Guía de ejercicios para la Evaluación Parcial 02

FECHA DE EVALUACIÓN PARCIAL 02
VIERNES 03-ABRIL-2020
12:00 HORAS

Instrucciones: La siguiente lista que fungirá como guía para el segundo examen parcial, se recomienda resolver todos los ejercicios de la misma.

LISTA DE EJERCICIOS

1. *a*) Demostrar que toda gráfica autocomplementaria[1] es conexa.

   b) Demostrar que si G es una gráfica autocomplementaria entonces $|V(G)| \equiv x \mod 4$ donde $x \in \{0, 1\}$.

   c) Construir, para cada $k \in \mathbb{N}$, una gráfica autocomplementaria de orden $4k$.

   d) Construir, para cada $k \in \mathbb{N}$, una gráfica autocomplementaria de orden $4k + 1$.

2. Demostrar que la siguiente gráfica G no es una gráfica de intervalos:
   - $V(G) = \{P, Q, R, S, T, U\}$
   - $A(G) = \{\{P, Q\}, \{Q, R\}, \{R, P\}, \{Q, S\}, \{S, T\}, \{T, Q\}, \{R, T\}, \{T, U\}, \{U, R\}\}$

3. Demostrar que si G es una gráfica conexa de orden mayor que uno entonces
   - $1 \leq c(G - \{v\}) \leq d_G(v)$ para cualquier $v \in V(G)$.
   - $1 \leq c(G \setminus \{a\}) \leq 2$ para cualquier $a \in A(G)$.

4. Demostrar que toda gráfica puede expresarse como una suma de gráficas conexas.

5. Demostrar que si G es una gráfica donde $2 \leq \delta(G)$ entonces G contiene un ciclo de longitud al menos $\delta(G) + 1$.

6. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes para una gráfica conexa G de orden al menos tres:
   - G es un bloque[2].
   - Para cualquier $\{u, v\} \subseteq V(G)$ con $u \neq v$ existe un ciclo C en G tal que $\{u, v\} \subset V(C)$.
   - Para cualquier $u \in V(G)$ y $a \in A(G)$ existe un ciclo C en G tal que $u \in V(C)$ y $a \in A(C)$.
   - Para cualquier $\{a, b\} \subseteq A(G)$ con $a \neq b$ existe un ciclo C en G tal que $\{a, b\} \subset A(C)$.

[1] G es una gráfica **autocomplementaria** si y solamente si $G \cong \overline{G}$.
[2] G es un **bloque** si y solamente si G es una gráfica conexa sin vértices de corte.

7. Demostrar que si G es un bloque tal que $3 \leq |V(G)|$, $\{u, v\} \subseteq V(G)$ tal que $v \neq u$ y T_{uv} es una trayectoria en G con extremos u y v entonces existe una trayectoria T^*_{uv} con extremos u y v tal que $V(T_{uv}) \cap V(T^*_{uv}) = \{u, v\}$.

8. Sea G una gráfica con cuatro bloques tal que $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$. Demostrar que si para cualquier $1 \leq i \leq 6$ se tiene que v_i pertenece a exactamente un bloque de G y que v_7 y v_8 pertenecen exactamente a dos bloques de G entonces G es disconexa.

9. Demostrar que si $v \in V(G)$ es vértice de corte en G entonces v no es vértice de corte en $\overline{G}$

10. Sea G una gráfica conexa con al menos un vértice de corte. Demostrar que G contiene, por lo menos, dos bloques cada uno de los cuales contiene exactamente un vértice de corte de G[3].

11. Sea G una gráfica conexa con al menos un vértice de corte. Demostrar que G contiene un vértice de corte v con la propiedad de que, con a lo más una excepción, todos los bloques que contienen a v son bloques terminales.

12. Demostrar que si G es una gráfica que no contiene ciclos pares entonces todo bloque de G es isomorfo a K_2 o es un ciclo impar.

13. Demostrar que el número de bloques de una gráfica G es igual a

$$c(G) + \sum_{v \in V(G)} (b(v) - 1)$$

donde $b(v)$ denota al número de bloques de G que contienen a v.

14. Demostrar que si G es una gráfica conexa con exactamente dos vértices que no son vértices de corte entonces G es una trayectoria.

15. Demostrar que en cualquier gráfica G si $a \in A(G)$ entonces $c(G) \leq c(G \setminus \{a\}) \leq c(G) + 1$.

[3] Los bloques de una gráfica que contienen exactamente un vértice de corte de dicha gráfica se llaman **bloques terminales de** G