Clasificación de Nudos II

Escuela FICO-González Acuña de nudos y 3 variedades

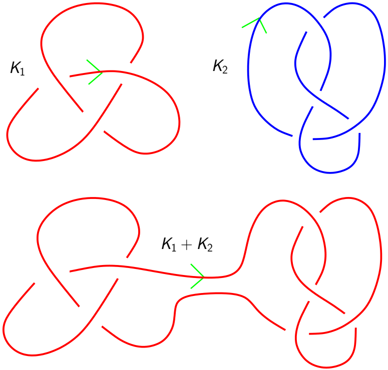
Luis Celso Chan Palomo
Universidad Autónoma de Yucatán

December 12, 2017

Repaso: suma conexa de nudos

Definición

Sean K_1 y K_2 dos nudos orientados. Se define su suma conexa, denotada por $K_1 + K_2$, mediante:



Eliminar un pequeño arco de más afuera en cada proyección y conectar los 4 extremos con 2 nuevos arcos sin introducir nuevos cruces de modo que las orientaciones coincidan.

Nudos Primos

Definición

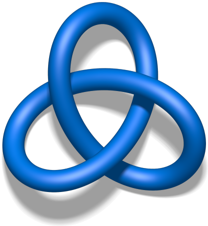
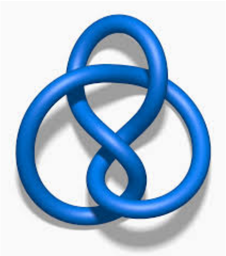
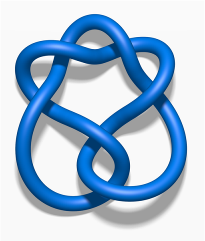
Un nudo K se denomina primo si no es el trivial y si $K = K_1 + K_2$ implica K_1 o K_2 trivial.

Pregunta

Cómo encontrar ejemplos de nudos primos?

Ejemplo

Los siguientes nudos son primos:

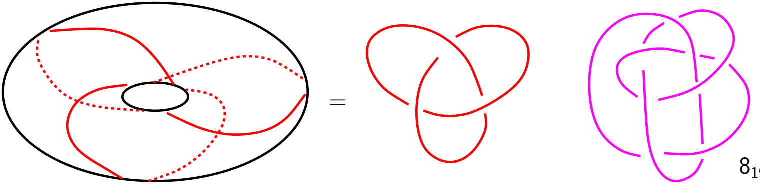




Nudos toroidales

Definición

Un nudo se denomina toroidal si es equivalente a un nudo que puede ser dibujado sin autointersecciones sobre el toro no anudado.

Ejemplo

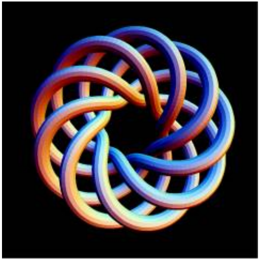


8_{19}

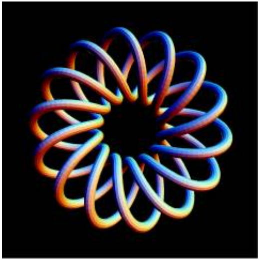
Teorema

Un nudo toroidal no trivial es primo.

www.katlas.org



$T(9,5)$



$T(14,3)$

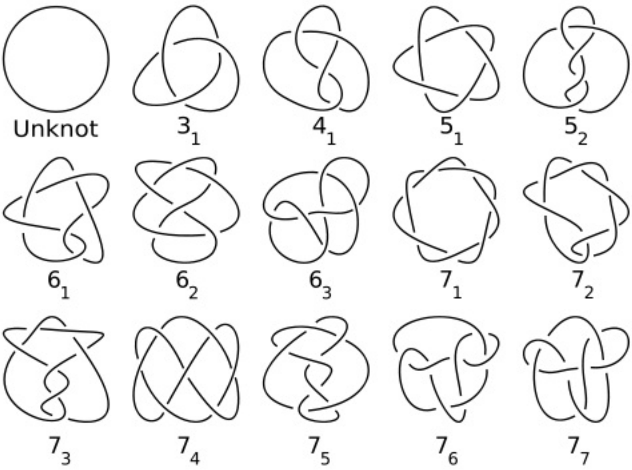
Teorema (Schubert-1947)

Todo nudo K tiene una expresión única (salvo orden) como una suma finita de nudos primos: $K = K_1 + K_2 + \cdots + K_n$, K_i primo.

