Zadanie 1

Część a

Chcemy znaleźć wszystkie $z \in \mathbb{C}$, że $\overline{z} = z^2$, które to równanie oznaczmy ★. Mamy wtedy jednak, że $|z| = |\overline{z}| \overset{\bigstar}{=} |z^2| = |z|^2$, łatwo widać, że $|z| = 0$ lub $|z| = 1$. W tym pierwszym przypadku łatwo widać, że $z = 0$ i istotnie ta wartość spełnia zadany warunek. Załóżmy więc, że $|z| = 1$.

Zapisując to samo dla argumentów, mamy $-\arg z = \arg \overline{z} \overset{\bigstar}{=} \arg z^2 = 2\arg z$, przy czym wszystkie równości są brane modulo 2π. Skąd mamy, że $3\arg z = 0 \pmod{2\pi}$, skąd $3\arg z = 2k\pi$. Istotnie różnych (tzn. nieróżniących się o całkowitą wielokrotność 2π) wartości $\arg z$ jest trzy: $\arg z = 0$, $\arg z = \frac{2\pi}{3}$ oraz $\arg z = \frac{4\pi}{3}$.

Argumenty te (w połączeniu z warunkiem, że $|z| = 1$), dają następujące wartości: $z = 1$, $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Łatwo jednak widać, że spełniają one warunek zadania (przez prosty rachunek albo zauważenie, że koniunkcja warunków na moduł i argument jest w tym przypadku równoważna zadaniu).

Do tego zbioru należy dodać jeszcze rozpatrzony wcześniej $z = 0$.

Część b

Chcemy znaleźć wszystkie $z \in \mathbb{C}$, że $\overline{z} = z^3$, które to równanie oznaczmy ★. Mamy wtedy jednak, że $|z| = |\overline{z}| \overset{\bigstar}{=} |z^3| = |z|^3$, łatwo widać, że $|z| = 0$, $|z| = -1$ lub $|z| = 1$. W tym pierwszym przypadku łatwo widać, że $z = 0$ i istotnie ta wartość spełnia zadany warunek. Drugi przypadek jest niemożliwy, gdyż moduł jest zawsze nieujemny. Załóżmy więc, że $|z| = 1$.

Zapisując to samo dla argumentów, mamy $-\arg z = \arg \overline{z} \overset{\bigstar}{=} \arg z^3 = 3\arg z$, przy czym wszystkie równości są brane modulo 2π. Skąd mamy, że $4\arg z = 0 \pmod{2\pi}$, skąd $4\arg z = 2k\pi$. Istotnie różnych (tzn. nieróżniących się o całkowitą wielokrotność 2π) wartości $\arg z$ jest cztery: $\arg z = 0$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$, $\arg z = \pi$ oraz $\arg z = \frac{3\pi}{4}$. Innymi słowy – są pierwiastki czwartego stopnia z jedynki. Istotnie, gdy $|z| = 1$, to $\frac{1}{z} = \overline{z} \overset{\bigstar}{=} z^3$, skąd $z^4 = 1$.

Zapisując więc te liczby uzyskujemy: $z = 1$, $z = i$, $z = -1$, $z = -i$. Znów łatwo sprawdzić, że rzeczywiście spełniają one warunki zadania. Do tego zbioru należy dodać jeszcze rozpatrzony wcześniej $z = 0$.

Zadanie 2

Dowód. Załóżmy, że $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} = r \in \mathbb{R}$. Wtedy łatwo widać, że także $\frac{1+\overline{z}+(\overline{z})^2}{1-\overline{z}+(\overline{z})^2} = r$ z własności sprzężenia.

Ponadto mamy wtedy, że $1 + z + z^2 = r(1 - z + z^2)$, skąd $(r-1)z^2 - (r+1)z + (r-1) = 0$. Gdy $r = 1$ mamy, że $z = 0$, jednak jest to liczba rzeczywista.

Gdy $r \neq 1$, jest to równanie drugiego stopnia, my zaś widzieliśmy wyżej, że jeśli z jest pierwiastkiem tego równania, to $\overline{z}$ też. Jednak $z \neq \overline{z}$, a więc są to różne pierwiastki, a to równanie ma ich dokładnie dwa. Na mocy wzorów Viete'a, mamy, że iloczyn pierwiastków jest równy $\frac{r-1}{r-1} = 1$, lecz to jednak daje, że $z\overline{z} = 1$, skąd $|z| = 1$. □

Zadanie 4

Część a

Zauważmy, że prosta z zadania jest to symetralna odcinka o końcach w punktach 0 i $2a$, a więc jest to zbiór tych punktów z, że $|z - 0| = |z - 2a|$. Dzieląc to równanie stronami przez $|z| \cdot |2a|$ (co jest różne od zera, gdyż $z \neq 0$ i $a \neq 0$) otrzymujemy $|\frac{1}{2a}| = |\frac{1}{2a} - \frac{1}{z}|$, czyli $|f(z) - \frac{1}{2a}| = |\frac{1}{2a}|$ – czyli obraz prostej L w tym przekształceniu jest podzbiorem okręgu o środku w $\frac{1}{2a}$ i promieniu $|\frac{1}{2a}|$.

Jednak przekształcenie, którego dokonaliśmy jest równoważne, tzn. biorąc dowolne $y \neq 0$ takie, że $|y - \frac{1}{2a}| = |\frac{1}{2a}|$ i przemnażając stronami przez $|y^{-1}| \cdot |2a|$ uzyskamy, że punkt y^{-1} leży na prostej, o której mowa w zadaniu. Stąd wiemy, że każdy punkt z tego okręgu (nie licząc 0) jest wartością funkcji f obciętej do prostej L.

