Zadanie 2

Niech E_{ij} będzie macierzą o wszystkich wyrazach zerowych, za wyjątkiem tego w i-tym wierszu i j-tej kolumnie, gdzie występuje 1.

Układ takich macierzy dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$ jest bazą V. Każdy funkcjonał można więc zdefiniować na tej bazie.

Rozpatrzmy więc funkcjonał f i niech $b_{ij} = f(E_{ij})$. Utwórzmy z tych liczb b_{ij} macierz jako $B = \sum b_{ij} E_{ij}$.

Biorąc jednak dowolną macierz A widzimy, że można zapisać ją w bazie jako $A = \sum a_{ij} E_{ij}$, zatem $f(A) = \sum a_{ij} b_{ij}$. Jednak jak udowodniłem w którejś z poprzednich prac domowych, daje nam to, że $f(A) = \operatorname{tr}(B^T A)$. Stąd istotnie $f = f_B$.

Zauważmy jednak, że $bf_B + cf_C = f_{bB+cC}$. Istotnie,

$$\begin{aligned}
bf_B + cf_C &= b\left(\lambda A.\operatorname{tr}(B^T A)\right) + c\left(\lambda A.\operatorname{tr}(C^T A)\right) = \\
&= \lambda A.\left(b \operatorname{tr}(B^T A) + c \operatorname{tr}(C^T A)\right) = \lambda A.\operatorname{tr}\left(bB^T A + cC^T A\right) = \\
&= \lambda A.\operatorname{tr}(\left(bB^T + cC^T\right) A) = \lambda A.\operatorname{tr}((bB + cC)^T A) = \\
&= f_{bB+cC}
\end{aligned}$$

na mocy liniowości śladu, rozdzielności mnożenia względem dodawania, liniowości transpozycji.

Stąd odwzorowanie $B \mapsto f_B$ jest epimorfizmem liniowym. Jednak V jest skończonego wymiaru, a więc jest to izomorfizm.

Zadanie 3

Lemat 1. $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$, *gdzie* $A^\perp = \{f \in V^* | f(A) = \{0\}\}$ *jest anihilatorem* A, *zaś* A *i* B *są podprzestrzeniami liniowymi pewnej podprzestrzeni* W.

Dowód. Jeśli $f \in A^\perp + B^\perp$, to $f = g + h$, gdzie $g \in A^\perp$, $h \in B^\perp$, ale jednak oczywiście dla $x \in A \cap B$ mamy $f(x) = g(x) + h(x) = 0 + 0 = 0$.

W drugą stronę, jeśli $f \in (A \cap B)^\perp$, to zapiszmy: $C = A \cap B$, zaś D, E będą takie, że $C \oplus D = A$, $C \oplus E = B$.

Wtedy zauważmy, że $A + B = C \oplus D \oplus E$ (co było na wykładzie), zatem możemy dalej rozszerzyć do przestrzeni V zapisując: $V = C \oplus D \oplus E \oplus F$.

Teraz mamy wyznaczoną bazę V jako sumę teoriomnogościową baz C, D, E, F. Oznaczmy te bazy odpowiednio: (γ_i), (δ_i), (η_i), $(\mathcal{F}_i)$.

Ustalmy teraz przekształcenia $g, h \in V^*$ na bazie jako:

$$\begin{aligned}
g(\gamma_i) &= 0 \\
g(\delta_i) &= 0 \\
g(\eta_i) &= f(\eta_i) \\
g(\mathcal{F}_i) &= f(\mathcal{F}_i) \\
h(\gamma_i) &= 0 \\
h(\delta_i) &= f(\delta_i) \\
h(\eta_i) &= 0 \\
h(\mathcal{F}_i) &= 0
\end{aligned}$$

Widzimy istotnie, że g zeruje się na $C \oplus D = A$, zaś h zeruje się na $C \oplus E = B$.

Stąd $g \in A^\perp$, $h \in B^\perp$, lecz, jak łatwo widać na bazie, $f = g + h$, zatem $f \in A^\perp + B^\perp$.

Stąd mamy $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$.