Nota

Basta clasificar nudos primos.

Nudos primos hasta 7 cruces



Nota

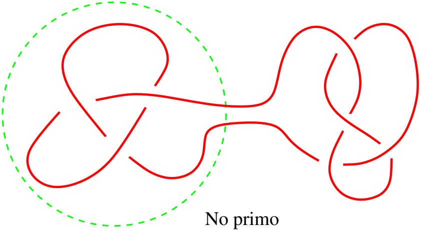
Diagramas con mínimo número de cruces.

Diagramas primos

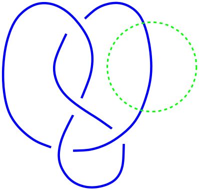
Definición

Una diagrama $D \subset S^2$ de un nudo K se denomina primo si para cada curva simple cerrada en S^2 que corte transversalmente a D en dos puntos acota en uno de sus dos lados un disco que intersecta D en un arco no anudado.

Ejemplo



No primo

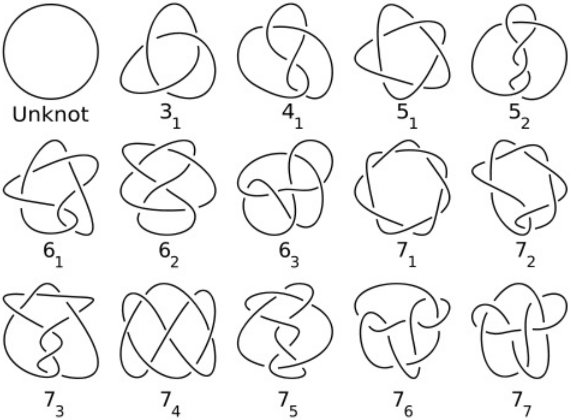


Primo

Nudos alternantes primos

Teorema (Menasco-1984)

Sea K un nudo con un diagrama alternante D. Entonces K es primo si y sólo si D es un diagrama primo.



Historia

- 1899-Little-fue el primero en clasificar no alternantes. Publico una tabla con 43 no alternantes de 10 cruces que se creyo correcta por 75 años pero tenía una duplicación (Perko).

Historia

- 1899-Little-fue el primero en clasificar no alternantes. Publico una tabla con 43 no alternantes de 10 cruces que se creyo correcta por 75 años pero tenía una duplicación (Perko).
- 1927-Alexander-Briggs-distinguieron los nudos hasta 9 cruces excepto 3 pares.

Historia

- 1899-Little-fue el primero en clasificar no alternantes. Publico una tabla con 43 no alternantes de 10 cruces que se creyo correcta por 75 años pero tenía una duplicación (Perko).
- 1927-Alexander-Briggs-distinguieron los nudos hasta 9 cruces excepto 3 pares.
- 1932-Reidemeister-completo la clasificación hasta 9 cruces.

Historia

- 1899-Little-fue el primero en clasificar no alternantes. Publico una tabla con 43 no alternantes de 10 cruces que se creyo correcta por 75 años pero tenía una duplicación (Perko).
- 1927-Alexander-Briggs-distinguieron los nudos hasta 9 cruces excepto 3 pares.
- 1932-Reidemeister-completo la clasificación hasta 9 cruces.
- 1949-Schubert-factorización prima de nudos.