Stąd mamy, że szukanym obrazem jest tenże okrag z pominięciem punktu 0.

Część b

Wtedy zbiór punktów $z \in \mathbb{C}$ na tej prostej możemy zapisać jako $z = ra$, gdzie $r \in \mathbb{R}$. Mamy wtedy $f(z) = (ra)^{-1} = r^{-1}a^{-1} = r^{-1}\frac{\overline{a}}{|a|} = l\overline{a}$, gdzie $l = \frac{1}{r|a|}$. Zauważmy, że wybierając dowolne $r \neq 0$ uzyskamy dokładnie jedno $l \neq 0$ i vice versa. Stąd widać, że obrazem takiej prostej będzie prosta przechodząca przez punkt 0 i punkt $\overline{a}$, z pominięciem jednak punktu 0.

Zadanie 5

Niech $z = \cos 10^\circ + i \sin 10^\circ$. Zauważmy, że $\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = t$. Mamy wtedy $\arg z = 10^\circ$, $\arg zt^{-1} = -50^\circ$, $\arg zt = 70^\circ$, a ponadto moduły tych liczb są równe jedności.

Mamy wtedy $\cos 10^\circ = \mathfrak{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\cos 50^\circ = \cos -50^\circ = \mathfrak{Re}(zt^{-1}) = \frac{zt^{-1}+\overline{(zt^{-1})}}{2}$, $\cos 70^\circ = \mathfrak{Re}(zt) = \frac{zt+\overline{(zt)}}{2}$. Gdy oznaczmy wynik z zadania przez R, to uzyskamy:

$$\begin{aligned}4R &= (z+\overline{z})^2 + \left(zt^{-1} + \overline{zt^{-1}}\right)^2 + \left(zt + \overline{zt}\right)^2 \\ &= z^2 + 2z\overline{z} + (\overline{z})^2 + \left(zt^{-1}\right)^2 + 2zt^{-1}\overline{zt^{-1}} + \left(\overline{zt^{-1}}\right)^2 + (zt)^2 + 2zt\overline{zt} + \left(\overline{zt}\right)^2 \\ &= z^2 + 2 + \overline{z^2} + \left(zt^{-1}\right)^2 + 2 + \left(\overline{zt^{-1}}\right)^2 + (zt)^2 + 2 + \left(\overline{zt}\right)^2 \\ &= 6 + z^2 + z^2t^2 + \frac{z^2}{t^2} + \overline{\left(z^2 + z^2t^2 + \frac{z^2}{t^2}\right)}\end{aligned}$$

Udowodnimy teraz, że $z^2 + z^2t^2 + \frac{z^2}{t^2} = 0$. W tym celu wystarczy udowodnić, że $1 + t^2 + t^{-2} = 0$. Jednak $1, t^2, t^{-2}$ są to pierwiastki trzeciego stopnia z jedynki (mają moduł równy jedności, a argumenty kolejno: $0, 120^\circ, 240^\circ$), które rzeczywiście dodają się do zera, jak udowodniliśmy na ćwiczeniach (można też zauważyć, że są one pierwiastkami równania $u^3 - 1 = 0$, które, jak wynika ze wzorów Viete'a, ma sumę pierwiastków równą zeru). Stąd mamy $4R = 6 + 0 + \overline{0}$, a więc $R = \frac{3}{2}$.

Zadanie 6

Dowód. Zauważmy, że jeśli $z^k = 1$, to $z^{kl} = \left(z^k\right)^l = 1^l = 1$ (dla naturalnych k, l). Stąd jeśli $z \in A_k$, to $z \in A_{kl}$, skąd $A_k \subseteq A_{kl}$.

Weźmy więc ustalone $x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_m$. Istnieje wtedy pewne $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, że $x \in A_k$. Jednak zauważmy, że liczb $n-m+1, n-m+2, \ldots, n$ jest m. To zaś oznacza, że wśród tych liczb istnieje taka, która jest podzielna przez k.

Gdyby takiej nie było, to weźmy tylko pewien podzbiór tych indeksów: $n-k+1, n-k+2, \ldots, n$. Jest ich k i żaden z nich nie daje reszty 0 przy dzieleniu przez k. Wtedy jednak zostaje tylko $k-1$ możliwych reszt z dzielenia przez k, a więc z zasady szufladkowej pewne dwie liczby dają taką samą resztę, ale przecież wtedy ich różnica musiałaby się dzielić przez k, a przecież jest ona dodatnia i mniejsza od k. Sprzeczność, a więc któraś z tych liczb się dzieli przez k.

Weźmy więc jakieś $lk \in \{n-m+1, n-m+2, \ldots, n\}$. Wtedy jednak $x \in A_{lk}$, a więc $x \in A_{n-m+1} \cup A_{n-m+2} \cup \ldots \cup A_n$.

Ponieważ zawieranie w zadaniu jest ostre, wystarczy wskazać taki element prawej strony, który nie jest elementem lewej strony. Łatwo jednak widać, że liczba zespolona o module równym 1, zaś argumencie $\frac{2\pi}{n}$ należy do A_n, zaś nie należy do żadnego A_j dla $j < n$, gdyż wtedy j-ta potęga ma argument $\frac{2\pi}{n}j$, co nie jest wielokrotnością 2π. $\square$