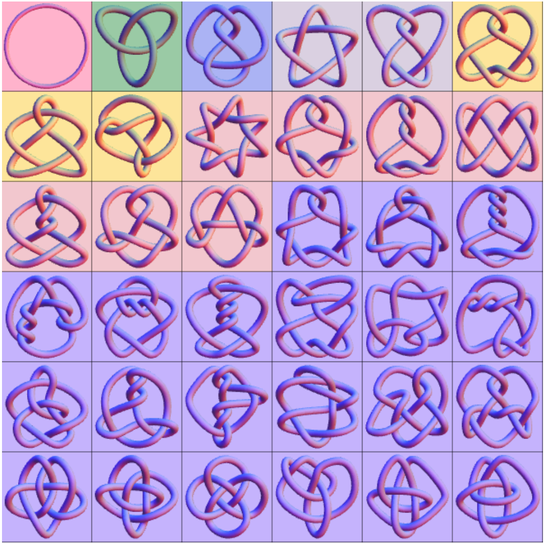
Clasificación de Nudos III

Escuela FICO-González Acuña de nudos y 3 variedades

Luis Celso Chan Palomo
Universidad Autónoma de Yucatán

December 13, 2017

Tabla de clasificación



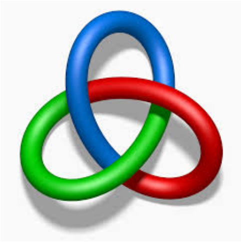
Repaso: 3-coloraciones

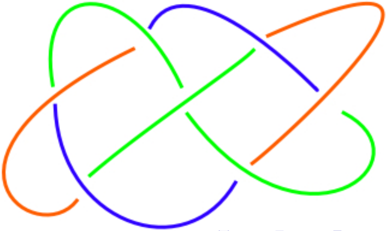
Definición

Un diagrama D de un nudo K se denomina 3-coloreable si cada arco (entre un cruce por abajo y el siguiente) de D puede ser pintado usando alguno de los colores Azul, Rojo y Verde tal que se cumpla lo siguiente:

- *al menos se usan dos colores, y*
- *en cada cruce llega un mismo color o exactamente los 3 colores.*

Ejemplo





Invariante de nudos

Teorema

Si un diagrama de un nudo K es 3-coloreable entonces todos los diagramas de K son 3-coloreables.

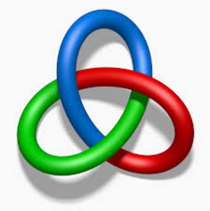
Definición

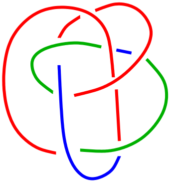
Un nudo se denomina 3-coloreable si tiene al menos un diagrama 3-coloreable.

Ejemplo

El nudo trivial no es 3-coloreable:

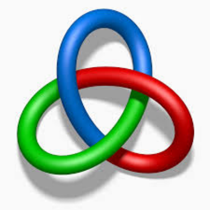
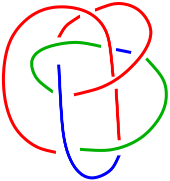
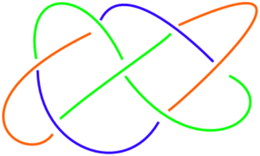
Las siguientes curvas están anudadas:



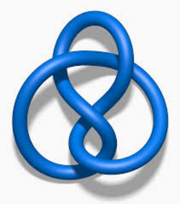
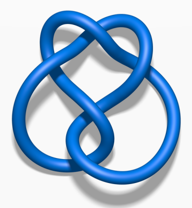
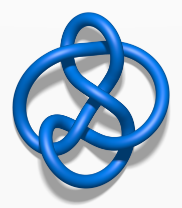


Problema

Las siguientes nudos son 3-coloreables y por tanto no es posible distinguirlos:

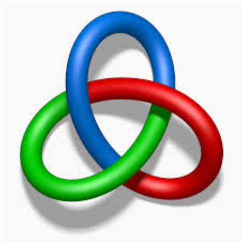
Los siguientes nudos no son 3-coloreables y por tanto no es posible distinguirlos:

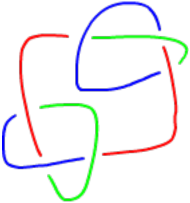





Tricoloraciones

Problema

Es posible distinguir los siguientes nudos con las 3-coloraciones:

