Guia de ejercicios para la evaluación del primer parcial

1. Sean X, Y y Z espacios topológicos. Consideremos $f, g : X \to Y$ y $\psi, \varphi : Y \to Z$ funciones continuas entre estos espacios. Demostrar que:
   a) Si $f \simeq g$ relativo a $A \subset X$ entonces $\varphi \circ f \simeq \varphi \circ g$ relativo a A.
   b) Si $\varphi \simeq \phi$ relativo a $B \subset Y$ entonces $\varphi \circ f \simeq \psi \circ f$ relativo a $f^{-1}[B]$
2. Sean X, Y espacios topológicos. Demostrar que si Y es conectable por trayectorias entonces para cualquier $f, g : X \to Y$ funciones continuas nulhomotópicas tenemos que $f \simeq g$.
3. Demostrar que la relacion $\simeq$ es una relación de equivalencia en la clase de todos los espacios topológicos.
4. Sean X, Y y Z espacios topológicos. Entonces:
   a) Demostrar que si $\varphi : (X, x) \to (Y, y)$, $\psi : (Y, y) \to (Z, z)$ son funciones basadas,
   $$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Z, z)$$
   b) Demostrar que si $Id_X : (X, x) \to (X, x)$ es la identidad en X.
   $$(Id_X)_* = Id_{\pi(X,x)}$$
5. Demostrar que si $f, g : X \to \mathbb{S}^2$ son continuas tales que $\forall x \in X,\ f(x) \neq g(x)$ entonces $f \simeq g$.
6. Sean X un espacio topológico simplemente conexo y $\{x_0, x_1\} \subset X$. Demostar que si $f, g : I \to X$ son dos trayectorias con $f(0) = g(0) = x_0$ y $f(1) = g(1) = x_1$ entonces $f \simeq g$.
7. Sean Y y Z espacios topológicos y $p : Y \to Z$ una función cubriente. Demostrar que para todo $z \in Z$ el subespacio $p^{-1}(y)$ es un espacio discreto en Y.
8. Encontrar una función cubriente de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$ que no sea la función identidad.
9. Demostrar que $\mathbb{R}$ es un espacio cubriente del $\mathbb{S}^1$.
10. Demostrar que el toro es un espacio cubriente de la botella de Klein.