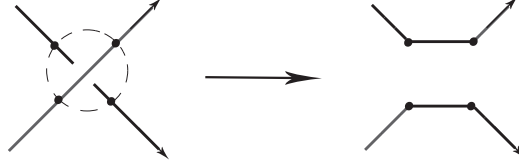


Figura 2.16: Se elimina el cruce

Dado \hat{K}_+ o \hat{K}_- se puede cambiar el uno en el otro reemplazando la vecindad de c_i por otra, de la misma forma \hat{K}_+ o \hat{K}_- se puede cambiar a \hat{K}_0 , a estos cambios se les llama **operaciones de skein**.

A los diagramas regulares \hat{K}_+ , \hat{K}_- y \hat{K}_0 se les llama **diagramas de skein**.

Definición 2.8.1 Sea K un nudo (o enlace) orientado. El **polinomio de Conway** denotado por $\nabla_K(z)$, está definido por los siguientes axiomas:

- a) *Invarianza* : Si K y K' son nudos (o enlaces) equivalentes, entonces $\nabla_K(z) = \nabla_{K'}(z)$.
- b) *Normalización*: Si K es el nudo trivial, entonces $\nabla_K(z) = 1$.
- c) *Relación de Skein*: Dado \hat{K} un diagrama regular de K , se cumple que $\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z\nabla_{K_0}(z)$.

Teorema 2.8.2 Si $L = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ es un enlace trivial, con $m \geq 2$, entonces $\nabla_L(z) = 0$.

Demostración:

Sea $L = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ un enlace trivial, con $m \geq 2$.

La relación de skein correspondiente a la figura 2.17, es

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z)$$

2. Invariantes de Nudos

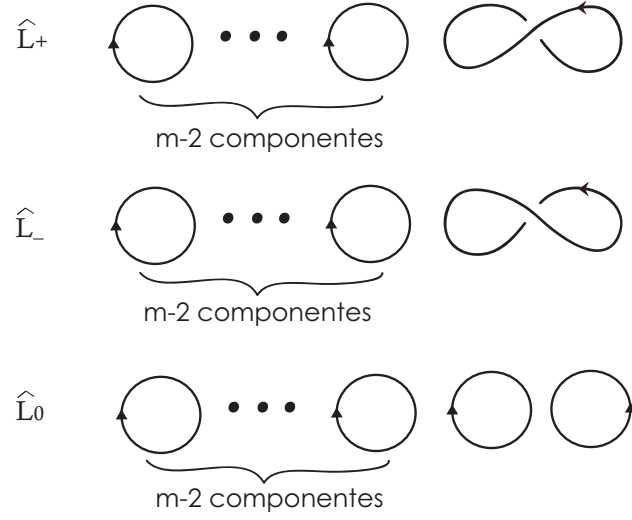


Figura 2.17:

Dado que L_+ y L_- son enlaces triviales de $(m-1)$ -componentes equivalentes, entonces $\nabla_{L_+}(z) = \nabla_{L_-}(z)$, por lo tanto $\nabla_{L_0}(z) = 0$. \square

Teorema 2.8.3 Si K es un nudo, entonces

$$A_K(t) = \nabla_K(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}).$$

Es decir, si se reemplaza z por $\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$ en el polinomio de Conway se obtiene el polinomio de Alexander.

Demostración:

Véase K. Murasugi, *Knot Theory and its Applications*, Birkhäuser, 1996. \square

Se reescribe la relación de skein de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\nabla_{K_+}(z) &= \nabla_{K_-}(z) + z\nabla_{K_0}(z) \\ \nabla_{K_-}(z) &= \nabla_{K_+}(z) - z\nabla_{K_0}(z)\end{aligned}$$

2.8. El Polinomio de Conway

Forma recursiva de calcular el polinomio de Conway

Sean K un nudo (o enlace) orientado y \hat{K} un diagrama regular de K .

Se toma un cruce c_i de \hat{K} , luego se identifica si el cruce es positivo o negativo, de forma que se tienen dos posibles resultados. A saber $\hat{K} = \hat{K}_+$ o $\hat{K} = \hat{K}_-$.

Si $\hat{K} = \hat{K}_+$, entonces se aplican las operaciones de skein a $\hat{K} = \hat{K}_+$ para obtener \hat{K}_- y \hat{K}_0 .

Si $\hat{K} = \hat{K}_-$ entonces se aplican las operaciones de skein a $\hat{K} = \hat{K}_-$ para obtener \hat{K}_+ y \hat{K}_0 .

Sin pérdida de generalidad supóngase que c_i es positivo, entonces $\hat{K} = \hat{K}_+$, luego debajo de \hat{K} se dibujan \hat{K}_- y \hat{K}_0 y se conectan por medio de una línea a \hat{K}_+ .

De acuerdo a la relación de skein reescrita arriba, a la línea que conecta \hat{K}_+ con \hat{K}_- se le asigna $+1$ mientras que a la línea que conecta \hat{K}_+ con \hat{K}_0 se le asigna $+z$, si \hat{K}_- o \hat{K}_0 son diagramas equivalentes al nudo trivial o al enlace trivial, entonces esa rama del nivel está terminada, de lo contrario se escoje una de las ramas del nivel sin terminar, luego se toma un cruce c_j del diagrama que se haya escogido (*no importa que rama se escoja al final todas las ramas se deben continuar hasta que se llegue a el nudo trivial o al enlace trivial*) y se identifica si c_j es positivo o negativo luego se realiza el mismo proceso descrito arriba para \hat{K}_+ , el proceso es análogo cuando $\hat{K} = \hat{K}_-$ sólo se debe utilizar la igualdad reescrita de la relación de skein.

El polinomio de Conway se obtiene como la suma del producto de los coeficientes (asignados a las líneas conectoras) por el respectivo polinomio de Conway del nudo (o enlace) empezando desde el último nivel.

2. Invariantes de Nudos

Ejemplos:

Se obtendrá el polinomio de Conway y a partir de este el polinomio de Alexander del nudo trébol.

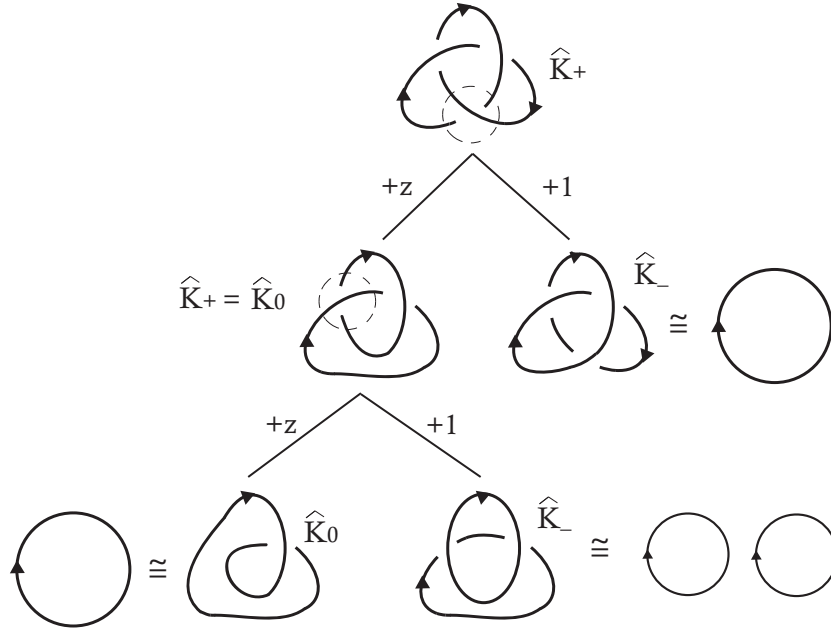


Figura 2.18: Esquema del ejemplo

Nótese que en la figura 2.18, \hat{K}_+ del primer nivel no es igual a \hat{K}_+ del segundo nivel, sin embargo se manejó la misma notación ya que de lo contrario se volvería engorrosa.

Luego, el polinomio de Conway asociado al trébol es,

$$\nabla_{3_2}(z) = 1 \cdot 1 + z(1 \cdot 0 + 1 \cdot z) = 1 + z^2.$$

Así el polinomio de Alexander asociado al trébol es,

$$A_{3_2}(t) = \nabla_{3_2}(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}) = t - 1 + t^{-1}.$$

2.8. El Polinomio de Conway

Ejemplo 2.8.4 Se obtendrá el polinomio de Conway y a partir de éste el polinomio de Alexander del nudo 6_2 .

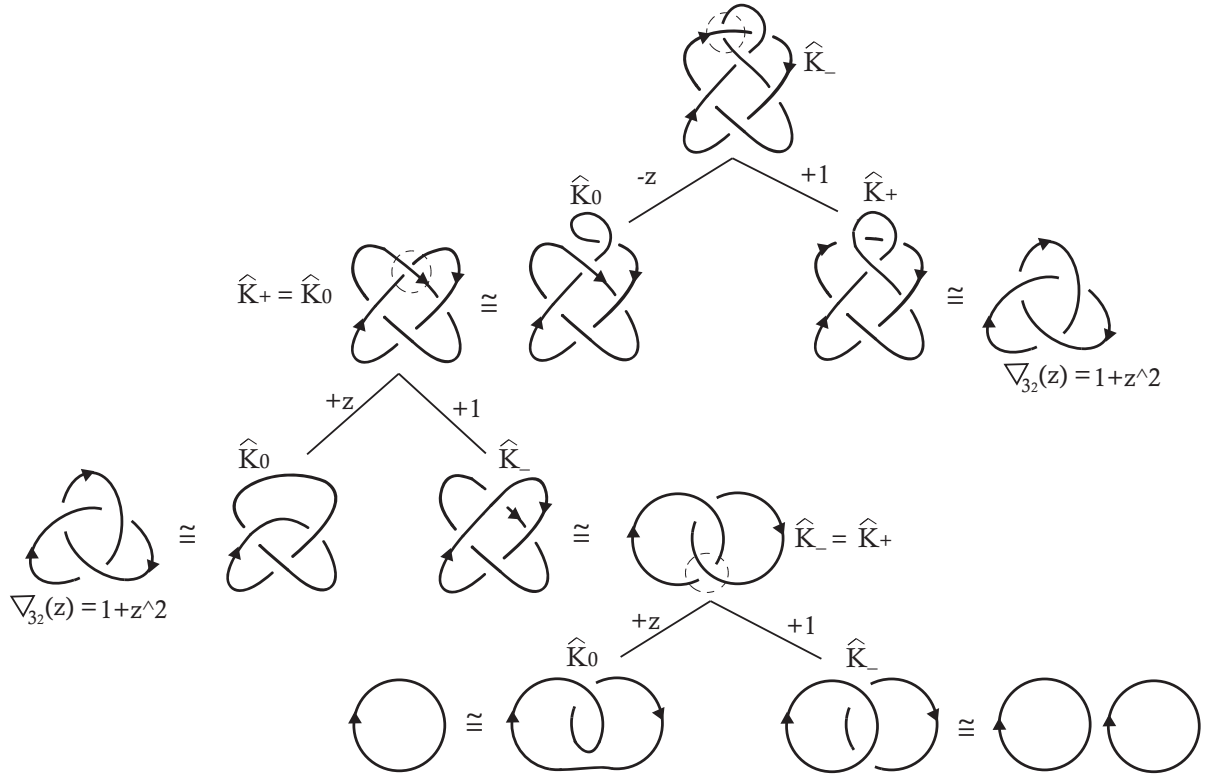


Figura 2.19: Esquema del ejemplo

Luego, el polinomio de Conway asociado al nudo 6_2 es,

$$\begin{aligned}
 \nabla_{6_2}(z) &= 1(1 + z^2) + (-z)[z(1 + z^2) + 1(1 \cdot z + 1 \cdot 0)] \\
 &= 1 + z^2 - z[z + z^3 + z] \\
 &= 1 + z^2 - z^2 - z^4 - z^2 \\
 &= 1 - z^2 - z^4
 \end{aligned}$$

2. Invariantes de Nudos

Luego el polinomio de Alexander asociado al nudo 6_2 es,

$$\begin{aligned} A_{6_2}(t) &= \nabla_{6_2}\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \\ &= 1 - \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 - \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^4 \\ &= -t^2 + 3t - 3 + 3t^{-1} - t^{-2}. \end{aligned}$$

2.9. El Polinomio de Jones

Definición 2.9.1 Sean K un nudo o un enlace orientado y \hat{K} un diagrama regular de K , el polinomio de Jones $V_K(t)$ está definido en base a los siguientes axiomas:

- a) Si K es el nudo trivial, entonces $V_K(t) = 1$.
- b) Sean \hat{K}_+ , \hat{K}_- y \hat{K}_0 diagramas de skein, luego la siguiente relación de Skein se cumple:

$$\frac{1}{t}V_{\hat{K}_+}(t) - tV_{\hat{K}_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{\hat{K}_0}(t).$$

El algoritmo para calcular el polinomio de Jones es análogo al que se utiliza para obtener el polinomio de Conway. Así la relación de skein de la definición anterior se reescribe de la siguiente manera:

$$V_{\hat{K}_+}(t) = t^2V_{\hat{K}_-}(t) + tzV_{\hat{K}_0}(t)$$

$$V_{\hat{K}_-}(t) = t^2V_{\hat{K}_+}(t) - t^{-1}zV_{\hat{K}_0}(t),$$

donde $z = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$

2.9. El Polinomio de Jones

Proposición 2.9.2 *Sea O_μ el enlace trivial con μ componentes, entonces*

$$V_{O_\mu}(t) = (-1)^{\mu-1} \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\mu-1}. \quad (\star)$$

Demostración:

Se probará por inducción sobre μ .

Para $\mu = 1$, se tiene que O_1 es igual al nudo trivial y

$$\begin{aligned} V_{O_1}(t) &= (-1)^{1-1} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{1-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

De manera que (\star) cumple con el axioma 1 de la definición 2.9.1 y por tanto se cumple para $\mu = 1$.

Para $\mu = 2$, se tiene que

$$\begin{aligned} V_{O_2}(t) &= (-1)^{2-1} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{2-1} \\ &= (-1)^1 \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^1 \\ &= - \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

donde O_2 es igual al enlace trivial de dos componentes. Ahora se calculará el polinomio de Jones por el método descrito arriba de O_2 .

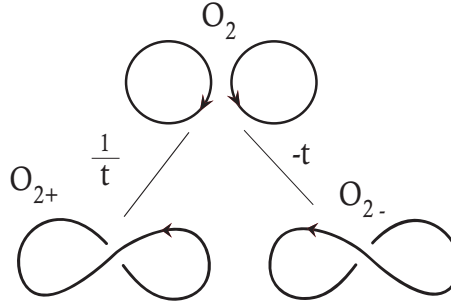


Figura 2.20: Esquema del enlace trivial de dos componentes

2. Invariantes de Nudos

De la figura 2.20, se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{O_2}(t) &= \frac{1}{t} V_{O_{2+}}(t) - t V_{O_{2-}}(t) \\ &= \frac{1}{t}(1) - t(1) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} V_{O_2}(t) &= \frac{\frac{1}{t}(1) - t(1)}{\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)} \\ &= -\left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

De forma que (\star) se cumple para $\mu = 2$.

Ahora supóngase que (\star) se cumple para $\mu = k - 1$ y se demostrará que se cumple para $\mu = k$.

$$V_{O_{\mu-1}}(t) = (-1)^{k-2} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{k-2}.$$

Considerando el esquema de la figura 2.17, se tiene que $\hat{L}_+ \cong \hat{L}_- \cong O_{\mu-1}$ y $\hat{L}_0 \cong O_\mu$, luego de la hipótesis de inducción y de (\star) se obtiene,

$$\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{O_\mu}(t) = \frac{1}{t} (-1)^{k-2} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{k-2} - t (-1)^{k-2} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{k-2}$$

$$\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{O_\mu}(t) = (-1)^{k-2} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{k-2} \left(\frac{1}{t} - t\right)$$

$$\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{O_\mu}(t) = (-1)^{k-1} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{k-2} \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

$$V_{O_\mu}(t) = (-1)^{k-1} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{k-1}$$

Por tanto se cumple la igualdad (\star) . □

2.9. El Polinomio de Jones

Ejemplo

Se obtendrá el polinomio de Jones del enlace Whitehead.