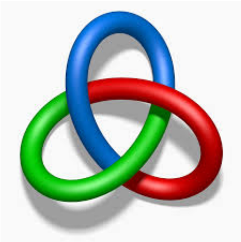


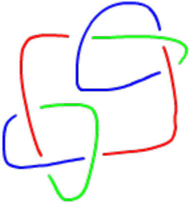


Tricoloraciones

Problema

Es posible distinguir los siguientes nudos con las 3-coloraciones:





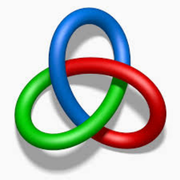
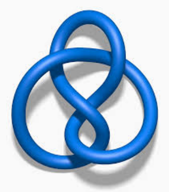
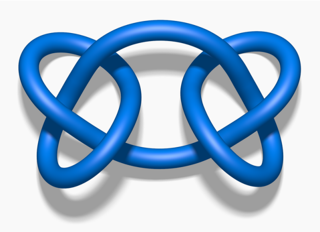
Definición

Un diagrama D de un nudo K se denomina tricoloreable si cada arco de D puede ser pintado usando alguno de los colores Azul, Rojo y Verde tal que en cada cruce llega un mismo color o exactamente los 3 colores. Se denotará por $Tri(D)$ al número de diferentes tricoloraciones de D. Las tricoloraciones que usan un único color se denominan tricoloraciones triviales.

Invariante

Ejemplo

El Tri(D) para cada uno de los siguientes nudos:

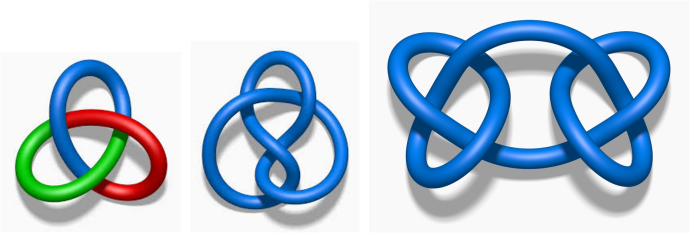




es

Invariante

Ejemplo

El Tri(D) para cada uno de los siguientes nudos:



es 9,3 y 27, respectivamente.

Teorema

Tri(K) es un invariante de nudos (o enlaces), es decir, todos los diagramas D de un nudo son tales que tienen el mismo Tri(D).

Lema (Propiedades)

Sea K un nudo (o enlace) entonces se cumple que:

- $Tri(K)$ *es una potencia de 3.*
- $Tri(K_1)Tri(K_2) = 3Tri(K_1 + K_2)$.

Lema (Propiedades)

Sea K un nudo (o enlace) entonces se cumple que:

- $Tri(K)$ *es una potencia de 3.*
- $Tri(K_1)\,Tri(K_2) = 3\,Tri(K_1 + K_2)$.

Proof.

1) Identifique los colores A, R y V con $0, 1, 2 \in \mathbb{Z}_3$, respec. Sea D un diagrama de K y considere

$$f : \{\text{3-coloraciones de } D\} \to \mathbb{Z}_3^r$$

donde r es el número de arcos de D.

Lema (Propiedades)

Sea K un nudo (o enlace) entonces se cumple que:

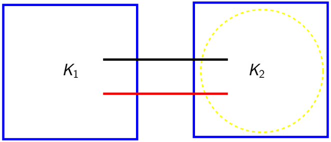
- *$Tri(K)$ es una potencia de 3.*
- *$Tri(K_1)\,Tri(K_2) = 3\,Tri(K_1 + K_2)$.*

Proof.

1) Identifique los colores A, R y V con $0, 1, 2 \in \mathbb{Z}_3$, respec. Sea D un diagrama de K y considere

$$f : \{\text{3-coloraciones de } D\} \to \mathbb{Z}_3^r$$

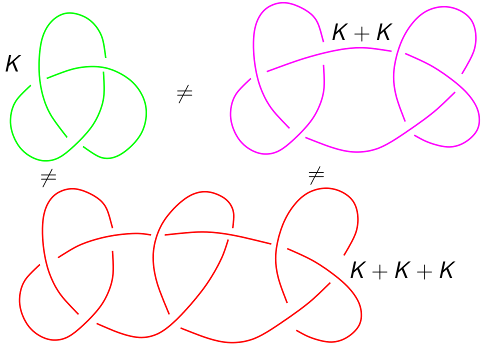
donde r es el número de arcos de D.
2) Suponer que $K_1 + K_2$ tiene una 3-coloración



Infinidad de Nudos

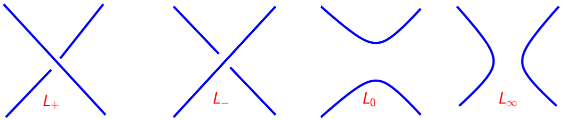
Nota

Existe una infinidad de nudos distintos.