Historia

- 1899-Little-fue el primero en clasificar no alternantes. Publico una tabla con 43 no alternantes de 10 cruces que se creyo correcta por 75 años pero tenía una duplicación (Perko).
- 1927-Alexander-Briggs-distinguieron los nudos hasta 9 cruces excepto 3 pares.
- 1932-Reidemeister-completo la clasificación hasta 9 cruces.
- 1949-Schubert-factorización prima de nudos.
- 1960-Conway-nudos primos hasta 11 cruces sin embargo se le escaparon 4 no-alternantes de 11 cruces.

Historia

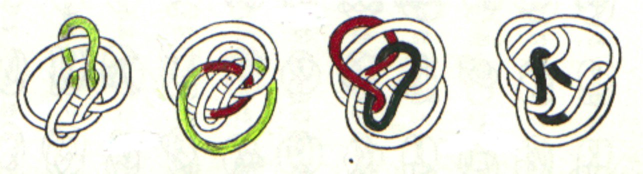
- 1899-Little-fue el primero en clasificar no alternantes. Publico una tabla con 43 no alternantes de 10 cruces que se creyo correcta por 75 años pero tenía una duplicación (Perko).
- 1927-Alexander-Briggs-distinguieron los nudos hasta 9 cruces excepto 3 pares.
- 1932-Reidemeister-completo la clasificación hasta 9 cruces.
- 1949-Schubert-factorización prima de nudos.
- 1960-Conway-nudos primos hasta 11 cruces sin embargo se le escaparon 4 no-alternantes de 11 cruces.
- 1970-Caudron-Bonahon-Siebemann-Perko-terminaron la clasificación hasta 11 cruces y se acabo la etapa de hacerlo a mano.

Historia

- 1899-Little-fue el primero en clasificar no alternantes. Publico una tabla con 43 no alternantes de 10 cruces que se creyo correcta por 75 años pero tenía una duplicación (Perko).
- 1927-Alexander-Briggs-distinguieron los nudos hasta 9 cruces excepto 3 pares.
- 1932-Reidemeister-completo la clasificación hasta 9 cruces.
- 1949-Schubert-factorización prima de nudos.
- 1960-Conway-nudos primos hasta 11 cruces sin embargo se le escaparon 4 no-alternantes de 11 cruces.
- 1970-Caudron-Bonahon-Siebemann-Perko-terminaron la clasificación hasta 11 cruces y se acabo la etapa de hacerlo a mano.
- 1981-Thisthethwaite-hasta 12 cruces (Computadoras).
- 1982-Thisthethwaite-hasta 13 cruces.

Error famoso

Un nudo y su reflejado, listados como 10_{161} y 10_{162}, no fue detectado hasta 1974 por Perko.



Ver la tabla de Rolfsen en la página Knot Atlas.

Ejercicio

Calcular el número de tait de los diagramas del par de Perko.

1998-Hoste, Thisthethwaite, Weeks - 1,701,936

JIM HOSTE
Pitzer College
Claremont, CA 91711, USA
jhoste@pitzer.claremont.edu

MORWEN THISTLETHWAITE
University of Tennessee
Knoxville, TN 37996, USA
morwen@math.utk.edu

JEFF WEEKS
Canton, NY 13617, USA
weeks@geom.umn.edu

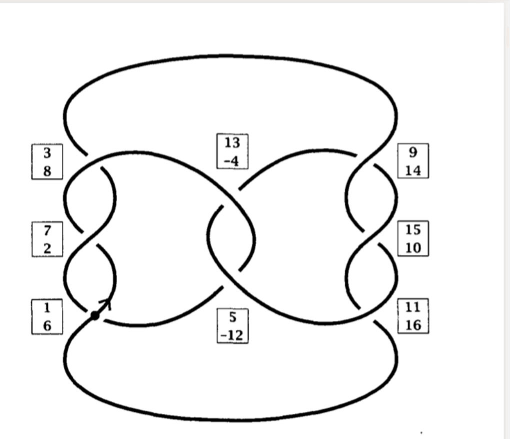
Jim Hoste received his Ph.D. from the University of Utah in 1982, spent a year at the Courant Institute of Mathematical Sciences as a National Science Foundation Postdoctoral Fellow, and is now a professor at Pitzer College, one of the Claremont Colleges. He works primarily in knot