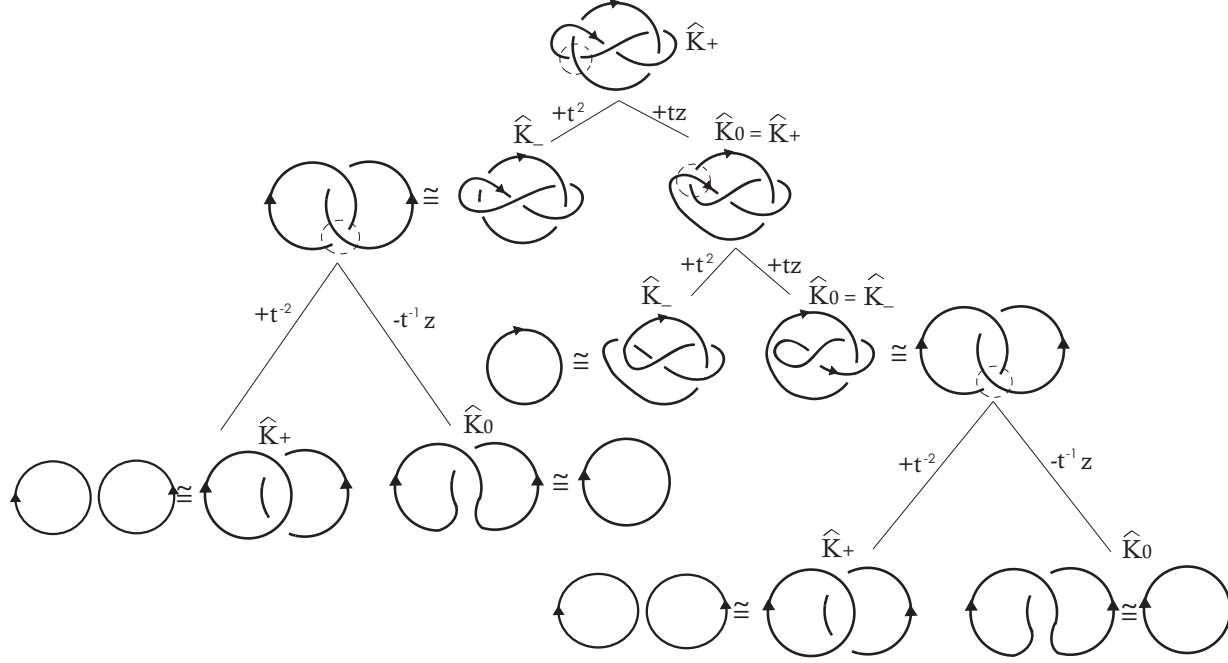


Figura 2.21: Esquema del ejemplo

$$\begin{aligned}
 V_W(t) &= (t^2)(t^{-2})V_{O_2}(t) + (t^2)(-t^{-1})\left(\frac{t-1}{\sqrt{t}}\right)(1) + (t)\left(\frac{t-1}{\sqrt{t}}\right)(t^2)(1) + \\
 &\quad (t^2)\left(\frac{t-1}{\sqrt{t}}\right)^2(t^{-2})V_{O_2}(t) + (t^2)\left(\frac{t-1}{\sqrt{t}}\right)^2(-t^{-1})\left(\frac{t-1}{\sqrt{t}}\right)(1) \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)(t^4 - t^3 - 2t^2 + t - t^{-1}).
 \end{aligned}$$

Capítulo 3

Marañas

Conway introdujo el concepto de maraña u ovillo (*tangle* en inglés) en la Teoría de Nudos con el objetivo de poder encontrar una forma más eficiente de clasificarlos, aunque no logro este objetivo completamente, descubrió una nueva clase de nudos, los nudos algebraicos y un teorema para clasificar cierto tipo de enlaces.

3.1. Definiciones Básicas

Intuitivamente, una maraña se obtiene al intersectar un nudo con una bola cerrada de radio suficientemente pequeño. De manera más precisa se introduce a continuación el concepto de n –maraña para todo $n \in \mathbb{N}$ para luego restringir el capítulo a las 2–marañas.

Definición 3.1.1 Una **n –maraña** es una pareja (B^3, T) , donde B^3 es una bola cerrada, unitaria en \mathbb{R}^3 y T es un conjunto de curvas cerradas disjuntas (el cual puede ser vacío) y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ curvas poligonales disjuntas encajadas en B^3 tales que cada α_i intersecta la frontera de B^3 en sus extremos.

Nota: En algunas ocasiones por simplicidad se denotará T en vez de (B^3, T) . Además en el presente trabajo se considerará que el conjunto de curvas cerradas disjuntas de T es vacío.

3.1. Definiciones Básicas

Ejemplos

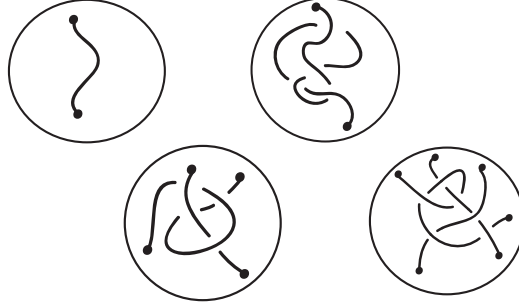


Figura 3.1: Marañas

Una n –maraña es **trivial** si es homeomorfa a un cilindro $D^2 \times [0, 1]$ en el cual están encajadas n líneas rectas paralelas, donde cada una de ellas conecta a $D^2 \times \{0\}$ con $D^2 \times \{1\}$.

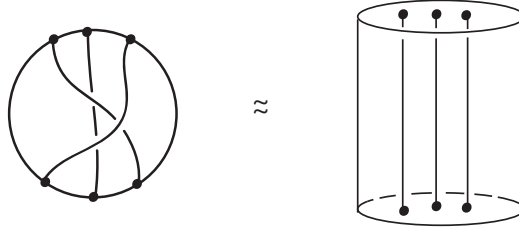


Figura 3.2: Del lado izquierdo una 3–maraña trivial

De la definición 3.1.1, una 2–maraña es una pareja (B^3, T) , donde B^3 es una bola cerrada, unitaria en \mathbb{R}^3 y T es un conjunto de dos curvas poligonales disjuntas α_1 y α_2 encajadas en B^3 tales que cada α_i intersecta la frontera de B^3 en sus extremos. Sin pérdida de generalidad los extremos de α_1 y α_2 están dados por NE , NW , SE y SW de coordenadas:

$$\begin{aligned} NE &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & NW &= \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ SE &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) & SW &= \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

3. Marañas

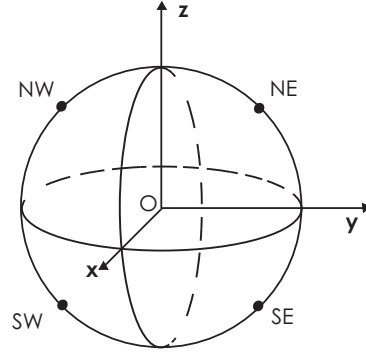


Figura 3.3: *NE, NW, SE y SW*

Dada una 2-maraña (B^3, T) y un vector arbitrario $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, dicha 2-maraña se puede trasladar por medio de la función $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $t(x, y, z) = (x + a, y + b, z + c)$.

De igual manera que en el caso de los nudos, dada una 2-maraña T se toma una proyección regular sobre el yz -plano o plano ecuatorial, posteriormente a partir de ésta se obtiene un diagrama regular \hat{T} de T .

Definición 3.1.2 (*Marañas Equivalentes*)

Sean \hat{T}_1, \hat{T}_2 diagramas regulares de 2-marañas T_1 y T_2 respectivamente. Se dice que T_1 y T_2 son **equivalentes** si existe un número finito de movimientos Reidemeister que transforman \hat{T}_1 en \hat{T}_2 , manteniendo fijos los puntos *NE, NW, SE y SW*.

Definición 3.1.3 (*Cerradura de una 2-maraña*)

- La **cerradura del numerador** de una 2-maraña T , denotado por $N(T)$, es el nudo (o enlace) que se obtiene al unir los puntos *NW* con *NE* y *SW* con *SE* por medio de curvas simples fuera de B^3 .
- La **cerradura del denominador** de una 2-maraña T , denotado por $D(T)$, es el nudo (o enlace) que se obtiene al unir los puntos *NW* con *SW* y *NE* con *SE* por medio de curvas simples fuera de B^3 .

3.1. Definiciones Básicas

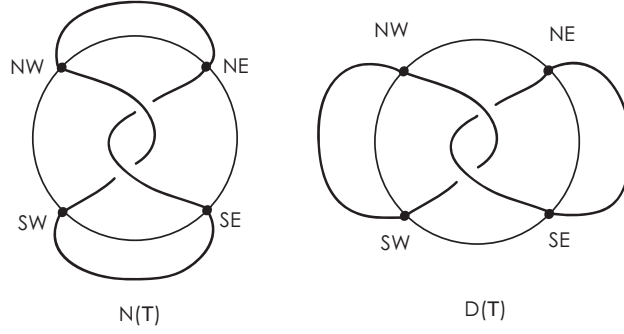


Figura 3.4: $N(T)$ y $D(T)$

Definición 3.1.4 La suma de (B_1^3, T_1) y (B_2^3, T_2) 2-marañas, se define como la pareja $(B_0^3, T_1 + T_2)$, donde $T_1 + T_2$ es el sistema de arcos obtenido al unir NE con NW' y SE con SW' por medio de dos segmentos y B_0^3 es una bola que contiene a $T_1 + T_2$.

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que B_0^3 es una bola unitaria.

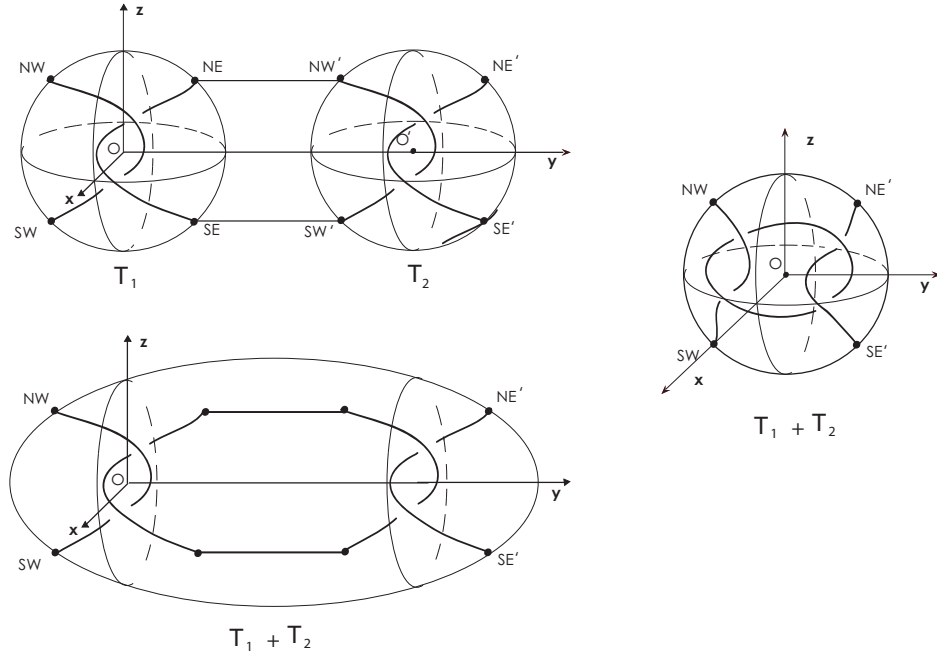


Figura 3.5: $T_1 + T_2$

3. Marañas

Nota:

- i) Los cuatro puntos de intersección en la frontera de B_0^3 son NW , SW , NE' y SE' .
- ii) Al momento de realizar la suma los centros de B_1^3 y B_2^3 se pueden trasladar a $(0, 0, 0)$ y a $(0, a, 0)$ respectivamente, para algún $a \in \mathbb{R}$.
- iii) La suma no es conmutativa.

3.2. Marañas Triviales o Racionales

Las 2–marañas mostradas en la figura 3.6 vistas de izquierda a derecha son la 2–maraña tipo (0) , la 2–maraña tipo (∞) , la 2–maraña tipo (-1) y la 2–maraña tipo (1) respectivamente. A estas 2–marañas se les llama también **excepcionales**.

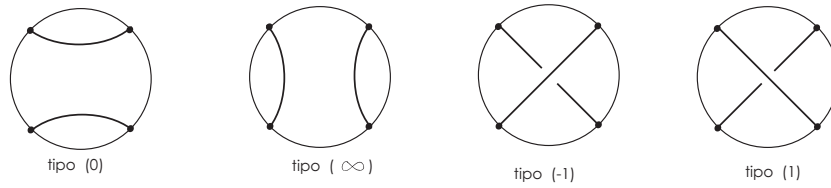


Figura 3.6: 2–marañas excepcionales

Es fácil ver que el nudo (o enlace) obtenido al tomar la cerradura de cada 2–maraña excepcional es el nudo trivial o el 2–enlace trivial.

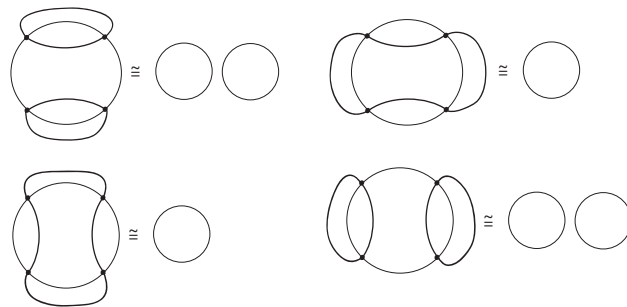


Figura 3.7: Cerraduras de las 2–marañas excepcionales

3.2. Marañas Triviales o Racionales

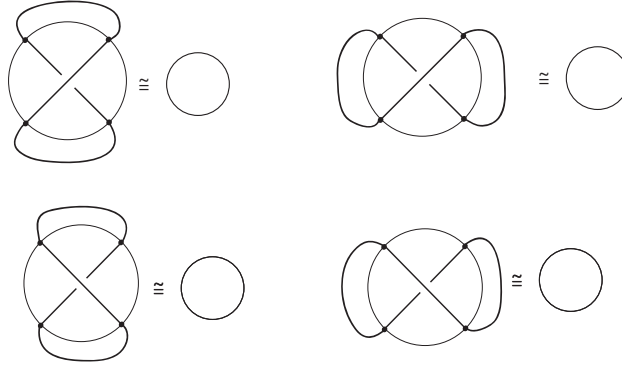


Figura 3.8: Cerraduras de las 2–marañas excepcionales

Definición 3.2.1 Una 2–maraña **trivial** se define como la imagen de la 2–maraña tipo ∞ bajo un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(B^3) = B^3$ y manda el conjunto $\{NW, NE, SW, SE\}$ en sí mismo.

Ejemplos:

- 1) Considerese el homeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $\varphi(x, y, z) = (x, -z, y)$, el cual rota a \mathbb{R}^3 un ángulo $\frac{\pi}{2}$ con respecto al eje x .

Nótese que la imagen de la 2–maraña tipo (∞) bajo φ es la 2–maraña tipo (0) , luego la 2–maraña tipo (0) es trivial.

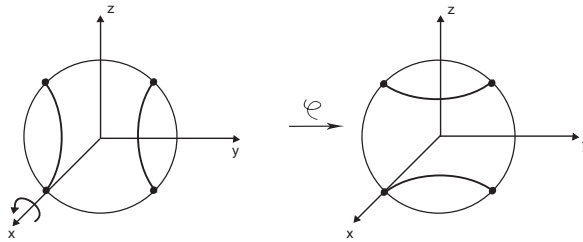


Figura 3.9: La imagen de la 2–maraña tipo (∞) bajo φ

- 2) El homeomorfismo $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o **giro vertical** rota a B^3 con respecto al eje z manteniendo el hemisferio norte y el punto $(0, 0, 1)$ fijos, de manera que manda SW en SE y SE en SW , como se indica en la figura 3.10.

3. Marañas

- 3) El homeomorfismo $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o **giro horizontal** rota a B^3 con respecto al eje y manteniendo el hemisferio oeste y el punto $(0, 1, 0)$ fijos, de manera que manda NE en SE y SE en NE , como se indica en la figura 3.10.

