Guía de ejercicios para al Evaluación Parcial 02

EXAMEN PARCIAL 02
VIERNES 29-MARZO-2019
De 19:00 a 21:00 HORAS - Salón P-108

1. Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) y (Z, τ_Z) espacios topológicos. Consideremos $f : X \to Y$, $g : X \to Y$, $\varphi : Y \to Z$ y $\psi : Y \to Z$ funciones continuas. Demostrar que:

   a) Si $f \simeq g$ relativo a $A \subseteq X$ entonces $\varphi \circ f \simeq \varphi \circ g$ relativo a A.

   b) Si $\varphi \simeq \phi$ relativo a $B \subseteq Y$ entonces $\varphi \circ f \simeq \psi \circ f$ relativo a $f^{-1}[B]$

2. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos. Demostrar que si Y es conectable por trayectorias entonces para cualesquiera $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ funciones continuas nulhomotópicas se tiene que $f \simeq g$.

3. Demostrar que la relación de homotopía entre espacios topológicos es una relación de equivalencia en la clase de todos los espacios topológicos.

4. Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) y (Z, τ_Z) espacios topológicos.

   a) Demostrar que si $\varphi : (X, x) \to (Y, y)$ y $\psi : (Y, y) \to (Z, z)$ son funciones basadas entonces
   $$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Z, z)$$

   b) Demostrar que si $Id_X : (X, x) \to (X, x)$ es la función identidad en X.
   $$(Id_X)_* = Id_{\pi(X,x)}$$

5. Demostrar que si (X, τ_X) es un espacio topológico, $f : X \to \mathbb{S}^2$ y $g : X \to \mathbb{S}^2$ son funciones continuas tales que $\forall x \in X,\ f(x) \neq -g(x)$ entonces $f \simeq g$.

6. Sean (X, τ_X) un espacio topológico simplemente conexo y $\{x_0, x_1\} \subseteq X$. Demostrar que si $f : I \to X$ y $g : I \to X$ son dos trayectorias tales que $f(0) = g(0) = x_0$ y $f(1) = g(1) = x_1$ entonces $f \simeq g$ relativo a $\{0, 1\}$.

7. Sean (Y, τ_Y) y (Z, τ_Z) espacios topológicos y $\rho : Y \to Z$ una función cubriente. Demostrar que para todo $z \in Z$ el subespacio $p^{-1}(z)$ es un espacio discreto en Y.

8. Encontrar una función cubriente de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$ distinta de la función identidad.

9. Demostrar que $\mathbb{R}$ es un espacio cubriente de $\mathbb{S}^1$.

10. Demostrar que $\mathbb{R}^2$ es un espacio cubriente de la botella de Klein.