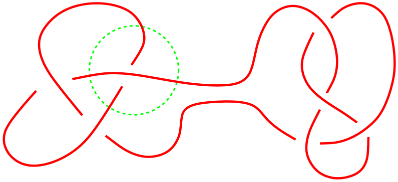


Lema

Sean L_+, L_-, L_0 y L_∞ los 4 diagramas de enlaces ilustrados en la figura. Entonces entre los 4 números $Tri(L_+)$, $Tri(L_-)$, $Tri(L_0)$ y $Tri(L_\infty)$ 3 son iguales entre ellos y el cuarto es igual a los otros 3 o es 3 veces más grande, es decir, $Tri(L_+)/Tri(L_-) \in \{1, 3, 1/3\}$.



Ejemplo



Congruencias

Definición

Sean a y b en $\mathbb{Z}$ *y sea* $m \geq 1$ *fijo. Se dice que a es congruente a b módulo m, denotado por* $a \equiv b$ *mod* m*, si se cumple que m divide* $a - b$.

Ejemplo

1. $15 \equiv 3$ *mod* 6, *pues 6 divide 15-3=12,*
2. $29 \equiv 14$ *mod* 5

Congruencias

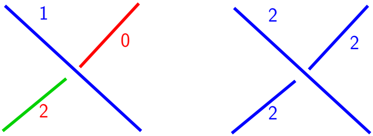
Definición

Sean a y b en $\mathbb{Z}$ y sea $m \geq 1$ fijo. Se dice que a es congruente a b módulo m, denotado por $a \equiv b$ mod m, si se cumple que m divide $a - b$.

Ejemplo

1. $15 \equiv 3$ *mod* 6, *pues 6 divide 15-3=12,*
2. $29 \equiv 14$ *mod* 5

Nota



$0 + 1 + 2 \equiv 0 \mod 3$ $\quad$ $2 + 2 + 2 \cong 0 \mod 3$

Definición

Un diagrama D de un nudo K se denomina 3-coloreable si cada arco (entre un cruce por abajo y el siguiente) de D puede ser pintado usando los colores Azul, Rojo y Verde tal que se cumpla:

- *al menos se usan dos colores, y*
- *en cada cruce llega un mismo color o los 3 colores.*

Definición

Un diagrama D de un nudo K se denomina 3-coloreable si cada arco de D puede ser identificado con alguno de los números $0, 1, 2$ tal que:

- *al menos se usan dos números, y*
- *en cada cruce se cumple que $x + y + z \equiv 0 \; mod \; 3$ donde x, y, z denotan los número asignados a los arcos.*

Definición

Un diagrama D de un nudo K se denomina 3-coloreable si cada arco (entre un cruce por abajo y el siguiente) de D puede ser pintado usando los colores Azul, Rojo y Verde tal que se cumpla:

- *al menos se usan dos colores, y*
- *en cada cruce llega un mismo color o los 3 colores.*

Definición

Un diagrama D de un nudo K se denomina 3-coloreable si cada arco de D puede ser identificado con alguno de los números $0, 1, 2$ *tal que:*

- *al menos se usan dos números, y*
- *en cada cruce se cumple que* $x + y + z \equiv 0 \ mod \ 3$ *donde* x, y, z *denotan los número asignados a los arcos.*

Pregunta

Cúal sería una generalización para p arbitrario en lugar de $p = 3$*?*

p-coloraciones

Definición

Un *diagrama* D *de un nudo* K *se denomina* *p-coloreable* *si cada arco de* D *puede ser identificado con alguno de los números* $0, 1, 2, \ldots, p-1$ *tal que:*

- *al menos se usan dos números, y*
- *en cada cruce se cumple que* $2x \equiv y + z \mod p$ *donde* y, z *denotan los número asignados a los arcos por abajo y* x *el número del* *arco por arriba*.

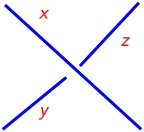
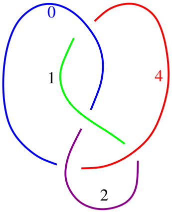


Diagrama con una 5-coloración:



Invariante de nudos

Teorema

Si un diagrama de un nudo K es p-coloreable entonces todos los diagramas de K son p-coloreables.

