Prieto Lara Felipe de Jesús Tercer Parcial Geometría Moderna II

9.13

Ejercicio 5 ~~10~~

Demostrar que si a y b son rectas conjugadas respecto a $\mathcal{C}(P,\rho)$ tales que $a\cap b=\{X\}$ con $\rho<|XP|$ entonces $(|a\cap\mathcal{C}(P,\rho)|=2$ y $|b\cap\mathcal{C}(P,\rho)|=0)$ o $(|a\cap\mathcal{C}(P,\rho)|=0$ y $|b\cap\mathcal{C}(P,\rho)|=2)$

Dem:

Consideremos a x la polar de X respecto a $\mathcal{C}(P,\rho)$

Tenemos por Teo fundamental de G. Proyectiva, como $\{X\}=a\cap b$ donde a es la polar de A y b la polar de B (ambas respecto a $\mathcal{C}(P,\rho)$), que $X\in a \Leftrightarrow A\in x$ y $X\in b \Leftrightarrow B\in x$.

Así, consideremos a $A\in x$. Notemos que $A\notin\mathcal{C}(P,\rho)\cap x$ que son dos puntos: ~~pues~~ por obs. vista en clase (si $\rho<|PX| \Rightarrow |x\cap\mathcal{C}(P,\rho)|=2$), ~~pues~~ de pertenecer a dicha intersección se tiene que $A=B$ pues a y b son conjugadas que por def $A\in b \Leftrightarrow B\in a$ que significa también que A y B son conjugados y el único conjugado a A que sea elemento de $a\cap x$ es él mismo entonces $a=b$ y como $a\cap b=\{X\} \Rightarrow a=b$ ¿? se tiene que ¿¿?? X puede? sea A y $\rho=|AP|$!! Por tanto $\boxed{A \text{ y } B\notin\mathcal{C}(P,\rho)\cap x.}$

S.P.G supongamos que $\rho>|PA|$ Así $a\cap\mathcal{C}(P,\rho)=\emptyset$ (por observación en clase) ~~que justo dice eso~~.

Además $B\in a$ pues a y b son conjugadas que por def. $A\in b \Leftrightarrow B\in a$ y como $a\cap b=\{X\} \Rightarrow X\in b$ por Teo Fundamental de G. P. $X\in b \Leftrightarrow B\in x$ entonces $B\in a$ y $B\in x \Rightarrow B\in a\cap x$

Así B satisface $\rho<|BP|$ pues $a\cap\mathcal{C}(P,\rho)=\emptyset$ y $B\in a$ por otra observación (si $\rho<|BP| \Leftrightarrow |b\cap\mathcal{C}(P,\rho)|=2$) tenemos que $|b\cap\mathcal{C}(P,\rho)|=2$

$\therefore$ ~~Si~~ $\rho<|AP| \Rightarrow a\cap\mathcal{C}(P,\rho)=\emptyset$ y $|b\cap\mathcal{C}(P,\rho)|=2$

Análogamente, si $\rho < |BP| \Rightarrow b \cap \mathcal{C}(P,\rho) = \emptyset$ y $|a \cap \mathcal{C}(P,\rho)| = 2$.

$\therefore$ a y b son conjugadas respecto a $\mathcal{C}(P,\rho)$ t.q. $\{X\} = a \cap b$ y $\rho < |PX| \Rightarrow (|a \cap \mathcal{C}(P,\rho)| = 0$ y $|b \cap \mathcal{C}(P,\rho)| = 2)$ o $(|a \cap \mathcal{C}(P,\rho)| = 2$ y $|b \cap \mathcal{C}(P,\rho)| = 0)$. ▨

Ejercicio 11 10

a) Construir un triángulo autopolar respecto a $\mathcal{C}(P,\rho)$ dada una recta c y $A \in c$

Construcción: Notemos que $|c \cap \mathcal{C}(P,\rho)| \neq 1$ Nos da vértices colineales.

