# Zadanie 1

Udowodnię indukcyjnie, że dla $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ rozwiązaniem układu z parametrem $\alpha \in \mathbb{R}$ o macierzy:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 1 \cdot \alpha \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 & 2 \cdot \alpha \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 6 & \cdots & 6 & 6 & 3 \cdot \alpha \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & \cdots & 8 & 8 & 4 \cdot \alpha \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \cdots & 10 & 10 & 5 \cdot \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \cdots & 2n-3 & 2n-2 & (n-1) \cdot \alpha \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \cdots & 2n-3 & 2n-1 & n \cdot \alpha \end{array}\right]$$

jest $((-1)^{n+1}\alpha, (-1)^n\alpha, (-1)^{n-1}\alpha, \ldots, \alpha)$.

*Dowód.* Dla $n = 1$ mamy bowiem, że układ ten degeneruje się do $x_1 = \alpha$.

Załóżmy teraz prawdziwość tezy dla pewnego $n = k - 1$ i udowodnijmy ją dla $n = k$.

Odejmując przedostatni wiersz macierzy od pierwszego otrzymujemy wtedy:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 1 \cdot \alpha \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 & 2 \cdot \alpha \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 6 & \cdots & 6 & 6 & 3 \cdot \alpha \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & \cdots & 8 & 8 & 4 \cdot \alpha \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \cdots & 10 & 10 & 5 \cdot \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \cdots & 2k-3 & 2k-2 & (k-1) \cdot \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha \end{array}\right]$$

Gdy teraz od wiersza i-tego (dla $i = 1, 2, ..., k-1$) odejmiemy wiersz ostatni przemnożony przez $2i$, uzyskamy:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 & -1 \cdot \alpha \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 0 & -2 \cdot \alpha \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 6 & \cdots & 6 & 0 & -3 \cdot \alpha \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & \cdots & 8 & 0 & -4 \cdot \alpha \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \cdots & 10 & 0 & -5 \cdot \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \cdots & 2k-3 & 0 & -(k-1) \cdot \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha \end{array}\right]$$

Ale (po pominięciu ostatniego równania) jest to dokładnie układ równań dla $n = k-1$ i parametru $\alpha' = -\alpha$. Na mocy założenia indukcyjnego, jego rozwiązaniem jest

$$((-1)^{(k-1)+1}(-\alpha), (-1)^{(k-1)}(-\alpha), \ldots - \alpha)$$

co po uwzględnieniu ostatniej zmiennej daje rozwiązanie dla $n = k$:

$$((-1)^{k+1}\alpha, (-1)^k\alpha, (-1)^{k-1}\alpha, \ldots, \alpha)$$

. $\square$

Na podstawie tego, rozwiązaniem układu z zadania jest $x_i = (-1)^i$.

# Zadanie 2

Załóżmy, że pewne $(x_1, x_2, \ldots, x_8)$ spełniają zadany układ równań. Wtedy spełnione są także równości:

$$\begin{aligned}
x_4 - x_1 &= (x_2 + x_3 + x_4) - (x_1 + x_2 + x_3) = 9 - 6 = 3 \\
x_5 - x_2 &= (x_3 + x_4 + x_5) - (x_2 + x_3 + x_4) = 3 - 9 = -6 \\
x_6 - x_3 &= (x_4 + x_5 + x_6) - (x_3 + x_4 + x_5) = -3 - 3 = -6 \\
x_7 - x_4 &= (x_5 + x_6 + x_7) - (x_4 + x_5 + x_6) = -9 - (-3) = -6 \\
x_8 - x_5 &= (x_6 + x_7 + x_8) - (x_5 + x_6 + x_7) = -6 - (-9) = 3 \\
x_1 - x_6 &= (x_7 + x_8 + x_1) - (x_6 + x_7 + x_8) = -2 - (-6) = 4 \\
x_2 - x_7 &= (x_8 + x_1 + x_2) - (x_7 + x_8 + x_9) = 2 - (-2) = 4 \\
x_3 - x_8 &= (x_1 + x_2 + x_3) - (x_8 + x_1 + x_2) = 6 - 2 = 4
\end{aligned}$$