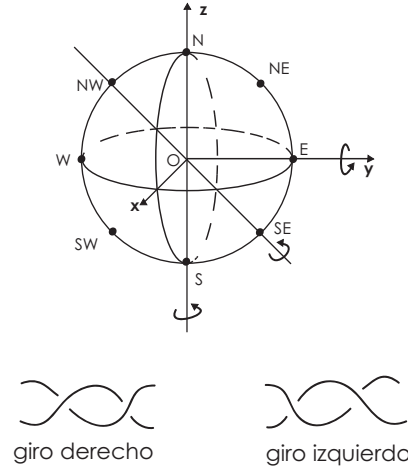
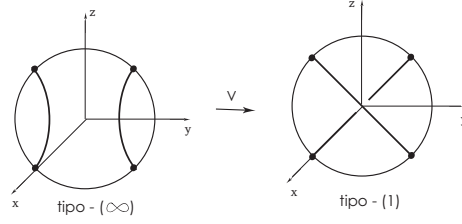


Figura 3.10:

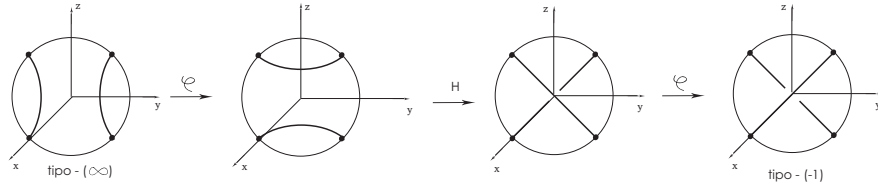
Un giro vertical es positivo si es un giro derecho, mientras que un giro horizontal es positivo si es un giro izquierdo.

- 4) El homeomorfismo $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por una rotación de ángulo π con respecto a la recta que determinan los puntos NW y SE como se indica en la figura 3.10.
- 5) El homeomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por una reflexión a través del plano $\frac{-2}{\sqrt{2}}(y + z) = 0$, el cual está determinado por los puntos NW y SE y es ortogonal al plano ecuatorial.
- 6) La 2-maraña tipo (1) es la imagen de la 2-maraña tipo (∞) bajo V , luego la 2-maraña tipo (1) es trivial.

3.3. El Algoritmo de Conway



- 7) La 2-maraña tipo (-1) es la imagen de la 2-maraña tipo (∞) bajo la composición $\varphi \circ H \circ \varphi$, luego la 2-maraña tipo (-1) es trivial.



Nótese que $H(T_\infty) = T_\infty$, $V(T_0) = T_0$, $R(T_\infty) = T_0 = F(T_\infty)$ y $R(T_0) = T_\infty = F(T_0)$, donde T_∞ y T_0 son las 2-marañas tipo (∞) y tipo (0) respectivamente.

A partir de la composición de los homeomorfismos básicos descritos en los ejemplos anteriores, se pueden construir 2-marañas triviales. Se denota por H^n a la composición de H n veces, V^n a la composición de V n veces, H^{-1} a la inversa de H y V^{-1} a la inversa de V .

3.3. El Algoritmo de Conway

Una forma de construir 2-marañas triviales o racionales es usando el método desarrollado por J. Conway y se describe a continuación:

- 1) Se toma la 2-maraña T_∞ .
- 2) Se aplica el homeomorfismo F a T_∞ , es decir, se obtiene $F(T_\infty)$.
- 3) Luego se aplica H a_i veces, con $a_i \in \mathbb{N}$, es decir, se obtiene $H^{a_i}(F(T_\infty))$.
- 4) Los pasos 2) y 3) se repiten un número finito de veces i , con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, la variable i toma los valores de forma descendente empezando en n .

3. Marañas

De manera que en el método de Conway se toma la 2–maraña tipo (∞) como inicio y luego se aplican F y la composición de H^{a_i} veces de forma alternada un número finito de veces.

La 2–maraña resultante se denota por $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ y es igual a $H^{a_1} \circ F \circ H^{a_2} \circ F \circ \dots \circ F \circ H^{a_{n-1}} \circ F \circ H^{a_n}(T_\infty)$.

Ejemplo

La construcción de la 2–maraña $T(3, 4, 8)$ por el método de Conway.

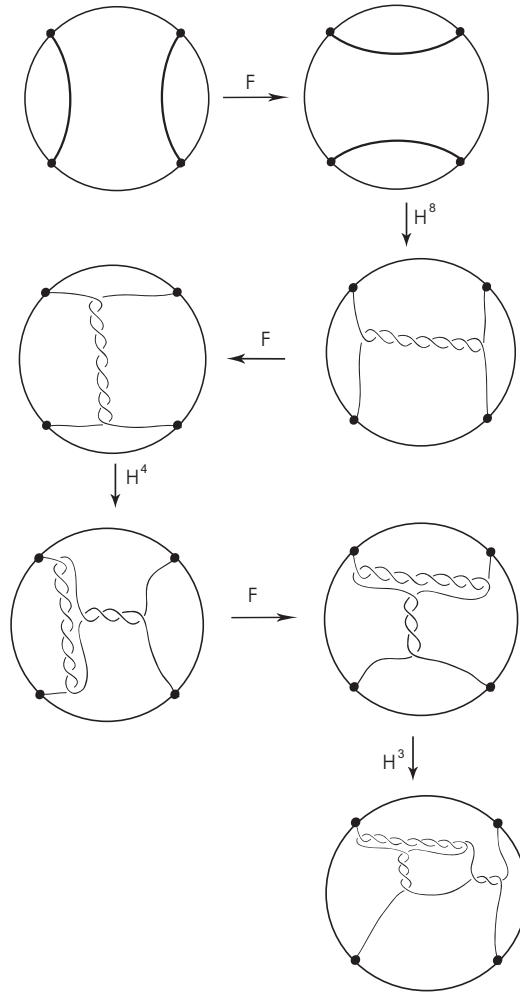


Figura 3.11: $T(3, 4, 8) = H^3 \circ F \circ H^4 \circ F \circ H^8 \circ F(T_\infty)$

3.3. El Algoritmo de Conway

Sin embargo existe otra forma de construir las 2—marañas triviales.

Proposición 3.3.1 *Una 2—maraña racional puede ser obtenida por medio de la composición finita y alternada de los homeomorfismos V y H aplicados a las 2—marañas T_0 o T_∞ .*

Demostración:

Considérense las siguientes identidades:

$$R^2 = F^2 = I \text{ y}$$

$V = F \circ H \circ F$, donde I es la identidad.

Se afirma que $V^n = F \circ H^n \circ F$. Esto es claro para $n = 1$

Para $n = 2$

$$\begin{aligned} V^2 &= F \circ H \circ F \circ F \circ H \circ F \\ &= F \circ H \circ F^2 \circ H \circ F \\ &= F \circ H \circ I \circ H \circ F \\ &= F \circ H \circ H \circ F \\ &= F \circ H^2 \circ F \end{aligned}$$

Supóngase que se cumple para $n = k$, se demostrará que se cumple para $n = k + 1$

$$\begin{aligned} V^{k+1} &= V \circ V^k \\ &= F \circ H \circ F \circ F \circ H^k \circ F \\ &= F \circ H \circ F^2 \circ H^k \circ F \\ &= F \circ H \circ I \circ H^k \circ F \\ &= F \circ H \circ H^k \circ F \\ &= F \circ H^{k+1} \circ F \end{aligned}$$

De esta manera se tiene que

$$H^{a_1} \circ F \circ H^{a_2} \circ F \circ \dots \circ F \circ H^{a_{n-1}} \circ F \circ H^{a_n} = H^{a_1} \circ V^{a_2} \circ H^{a_3} \circ \dots \circ V^{a_{n-1}} \circ H^{a_n}$$

□

Sin embargo cuando se construyen 2—marañas racionales por medio de H y V , el proceso se divide en dos, ya que en el método de Conway siempre se termina con H , de esta forma se considera lo siguiente:

Si n es impar, entonces $H^{a_1} \circ V^{a_2} \circ H^{a_3} \circ \dots \circ V^{a_{n-1}} \circ H^{a_n}(T_0)$ y

Si n es par, entonces $H^{a_1} \circ V^{a_2} \circ H^{a_3} \circ \dots \circ H^{a_{n-1}} \circ V^{a_n}(T_\infty)$.

3. Marañas

Ejemplo

La construcción de las 2-marañas $T(-5, 3, 2)$ y $T(6, -4, 2, 3)$ por medio de H y V .

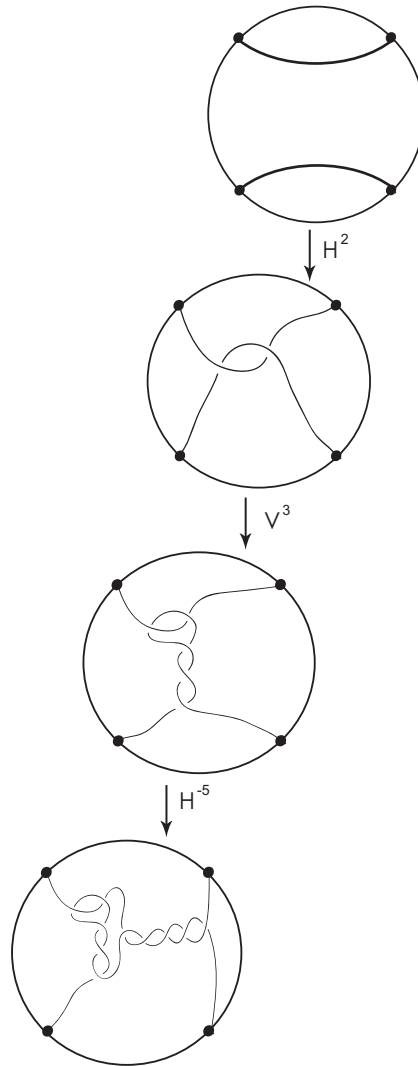


Figura 3.12: $H^{-5} \circ V^3 \circ H^2(T_0)$

3.3. El Algoritmo de Conway

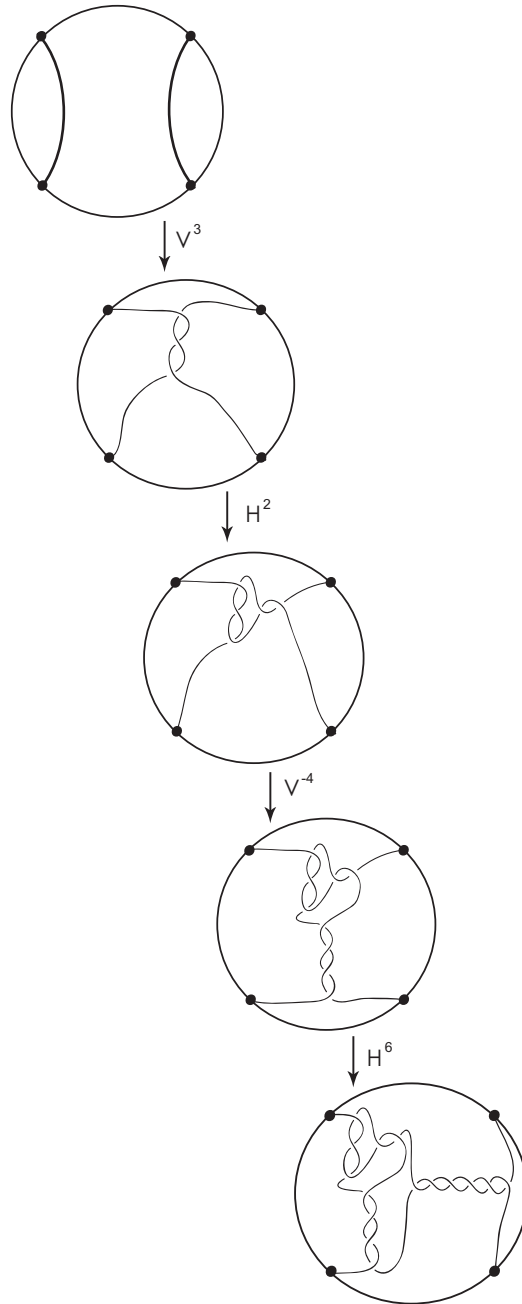


Figura 3.13: $H^6 \circ H^{-4} \circ H^2 \circ V^3(T_\infty)$

3. Marañas

3.4. Fracciones Continuas

Definición 3.4.1 Una fracción continua es una expresión formal finita de la forma

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

donde $a_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $a_n \neq 0$, ésta se denota por $[a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Cada fracción continua se puede evaluar y obtener un número racional $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, recíprocamente todo número racional $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ se puede expresar como una expansión en forma de fracción continua, esto se sigue del algoritmo de Euclides. La expansión de $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ en una fracción continua no es única.

Sea $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, se efectúa el algoritmo de Euclides para p y q , del cual se obtienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} p &= a_1 \cdot q + r_1 \\ q &= a_2 \cdot r_1 + r_2 \\ r_1 &= a_3 \cdot r_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= a_n \cdot r_{n-1} \end{aligned}$$

Luego la expansión de $\frac{p}{q}$ en forma de fracción continua esta dada por

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

3.4. Fracciones Continuas

Ejemplo

La expansión de $\frac{183}{29}$ en forma de fracción continua se obtiene como sigue:

Efectuando el algoritmo de Euclides para 183 y 29 se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}183 &= \mathbf{6} \cdot 29 + 9 \\29 &= \mathbf{3} \cdot 9 + 2 \\9 &= \mathbf{4} \cdot 2 + 1 \\2 &= \mathbf{2} \cdot 1\end{aligned}$$

Así $\frac{183}{29} = 6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}$

Una fracción continua se dice **regular** si todos los coeficientes a_i son positivos, con posible excepción de a_1 .

Nótese que para todo x, y con $y \neq 0, 1$ se cumple

$$x + \frac{1}{-y} = (x - 1) + \frac{1}{1 + \frac{1}{(y - 1)}}$$

la cual se conoce como identidad de Lagrange. Esta es útil para poder convertir una fracción continua en regular, o simplemente obtener otra expansión de la fracción continua del mismo número racional.

Ejemplo

Se tiene que

$$\frac{373}{105} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{-5 + \frac{1}{-4 + \frac{1}{3}}}}$$

3. Marañas

utilizando la identidad de Lagrange se obtiene:

$$\frac{373}{105} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}$$

En este ejemplo se puede ver que la expansión de $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ en una fracción continua no es única.

3.5. Teorema de Conway

A cada 2–maraña $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ con $a_1 \neq 0$, se le asigna el número racional $\frac{p}{q}$, con fracción continua dada por $[a_1, a_2, \dots, a_n]$. A este número se le llama **fracción de una 2–maraña**.

Teorema 3.5.1 (Teorema de Conway)

Existe una correspondencia biyectiva entre las clases de equivalencia de las 2–marañas triviales y el conjunto de los números racionales $p/q \in \mathbb{Q}$ incluyendo ∞ , donde $p \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{Z}$. Esto es, $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $T(b_1, b_2, \dots, b_m)$ son equivalentes si y sólo si sus fracciones asociadas $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ y $[b_1, b_2, \dots, b_m]$ son iguales.

Demostración:

Véase L. H. Kauffman y S. Lambropoulou, *On the classification of rational tangles*, arXiv:math/0311499v2 [math.GT] enero 2004. \square

Es por ello que a las 2–marañas triviales también se les conoce como racionales. La fracción de la 2–maraña T_0 es 0 y la fracción de la 2–maraña T_∞ es ∞ .

3.6. Enlaces Racionales

A continuación se darán algunas definiciones sobre enlaces que serán de utilidad más adelante para la clasificación de los enlaces racionales.

3.6. Enlaces Racionales

Sean S una 2-esfera de \mathbb{R}^3 , la cual intersecta transversalmente a un nudo (o enlace) L en dos puntos, $\alpha \subset S$ un arco en S que conecta los dos puntos de $L \cap S$ y U_1 y U_2 las dos componentes de $\mathbb{R}^3 - S$. Se definen los siguientes enlaces:

$$L_i = (L \cap U_i) \cup \alpha \text{ para } i = 1, 2.$$

De forma que L es producto de enlaces, con factores L_1 y L_2 . A este proceso se le llama la **factorización** de L y se denota por $L = L_1 \sharp L_2$.

Definición 3.6.1 Un **factor** L_i de un enlace L se dice **propio** si no es el nudo trivial y no es igual al enlace L .

Un enlace L con factores propios se le llama **compuesto**, mientras que un enlace que no tenga factores propios se le llama **localmente trivial**.

Definición 3.6.2 Un enlace L se dice **separable** si existe una 2-esfera S encajada en el complemento $\mathbb{R}^3 - L$ tal que hay componentes de L adentro y afuera de S de forma que si se denota por U_1 y U_2 a las dos componentes de $\mathbb{R}^3 - S$ y $L_i = U_i \cap L$ con $i = 1, 2$, entonces $L = L_1 \cup L_2$, donde L_1 y L_2 son los componentes separables de L .

Definición 3.6.3 Un nudo (o enlace) L es **primo** si es no trivial, no separable y localmente trivial.

Se puede generalizar a la factorización como la descomposición en marañas y está dada como sigue:

Dado L un nudo (o enlace) encajado en \mathbf{S}^3 , se considera una 2-esfera S tal que intersecta a L en $2n$ puntos, luego se toma U la componente de $\mathbf{S}^3 - S$, de manera que el par $(U, U \cap L)$ es una n -maraña, a este proceso se le llama **descomposición en marañas**.

