1 Zadanie

1.1 Wynikanie w prawo

Dowód. Załóżmy, że $P(\bigcup \mathcal{A}) = \{\varnothing\}$. Chcemy udowodnić, że $\mathcal{A} = \varnothing$ lub $\mathcal{A} = \{\varnothing\}$. W tym celu załóżmy nie wprost, że $\mathcal{A} \neq \varnothing$ i $\mathcal{A} \neq \{\varnothing\}$.

Jest to równoważne temu, że istnieje takie $A \in \mathcal{A}$, że istnieje $a \in A$. Jednak wtedy $a \in \bigcup \mathcal{A}$, a więc $\{a\} \in P(\bigcup \mathcal{A}) \overset{\text{zał}}{=} \{\varnothing\}$, *quod est absurdum.* □

1.2 Wynikanie w lewo

Dowód. Załóżmy, że $\mathcal{A} = \varnothing$ lub $\mathcal{A} = \{\varnothing\}$. W obu przypadkach mamy, że $\bigcup \mathcal{A} = \varnothing$, skąd $P(\bigcup \mathcal{A}) = \{\varnothing\}$. □

2 Zadanie

Lemat 1. $\bigcup P(A) = A$

Dowód. Udowodnimy najpierw zawieranie w prawo. Jeśli $x \in \bigcup P(A)$, to istnieje takie $Z \in P(A)$, że $x \in Z$. Jednak skoro $Z \in P(A)$, to $Z \subseteq A$, skąd $x \in A$.

Aby udowodnić zawieranie w lewo, weźmy $x \in A$. Wtedy zauważmy, że $x \in \{x\} \in P(A)$, a więc $x \in \bigcup P(A)$. □

2.1 Część a

Dowód. Jak łatwo widać z lematu 1, hipoteza jest równoważna $\bigcup \bigcap \mathcal{A} \subseteq \bigcap \bigcup \mathcal{A}$.

Weźmy jednak niepustą rodzinę $\mathcal{A} : \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$, daną jako $\mathcal{A} = \{\{\{0\}, \{1\}\}\}$. Wtedy mamy $\bigcup \bigcap \mathcal{A} = \bigcup (\{\{0\}, \{1\}\}) = \{0, 1\}$. Jednak $\bigcap \bigcup \mathcal{A} = \bigcap (\{\{0\}, \{1\}\}) = \varnothing$.

Ale jednak $\{0, 1\} \not\subseteq \varnothing$. Co dowodzi, że nieprawdą jest, że hipoteza jest prawdziwa dla wszystkich niepustych rodzin $\mathcal{A}$. □

2.2 Część b

Dowód. Jak łatwo widać z lematu 1, hipoteza jest równoważna $\bigcap \bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \bigcap \mathcal{A}$.

Weźmy jednak niepustą rodzinę $\mathcal{A} : \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$, daną jako $\mathcal{A} = \{\{\{0\}\}, \{\{0, 1\}\}\}$. Wtedy mamy $\bigcap \bigcup \mathcal{A} = \bigcap (\{\{0\}, \{0, 1\}\}) = \{0\}$. Jednak $\bigcup \bigcap \mathcal{A} = \bigcup (\varnothing) = \varnothing$.

Ale jednak $\{0\} \not\subseteq \varnothing$. Co dowodzi, że nieprawdą jest, że hipoteza jest prawdziwa dla wszystkich niepustych rodzin $\mathcal{A}$. □

2.3 Część c

Dowód. Zauważmy, że $\varnothing \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, a więc $\varnothing \in P(\bigcup \mathcal{A})$. Stąd jednak mamy, że $\varnothing = \bigcap P(\bigcup \mathcal{A})$, gdyż gdyby pewnien $x \in \bigcap P(\bigcup \mathcal{A})$, to w szczególności byłoby $x \in \varnothing$, *quod est absurdum.*

Stąd wiemy, że lewa strona zawierania jest zbiorem pustym. Jednak zbiór pusty jest podzbiorem dowolnego zbioru, skąd w szczególności $\varnothing \subseteq \bigcap \mathcal{A}$. Stąd zawieranie z zadania zachodzi dla wszystkich niepustych rodzin $\mathcal{A}$. □

2.4 Część d

Dowód. Weźmy $X \in \bigcup \mathcal{A} \times \bigcap \mathcal{B}$. Wtedy X jest postaci (a, b), gdzie $a \in \bigcup \mathcal{A}$ oraz $b \in \bigcap \mathcal{B}$.

Stąd jednak mamy, że istnieje takie $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$, że $a \in \mathfrak{A}$. Mamy także, że dla dla każdego $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}$ zachodzi, że $b \in \mathfrak{B}$. Jednak $\mathcal{B}$ jest niepusta, więc istnieje choć jedno takie $\mathfrak{B}$.

Zauważmy teraz, że $(a, b) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$. Jednak $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \in \{a \times b \mid a \in \mathcal{A} \wedge b \in \mathcal{B}\}$. Stąd $X = (a, b) \in \bigcup \{a \times b \mid a \in \mathcal{A} \wedge b \in \mathcal{B}\}$.

Stąd zawieranie zadania zachodzi dla wszystkich niepustych rodzin $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. □