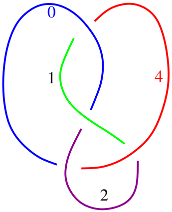
Definición

Un nudo se denomina p-coloreable si tiene al menos un diagrama p-coloreable.

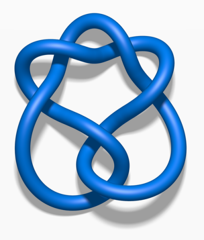
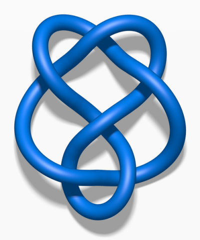
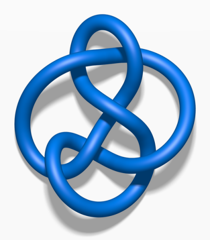
Nota

El nudo trivial no es p-coloreable:

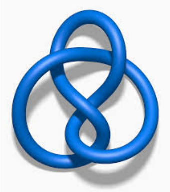
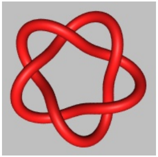
Nudo 5-coloreable y por tanto anudado:



Los siguientes nudos primos de 6-cruces son 3-coloreables, 11-coloreable y 13-coloreable, respectivamente y por tanto es posible distinguirlos:

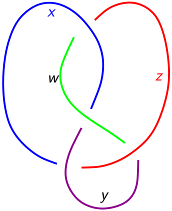
Los siguientes nudos primos son 5-coloreables, y por tanto no es posible distinguirlos:

Algebra lineal en $\mathbb{Z}_p$

Ejemplo

Encontrar todos los p para los cuales el nudo $K = 4_1$ es p-coloreable:



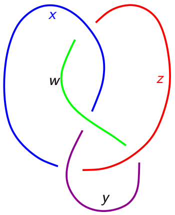
$$\begin{aligned} 2x &= w + z \\ 2w &= x + y \end{aligned}$$

Operaciones elementales $E_{ij}(c)$ con enteros ($c \in \mathbb{Z}$) para triangular B que no es invertible:

Algebra lineal en $\mathbb{Z}_p$

Ejemplo

Encontrar todos los p para los cuales el nudo $K = 4_1$ es p-coloreable:



$$\begin{aligned} 2x &= w + z \\ 2w &= x + y \end{aligned}$$

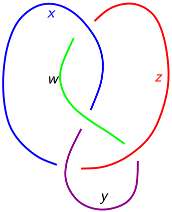
Operaciones elementales $E_{ij}(c)$ con enteros ($c \in \mathbb{Z}$) para triangular B que no es invertible:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Algebra lineal en $\mathbb{Z}_p$

Ejemplo

Encontrar todos los p para los cuales el nudo $K = 4_1$ es p-coloreable:



$$\begin{aligned} 2x &= w + z \\ 2w &= x + y \end{aligned}$$

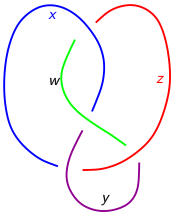
Operaciones elementales $E_{ij}(c)$ con enteros ($c \in \mathbb{Z}$) para triangular B que no es invertible:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \to$$

Algebra lineal en $\mathbb{Z}_p$

Ejemplo

Encontrar todos los p para los cuales el nudo $K = 4_1$ es p-coloreable:



$$\begin{aligned} 2x &= w+z \\ 2w &= x+y \end{aligned}$$

Operaciones elementales $E_{ij}(c)$ con enteros ($c \in \mathbb{Z}$) para triangular B que no es invertible:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Trucazo

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{43}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota

Podemos suponer $w = 0$ *pues* $x = y = z = w = 1$ *es solución del sistema]*

Trucazo

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{43}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota

Podemos suponer $w = 0$ *pues* $x = y = z = w = 1$ *es solución del sistema]*

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \to$$

Trucazo

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{43}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota

Podemos suponer $w = 0$ pues $x = y = z = w = 1$ es solución del sistema]

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = A$$

Si p es primo entonces $\mathbb{Z}_p$ es campo. Luego existen dos casos:

Trucazo

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{43}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota

Podemos suponer $w = 0$ pues $x = y = z = w = 1$ es solución del sistema]

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = A$$

Si p es primo entonces $\mathbb{Z}_p$ es campo. Luego existen dos casos:
Caso 1: $(5, p) = 1$. Implica A invertible y $x = y = z = w = 0$.