Lema 3.6.4 Si (B^3, T) una n -maraña trivial, entonces existe una isotopía $h : B^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que deja fijos los extremos de T y lleva los arcos de T a arcos en la frontera de B^3 .

Demostración:

Véase P. R. Cromwell, *Knots and Links*, Cambridge University Press, 2005. □

3. Marañas

Definición 3.6.5 Un nudo o enlace L se dice **racional** si se descompone en dos 2–marañas racionales.

La cerradura de una 2–maraña racional (B^3, T) es un nudo (o enlace) racional, basta con considerar $S = B^3$, la cual intersecta a $N(T)$ (o a $D(T)$) en cuatro puntos NE , SE , NW y SW , luego sea U la componente de $\mathbf{S}^3 - S$, así al tomar $(U, U \cap L)$ se obtienen T y T_0 (o T_∞), los cuales son 2–marañas racionales.

Si T_1 y T_2 son dos 2–marañas racionales, entonces $N(T_1 + T_2)$ es un nudo (o enlace) racional, basta considerar una 2–esfera tal que intersecta a las dos curvas simples que unen a T_1 y a T_2 y a las dos curvas simples que unen a NW con NE' y a SW con SE' como se muestra en la figura 3.14

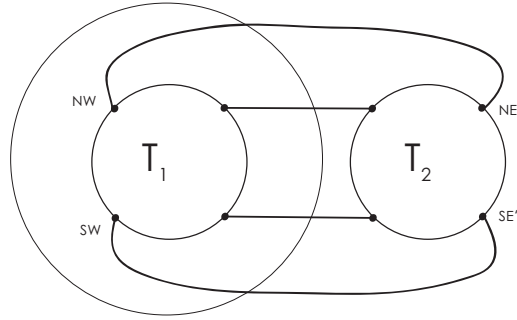


Figura 3.14:

Teorema 3.6.6 Un enlace racional L tiene presentación de puente 2.

Demostración:

Sea L un enlace racional, entonces existe una esfera S tal que intersecta a L en cuatro puntos de forma que descompone a L en dos 2–marañas racionales (o triviales) T_1 y T_2 , donde T_1 se encuentra dentro de S y T_2 está fuera de S .

Se toma a S como el xy –plano más un punto en el infinito y por medio de una isotopía se mueven los cuatro puntos de $L \cap S$ de forma que estén en el eje x .

Por el lemma 3.6.4 existe una isotopía $h : S \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que deja fijos los extremos de T_1 y lleva los arcos de T_1 a arcos en la frontera de S , es decir T_1 que da encajado en el plano xy , mientras que T_2 forma los dos puentes. \square

3.6. Enlaces Racionales

Proposición 3.6.7 *Los nudos (o enlaces) racionales tienen a lo más dos componentes.*

Demostración:

Véase P. R. Cromwell, *Knots and Links*, Cambridge University Press, 2005. \square

Proposición 3.6.8 *Los nudos (o enlaces) racionales son primos.*

Demostración:

Véase P. R. Cromwell, *Knots and Links*, Cambridge University Press, 2005. \square

Hay otras formas de obtener enlaces racionales, como la forma Normal de Conway y la forma Normal de Schubert, la cual se puede encajar en el xy -plano excepto por dos puentes maximales.

La Forma Normal de Conway de enlaces racionales es un diagrama regular no orientado representado en la figura 3.15, denotado por $C(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$, donde $a_i \in \mathbb{Z}$

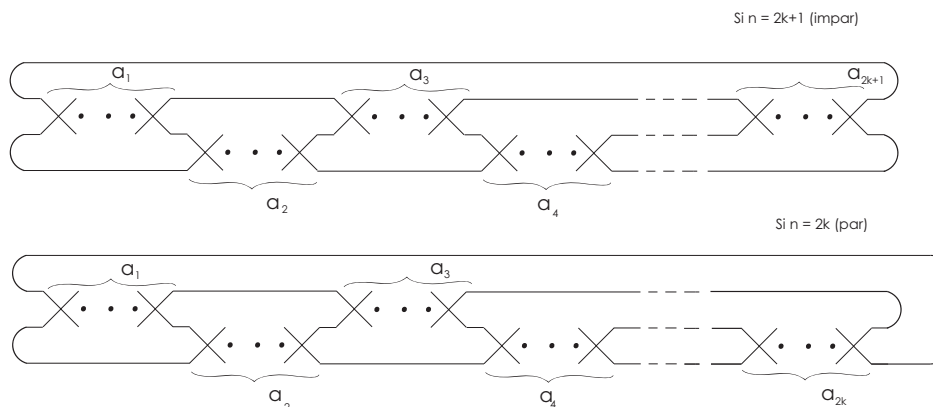


Figura 3.15: Forma Normal de Conway de un enlace racional

El signo de los a_i se toma como sigue:

Si i es impar entonces el giro izquierdo es positivo, por otro lado si i es par entonces el giro derecho es positivo.

3. Marañas

Ejemplos

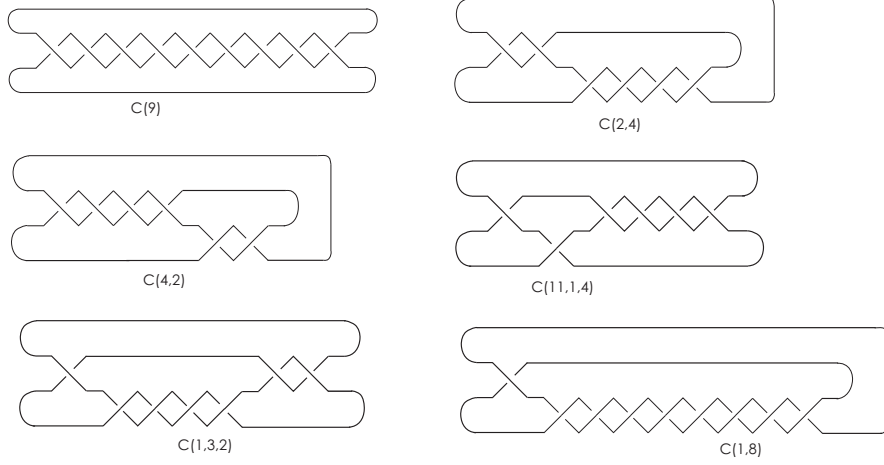


Figura 3.16:

De manera similar a las 2–marañas racionales, a todo un nudo (o enlace) racional $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ se le asocia un número racional $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ dado por

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n] \text{ con } \gcd(p, q) = 1.$$

Si $a_i > 0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces $0 < q < p$, mientras que si $\frac{p}{q} < 0$, entonces se toma $p > 0$ y $q < 0$. De manera que se dice que $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ es de tipo (p, q) .

El nudo trivial es de tipo $(1, 1)$ y el enlace trivial de dos componentes es de tipo $(0, 1)$.

Recíprocamente a todo número racional $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que $\left| \frac{p}{q} \right| > 1$ se le asocia un nudo (o enlace) racional por medio de la expansión de $\frac{p}{q}$ a fracción continua $[a_1, a_2, \dots, a_m]$, luego se toma el nudo (o enlace) racional $C(a_1, a_2, \dots, a_m)$.

3.6. Enlaces Racionales

La Forma Normal de Schubert de un nudo (o enlace) racional de tipo (p, q) tales que $p > 0$, $-p < q < p$ se denota por $S(p, q)$ y se construye de la siguiente forma:

Un nudo o enlace L con número de puente 2 tiene un diagrama regular D tal que $D = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \beta_1 \cup \beta_2$, donde α_1 , α_2 , β_1 y β_2 son curvas simples poligonales disjuntas y en cada cruce de D α_1 y α_2 pasan por arriba del cruce, mientras que β_1 y β_2 pasan por debajo del cruce, sean A y B el punto inicial y final de α_1 respectivamente, C y D el punto inicial y el punto final de α_2 , B el punto inicial de β_1 y D el punto inicial de β_2 .

Se dividen α_1 y α_2 en p segmentos, se enumeran de 0 a $2p - 1$ módulo $2p$ empezando por B y D como se muestra en la figura 3.17, luego sobre β_1 se comienza en el 0 de α_1 , se recorre β_1 llevándolo a α_2 donde cruza por debajo del segmento q , se sigue recorriendo β_1 llevándolo a α_1 donde cruza por debajo del segmento $2q$, se sigue recorriendo β_1 llevándolo a α_2 donde cruza por debajo del segmento $3q$, se repite este proceso hasta que se llegue al segmento pq en α_2 o el segmento p en α_1 . Análogamente sobre β_2 se comienza en el 0 de α_2 , se recorre β_2 llevándolo a α_1 donde cruza por debajo del segmento q , se sigue recorriendo β_2 llevándolo a α_2 donde cruza por debajo del segmento $2q$, se sigue recorriendo β_2 llevándolo a α_1 donde cruza por debajo del segmento $3q$, se repite este proceso hasta que se llegue al segmento pq en α_1 o el segmento p en α_2 .



Figura 3.17:

3. Marañas

Ejemplo

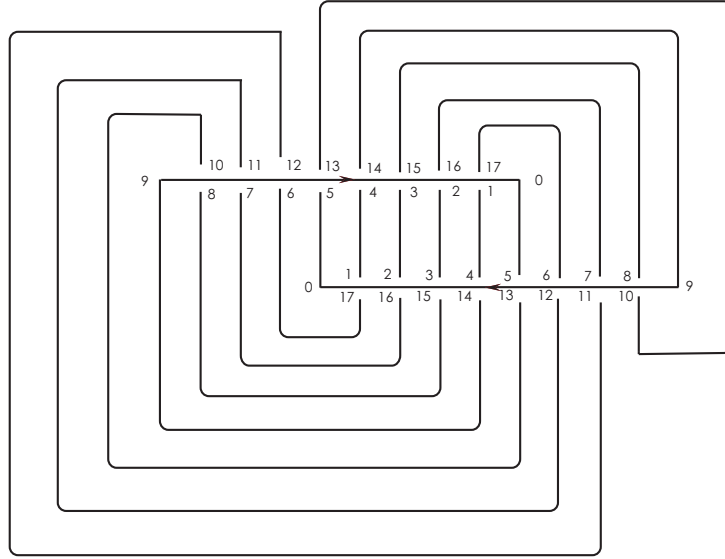


Figura 3.18: $S(9, 5)$

Teorema 3.6.9 *Un nudo o enlace K con número de puente 2 es la cerradura del denominador de una 2-maraña racional. Recíprocamente la cerradura del denominador de una 2-maraña racional tiene número de puente 2.*

Demostración:

Sea \hat{K} el diagrama regular de un nudo (o enlace) con número de puente 2. \hat{K} puede ser representado como se muestra en la figura 3.19,

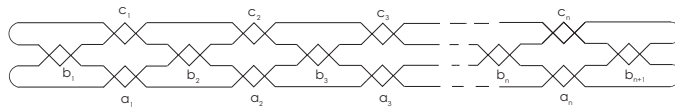


Figura 3.19: Diagrama de nudo con número de puente 2

donde a_i , b_j y c_k denotan el número de cruces, no se muestra si son cruces positivos o negativos ya que no es relevante para la demostración.

Por medio de movimientos Reidemeister aplicados a \hat{K} se obtiene el siguiente diagrama,

3.6. Enlaces Racionales

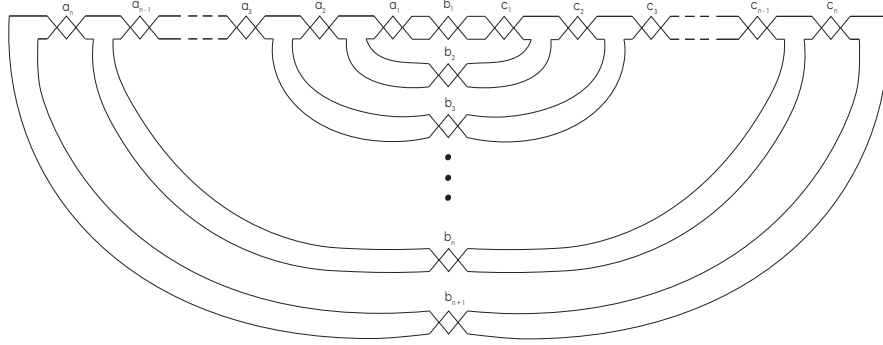


Figura 3.20: D

el cual se denotará por $D = (a_1, a_2, \dots, a_n | b_1, b_2, \dots, b_{n+1} | c_1, c_2, \dots, c_n)$ y la banda donde se encuentran los b_j cruces se le llamará el j -ésimo brazo de D .

Se moverán todos los cruces a_1, a_2, \dots, a_n de izquierda a derecha, comenzando por los a_n cruces, para esto se gira el $(n+1)$ -ésimo brazo de D a_n veces con respecto al eje A , como se muestra en la figura 3.21, tal que los a_n cruces se muevan a la derecha, de esta forma se obtiene

$$D_1 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 0 | b_1, b_2, \dots, b_{n+1} | c_1, c_2, \dots, d_n)$$

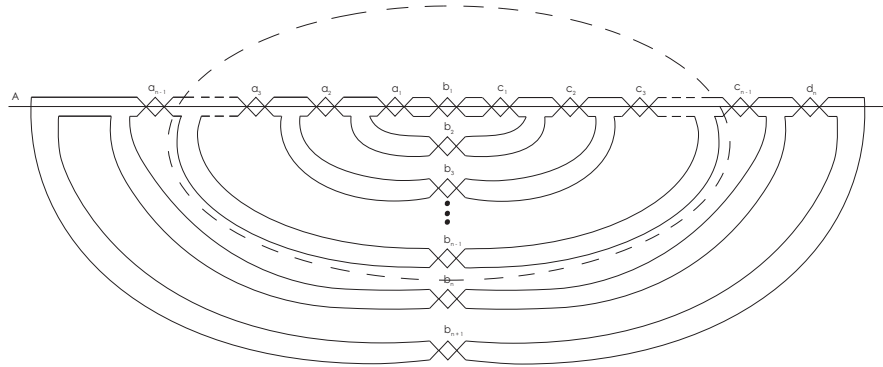


Figura 3.21: rotación horizontal

donde $d_i = c_i + a_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

3. Marañas

Luego se rota a_{n-1} veces la parte interior del área marcada por la línea punteada en dirección tal que se deshagan los cruces a_{n-1} del lado izquierdo con respecto al eje horizontal A , dejando el exterior del área marcada por la línea punteada fijo, como se muestra en la figura 3.21,

Si a_{n-1} es par, entonces el diagrama resultante es

$$D'_1 = (a_1, a_2, \dots, 0, 0 | b_1, b_2, \dots, b_{n+1} | c_1, c_2, \dots, d_{n-1}, d_n).$$

Si a_{n-1} es impar, entonces el diagrama resultante es

$$D'_1 = (a_1, a_2, \dots, 0, 0 | b_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_{n-1}, b_n, b_{n+1} | c_1, c_2, \dots, d_{n-1}, d_n).$$

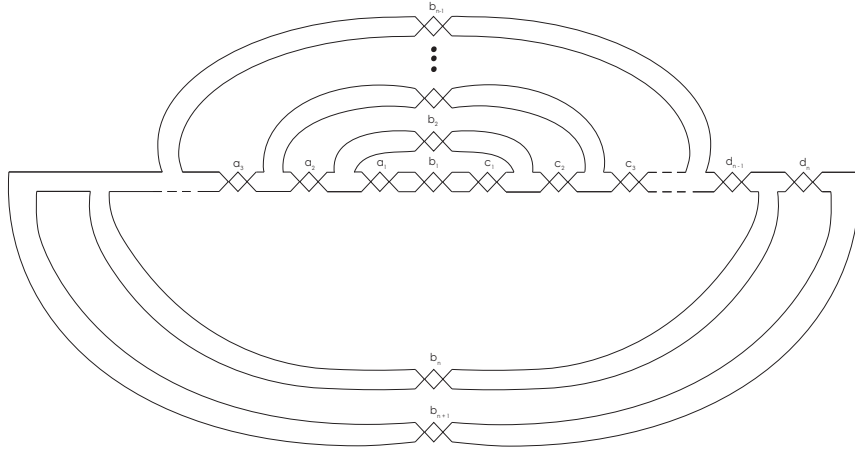


Figura 3.22:

donde \bar{b}_i significa que el i -ésimo brazo de D'_1 está por encima del eje horizontal A , como se muestra en la figura, para pasar el (b_{n-1}) -ésimo brazo de D'_1 por debajo del eje horizontal A se prolongan ambos lados de el (b_{n-1}) -ésimo brazo hacia abajo como se muestra en la figura, luego se rota b_{n-1} veces la parte interior de el área marcada por la línea punteada en dirección tal que se deshagan los cruces b_{n-1} que están por encima de A con respecto al eje vertical B , dejando el exterior de el área marcada por la línea punteada fijo.