Oznaczając $x_1 = t$ uzyskujemy

$$\begin{aligned}
x_1 &= t \\
x_4 &= x_1 + 3 = t + 3 \\
x_7 &= x_4 - 6 = t - 3 \\
x_2 &= x_7 + 4 = t + 1 \\
x_5 &= x_2 - 6 = t - 5 \\
x_8 &= x_5 + 3 = t - 2 \\
x_3 &= x_8 + 4 = t + 2 \\
x_6 &= x_3 - 6 = t - 4
\end{aligned}$$

Z równania 1. mamy $6 = x_1 + x_2 + x_3 = t + (t + 1) + (t + 2)$, skąd $t = 1$.
Tak więc jedynym możliwym rozwiązaniem tego układu jest

$$(x_1, \ldots, x_8) = (1, 2, 3, 4, -4, -3, -2, -1)$$

Łatwo można także zweryfikować przez podstawienie, że te wartości istotnie są rozwiązaniami.

# Zadanie 4

Zapiszmy macierz współczynników (ponieważ równania są jednorodne, zapisywanie wyrazów wolnych jest bezcelowe).

$$\begin{pmatrix}
-y & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & -y & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -y & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -y & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & -y
\end{pmatrix}$$

Odejmując pierwszy wiersz od czwartego, i dodając do wiersza piątego wiersz pierwszy przemnożony przez $y$ uzyskujemy:

$$\begin{pmatrix}
-y & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & -y & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -y & 1 & 0 \\
y & -1 & 1 & -y & 0 \\
1 - y^2 & y & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Dodając do wiersza czwartego wiersz trzeci przemnożony przez $y$, a od wiersza piątego odejmując wiersz trzeci:

$$\begin{pmatrix} -y & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -y & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y & 1 & 0 \\ y & y-1 & 1-y^2 & 0 & 0 \\ 1-y^2 & y-1 & y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dodając do wiersza trzeciego wiersz drugi przemnożony przez $y$, do wiersza czwartego – wiersz drugi przemnożony przez $y^2-1$, a do wiersza piątego – wiersz drugi przemnożony przez $-y$, mamy:

$$\begin{pmatrix} -y & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -y & 1 & 0 & 0 \\ y & 1-y^2 & 0 & 1 & 0 \\ y^2+y-1 & -y^3+2y-1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-y-y^2 & y^2+y-1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

## Przypadek $y^2+y-1 \neq 0$

Załóżmy najpierw, że $y^2+y-1 \neq 0$.

Mnożąc wiersze czwarty i piąty macierzy 1 przez $\frac{1}{y^2+y-1}$, uzyskujemy:

$$\begin{pmatrix} -y & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -y & 1 & 0 & 0 \\ y & 1-y^2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1-y & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dodając do wierszy odpowiednie wielokrotności wiersza czwartego: do wiersza pierwszego: $y$-krotność, do drugiego: $-1$-krotność, do trzeciego: $-y$-krotność, do piątego: $1$-krotność, uzyskujemy:

$$\begin{pmatrix} 0 & -y^2+y+1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-y & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1-y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Łatwo teraz widać, że dla $y \neq 2$, można dokonać eliminacji jedynej pozostałej zmiennej (druga kolumna) i uzyskamy układ oznaczony. Jednak łatwo widać, że $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$ spełnia ten układ, niezależnie od $y$, a więc będzie to wtedy jedyne rozwiązanie.

Dla $y = 2$ łatwo widzimy, że otrzymujemy macierz zeschodkowaną, z jednym wierszem zerowym. To oznacza, że jej rząd jest równy 4, a wymiar jądra 1 (dodają się one bowiem do liczby kolumn macierzy). Innymi słowy: przestrzeń rozwiązań danego układu jest rozpinana przez jeden wektor. Łatwo widac, że jest to wektor $(t, t, t, t, t)$. Można to też zauważyć, wstawiając $y = 2$ do tej macierzy i wyliczając poszczególne zmienne w zależności od drugiej zmiennej jako parametru.

## Przypadek $y^2+y-1 = 0$

Wtedy także $y^3-2y+1 = (y-1)(y^2+y-1) = 0$, a więc macierz 1 przybiera postać:

$$\begin{pmatrix} -y & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -y & 1 & 0 & 0 \\ y & 1-y^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Łatwo tutaj widać, że przestrzeń rozwiązań jest dwuwymiarowa, mianowicie przyjmując $x_1 = t$ i $x_2 = u$ uzyskujemy rozwiązanie: $(x_1, \ldots, x_5) = (t, u, -t+yu, -yt-(1-y^2)u, yt-u)$.