□

Indukcyjnie mamy, że $(A_1 \cap \ldots \cap A_n)^\perp = A_1^\perp + \ldots + A_n^\perp$. Istotnie, $(A_1 \cap \ldots \cap A_n)^\perp = ((A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cap A_n)^\perp = (A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})^\perp + A_n^\perp = \ldots = A_1^\perp + \ldots + A_n^\perp$.

Gdyby któryś funkcjonał f_k był zerowy, to oczywiście f także musiałby być, a wtedy byłby trywialnie kombinacją zerową funkcjonałów f_i. Załóżmy zatem, że mamy funkcjonały niezerowe.

Teraz zauważmy, że $V/\ker f_k \cong \operatorname{im} f_k$, lecz $\dim \operatorname{im} f_k = 1$, zatem i $\dim(V/\ker f_k) = 1$. Niech więc $\alpha_k + \ker f_k$ będzie niezerowym wektorem tej przestrzeni. Mamy teraz, że każda warstwa tej przestrzeni ilorazowej jest wielokrotnością tego wektora. Wtedy łatwo mamy, że $V = \operatorname{lin}(\alpha_k) \oplus (\ker f_k)$.

Zauważmy, że wynika stąd, że $W_k := (\ker f_k)^\perp$ jest przestrzenią jednowymiarową. Istotnie, każdy funkcjonał z W_k jest określony na bazie, którą stanowi: α_k oraz wektory bazy jądra $\ker f_k$. Jednak niezerową wartość może on przyjąć jedynie na α_k.

Jednak f_k jest niezerowym wektorem przestrzeni W_k, zatem $W_k = \operatorname{lin}(f_k)$. Mamy jednak, że $(\ker f_1 \cap \ker f_2 \cap \ldots \cap f_n)^\perp = (\ker f_1)^\perp + (\ker f_2)^\perp + \ldots + (\ker f_n)^\perp = \operatorname{lin}(f_1) + \operatorname{lin}(f_2) + \ldots + \operatorname{lin}(f_n) = \operatorname{lin}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Zatem każdy funkcjonał zerujący się na przecięciu jąder funkcjonałów $f_1, \ldots, f_n$ jest kombinacją liniową tych funkcjonałów. Ale f zeruje się na tym przecięciu, gdyż to przecięcie to właśnie zbiór tych wszystkich x, że $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$.

Zatem f jest kombinacją liniową funkcjonałów $f_1, \ldots, f_n$.

Zadanie 4

Twierdzę, że wynikiem jest $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Istotnie: możemy sparować ludzi z miasteczka w $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ małżeństw (być może jeden człowiek pozostanie samotny – pomijamy go), po czym utworzyć wszystkie możliwe kluby, których członkami mogą być jedyne całe małżeństwa. Wtedy oczywiście każdy klub ma parzyście wielu członków, zaś każde dwa kluby mają parzyście wiele wspólnych członków, gdyż każde małżeństwo składa się z 2 osób.

Pokażę, że nie da się więcej. Każdy klub zapisujemy jako wektor w przestrzeni $GF(2)^n$, gdzie i-ty bit mówi, czy i-ta osoba należy do tego klubu (1) czy też nie (0).

Niech V będzie zbiorem klubów w optymalnym rozwiązaniu. Łatwo widać, że klub pusty należy do V (ma on parzyście wielu członków i z dowolnym klubem będzie miał parzyście wielu członków). Ponadto jeśli $\alpha, \beta \in V$, to $\alpha + \beta \in V$, gdzie $+$ oznacza dodawanie w $GF(2)^n$.

Istotnie, jak stwierdziliśmy na ćwiczeniach, warunki zadania można wyrazić jako $\forall_{\mu,\nu \in V} \langle \mu, \nu \rangle = 0$. Jednak iloczyn skalarny jest liniowy, a więc jeśli $\forall_{\mu \in V} \langle \mu, \alpha \rangle = \langle \mu, \beta \rangle = 0$, to także $\forall_{\mu \in V} \langle \mu, \alpha + \beta \rangle = 0$.