Trucazo

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{43}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota

Podemos suponer $w = 0$ pues $x = y = z = w = 1$ es solución del sistema]

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = A$$

Si p es primo entonces $\mathbb{Z}_p$ es campo. Luego existen dos casos:
Caso 1: $(5, p) = 1$. Implica A invertible y $x = y = z = w = 0$.
Caso 2: $(5, p) = 5$. Implica $p = 5$.

Contando p-coloraciones

Ejercicio

1. *Contar el número de 5-coloraciones del nudo* $K = 4_1$.
2. *Calcular la dimensión del espacio nulo de la matriz* $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$.
3. *Relacionar el número de 5-coloraciones con la dimensión del espacio nulo de la matriz* $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$.

Contando p-coloraciones

Ejercicio

1. *Contar el número de 5-coloraciones del nudo* $K = 4_1$.
2. *Calcular la dimensión del espacio nulo de la matriz* $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$.
3. *Relacionar el número de 5-coloraciones con la dimensión del espacio nulo de la matriz* $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$.

Ejercicio (Generalización)

Sea D el diagrama de un nudo con n arcos y suponga que es p-coloreable. Entonces existe $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{Z}_p)$. Al borrar una fila y una columna de B se obtiene una matriz $A \in Mat_{n-1\times n-1}(\mathbb{Z}_p)$. Si $m = dim\ Ker\ A$ demostrar que el número de p-coloraciones es

$$p(p^m - 1).$$

Observación

Si todas las etiquetas de los arcos de un nudo que es p-coloreable son multiplicadas por una constante q entonces el diagrama es pq-coloreable: porqué?

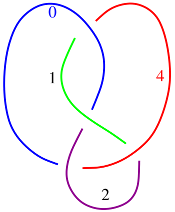


Figure: 5-coloración

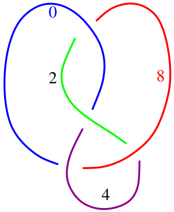


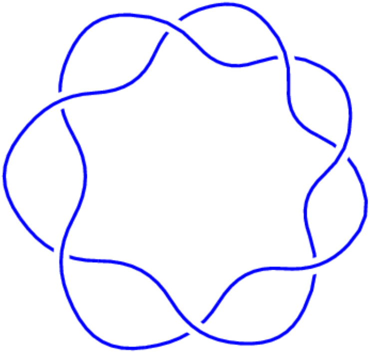
Figure: 10-coloración

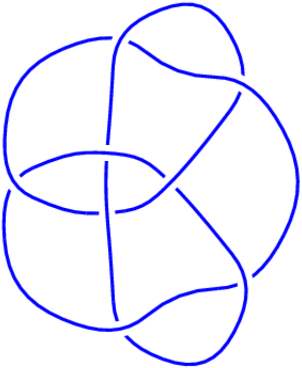
Por lo tanto basta estudiar p primos.

Más de un primo

Ejercicio

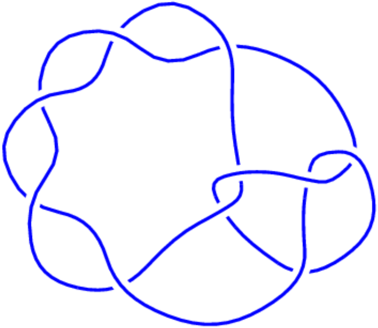
Demostrar que los nudos 4_1, 7_1 y 8_{16} son distintos. [Hint: 8_{16} es 5-coloreable y 7-coloreable]





Ejemplo

El nudo $K = 10_{124}$ *no es p-coloreable.*



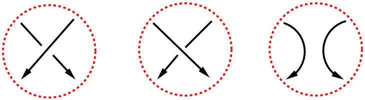
Polinomio de Jones

Definición

Sean K un nudo (o enlace) orientado y D un diagrama regular de K. El polinomio de Jones de K, $V_K(t)$, se define por los siguientes axiomas:

- *Si K es trivial entonces $V_K(t) = 1$.*
- *Sean D_+, D_- y D_0 los siguientes diagramas. Entonces:*

$$t^{-1}V_{D_+}(t) - tV_{D_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{D_0}(t).$$



D_+ D_- D_0

Nota

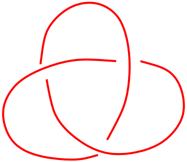
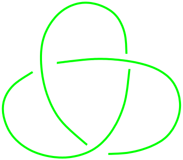
El pol. de Jones distingue a todos los nudos primos de 8 cruces.