3.6. Enlaces Racionales

Los b_{n-1} cruces que se encuentran por encima del eje horizontal A desaparecen y se crean por debajo de A .

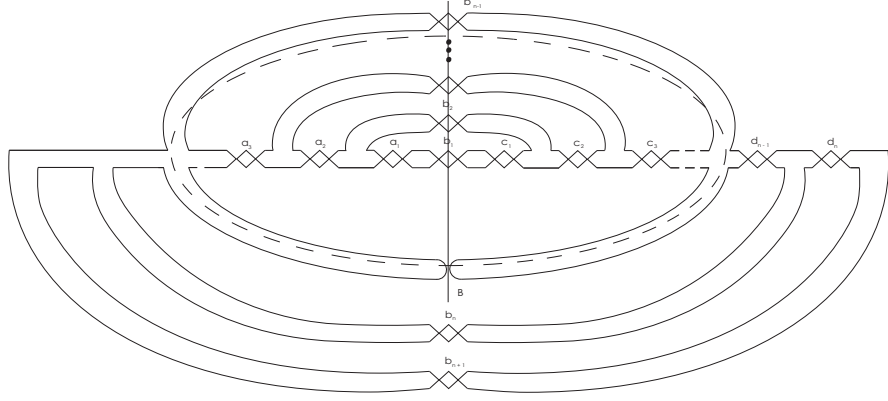


Figura 3.23:

Si b_{n-1} es par, entonces el diagrama resultante es

$$D_1'' = (a_1, a_2, \dots, 0, 0 | b_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_{n-2}, b_{n-1}, b_n, b_{n+1} | c_1, c_2, \dots, d_{n-1}, d_n).$$

Si b_{n-1} es impar, entonces el diagrama resultante es

$$D_1'' = (c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, 0, 0 | b_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_{n-2}, b_{n-1}, b_n, b_{n+1} | a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, d_{n-1}, d_n).$$

Por medio de repetidas rotaciones con respecto al eje horizontal A y al eje vertical B para pasar los cruces del lado izquierdo al lado derecho, se obtendrá

$$D_n = (a_1, 0, \dots, 0, 0 | b_1, b_2, \dots, b_{n+1} | c_1, d_2, \dots, d_n)$$

o

$$D_n = (c_1, 0, \dots, 0, 0 | b_1, b_2, \dots, b_{n+1} | a_1, d_2, \dots, d_n).$$

3. Marañas

Finalmente para mover a_1 o c_1 cruces al lado derecho se aplica una rotación a la parte interior del área marcada por la línea punteada en dirección tal que se deshagan los cruces del lado izquierdo con respecto al eje horizontal A , dejando el exterior del área marcada por la línea punteada fijo, como se muestra en la figura.

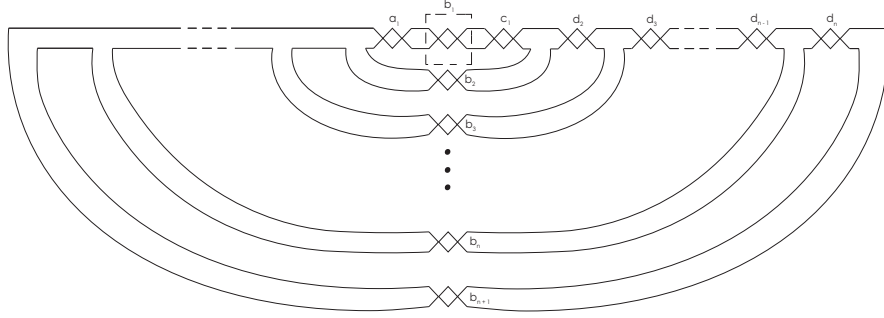


Figura 3.24:

De esta manera el último diagrama se puede deformar para obtener el siguiente diagrama el cual es la forma de Conway de un nudo (o enlace) racional. \square

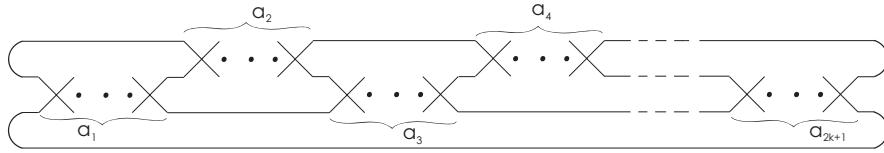


Figura 3.25:

Teorema 3.6.10 *Un nudo o enlace racional K tiene un diagrama regular alternante.*

Demostración:

Sea L un enlace racional de tipo (p, q) , el número racional $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tiene una expansión a fracción continua dada por

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

tal que $a_i > 0$ para todo $i = \{1, 2, \dots, n\}$, luego el diagrama correspondiente $C(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ es alternante. \square

3.6. Enlaces Racionales

Teorema 3.6.11 Sean L_1 y L_2 nudos (o enlaces) racionales de tipo (p_1, q_1) y (p_2, q_2) respectivamente. L_1 y L_2 son equivalentes si y sólo si se cumple lo siguiente:

a) $p_1 = p_2$.

b) $q_1 \equiv q_2 \pmod{p_1}$ ó $q_1 q_2 \equiv 1 \pmod{p_1}$

Demostración:

Véase K. Murasugi, *Knot Theory and its Applications*, Birkhäuser, 1996. □

Ejemplo

Considérense los enlaces de tipo (p, q) , con $p = 9$ y $q = \{1, 2, \dots, 8\}$, listados a continuación

9/1	$C(9)$	9_1
9/2	$C(4, 2)$	6_1^*
9/3	$C(3)$	3_1
9/4	$C(2, 4)$	6_1
9/5	$C(1, 1, 4)$	6_1^*
9/6	$C(1, 2)$	3_1^*
9/7	$C(1, 3, 2)$	6_1
9/8	$C(1, 8)$	9_1^*

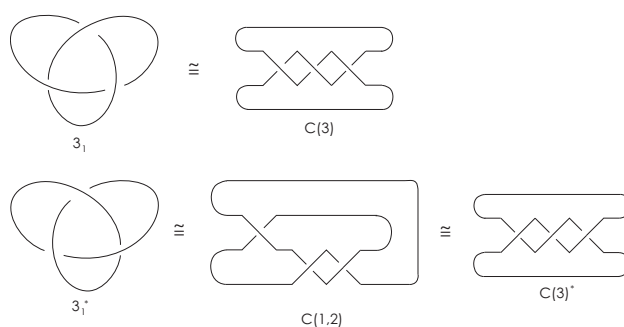


Figura 3.26:

3. Marañas

La imagen especular L^* de un enlace racional L de tipo (p, q) es de tipo $(p, -q)$, nótese que $-q \equiv p - q \pmod{p}$, de manera que L^* es equivalente a un enlace racional de tipo $(p, p - q)$, nótese también que $q \equiv q - p \pmod{p}$, por lo que el enlace racional de tipo $(p, q - p)$ es equivalente a L .

Una condición suficiente y necesaria para que un nudo (o enlace) racional K de tipo (p, q) sea amphicheiral es $q^2 \equiv -1 \pmod{p}$

Corolario 3.6.12 *Un nudo o enlace racional L de tipo (p, q) puede ser representado de la forma $C(2b_1, 2b_2, \dots, 2b_n)$.*

Demostración:

Sea L un enlace de tipo (p, q) . Si p y q son pares, entonces $\gcd(p, q) \neq 1$, contradicción, por tanto p y q no son pares. Si p y q son impares, entonces se considera el enlace racional equivalente de tipo $(p, q - p)$ donde p es impar y $q - p$ es par, de forma que renombrando sólo se tienen dos casos: que p sea impar, q par y p par y q impar, se prueban del mismo modo.

Se obtiene la expansión de $\frac{p}{q}$ por medio del siguiente algoritmo:

Se inicia con $r_{-1} := p$, $r_0 := q$ e $i := -1$, luego, mientras $r_{i+2} \neq 0$ se hace lo siguiente

Se divide r_i entre r_{i+1} ,

tal que se cumple $r_i = a_{i+2} \cdot r_{i+1} + r_{i+2}$ y $r_{i+2} < r_{i+1}$ donde a_{i+2} es el cociente, y r_{i+2} es el residuo.

Si a_{i+2} es impar entonces $a_{i+2} := a_{i+2} + 1$ y $r_{i+2} = r_i - a_{i+2} \cdot r_{i+1}$

de manera que $r_i = a_{i+2} \cdot r_{i+1} + r_{i+2}$ y $r_{i+2} < r_{i+1}$ se siguen cumpliendo.

en otro caso a_{i+2} y r_{i+2} se quedan igual.

Luego se toma $i := i + 1$

De manera que se obtiene $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tal que cada a_i es un número par.

□

Ejemplo Se muestran dos expansiones en fracción continua de $13/4$

$$\frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4}$$

3.6. Enlaces Racionales

$$\frac{13}{4} = 4 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{-2}}}$$

Entonces el enlace racional L de tipo $(13, 4)$ tiene los siguientes diagramas regulares $C(3, 4)$ y $C(4, -2, 2, -2)$.

Proposición 3.6.13 *Para cualquier entero b se cumple lo siguiente*

$$\begin{aligned} 1) N(T(a_1, a_2, \dots, a_{2k+1})) &\approx N(T(a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}, b, 0)) \\ &\approx D(T(-a_1, -a_2, \dots, -a_{2k+1}, b)) \\ &\approx C(-a_1, -a_2, \dots, -a_{2k+1}) \\ 2) N(T(a_1, a_2, \dots, a_{2k})) &\approx D(T(-a_1, -a_2, \dots, -a_{2k}, b)) \\ &\approx C(a_1, a_2, \dots, a_{2k} - 1, 1). \\ 3) D(T(a_1, a_2, \dots, a_{2k})) &\approx D(T(a_1, a_2, \dots, a_{2k-1}, 0)) \\ &\approx C(a_1, a_2, \dots, a_{2k-1}). \\ 4) D(T(a_1, a_2, \dots, a_{2k+1})) &\approx D(T(a_1, a_2, \dots, a_{2k}, 0)) \\ &\approx C(1, a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2k}) \end{aligned}$$

Demostración:

Véase K. Murasugi, *Knot Theory and its Applications*, Birkhäuser, 1996. \square

Teorema 3.6.14 *Los nudos (o enlaces) racionales guardan las siguientes simetrías.*

- 1) $C(a_1, a_2, \dots, a_n) \approx C(a_1, a_2, \dots, a_n \pm 1, \mp 1)$.
- 2) Si $\varepsilon = (-1)^{n-1}$, entonces
$$C(a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1) \approx C(\varepsilon a_1, \varepsilon a_2, \dots, \varepsilon a_{n-1}, \varepsilon a_n).$$
- 3) $C(-a_1, -a_2, \dots, -a_{n-1}, -a_n)$ es la imagen de especular de $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Demostración:

Véase K. Murasugi, *Knot Theory and its Applications*, Birkhäuser, 1996. \square

3. Marañas

Teorema 3.6.15 *Dados dos 2-marañas racionales T_1 y T_2 con p_1/q_1 y p_2/q_2 los números racionales asociados a éstos respectivamente, entonces $N(T_1+T_2)$ es un nudo o enlace racional de tipo (p, q) , donde $p = |p_1q_2 + p_2q_1|$ y q se determina de la siguiente forma:*

- i) si $p = 0$ entonces $q = 1$
- ii) si $p = 1$ entonces $q = 1$
- iii) si $p > 0$ entonces $0 < q < p$, $q \equiv \sigma(p_1p'_2 + q_1q'_2)(\text{mod } p)$, donde $\sigma = \text{sign}(p_1q_2 + p_2q_1)$ y p'_2 y q'_2 son entradas en la segunda columna de cualquier matriz representativa para la 2-maraña racional de p_2/q_2 .

Demostración:

Véase C. Ernst and D. W. Sumners, *A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., Volume 108 (1990).

Una matriz representativa para una 2-maraña racional con número racional asociado p/q es una matriz de 2×2 y está dada por:

$$\begin{pmatrix} p & q' \\ q & p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{2k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{2k-1} & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.6.16 *Sean $A = T(a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}, a_{2n})$ una 2-maraña racional y $K = C(c_1, c_2, \dots, c_{2k}, c_{2k+1})$ un enlace racional, entonces las soluciones de 2-marañas racionales a la ecuación $N(X + A) = K$ son las siguientes:*

$$X = T(c_1, c_2, \dots, c_{2k}, c_{2k+1}, r, -a_1, -a_2, \dots, -a_{2n-1}, -a_{2n}) \text{ ó}$$

$$X = T(c_{2k+1}, c_{2k}, \dots, c_2, c_1, r, -a_1, -a_2, \dots, -a_{2n-1}, -a_{2n})$$

Si K es el enlace trivial de dos componentes,

entonces $X = T(-a_1, -a_2, \dots, -a_{2n-1}, -a_{2n})$ es la única solución.

Demostración:

Véase C. Ernst and D. W. Sumners, *A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., Volumen 108 (1990).

3.6. Enlaces Racionales

Teorema 3.6.17 *Sean T_1, T_2 2–marañas racionales y K_1, K_2 dos nudos (o enlaces) racionales. Entonces el siguiente sistema de ecuaciones*

$$N(X + T_1) = K_1$$

$$N(X + T_2) = K_2$$

para X una 2–maraña racional, tiene a lo más dos soluciones.

Demostración:

Véase C. Ernst and D. W. Sumners, *A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., Volumen 108 (1990).

Capítulo 4

Aproximación Topológica a la Enzimología

En base al artículo *Lifting the Curtain: Using Topology to Probe the Hidden Action of Enzymes* de D. W. Sumners se desarrolla este capítulo final, el cual muestra una aplicación importante de las matemáticas en la Biología, específicamente a partir de las 2–marañas racionales y los enlaces racionales se analiza la forma de interactuar de ciertas enzimas que sólo participan en reacciones donde hay ADN presente.

El ADN, una macromolécula que se encuentra en gran parte en los núcleos celulares, es considerado como el encargado de dirigir y regular todas las actividades principales de cada célula de cualquier organismo como la síntesis de proteínas, además permite transmitir información genética con precisión de una generación a otra.

El **Ácido Desoxirribonucleico** o **ADN** es un ácido nucleico constituido por la unión de varias unidades llamadas nucleótidos. Cada **nucleótido** del ADN consta de tres partes: (1) un grupo fosfato, (2) un azúcar llamado desoxirribosa y (3) una de cuatro bases nitrogenadas, que son adenina, guanina, timina ó citosina y se les denota por A, G, T y C respectivamente, éstas se fijan al carbono uno de la desoxirribosa, mientras que el grupo fosfato se une a la desoxirribosa en el carbono cinco.

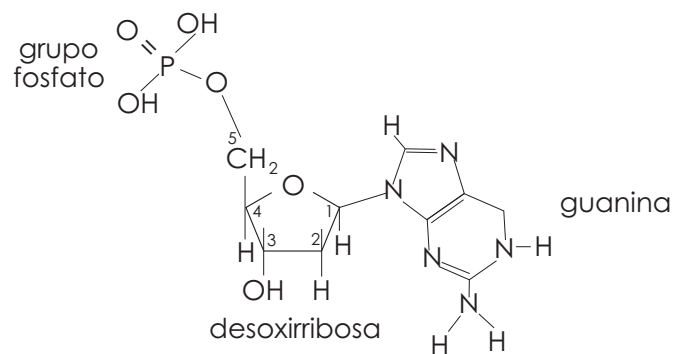


Figura 4.1: Nucleótido

Una cadena de nucleótidos, llamada **polinucleótido**, se hace por medio de la unión de el carbono tres del azúcar de un nucleótido con el grupo fosfato de otro nucleótido como se muestra en la figura 4.2, a ésta unión se le llama **punto 3' – 5' fosfodiéster**, y se dice que lleva una dirección 5' – 3'.