Morwen Thistlethwaite is a professor of mathematics at the University of Tennessee, specializing in knot theory. He is a native of London, England, and came to the United States in 1987. He received his mathematical training at the universities of Cambridge, London, and Manchester. At

Jeff Weeks has an A.B. from Dartmouth College and a Ph.D. from Princeton University, both in mathematics. Now an independent consultant, he splits his time between research, education, and his family. Though primarily a topologist and geometer, he has recently fallen in with a

Código Dowker-Thisthethwaite (6,8,-12,2,14,16,-4,10)

Permite estudiar proyecciones de nudos en una computadora.



Asignar un signo -1 cada entero par que sea etiqueta de un cruce por arriba.

Contando códigos de D-T y las computadoras

Nota

Cada diagrama de un nudo con n cruces se puede codificar con una sucesión de los n primeros enteros pares.

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 6 & 8 & -12 & 2 & 14 & 16 & -4 & 10 \end{bmatrix} \\ &= (6, 8, -12, 2, 14, 16, -4, 10)\end{aligned}$$

Contando códigos de D-T y las computadoras

Nota

Cada diagrama de un nudo con n cruces se puede codificar con una sucesión de los n primeros enteros pares.

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 6 & 8 & -12 & 2 & 14 & 16 & -4 & 10 \end{bmatrix} \\
&= (6, 8, -12, 2, 14, 16, -4, 10)
\end{aligned}
$$

Ejemplo

para cruces 8: el número de sucesiones de los 16 números 2,4,6,8,10,12,14,16 es 8!. Luego al considerar signos hay que analizar $8!2^8$ *posibilidades.*

Dowker y Thisthethwaite demostraron que si un código de Dowker vino de un diagrama primo entonces el diagrama está determinado de manera única por la sucesión salvo reflexiones e isotopías del plano.

Ejercicio

Decidir si el código $(4, 6, 2, 10, 12, 8)$ *vino de un diagrama primo.*

Ejemplo

No existe un nudo con código $(8, 10, 2, 4, 6)$.

Ejercicio

Suponer que una sucesión $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *es el código de Dowker de un nudo* K*. Si* K^m *denota al nudo que se obtiene de* K *al cambiar todos sus cruces, es decir, el reflejado de* K*, demostrar que la misma sucesión es código de Dowker para el nudo* K^m*.*

1998-Hoste, Thisthethwaite, Weeks - 1,701,936

# Cruces	#Nudos
3a	1
4a	1
5a	2
6a	3
7a	7
8a 8n	18 3
9a 9n	41 8
10a	123
10n	42

1998-Hoste, Thisthethwaite, Weeks - 1,701,936

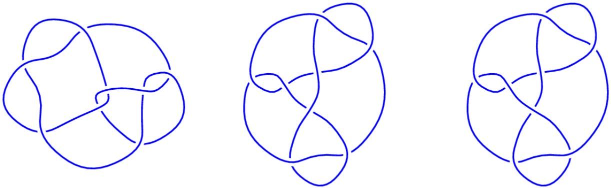
# Cruces	#Nudos
3a	1
4a	1
5a	2
6a	3
7a	7
8a	18
8n	3
9a	41
9n	8
10a	123
10n	42

# Cruces	# Nudos
11a	367
11n	185
12a	1288
12n	888
13a	4878
13n	5110
14a	19536
14n	27436
15a	85263
15n	168030
16a	379799
16n	1,008,906

Cada nudo representa 1 o 2 nudos dependiendo si es equivalente a su reflejado o no.

