Zadanie 1

Niech $f(x) = 1 - \cos x$. Zgodnie ze wzorem z ćwiczeń uwarunkowanie jest równe $\frac{|x||f'(x)|}{|f(x)|} = \frac{|x||\sin x|}{1-\cos x}$. W granicy w zerze mamy: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x \sin x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1\cdot \sin x + x\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x + 1\cdot\cos x + x\cdot(-\sin x)}{\cos x} = 2$ na mocy dwukrotnie zastosowanej reguły de l'Hospitala. Ponieważ funkcja $x \mapsto \frac{|x||\sin x|}{1-\cos x}$ jest parzysta, granica lewostronna jest także równa 2, zatem jest to współczynnik uwarunkowania zadania.

Mamy $1 - \cos x = 1 - \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 1 - \left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \left(1 - \left(\sin\frac{x}{2}\right)^2\right) + \left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 = 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$.

Ponieważ dzielenie przez 2, branie sinusa, podnoszenie do kwadratu i mnożenie przez 2 są obliczalne w arytmetyce fl_ν z małym błędem względnym (i są to zadania dobrze uwarunkowane, np. współczynnik uwarunkowania sinusa w okolicy zera: $\frac{|x\cos x|}{|\sin x|} = \left|\frac{x}{\sin x}\cos x\right| \to 1\cdot 1 = 1$, podnoszenia do kwadratu: $\frac{|x\cdot(2x)|}{|x^2|} = 2$) algorytm: $x_1 := x/2; x_2 := \sin x_1; x_3 := x_2 \cdot x_2; y := x_4 \cdot 2$ oblicza wynik z małym błędem względnym, gdyż w każdym kroku wartość w arytmetyce fl_ν różni się od dokładnej o coś rzędu precyzji arytmetyki, dokładniej: w każdym kroku przemnażamy przez $(1+\delta)$, zaś małe błędy argumentów działań przerzucają się na małe błędy wyniku na podstawie dobrego uwarunkowania.

Zadanie 5

Mamy $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix}$ oraz $A^{-1} = \frac{1}{1-\varepsilon^2}\begin{pmatrix} -\varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$.

Zatem na podstawie zadania 4 mamy $\operatorname{cond} A = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = (1+\varepsilon)\cdot\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon^2} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{2}{1-\varepsilon} - 1$.

Stąd widać, że w otoczeniu $\varepsilon \approx 1$ współczynnik uwarunkowania jest dowolnie duży, zatem macierz jest tam źle uwarunkowana (w szczególności może być numerycznie osobliwa).

Jeśli zaś odgrodzimy się od jedynki, tj. rozpatrzymy $\varepsilon \in (0, r)$ dla pewnego $r < 1$, to istnieje jednostajne oszacowanie $\operatorname{cond} A < \frac{2}{1-r} - 1$, zatem dla dostatecznie precyzyjnej arytmetyki tracimy dowolnie mały odsetek cyfr znaczących.

Zadanie 4 (użyte w rozwiązaniu zad. 5)

Niech $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ będzie wektorem ze sfery jednostkowej, tj. $\|x\|_1 = 1$. Wtedy zachodzi $y := Ax = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}^T$, gdzie $y_i = \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j$.

Niech $M = \max\limits_{j\in\{1,\dots,n\}} \sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$. Mamy wtedy:

$$\|y\|_1 = \sum_{i=1}^n |y_i| = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^n \left(|x_j| \cdot \sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^n (|x_j|\cdot M) = M\sum_{j=1}^n |x_j| = M\|x\|_1 = M$$

Zatem $\|A\|_1 \leqslant M$. Niech teraz j będzie numerem kolumny realizującym maksimum w definicji M. Wtedy j-ty wektor bazowy e_j spełnia $Ae_j = \begin{pmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{nj} \end{pmatrix}^T$, a zatem $\|Ae_j\|_1 = \sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}| = M$. Stąd $\|A\|_1 = M$.