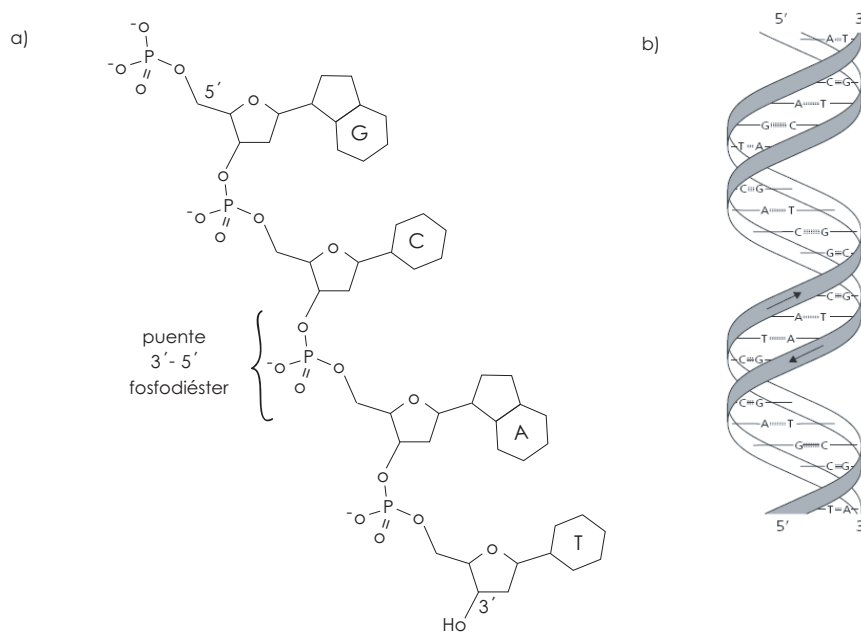


Figura 4.2: Estructura del ADN, a) polinucleótido, b) Forma B del ADN

4. Aproximación Topológica a la Enzimología

La estructura del ADN descubierta por J. D. Watson y F. H. C. Crick en 1953 es llamada la **forma B del ADN**, en ésta la molécula de ADN se compone de dos largas cadenas de polinucleótidos alineadas de forma antiparalela, es decir una cadena tiene dirección $5' - 3'$ mientras que la otra cadena tiene la dirección opuesta $3' - 5'$. Las dos cadenas se enrollan formando una doble hélice alrededor de un eje central imaginario y se unen por dos enlaces de hidrógeno entre las adeninas de una cadena y las timinas de la otra cadena y por tres enlaces de hidrógeno entre las guaninas de una cadena y las citosinas de la otra cadena. Además las bases son perpendiculares a el eje de la hélice y por cada enrollamiento de la hélice hay 10 pares de bases, la distancia entre cada vuelta alrededor de eje imaginario es de 3.4 nanómetros (nm) mientras que el ancho es de $2nm$.

El ADN no es una molécula rígida, la temperatura, el pH y la acción de algunos compuestos químicos causan cambios en la forma del ADN y puede adoptar diferentes estructuras como la juntura de Holliday, en forma de cruz, forma circular, también pueden unirse a otra cadena de ADN formando un triplete, unirse a otra hélice o simplemente diferentes formas helicoidales, donde las bases cambian su posición con respecto al eje imaginario de la hélice. Se sabe también que el ADN dada la unión de sus bases tiene cierta curvatura y flexibilidad en todas direcciones, de manera que el ADN pueda doblarse.

4.1. Enrollamiento del ADN

Como ya se mencionó en la sección anterior el ADN puede adoptar diversas formas, en particular puede adquirir una forma circular, para esto ambos finales de la doble hélice se unen por medio de dos puentes $3' - 5'$ fosfodiéster, es decir el grupo fosfato y el carbono tres (donde el grupo fosfato y el carbono tres pertenecen a diferente cadena) de un final se unen al carbono tres y al grupo fosfato (ambos pertenecen a diferente cadena) del otro final respectivamente. Esta unión no se da de otra manera, es por ello que si el ADN se enrolla sobre sí mismo antes de cerrarse, este enrollamiento debe ser de 360° .

4.1. Enrollamiento del ADN

El ADN antes de cerrarse algunas veces se enrolla sobre sí mismo de manera positiva o negativa, es decir, en sentido de las manecillas del reloj o en sentido opuesto respectivamente. Al proceso que presenta el ADN de enrollarse antes de cerrarse se le llama **sobreenrollamiento positivo ó negativo**.

Una vez que el ADN adopta la foma circular presenta enlazamientos entre ambas cadenas de la doble hélice que corresponden a el número de enrollamientos de la doble hélice antes de cerrarse, a este número se le llama **el número de enlace** del ADN y se denota por L_k , éste coincide con la Definición 2.6.1 de número de enlace.

Si se considera al ADN como una superficie A larga orientada la cual es homeomorfa a $S^1 \times [-1, 1]$, como se muestra en la figura 4.3,

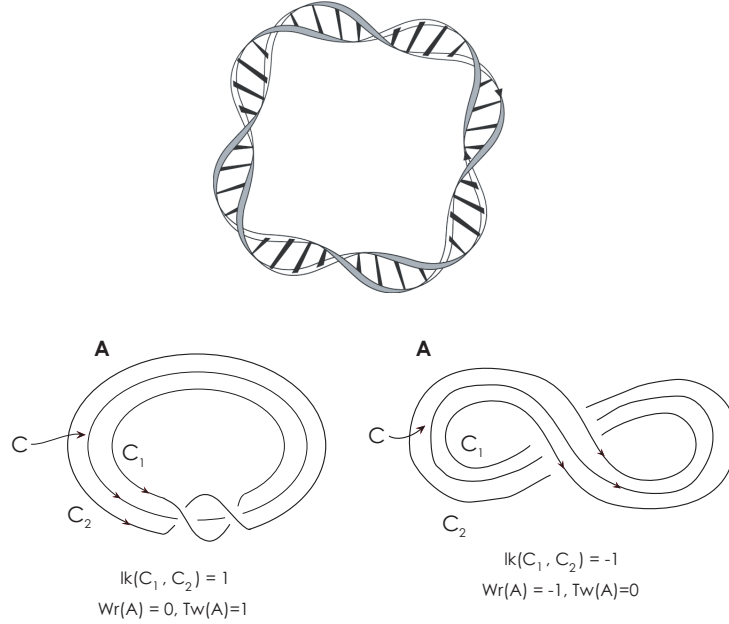


Figura 4.3: Forma circular del ADN

Entonces la frontera de A son dos curvas cerradas C_1 y C_2 las cuales representan las dos cadenas que forman la hélice del ADN y sea C el eje imaginario, ya que ambas cadenas son antiparalelas a C_1 y a C_2 se les asigna orientaciones opuestas, de esta forma se puede obtener el número de enlace de A .

4. Aproximación Topológica a la Enzimología

De manera que el introducir o quitar enrollamientos al ADN antes de cerrarlo incrementa o reduce los giros de la doble hélice al momento de cerrarla, es decir, el sobreenrollamiento afecta al número de enlace del ADN y éste a su vez afecta la forma geométrica del ADN. Para el ADN en forma circular se define el **entrelazamiento** o **twist** (en inglés) del ADN, denotado por T_w , a la descripción cuantitativa de cómo las dos cadenas del ADN se enrollan entre sí con respecto al eje imaginario, y el **retorcimiento** o **writhe** (en inglés) del ADN, denotado por W_r , a la descripción cuantitativa de cómo se enrolla el eje imaginario en el espacio.

Formalmente T_w es el número de giros entre ambas cadenas con respecto al eje imaginario mientras que W_r difiere de la definición 2.4.4, en este caso se toma como el promedio de todas las sumas de los signos de cada cruce de todas proyecciones de la cadena del ADN al plano.

Se tiene que estas tres invariantes se relacionan de la siguiente manera:

$$L_k = T_w + W_r$$

4.2. ADN Topoisomerasas

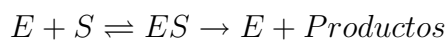
Se sabe que en cada reacción que se efectúa en un sistema biológico intervienen las enzimas, éstas son proteínas que actúan como catalizadores biológicos, es decir, aumentan la velocidad con que una reacción química se lleva a cabo y además no se consumen en las reacciones que promueven permaneciendo sin cambio alguno.

Las enzimas tienen un alto grado de especificidad con respecto a los tipos de sustrato, ya que catalizan, cuando mucho, unos cuantos tipos de reacciones químicas, por lo regular sólo participan en una reacción en la que intervienen una o dos moléculas específicas.

Las enzimas tienen una zona llamada **sitio activo** en el que pueden entrar las moléculas de los reactivos, llamadas **sustratos**. El sitio activo de cada enzima tiene una forma y una distribución de cargas eléctricas distintivas que se complementan con las del sustrato.

4.2. ADN Topoisomerasas

En una reacción las enzimas se unen al sustrato de una forma específica para formar un complejo transitorio llamado **enzima-sustrato** el cual es reversible, luego tanto el sustrato como el sitio activo cambian de forma, ciertos aminoácidos que forman parte del sitio activo pueden unirse al sustrato temporalmente o puede haber interacciones eléctricas entre éstos de forma que distorsionan los enlaces químicos del sustrato, una vez que la reacción ha finalizado, como las moléculas resultantes ya no encajan en el sitio activo son expulsadas, a estas moléculas sin la enzima se les llaman **productos**



donde E es la enzima S es el sustrato y ES es el complejo sustrato enzima.

Las conversiones entre los diferentes tipos de formas que el ADN adopta también son catalizadas por enzimas, estas enzimas son llamadas **topoisomerasas**. Cada célula estudiada ha presentado topoisomerasas y se ha detectado que son fundamentales para el desarrollo de la célula.

Se sabe que para algunos procesos el sobreenrollamiento del ADN es necesario para que tenga lugar la reacción, sin embargo para otros procesos como la transcripción, el sobreenrollamiento es una consecuencia de la reacción que se tiene que controlar. En la transcripción se genera sobreenrollamiento tanto positivo como negativo y en la recombinación el ADN tiende a anudarse, este tipo de conversiones se deben controlar para que el ADN siga su funcionamiento normal, de manera que las topoisomerasas rompen y unen una o ambas cadenas de la doble hélice del ADN de forma que el ADN pueda replicarse, recombinarse o transcribirse.

Las topoisomerasas se dividen en dos tipos, topoisomerasas tipo I y topoisomerasas tipo II. Las topoisomerasas tipo I sólo pueden romper una cadena de la doble hélice mientras que las de tipo II pueden romper ambas cadenas, algunas de las reacciones se muestran en las figuras 4.5 y 4.4, nótese que no todas las topoisomerasas intervienen en todas las reacciones mencionadas.

4. Aproximación Topológica a la Enzimología

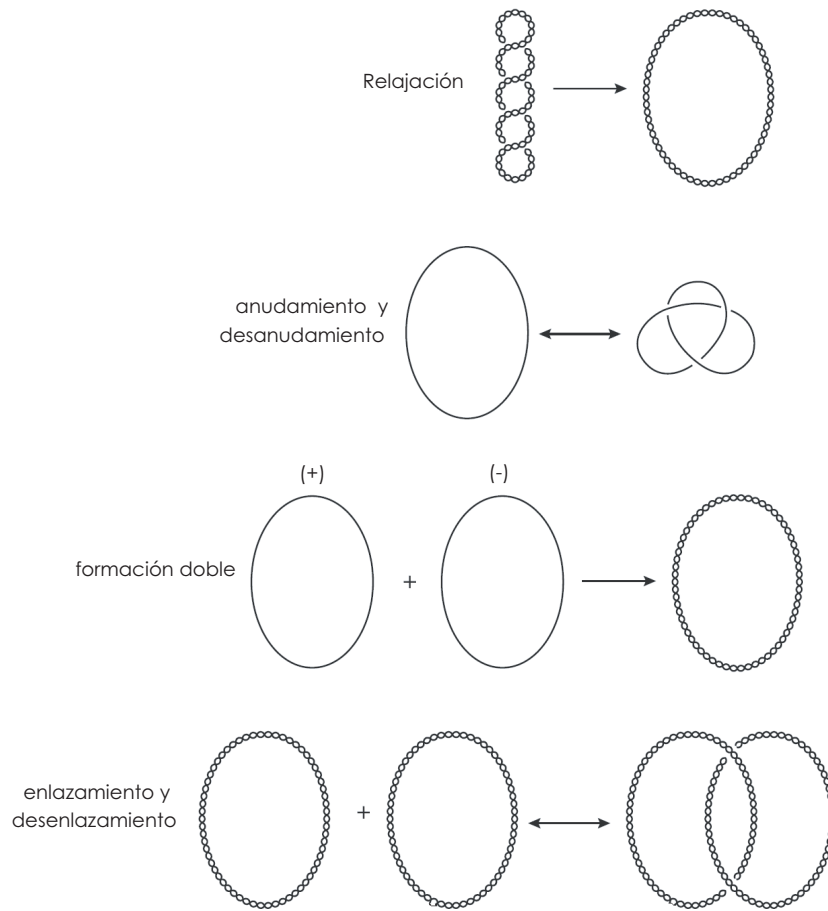


Figura 4.4: Reacciones en las que intervienen las topoisomerasas tipo I

Se cree que las topoisomerasas rompen una cadena o ambas de la doble hélice permitiendo a la cadena o cadenas libres rotar con respecto al eje imaginario de la hélice y luego uniendo de nuevo la cadena o cadenas, este proceso puede cambiar el número de enlace, un mecanismo alternativo del funcionamiento de las topoisomerasas es que estas dividen una o ambas cadenas de la doble hélice, luego un segmento de ADN se pasa por la abertura, puede ser un segmento de una cadena o segmentos de ambas cadenas de la hélice para luego cerrarse.

4.3. Recombinación de Sitio Específico

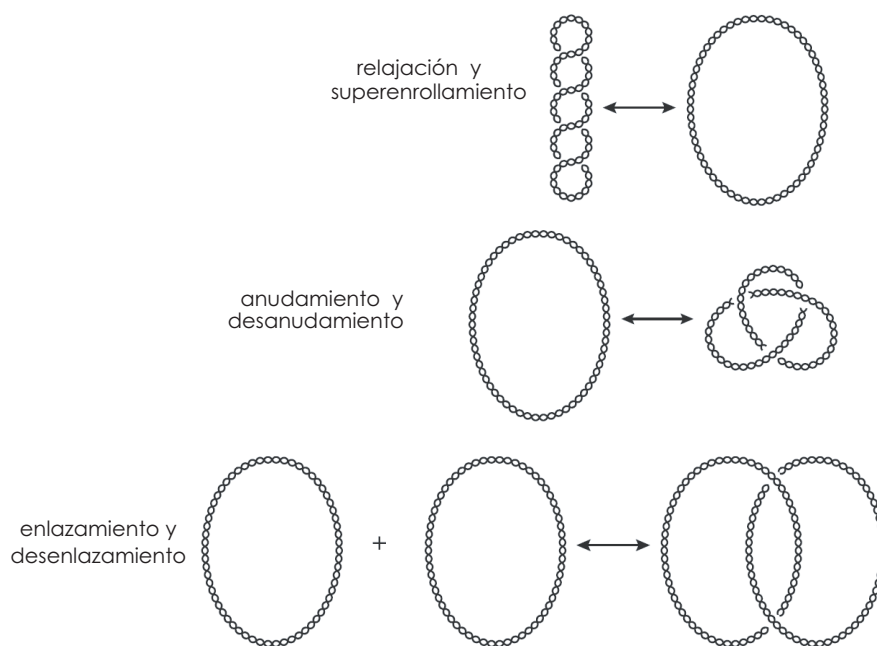


Figura 4.5: Reacciones en las que intervienen las topoisomerasas tipo II

4.3. Recombinación de Sitio Específico

La recombinación de sitio específico involucra el intercambio de segmentos específicos de ADN y se lleva a cabo por medio de enzimas que reconocen sólo pequeñas secuencias de ADN con su orientación y las mueven a otra parte del mismo ADN (transposasas) o integran bloques de ADN a otra cadena de ADN (integrinas), donde estas moléculas pueden tener secuencias de ADN diferentes, las enzimas que intervienen en la recombinación se les llaman **recombinasas** y son parte de las topoisomerasas. La recombinación de sitio específico es responsable de la generación de anticuerpos.

La recombinación de sitio específico esta dividida en dos etapas: la **sinapsis** y el **intercambio de segmentos de ADN**. En la sinapsis dados dos segmentos de ADN, de una misma molécula ó de diferentes moléculas, se yuxtaponen por la presencia de la recombinasa, después se alinean acercándose, luego ambos segmentos se unen por medio de la recombinasa, a la unión de ambos segmentos junto con la recombinasa se le llama

4. Aproximación Topológica a la Enzimología

complejo sináptico local, mientras que a la unión del complejo sináptico local con la parte de la molécula o moléculas que no están unidos por la enzima se les llama **complejo sináptico**.