Observaciones

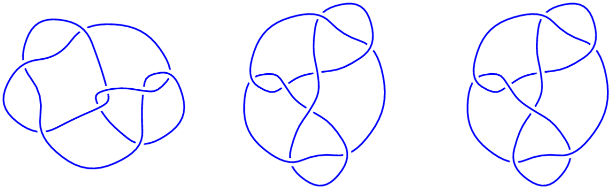
1. Todos los nudos hasta 7 cruces son alternantes.
2. 1930: primera prueba de la existencia de nudos no alternantes.
3. Los nudos 8_{19}, 8_{20} y 8_{21} es posible probar que no son alternantes con el ancho del polinomio de Jones.



4. A partir de 13 cruces hay más nudos no-alternantes que alternantes.

Observaciones

1. Todos los nudos hasta 7 cruces son alternantes.
2. 1930: primera prueba de la existencia de nudos no alternantes.
3. Los nudos 8_{19}, 8_{20} y 8_{21} es posible probar que no son alternantes con el ancho del polinomio de Jones.



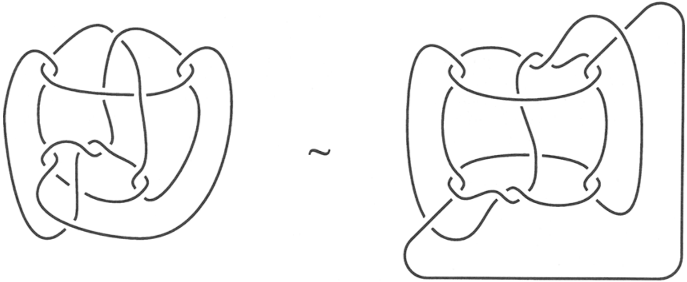
4. A partir de 13 cruces hay más nudos no-alternantes que alternantes.

Problema Abierto

Determina la sucesión de enteros que comienza con
$1, 1, 2, 3, 7, 21, 49, 165, 552, 2176, 9988, \ldots$.

Descubrimiento

Inspirado en su tabla:
Conjetura de Tait: nudos anfiqueirales ($K \approx K^m$) con un número impar de cruces no existen.



Verdadero para $n = 13$: Thisthethwaite-1982.
Falso: Hoste-Thisthethwaite-Weeks encontraron un nudo de 15 cruces no alternante anfiqueiral (1988).

Nudos Anfiqueirales

Como consecuencia de la segunda conjetura de Tait es posible demostrar con la ayuda del número de Tait:

Teorema

Un nudo alternante cuyo mínimo número de cruces es impar no es anfiqueiral.

Aplicación:

Ejercicio

Demostrar el teorema anterior usando la segunda conjetura de Tait.

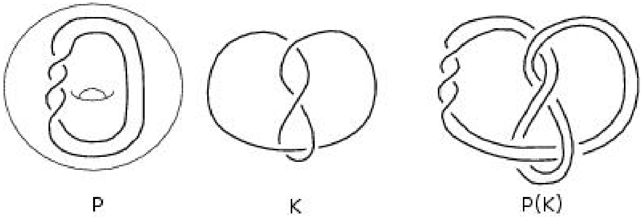
Nudos Satelites

Definición

Empezar con un nudo adentro de un toro solido V, pero no contenido en una bola. Si V es un toro anudado entonces se dice que es un nudo satélite y el corazón del toro anudado se denonomina su compañero.

Ejemplo

$P(K)$ es un satelite del nudo ocho K (compañero).



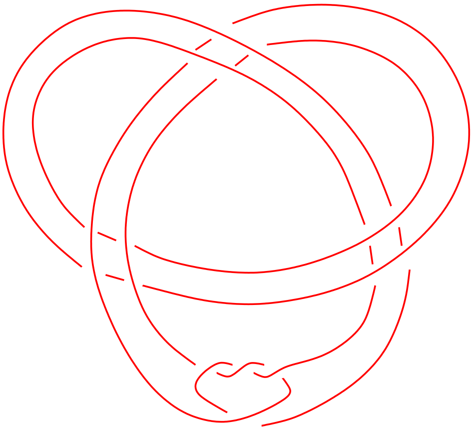
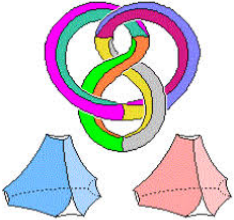
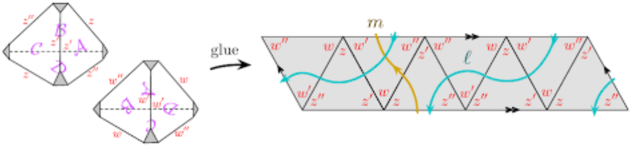


