Zadanie 3

Baza Newtona: 1, x, $x(x-1)$, $x(x-1)^2$, $x(x-1)^3$.
Wypełnijmy tabelkę zgodnie z algorytmem:

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & 0 & & & & \\
1 & -1 & \frac{-1-0}{1-0} = -1 & & & \\
1 & -1 & \frac{-2}{1!} = -2 & \frac{-1-0}{1-0} = -1 & & \\
1 & -1 & \frac{-2}{1!} = -2 & \frac{12}{2!} = 6 & \frac{6-(-1)}{1-0} = 7 & \\
2 & 11 & \frac{11-(-1)}{2-1} = 12 & \frac{12-(-2)}{2-1} = 14 & \frac{14-6}{2-1} = 8 & \frac{8-7}{2-0} = \frac{1}{2}
\end{array}$$

Zatem $w(x) = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot x + (-1) \cdot x(x-1) + 7 \cdot x(x-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot x(x-1)^3$.
Mamy dla $x \in [0,2]$ oszacowanie: $|w(x) - f(x)| = \left| \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x(x-1)^3(x-2) \right| \leqslant \frac{20}{120} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \leqslant \frac{80}{120} \leqslant 1$, a zatem $\|w - f\| \leqslant 1$.

Zadanie 8

Taka funkcja jest wyznaczona jednoznacznie, gdyż na $[-1,1]$ jest wielomianem liniowym wyznaczonym na dwóch punktach, a na $[1,4]$ wielomianem stopnia conajwyżej 3 wyznaczonym na 4 punktach, a takie wielomiany są wyznaczone jednoznacznie.

Mamy łatwo, że na $[-1,1]$ szukany wielomian liniowy jest w -1 równy $\cos(-2) = \cos 2$, tak jak w 1, a zatem jest on na $[-1,1]$ równy stale $\cos 2$.

Jednak $\cos 2 < 0$, zatem łatwo z przebiegu zmienności kosinusa widać, że $\|f - w\|_{[-1,1]} = |f(0) - w(0)| = 1 - \cos 2 \approx 1.41614\ldots$.

Na przedziale $[1,4]$ mamy zgodnie ze wzorami z ćwiczeń $f(x) - w(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Zatem $|f(x) - w(x)| \leqslant \frac{2^4}{4!} \cdot |(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)| \leqslant \frac{2^4}{4!} \cdot \frac{3!}{4} 1^4 = \frac{16}{16} = 1$. Zatem na $[1,4]$ błąd aproksymacji nie przekracza 1, a wartość ta jest przekroczona na $[-1,1]$ i osiąga tam maksimum równe $1 - \cos 2$, zatem liczba ta jest najlepszym możliwym oszacowaniem błędu interpolacji, gdyż jest mu równa.