Una vez formado el complejo sináptico local tiene lugar el intercambio de segmentos de ADN, la recombinasa divide ambos segmentos y los vuelve a unir con una configuración distinta, es decir, quedan en posición diferente a la que solían tener, luego el complejo sináptico local se desune para dejar a las moléculas entrantes libres. A las moléculas que entran a la reacción se les llama **sustratos** y a lo que se obtiene después de la reacción se les llama **productos**, la etapa en la que ambos segmentos se yuxtaponen se le conoce como el **proceso de enrollado**.

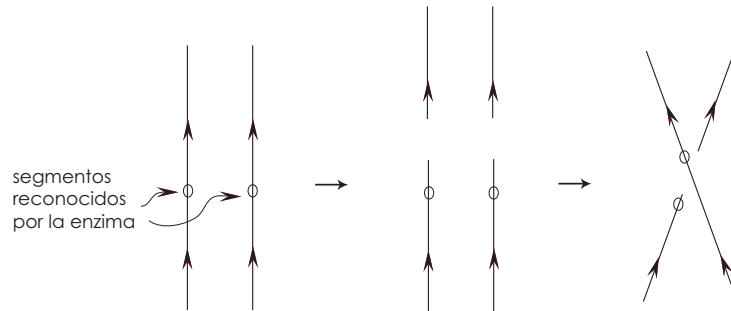


Figura 4.6: Proceso de Recombinación

Dada la yuxtaposición de los segmentos y la presencia de la enzima, si la recombinasa interviene en más de una vez, entonces a este proceso se le llama **recombinación progresiva**, mientras que si la recombinasa interviene una sola vez, entonces a este proceso se le llama **recombinación distributiva**.

Los dos segmentos en los que se llevará a cabo la recombinación de sitio específico tienen una orientación dada por la secuencia de bases que los conforman. Si ambos segmentos están orientados de forma opuesta, entonces se dice que tienen una configuración de repetición invertida, mientras que si ambos segmentos tienen la misma orientación, entonces se dice que tienen una configuración de repetición directa.

4.3. Recombinación de Sitio Específico

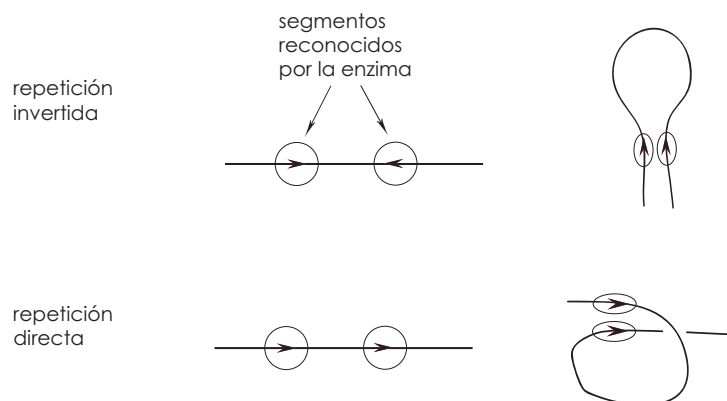


Figura 4.7:

Hay dos tipos principales de recombinasas: las resolvasas y las integrasas. Las resolvasas sólo median reacciones en las que los segmentos tienen configuración de repetición directa y requieren que el sustrato sea de forma circular y con sobreenrollamiento negativo, por otro lado las integrasas son mas versátiles, estas median reacciones donde los segmentos tienen configuración de repetición directa o invertida, estén divididos, sobreenrollados positivamente ó negativamente ó sean parte de sustratos lineales.

Para poder determinar el mecanismo de las recombinasas y los cambios que efectúan en el sustrato como el sobreenrollamiento o el anudamiento, se realizan experimentos en los cuales se hace reaccionar al sustrato con una alta concentración de la enzima donde las moléculas de ADN tienen forma circular. El sobreenrollamiento y el anudamiento son variables que se pueden controlar, una vez que se obtiene el producto se le aplica una proteína llamada **RecA** para hacer al ADN más grueso y se logren distinguir los cruces por medio de microscopía electrónica.

Otra técnica para medir el sobreenrollamiento es la llamada **electroforesis por gel**, la cual consiste en inyectar el producto en un gel cerca del polo negativo en un recipiente rectangular con un campo eléctrico, dado que el ADN tiene carga negativa este se desplaza alejándose del polo negativo y acercándose al polo positivo. El gel forma una barrera porosa y las moléculas de ADN más pesadas viajan a más velocidad. La velocidad está determinada por el número de cruces, ya que cuanto más enrolladas más rápido viajan a través del gel.

4. Aproximación Topológica a la Enzimología

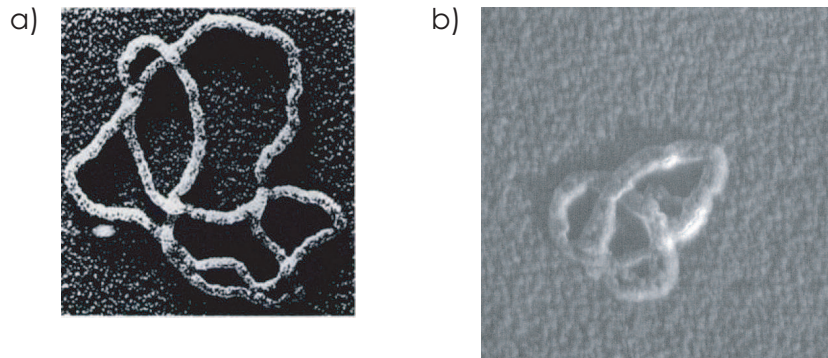


Figura 4.8: Microscopías electrónicas de moléculas de ADN, a) con forma del nudo figura ocho, b) con forma del nudo trebol

De forma experimental se sabe que si el sustrato es una molécula de ADN en forma circular con dos segmentos reconocidos por la recombinasa, entonces el producto son dos moléculas de ADN en forma circular, si el sustrato son dos moléculas de ADN con forma circular con un segmento reconocido por la recombinasa cada una, entonces el producto es una molécula de ADN en forma circular como lo muestra la figura 4.9. En la recombinación progresiva teniendo como sustrato una molécula de ADN con forma circular y repetición directa, si la reacción se lleva a cabo un número impar de veces se obtienen como producto enlaces de moléculas de ADN, si la reacción se efectúa un número par de veces, entonces el producto obtenido es una molécula anudada de ADN. Si se tiene como sustrato una molécula de ADN en forma circular con repetición inversa, entonces el producto es una sola molécula de ADN en forma circular la cual puede anudarse.

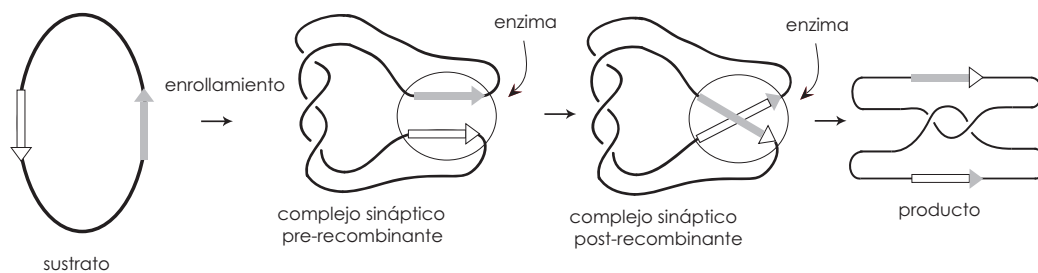


Figura 4.9:

4.4. Modelo matemático para la recombinación de sitio específico

4.4. Modelo matemático para la recombinación de sitio específico

El modelo matemático para la recombinación de sitio específico estudia los cambios topológicos en el ADN causados por las recombinasas durante la sinapsis, dados el sustrato y el producto se trata de obtener la estructura del complejo sináptico pre-recombinante y post-recombinante, es decir, la estructura del antes y después de la acción enzimática.

Para esto se considera a la enzima dentro de una bola B^3 y al ADN como un nudo (o enlace), cuando la enzima se une a los dos segmentos específicos se tiene que B^3 intersecta a el complejo sináptico, de manera que B^3 divide a éste en dos 2–marañas, la 2–maraña dentro de B^3 es el complejo sináptico local por tanto la acción enzimática se lleva a cabo dentro de B^3 , luego la 2–maraña que está afuera de B^3 permanece sin cambios.

Axioma 1

El complejo sináptico local es una 2–maraña y se subdivide en la suma $O_b + T$ de dos 2–marañas.

Donde T es la 2–maraña que representa la parte del sustrato que está unida a la enzima y que será alterada, mientras que O_b representa la parte del sustrato que está unida a la enzima pero que permanece sin cambios.

El mecanismo de la enzima se traduce al modelo matemático como el reemplazo de T por una 2–maraña R que representa los segmentos ya recombinados. De forma que se tiene lo siguiente:

$O_b + T =$ complejo sináptico local pre-recombinante,

$O_b + R =$ complejo sináptico local post-recombinante.

Se denota por O_f a la 2–maraña que representa a la parte del sustrato que no está unida a la enzima y que no es alterada.

Axioma 2

El complejo sináptico está dado por la cerradura de numerador de la suma $O_f + O_b + T$.

Axioma 3

El mecanismo de la enzima corresponde al reemplazo de T por R .

4. Aproximación Topológica a la Enzimología

Se tiene que una sólo reacción de recombinación de sitio específico está determinada por las siguientes dos ecuaciones

$$N(O_f + O_b + T) = \textit{Sustrato}$$

$$N(O_f + O_b + R) = \textit{Producto}$$

Si $O_f = T_0$, entonces se tiene que

$$N(O_f + O_b + T) = N(O_b + T) = \textit{Sustrato}$$

$$N(O_f + O_b + R) = N(O_b + R) = \textit{Producto}$$

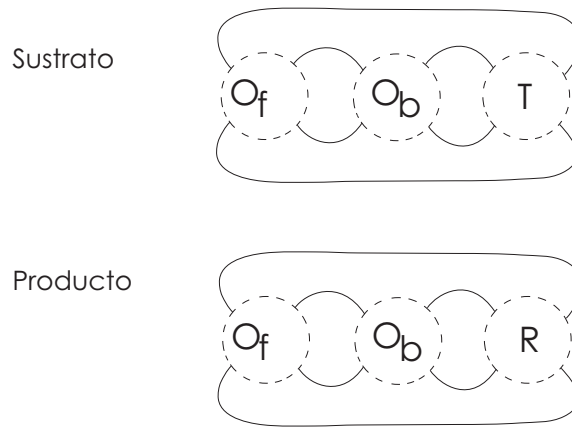


Figura 4.10:

Axioma 4

El mecanismo de la enzima es constante e independiente de la geometría (sobreenrollamiento) y la topología (anudamiento y enlace) del sustrato.

Este axioma dice que la acción enzimática se lleva a cabo dentro de B^3 , mientras que la parte del sustrato fuera de B^3 permanece igual, también implica que las 2-marañas T y R son independientes del sustrato o el producto y que son características de la enzima, de forma que cualquier cambio en el sustrato se verá reflejado en la topología de O_f , por tanto se tiene que O_b , T y R son constantes para cada reacción en la que intervenga la enzima.

4.4. Modelo matemático para la recombinación de sitio específico

Axioma 5

La recombinación progresiva se comporta como la suma de 2-marañas, es decir, después de la i -ésima reacción de recombinación progresiva el complejo sináptico local post-recombinante es $O_b + iR$.

De manera que en la primera reacción se reemplaza a T por R , en la segunda se reemplaza a R por $R + R$, en la tercera se reemplaza a $R + R$ por $R + R + R$ y así sucesivamente un número finito de veces.

Luego las ecuaciones asociadas a una recombinación progresiva que va en la i -ésima vez son:

$$N(O_f + O_b + T) = \text{Sustrato}$$

$$N(O_f + O_b + iR) = i\text{-ésimo Producto, con } 1 \leq i \leq n.$$

Se sabe por evidencia experimental que la mayoría de los productos obtenidos por la recombinación específica de sustratos con foma circular, sin anudamientos y sobre enrollamiento positivo o negativo son enlaces racionales.

4.4.1. Recombinación de Sitio Específico por la enzima $Tn3$ Resolvasa

La $Tn3$ resolvasa reacciona con ADN en forma circular que tenga segmentos específicos con repetición directa, no reacciona con enlaces de ADN libres ya que al parecer no puede yuxtaponerlos. Si el sustrato de ADN está sobre enrollado y sin anudamiento, el producto es un enlace de ADN, principalmente el enlace de Hopf, más aún si se toma en cuenta la orientación del sustrato, entonces el producto tiene número de enlace -1 .

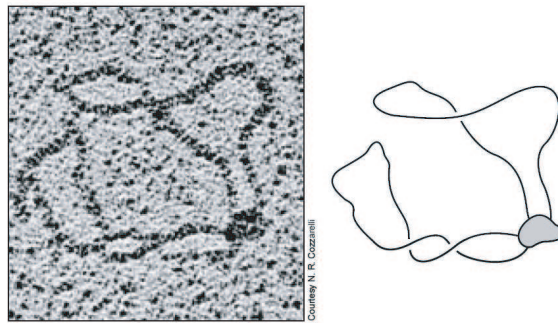


Figura 4.11: $Tn3$ resolvasa unida a una molécula de ADN

4. Aproximación Topológica a la Enzimología

Se sabe también que por cada 20 reacciones de recombinación distributiva se realiza una recombinación progresiva. Experimentalmente dos reacciones efectuadas en una recombinación progresiva por la enzima *Tn3* dan como producto ADN en forma del nudo figura de ocho, tres reacciones dan como producto ADN en forma del enlace Whitehead y cuatro reacciones dan como producto ADN en forma del nudo 6_2^* .

Teorema 4.4.1 *Supóngase que las 2-marañas O_b , T y R satisfacen las siguientes ecuaciones*

$$i) N(O_b + T) = C(1)$$

$$ii) N(O_b + T + T) = C(2)$$

$$iii) N(O_b + T + T + T) = C(2, 1, 1).$$

Entonces $\{O_b, R\}$ es $\{T(-3, 0), T(1)\}$, $\{T(3, 0), T(-1)\}$, $\{T(-2, -3, -1), T(1)\}$ o $\{T(2, 3, 1), T(-1)\}$

Demostración:

Véase C. Ernst and D. W. Sumners, *A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 108, (1990), 489 – 515. \square

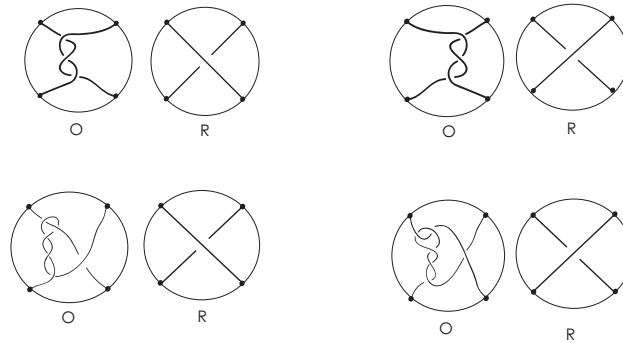


Figura 4.12: Soluciones a las ecuaciones del teorema anterior

4.4. Modelo matemático para la recombinación de sitio específico

Teorema 4.4.2 *Supóngase que las 2–marañas O_b , T y R satisfacen las siguientes ecuaciones*

$$i) N(O_b + T) = C(1)$$

$$ii) N(O_b + R) = C(2)$$

$$iii) N(O_b + R + R) = C(2, 1, 1)$$

$$iv) N(O_b + R + R + R) = C(1, 1, 1, 1, 1).$$

Entonces $\{O_b, R\}$ es $\{T(-3, 0), T(1)\}$ y $N(O_b + R + R + R + R) = C(1, 2, 1, 1, 1)$

Demostración:

Véase C. Ernst and D. W. Sumners, *A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 108, (1990), 489 – 515. \square

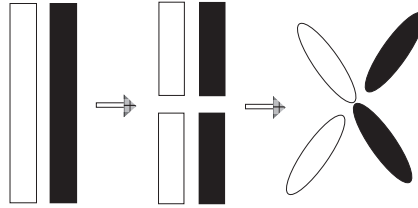


Figura 4.13: Interacción de la enzima $Tn3$

Dado que la interacción de la enzima $Tn3$ con los segmentos específicos es como se muestra en la figura 4.13, se considera que $T = T_0$.

4.4.2. Recombinación de Sitio Específico por la enzima fago λ integrasa (Int)

El bacteriófago λ o (fago λ) es un virus que está constituido por una cabeza en forma de icosaedro, donde se encuentra contenido su ADN, y una cola.