Figure: Nudo satélite de 16 cruces.

Nudos hiperbólicos

Un nudo es hiperbólico si no es toroidal ni satélite.





En 1978 Thurston descubrió que la mayoría de los nudos son hiperbólicos estudiando sus complementos en el espacio.

1998-Hoste, Thisthethwaite, Weeks - 1,701,936

# Cruces	# Nudos	# Toroidales	# Satelites
3a	1	1	
4a	1		
5a	2	1	
6a	3		
7a	7	1	
8a	18		
8n	3	1	
9a	41	1	
9n	8		
10a	123		
10n	42	1	

No hay nudos satelites

1998-Hoste, Thisthethwaite, Weeks - 1,701,936

# Cruces	# Nudos	# Toroidales	# Satelites
11a	367	1	
11n	185		
12a	1288		
12n	888		
13a	4878	1	
13n	5110		2
14a	19536		
14n	27436	1	2
15a	85263	1	
15n	168030	1	6
16a	379799		
16n	1,008,906	1	10

Hasta 16 cruces hay 32 nudos no hiperbólicos: 12 toroidales y 20 satelites.

Primicidad de las tabla de Hoste-Thisthethwaite-Weeks

Pregunta

Cómo demostrar que los nudos de las tablas de clasificación son primos?

Primicidad de las tabla de Hoste-Thisthethwaite-Weeks

Pregunta

Cómo demostrar que los nudos de las tablas de clasificación son primos?

Teorema

Un nudo toroidal no trivial es primo.

Primicidad de las tabla de Hoste-Thisthethwaite-Weeks

Pregunta

Cómo demostrar que los nudos de las tablas de clasificación son primos?

Teorema

Un nudo toroidal no trivial es primo.

Teorema

Nudos hiperbólicos son primos.

Primicidad de las tabla de Hoste-Thisthethwaite-Weeks

Pregunta

Cómo demostrar que los nudos de las tablas de clasificación son primos?

Teorema

Un nudo toroidal no trivial es primo.

Teorema

Nudos hiperbólicos son primos.

Pregunta

Los nudos satelites son primos?

Primicidad de las tabla de Hoste-Thisthethwaite-Weeks

Pregunta

Cómo demostrar que los nudos de las tablas de clasificación son primos?

Teorema

Un nudo toroidal no trivial es primo.

Teorema

Nudos hiperbólicos son primos.

Pregunta

Los nudos satelites son primos?

solución

$K_1 + K_2$ *es satelite de* K_1 *y* K_2

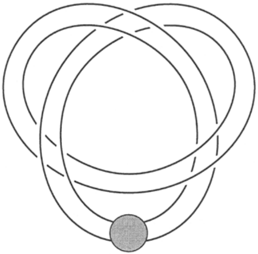
Nota

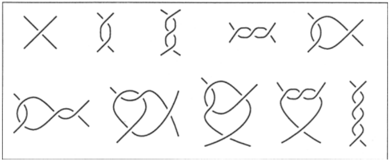
Por lo tanto basta probar que los 20 satelites son primos.

Clasificación de Satelites primos hasta 16 cruces: H-T-W

Cruces	# Nudos	# Satelites
13n	5110	2
14a	19536	
14n	27436	2
15a	85263	
15n	168030	6
16a	379799	
16n	1,008,906	10

20 satélites primos hasta 16 cruces.