Podsumowując, rozwiązaniem układu jest:

$$\begin{cases} (t, u, -t + yu, -yt - (1 - y^2)u, yt - u) & y \in \{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\} \\ (t, t, t, t, t) & y = 2 \\ (0, 0, 0, 0, 0) & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

# Zadanie 5

*Dowód.* Ponumerujmy gwiazdki w układzie równań:

$$\begin{array}{llll} x+ & *_1 y+ & *_2 z = & *_3 \\ x+ & *_4 y+ & *_5 z = & *_6 \\ x+ & *_7 y+ & *_8 z = & *_9 \end{array}$$

Następująca strategia daje pierwszemu graczowi zwycięstwo:

1. W pierwszym ruchu gracz pierwszy ustawia $*_1 = 0$.
2. W odpowiedzi na ruchy przeciwnika, gra tak, aby $*_2 = *_3$, $*_4 = *_7$, $*_5 = *_8$, $*_6 \neq *_9$. Innymi słowy: gdy przeciwnik wstawi jakąkolwiek wartość do $*_2, *_3, *_4, *_7, *_5, *_8$, gracz pierwszy wstawia dokładnie tę samą wartość do odpowiednio: $*_3, *_2, *_7, *_4, *_8, *_5$, zaś gdy gracz drugi wstawi jakąkolwiek wartość do $*_6$ lub $*_9$, gracz pierwszy wstawia inną wartość do odpowiednio: $*_9$ lub $*_6$. Łatwo widać, że zawsze będzie miał możliwość tak grać.

Łatwo widać, że ta gra musi się skończyć, gdyż maleje liczba niewypełnionych gwiazdek. Gdy zaś gra się zakończy, na mocy powyższego, równania drugie i trzecie będą trywialnie sprzeczne. □

# Zadanie 6

*Dowód.* Zadanie trywialnie można przedstawić jako następujący problem: dana jest macierz o 14 wierszach i 15 kolumnach wypełniona zerami i jedynkami (choć wystarczy, żeby była wypełniona liczbami wymiernymi). Należy udowodnić, że do jej jądra należy choć jeden niezerowy wektor o wszystkich współrzędnych całkowitych, tzn., że odpowiedni układ równań jednorodnych, ma niezerowe rozwiązanie całkowite.

Można jednak zauważyć, że wektor zerowy jest rozwiązaniem tego układu równań, a więc nie jest on sprzeczny. Jednak mamy więcej kolumn niż wierszy, więc układ ten nie może być oznaczony. Stąd istnieje jakieś inne rozwiązanie. Ponieważ proces eliminacji Gaussa wykorzystuje jedynie operacje ciała, okaże się, że istnieje niezerowe rozwiązanie wymierne. Przemnażając je przez wspólny mianownik (układ jest jednorodny), uzyskujemy rozwiązanie całkowite.

Innymi słowy: na mocy twierdzenia o rzędzie (*rank-nullity theorem*) zachodzi, że rząd macierzy i wymiar jej jądra dodają się do liczby wierszy macierzy. Stąd $15 = \operatorname{rank} A + \dim \ker A$.

Jednak rząd macierzy jest także jej rzędem wierszowym, a widać, że macierz o 14 wierszach nie może mieć więcej niż 14 wierszy liniowo niezależnych, więc $\operatorname{rank} A \leqslant 14$. Stąd $\dim \ker A \geqslant 1$, co daje $\ker A \neq \{\mathbf{0}\}$, a więc weźmy jakieś $x \in \ker A$ różne od wektora zerowego.

Ponieważ wyjściowa macierz była nad $\mathbb{Q}$, to $x \in \mathbb{Q}^{15}$. Niech $\nu \in \mathbb{Z}$ będzie najmnijeszym wspólnym mianownikiem współrzędnych wektora $x$. Biorąc wektor $y = \nu x$, widzimy, że $y \in \ker A$, $y \in \mathbb{Z}^{15}$, $y \neq \mathbf{0}$. □