4. Aproximación Topológica a la Enzimología

El fago λ ataca a las bacterias, en especial a la bacteria *E. coli*, una vez que se infecta a la célula su ADN se cierra tomando la forma circular para después seguir uno de dos ciclos, el ciclo lítico, en el cual se reproduce en aproximadamente 20 minutos o el ciclo lisogénico, en el cual se da la recombinación de sitio específico por la enzima Int, integrando su ADN al ADN de la célula huésped.

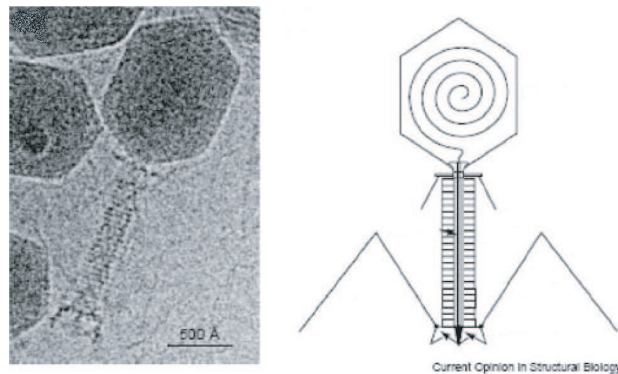


Figura 4.14: bacteriófago λ

La enzima Int pertenece a la familia de las integrasas y actúa en la recombinación de sitio específico de forma no progresiva de dos segmentos de una misma molécula o diferentes moléculas de ADN con repetición directa o invertida. A diferencia de la enzima *Tn3* el mecanismo de la enzima Int no está dado por recombinación progresiva, sin embargo sí requiere que el sustrato esté sobreenrollado negativamente.

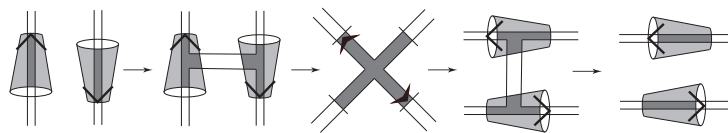


Figura 4.15: Interacción de los segmentos en presencia de la enzima Int

En los experimentos realizados por N. J. Crisona, R. L. Weinberg, B. J. Peter, D. W. Summers y N. R. Cozzarelli en el artículo *The Topological Mechanism of Phage λ Integrase* se tomó como sustrato ADN en forma circular de una o dos moléculas con sobreenrollamiento negativo con dos segmentos identificados por Int con repetición invertida o directa.

4.4. Modelo matemático para la recombinación de sitio específico

El ADN circular que tenía los segmentos específicos con repetición invertida da como productos nudos racionales de la forma $C(-(2k+1))$, con $k = 0, 1, 2, \dots, 11$, mientras que el ADN circular que tenía los segmentos específicos con repetición directa da como productos enlaces racionales de la forma $C(-(2k))$, con $k = 0, 1, 2, \dots, 11$. La razón por la cual a partir del nudo trivial se obtiene una basta familia de distintos nudos y enlaces racionales es que el nudo trivial puede estar sobreenrollado, y parte de esto puede ser atrapado en la reacción.

El siguiente teorema es la caracterización para la reacción en donde los segmentos tienen repetición invertida.

Teorema 4.4.3 *Si existen 2-marañas O_k , con $k = 1, 2, 3$, T y R tales que satisfacen las siguientes ecuaciones:*

$$i) N(O_k + T) = C(1)$$

$$ii) N(O_k + R) = C(-(2k+1))$$

Entonces T , R y O_0 son 2-marañas racionales.

Demostración:

Véase C. Ernst and D. W. Sumners, *A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 108, (1990), 489 – 515. \square

El siguiente teorema es la caracterización para la reacción en donde los segmentos tienen repetición directa.

Teorema 4.4.4 *Si existen 2-marañas O_k , con $k = 1, 2, 3$, T y R tales que satisfacen las siguientes ecuaciones:*

$$i) N(O_k + T) = C(1)$$

$$ii) N(O_k + R) = C(-(2k))$$

Entonces T , R y O_0 son 2-marañas racionales.

Demostración:

Véase C. Ernst and D. W. Sumners, *A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 108, (1990), 489 – 515. \square

4. Aproximación Topológica a la Enzimología

En base a los experimentos realizados por N. J. Crisona, R. L. Weinberg, B. J. Peter, D. W. Sumners, N. R. Cozzarelli en el artículo *The Topological Mechanism of Phage λ Integrase* se obtuvieron las siguientes conjeturas:

Para el sustrato con segmentos de repetición invertida:

Conjetura 4.4.5 *Supóngase que las 2-marañas O_f , O_b , T y R satisfacen las siguientes ecuaciones:*

Para $O_f = T_0$

$$i) N(O_f + O_b + T) = C(1)$$

$$ii) N(O_f + O_b + R) = C(3)$$

Para $O_f = T(2)$

$$i) N(O_f + O_b + T) = C(1)$$

$$ii) N(O_f + O_b + R) = C(5)$$

Para $O_f = T(4)$

$$i) N(O_f + O_b + T) = C(1)$$

$$ii) N(O_f + O_b + R) = C(7)$$

Para $O_f = T(6)$

$$i) N(O_f + O_b + T) = C(1)$$

$$ii) N(O_f + O_b + R) = C(9).$$

Entonces $O_b = T(3)$ y $R = T_0$ con orientación invertida.

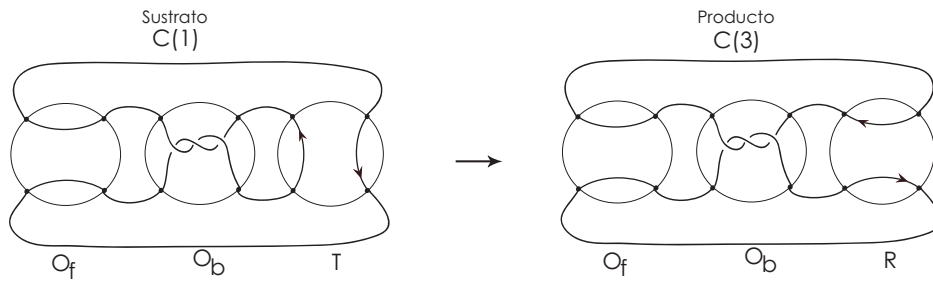


Figura 4.16: Sustrato con segmentos de repetición inversa

4.4. Modelo matemático para la recombinación de sitio específico

Para el sustrato con segmentos de repetición directa:

Conjetura 4.4.6 *Supóngase que las 2-marañas O_f , O_b , T y R satisfacen las siguientes ecuaciones:*

Para $O_f = T(1)$

$$i) N(O_f + O_b + T) = C(1)$$

$$ii) N(O_f + O_b + R) = C(-4)$$

Para $O_f = T(3)$

$$i) N(O_f + O_b + T) = C(1)$$

$$ii) N(O_f + O_b + R) = C(-6)$$

Para $O_f = T(5)$

$$i) N(O_f + O_b + T) = C(1)$$

$$ii) N(O_f + O_b + R) = C(-8)$$

Para $O_f = T(7)$

$$i) N(O_f + O_b + T) = C(1)$$

$$ii) N(O_f + O_b + R) = C(-10).$$

Entonces $O_b = T(3)$ y $R = T_0$ con orientación invertida.

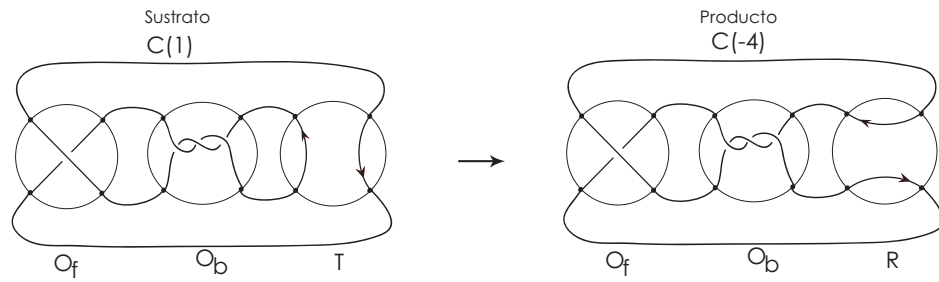


Figura 4.17: Sustrato con segmentos de repetición directa

4. Aproximación Topológica a la Enzimología

Para el sustrato con segmentos en diferentes moléculas:

Conjetura 4.4.7 *Supóngase que las 2–marañas O_f , O_b , T y R satisfacen las siguientes ecuaciones*

Para $O_f = T(2)$

- i) $N(O_f + O_b + T) = C(1)$*
- ii) $N(O_f + O_b + R) = N(T(2, 3)) \approx C(2, 2, 1)$*

Para $O_f = T(2, 2)$

- i) $N(O_f + O_b + T) = C(1)$*
- ii) $N(O_f + O_b + R) = N(T(2, 5)) \approx C(2, 4, 1)$*

Para $O_f = T(2, 4)$

- i) $N(O_f + O_b + T) = C(1)$*
- ii) $N(O_f + O_b + R) = N(T(2, 7)) \approx C(2, 6, 1)$*

Para $O_f = T(2, 6)$

- i) $N(O_f + O_b + T) = C(1)$*
- ii) $N(O_f + O_b + R) = N(T(2, 9)) \approx C(2, 8, 1)$*

Entonces $O_b = T(3)$ y $R = T_0$ con orientación invertida.

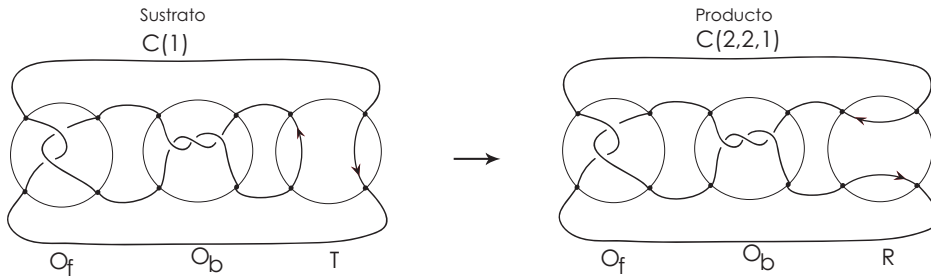


Figura 4.18: Sustrato con segmentos en diferentes moléculas

Dada la interacción de la enzima Int con los segmentos específicos como se muestra en la figura 4.15, se considera que $T = T_\infty$ con orientación invertida.

Conclusión

Me tomo alrededor de un año terminar esta tesis, había estado trabajando con otro tema de tesis algunos meses antes de empezar con éste, pero dado mi reciente interés por la Biología fue que el Dr. Xicoténcatl propuso un tema alternativo de tesis que involucraba una aplicación importante a la Biología, de manera que este trabajo tiene resultados muy interesantes tanto en Matemáticas como en Biología a partir de las 2–marañas racionales y los enlaces racionales, cabe mencionar que aunque no se incluyeron los temas de espacios de Lens y cirugía de Dehn, éstos son necesarios en la resolución de ecuaciones de 2–marañas racionales.

Finalmente este tema es muy vasto y relativamente nuevo, comenzó con C. Ernst and D. W. Sumners en 1990 con un modelo matemático que describía el mecanismo de las enzimas $Tn3$ e Int, las cuales participan en la recombinación de sitio específico del ADN (siendo éste de suma importancia para el ser humano); la deducción de la 2–maraña T fue esencial, para el mecanismo de la enzima $Tn3$ se consideró que $T = T_0$ con repetición directa, mientras que para el mecanismo de la enzima Int se consideró que $T = T_\infty$ con repetición inversa, siendo éstas las 2–marañas racionales con las que los productos teóricos coinciden con los experimentales.

Sin embargo existen muchas otras enzimas, de forma que habrá muchas cosas nuevas que no están en este trabajo, como modificaciones al modelo expuesto aquí, variaciones de T , ya que T no es necesariamente la misma para cada enzima, un modelo más general que incluya productos o sustratos que tengan forma de nudos tóricos, etc., en referencia a esto se pueden consultar los siguientes artículos:

- C. Cerf *A Note on the Tangle Model for DNA Recombination*, Bulletin of Mathematical Biology, Volumen 60, págs 67 – 78, 1998.

4.4. Modelo matemático para la recombinación de sitio específico

- I. K. Darcy *Modeling protein-DNA complexes with tangles*, Computers and Mathematics with Applications archive, Volumen 55, págs 924 – 937, 2008.
- M. Vázquez y D. W. Sumners *Tangle analysis of Gin site-specific recombination*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 136, págs 565 – 582, 2004.
- M. Vázquez, S. D. Colloms y D. W. Sumners *Tangle Analysis of Xer Recombination Reveals only Three Solutions, all Consistent with a Single Three-dimensional Topological Pathway*, Journal of Molecular Biology, Volumen 346, págs 493 – 504, 2005.

Bibliografía

- [1] C. C. Adams, *The Knot Book: An Elementary Introduction to the mathematical Theory of Knots* , American Mathematical Society, 2004.
- [2] A. D. Bates, A. Maxwell, *DNA Topology*, Oxford University Press 2005.
- [3] N. J. Crisona, R. L. Weinberg, B. J. Peter, D. W. Sumners, N. R. Cozzarelli *The Topological Machanism of Phage λ Integrase*, Journal of Molecular Biology, Volumen 289, págs 747 – 775, 1999.
- [4] P. R. Cromwell, *Knots and Links*, Cambridge University Press, 2005.
- [5] C. Ernst and D. W. Sumners, *A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 108, págs 489 – 515, 1990.
- [6] N. D. Gilbert, T. Porter, *Knots and Surfaces* , Oxford Science Publications, 1994.
- [7] B. R. Glick y J. J. Pasternak, *Molecular Biotechnology: Principles and Applications of Recombinant DNA*, ASM Press, 2003.
- [8] J. J. Greene, V. B. Rao, *Recombinant DNA principles and methodologies*, CRC Press, 1998.
- [9] A. Kawauchi, *A Survey of Knot Theory* , Birkhäuser, 1996.
- [10] L. H. Kauffman y S. Lambropoulou, *On the classification of rational tangles*, arXiv:math/0311499v2 [math.GT] enero 2004.
- [11] C. Livingstone, *Knot Theory* , The Carus Mathematical Monographs, número 24, 1993.

BIBLIOGRAFÍA

- [12] J. C. Misra, *Biomathematics: modelling and simulation* , World Scientific Publishing Company, 2006, pags 194 – 223.
- [13] K. Murasugi, *Knot Theory and its Applications*, Birkhäuser, 1996.
- [14] D. W. Sumners, *Lifting the Curtain: Using Topology to Probe the Hidden Action of Enzymes*, NOTICES OF THE AMS, Volume 42, número 5, mayo 1995.
- [15] P. Turner, A. McLennan, A. Bates and M. White *Molecular Biology*, BIOS Instant Notes, 2005.

Índice alfabético

- 2–maraña, 42
- 2–maraña
 - trivial, 46
- 2–maraña racional, 55
- n –maraña, 41
- n –maraña
 - trivial, 42
- ADN, 71
 - forma circular , 73
- Algoritmo de Conway, 49
- cerradura del denominador, 43
- cerradura del numerador, 43
- complejo sináptico, 79
 - local, 79
- deformación elemental, 3
- descomposición en marañas, 56
- diagrama regular, 8
 - alternante, 10
- enlace, 6
 - compuesto, 56
 - localmente trivial, 56
 - primo, 56
 - propio, 56
 - separable, 56
- enlace racional, 57
- enzimas, 75
- equivalencia de 2–marañas, 43
- equivalencia de nudos, 4
 - con orientación, 5
- forma B del ADN, 73
- Forma Normal de Conway , 58
- Forma Normal de Schubert, 60
- fracción continua, 53
 - regular, 54
- imagen especular, 10
- invariante de enlaces, 13
- invariante de nudos, 13
- movimientos elementales, 3
- movimientos reidemeister, 14
- número de cruce, 23
- número de desanudamiento, 26
- número de enlace, 27
- número de puente, 24
- nucleótido, 71
- nudo, 1
 - 3–coloreable, 16
 - etiquetable mod 3 , 20
 - reversible, 10
 - trébol, 2
 - trivial, 2
- polinomio

ÍNDICE ALFABÉTICO

de Alexander, 29
de Conway, 32
de Jones, 37
polinucleótido, 72
proyección regular, 8

recombinación de sitio específico, 78
recombinación distributiva, 79
recombinación progresiva, 79
recombinasas, 78
reflexión, 10

sinapsis, 79
sobreenrollamiento negativo del ADN,
74
sobreenrollamiento positivo del ADN,
74
suma de 2–marañas, 44

Teorema de Conway, 55
topoisomerasas, 76