Sustituir los 10 ovillos o sus reflejados en la bola negra.

Conjetura

Suponer que el nudo compañero de un nudo satelite tiene k cruces y que el satelite gira m veces longitudinalmente alrededor del toro solido (ver figura anterior $k = 3$ y $m = 2$).

Nota

El satelite tiene un diagrama con km^2 cruces pues en cada cruce del companero se ven m^2 cruces.

Conjetura

Suponer que el nudo compañero de un nudo satelite tiene k cruces y que el satelite gira m veces longitudinalmente alrededor del toro solido (ver figura anterior $k = 3$ y $m = 2$).

Nota

El satelite tiene un diagrama con km^2 cruces pues en cada cruce del companero se ven m^2 cruces.

Conjetura

Nudos satelites no pueden ser proyectados con menos de km^2 cruces donde k y m son como arriba.

Evidencia de la conjetura

Nota

H-T-W notaron que la conjetura es cierta en sus tablas hasta 16 cruces.

Idea de la clasificación de satelites primos hasta 16 cruces:

Proof.

Evidencia de la conjetura

Nota

H-T-W notaron que la conjetura es cierta en sus tablas hasta 16 cruces.

Idea de la clasificación de satelites primos hasta 16 cruces:

Proof.

- Un satélite del trebol tiene al menos $km^2+1 \geq 3(2)^2+1=13$ cruces donde el $+1$ es para obtener un nudo y nó un enlace de 2 componentes.

Evidencia de la conjetura

Nota

H-T-W notaron que la conjetura es cierta en sus tablas hasta 16 cruces.

Idea de la clasificación de satelites primos hasta 16 cruces:

Proof.

- Un satélite del trebol tiene al menos $km^2+1 \geq 3(2)^2 + 1 = 13$ cruces donde el $+1$ es para obtener un nudo y nó un enlace de 2 componentes.
- Un satélite del trebol no puede girar 3 veces pues $km^2 = 3(3)^2 > 16$.

Evidencia de la conjetura

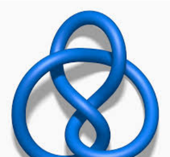
Nota

H-T-W notaron que la conjetura es cierta en sus tablas hasta 16 cruces.

Idea de la clasificación de satelites primos hasta 16 cruces:

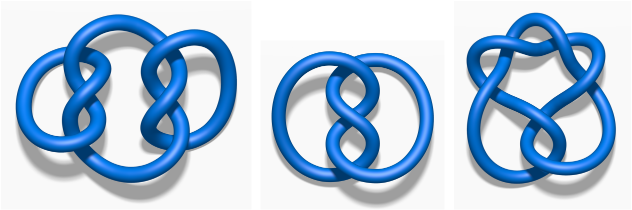
Proof.

- Un satélite del trebol tiene al menos $km^2+1 \geq 3(2)^2+1=13$ cruces donde el $+1$ es para obtener un nudo y nó un enlace de 2 componentes.
- Un satélite del trebol no puede girar 3 veces pues $km^2=3(3)^2>16$.
- Un satélite del nudo ocho $K=4_1$ tiene al menos $4(2)^2+1=17$ cruces.



Invariantes de Nudos

Que parejas de nudos son equivalentes?



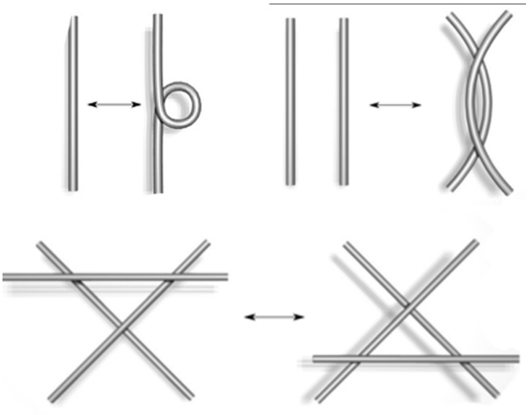
Definición

Sea $N = \{nudos\}$. Una función $f : N \to B$ se dice que es un invariante de nudos si siempre que $K_1 \approx K_2$ se cumple que $f(K_1) = f(K_2)$, es decir, $f(K_1)$ no cambia o es invariante bajo equivalencia de nudos.