Treboles distintos

Teorema

Si K^m es el nudo espejo de K entonces $V_{K^m}(t) = V_K(t^{-1})$.

Ejemplo

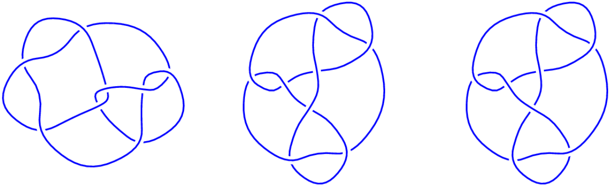
K  $\neq$  K^*

$t + t^3 - t^4$ $\qquad$ $t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$

Nudos no alternantes

Definición

Un nudo se denomina no-alternante si no es alternante, es decir, si no tiene ningún diagrama alternante.



Problema

Cómo demostrar que los nudos anteriores: 8_{19}, 8_{20} *y* 8_{21} *no son alternantes?*

Ancho del polinomio de Jones

Definición

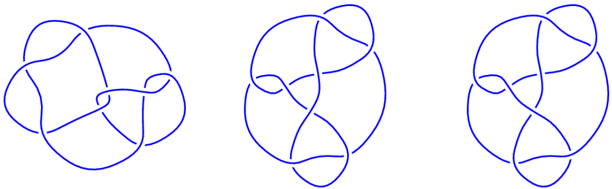
Se define el ancho del polinomio de Jones de un nudo K como la diferencia entre la potencia más grande y la más chica que ocurre en el polinomio: $B(V_K(t)) = M(V_K(t)) - m(V_K(t))$.

Ejemplo

Si $V_K(t) = -t^{-5} + t^{-4} - t^{-3} + 2t^{-2} - t^{-1} + 2 - t$ *entonces* $B(V_k(t)) = 1 - (-5) = 6$.

Nota

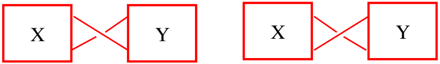
Los nudos 8_{19}, 8_{20} *y* 8_{21} *son tales que* $B(V_K(t)) < 8$. *(www.indiana.edu/knotinfo/)*



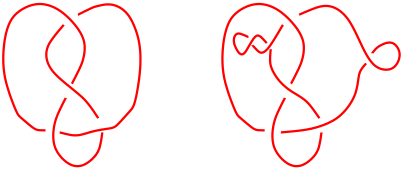
Diagramas reducidos

Definición

Un diagrama se denomina reducido si no posee cruces de la siguiente manera:



Ejemplo



Reducido

No Reducido

Teorema

Sea D un diagrama de n cruces de un nudo orientado con polinomio de Jones $V_K(t)$. Entonces:

- $B(V_K(t)) \leq n$,
- *Si D es alternante y reducido entonces $B(V_K(t)) = n$.*

Teorema

Sea D un diagrama de n cruces de un nudo orientado con polinomio de Jones $V_K(t)$. Entonces:

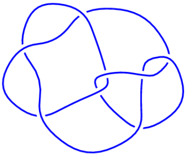
- $B(V_K(t)) \leq n$,
- *Si D es alternante y reducido entonces $B(V_K(t)) = n$.*

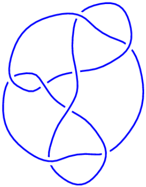
Corolario (Kauffman, Murasugi, Thistlewaite-1986)

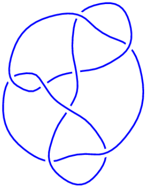
Si un nudo tiene un diagrama alternante reducido de n cruces entonces no tiene un diagrama con menos de n cruces.

Nota

Los nudos 8_{19}, 8_{20} y 8_{21} son no alternantes.







Ejercicios

1. Demostrar que si un nudo (o enlace) K es 3-coloreable entonces su reflejado K^m también es 3-coloreable.
2. Demostrar que si un nudo (o enlace) K es p-coloreable entonces su reflejado K^m también es p-coloreable.
3. Demostrar que los nudos 4_1, 7_1 y 8_{16} son distintos. [Hint: 8_{16} es 5-coloreable y 7-coloreable]
4. Sea D el diagrama de un nudo con n arcos y suponga que es p-coloreable. Entonces existe $B \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Z}_p)$. Al borrar una fila y una columna de B se obtiene una matriz $A \in \mathrm{Mat}_{n-1 \times n-1}(\mathbb{Z}_p)$. Si $m = \dim \operatorname{Ker} A$ demostrar que el número de p-coloraciones es

$$p(p^m - 1).$$