① ~~S.P.G~~ sup $|c \cap \mathcal{C}(P,\rho)| = 0$

sea $A \in c$, consideremos a a la polar de A respecto a $\mathcal{C}(P,\rho)$ y $a \cap c = \{B\}$, Así, $B \in a$ y $B \in c$ entonces por Teo Fundamental de la Geometría Proyectiva tenemos $B \in a \Leftrightarrow A \in b$ y $B \in c \Leftrightarrow C \in b$ donde b es la polar de B respecto a $\mathcal{C}(P,\rho)$, por hipótesis $A \in c$ entonces por Teo Fundamental de la G.P. tenemos que $A \in c \Leftrightarrow C \in a$ por consecuente $C \in a$ y $C \in b \Leftrightarrow a \cap b = \{C\}$ y $c \cap b = \{A\}$

Así $c = \overline{AB}$, $a = \overline{BC}$ y $b = \overline{AC}$ entonces ΔABC satisface ser autopolar pues la polar de cada vértice es el lado opuesto.

② ~~S.P.G~~. sup $|c \cap \mathcal{C}(P,\rho)| = 2$

Consideremos $A \in c$, $A \notin c \cap \mathcal{C}(P,\rho)$ pues de pertenecer se forman vértices colineales. , también consideremos a a la polar de A respecto a $\mathcal{C}(P,\rho)$ y sea $a \cap c = \{B\}$, así $B \in a$ y $B \in c$ y por Teo Fundamental de la G.P. tenemos que $B \in a \Leftrightarrow A \in b$ y $B \in c \Leftrightarrow C \in b$ con b la polar de B respecto a $\mathcal{C}(P,\rho)$, de igual forma $A \in c \Leftrightarrow C \in a$ por consecuente $C \in a$ y $C \in b \Leftrightarrow a \cap b = \{C\}$ y $c \cap b = \{A\}$; Así $c = \overline{AB}$, $a = \overline{BC}$ y $b = \overline{AC}$ entonces ΔABC satisface ser autopolar pues la polar de cada vértice es el lado opuesto.

b) Demostrar que el ortocentro de un triángulo autopolar respecto a $\mathcal{C}(P,\rho)$ es P.

<u>Demostración:</u>

Sea ΔABC un triángulo autopolar respecto a $\mathcal{C}(P,\rho)$

Así $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ y $c=\overline{AB}$ consideremos a h_X la altura por X con $X\in\{A,B,C\}$, Notemos que por definición de

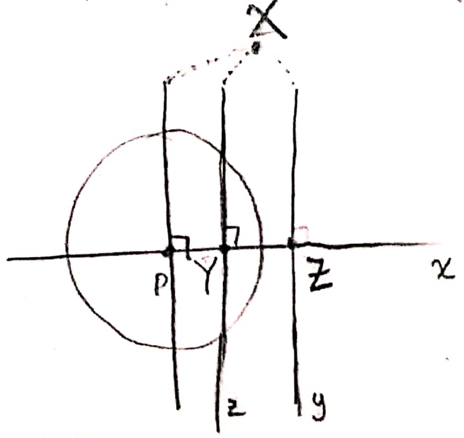
(*) Polar de X, es la recta ortogonal por $X'=I_{\mathcal{C}(P,\rho)}(X)$, además $\{P,X,X'\}$ es un conjunto de puntos colineales por def. de inversión.

Así $h_X=\overline{PX}$ y $\overline{PA}\cap\overline{PB}\cap\overline{PC}=\{P\}$ entonces por ser alturas de ΔABC, P es el ortocentro de ΔABC.

$\therefore$ <u>Si ΔABC es autopolar respecto a $\mathcal{C}(P,\rho)$ se tiene que</u>
<u>P es su ortocentro.</u> ∎

(*) Si $X\in\{A,B,C\}$ No está en el Plano la polar de X está definida como la recta incidente en P que está en dirección ortogonal respecto a la dirección de X, de esta forma $h_Z=h_Y$

Así h_X es recta ortogonal a $\overline{XY}$ por Z con $X\in\{A,B,C\}$
$Y\in\{A,B,C\}\setminus\{X\}$
$Z\in\{A,B,C\}\setminus\{X,Y\}$



¡Esto no es cierto!

Entonces $\forall D\in h_Y=h_Z$, D es ortocentro de ΔABC pues $D\in h_Y\cap h_Z$

Pues por dem en Geo. Moderna 1 el ortocentro es único.