Nota

Para distinguir nudos: $f(K_1) \neq f(K_2)$ implica $K_1 \neq K_2$.

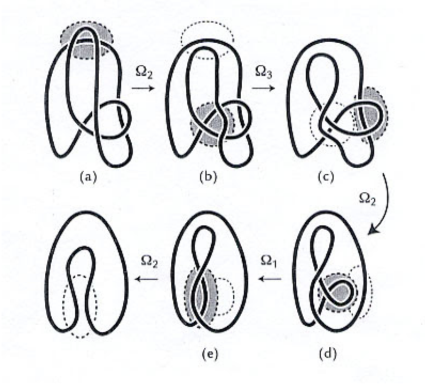
Movidas de Reidemeister



Definición

Las 3 movidas anteriores de diagramas de nudos juntos con sus inversas se denominan movidas de Reidemeister.

Ejemplo 1



Definición

Dos diagramas D_1 y D_2 se denominan equivalentes, denotado por $D_1 \approx D_2$, si D_1 se obtiene de D_2 aplicando un número finito de movidas de Reidemeister.

Teorema (Reidemeister-1926)

Sean D_1 y D_2 dos diagramas regulares de nudos (o enlaces) K_1 y K_2, respectivamente. Entonces:

$$K_1 \approx K_2 \Leftrightarrow D_1 \approx D_2.$$

Nota

Un invariante de nudos es una cantidad que no cambie bajo las movidas de Reidemeister.

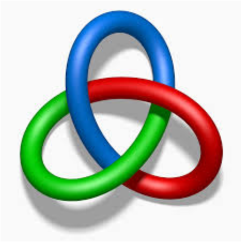
3-coloraciones

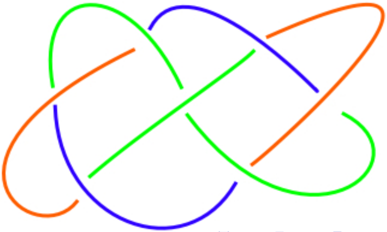
Definición

Un diagrama D de un nudo K se denomina 3-coloreable si cada arco (entre un cruce por abajo y el siguiente) de D puede ser pintado usando alguno de los colores Azul, Rojo y Verde tal que se cumpla lo siguiente:

- *al menos se usan dos colores, y*
- *en cada cruce llega un mismo color o exactamente los 3 colores.*

Ejemplo





Invariante de nudos

Teorema

Si un diagrama de un nudo K es 3-coloreable entonces todos los diagramas de K son 3-coloreables.

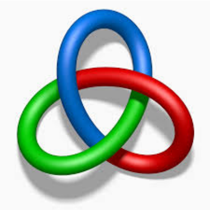
Definición

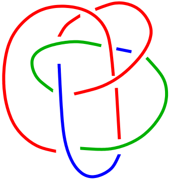
Un nudo se denomina 3-coloreable si tiene al menos un diagrama 3-coloreable.

Ejemplo

El nudo trivial no es 3-coloreable:

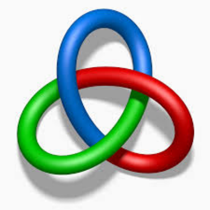
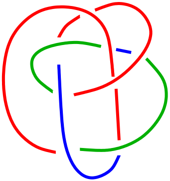
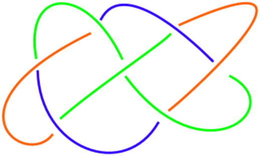
Las siguientes curvas están anudadas:





Problema

Las siguientes nudos son 3-coloreables y por tanto no es posible distinguirlos:

Los siguientes nudos no son 3-coloreables y por tanto no es posible distinguirlos: