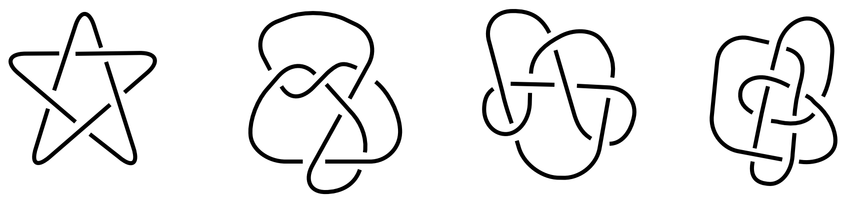
Curso Avanzado de Topología: Teoría de Nudos
Prof: Mario Eudave Muñoz
Semestre 2018 - II
Instituto de Matemáticas, UNAM
Tarea 1

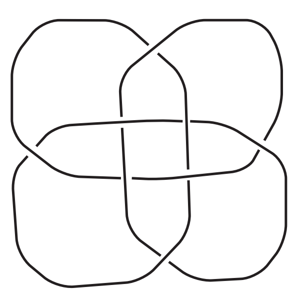
1. Probar que el deteminante de un diagrama es independiente bajo la movida 3 de Reidemeister.

2. Encontrar el deteminante de los siguientes nudos y determinar para que números primos p, los nudos son p-coloreables.

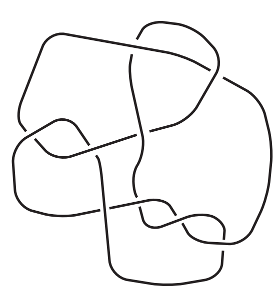


4. Sea D un diagrama de un nudo K, y sea A su matriz de coloración. Sea $G(D)$ el grupo abeliano determinado por A, es decir, si A es una matriz de tamaño $n \times n$, $G(D)$ es el grupo abeliano con n generados y n relaciones, las cuales están dadas por los renglones de la matriz. ¿Bajo que operaciones en la matriz el grupo permanece invariante? Probar que $G(D)$ es un invariante de K, o sea, que $G(D)$ es invariante bajo movidas de Reidemeister, por lo que lo denotamos por $G(K)$. Probar que $G(K) \cong \mathbb{Z} \oplus H$, donde H es un grupo finito, y $|H| = det(K)$, o sea H tiene $det(K)$ elementos. ¿Cual es la relación entre $G(K)$ y las p-coloraciones de K?

5. Calcular $G(K)$ y $det(K)$ para los siguientes nudos. (Sugerencia: encontrar sistemas de ecuaciones para las coloraciones con pocas variables).

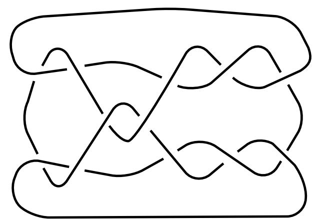


8_{18}

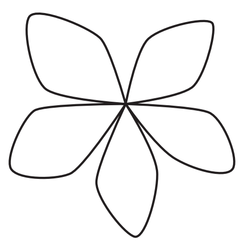


9_{24}

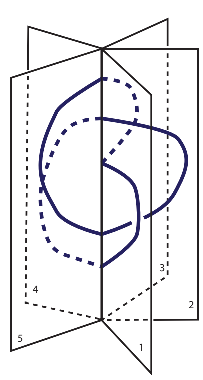
3. Probar que para el siguiente nudo K, se tiene que $det(K) = 1$, o sea que K no es p-coloreable para ningún primo p.



6. Probar que todo nudo o enlace K tiene una proyección con un único punto singular, el cual tiene que ser de multiplicidad alta. El diagrama entonces se ve como una colección de bucles alrededor de un punto. Denotamos por $bucl(K)$ al mínimo número de bucles de K, tomado de entre todas sus presentaciones con un solo punto singular. Dado un diagrama de bucles, ¿como se podría recuperar al nudo que representa el diagrama? ¿que información hay que ponerle al cruce? Dibujar diagramas de algunos nudos con un único punto singular.



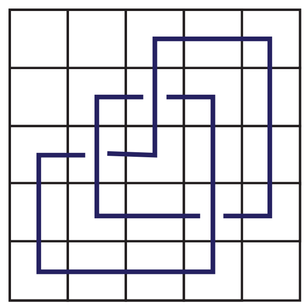
7. Consideremos una colección de n semiplanos $H_1, \dots, H_n$ en $\mathbb{R}^3$ que se encuentran en una recta L. Un nudo o enlace K tiene una presentación en n arcos, si K se puede encajar en la unión de los semiplanos, de modo que $K \cap H_i$ consiste exactamente de un arco. Entonces $K \cap L$ consiste de $2n$ puntos. Probar que todo nudo o enlace tiene una presentación en arcos, para algún n. Al mínimo n para el cual K tiene una presentacion en arcos, lo llamamos el número de arcos de K, $arc(K)$. Encontrar presentaciones de arcos mínimas para algunos nudos. ¿Como dibujar los nudos sin dibujar los planos?



8. Consideremos una rejilla de tamaño $n \times n$, o sea un cuadrado dividido en n columnas y n renglones de cuadrados pequeños. Marcamos unos cuadrados con una X, otros con O, algunos quedan vacíos pero ninguno tiene dos marcas. Supongamos que cada renglón tiene una sola X y una sola O, y que cada columna también tiene una sola X y una sola O. Formamos un nudo o enlace al considerar una recta por cada renglón y una por cada columna, la cual une a los dos puntos marcados con X y O. Para asignar los cruces, suponemos que las rectas verticales siempre pasan por arriba de las rectas horizontales. Probar que todo nudo o enlace tiene un diagrama de rejilla. Al mínimo n para el cual K tiene un diagrama de rejilla se el nombre el número de rejilla de K, $rej(K)$. (De hecho la rejilla determina un enlace orientado, al orientar cada columa de X a O y cara renglón de O a X.) Dibujar algunos nudos con un diagrama de rejilla.

		X		o
	X		o	
X		o		
	o			X
o			X	

$\longrightarrow$



9. Cual es la relación entre los invariantes, $bucl(K)$, $arc(K)$ y $rej(K)$ para un nudo o enlace dado K.