Zatem gdyby klub $\alpha + \beta$ nie należał do V, to można by go było dodać, i nadal byłoby to dobre rozwiązanie. Stąd optymalne rozwiązanie V jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $GF(2)^n$, gdyż suma dowolnych dwóch wektorów z V należy doń oraz wyniki mnożenia przez skalar także (ale skalary są tylko dwa: 0 i 1, zatem wystarczy, żeby wektor zerowy należał do V). Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ będzie bazą tej przestrzeni.

Zapisując te wektory jako wiersze macierzy $M \in GF(2)^n_d$ widzimy, że macierz ta jest rzędu d, gdyż ma liniowo niezależne wiersze. Jednak z drugiej strony, każdy z wektorów α_i należy do jądra tej macierzy, gdyż przemnożenie przez tę macierz oznacza wzięcie iloczynów skalarnych z wektorami $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$. Stąd $V \subseteq \ker M$, skąd $d = \dim V \leqslant \dim \ker M$.

Jednak $\dim \ker M + \operatorname{rank} M = n$, a zatem $2d = d + d \leqslant d + \dim \ker M = n$, zatem $2d \leqslant n$, skąd $d \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Zadanie 5

Zauważmy, że gdyby istniał student, który tylko raz poszedł na lody, to znaczy, że wszyscy musieli z nim iść na raz. Jednak wtedy po tym wyjściu każda para studentów poszłaby już dokładnie raz, zatem możliwe byłoby jedynie jedno wyjście na lody, wbrew założeniu $k > 1$. Stąd każdy student szedł na lody więcej niż raz.

Oznaczmy liczbę studentów przez n. Utwórzmy n wektorów $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ w następujący sposób: każdemu studentowi przyporządkowujemy jeden wektor. Wektor ten ma na i-tej współrzędnej liczbę 1, gdy student ten uczestniczył w i-tym wyjściu, zaś 0, gdy nie.

Mamy teraz, że $\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle$ to liczba wyjść na lody, w których wspólnie uczestniczyli studenci i i j. Dla $i = j$ jest to po prostu liczba wyjść na lody studenta i.

Załóżmy, że dla pewnych stałych $a_1, \ldots, a_n$ zachodzi $\sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i = 0$. Mamy wtedy, że mnożąc to skalarnie przez σ_k uzyskujemy: $\sum_{i=1}^{n} a_i \langle \sigma_i, \sigma_k \rangle = 0$. Jednak $\langle \sigma_i, \sigma_k \rangle = 1$ dla $i \neq k$, zaś jest to liczba większa niż 1 dla $i = k$.

Stąd mamy, że $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_k\left(\langle\sigma_k, \sigma_k\rangle - 1\right) = 0$. Jednak wybierając zamiast k liczbę k' uzyskujemy $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{k'}\left(\langle\sigma_{k'}, \sigma_{k'}\rangle - 1\right) = 0$.

Stąd $a_k\left(\langle\sigma_k, \sigma_k\rangle - 1\right) = a_{k'}\left(\langle\sigma_{k'}, \sigma_{k'}\rangle - 1\right)$ dla dowolnych k, k'. Oznaczmy wspólną wartość obu stron przez x.

Wtedy mamy, że $a_k = \frac{x}{\langle\sigma_k, \sigma_k\rangle - 1}$. Wracając jednak do równości $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_k\left(\langle\sigma_k, \sigma_k\rangle - 1\right) = 0$ uzyskujemy $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x}{\langle\sigma_i, \sigma_i\rangle - 1}\right) + x = 0$.

Jednak wszystkie składniki tej sumy mają taki znak, bo $\langle\sigma_i, \sigma_i\rangle > 1$. Zatem gdyby $x > 0$ ($x < 0$), to cała lewa strona byłaby dodatnia (ujemna). Stąd zaś mamy $x = 0$, skąd wszystkie $a_i = 0$.

Stąd układ $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ jest liniowo niezależny. Lemat Steinitza daje jednak, że $n \leqslant k$.

Zadanie 6

Oznaczmy liczbę żarówek przez n. Każdy przycisk można interpretować jako wektor w przestrzeni $GF(2)^n$, gdzie i-ty bit jest zapalony wtedy i tylko wtedy, gdy ten przycisk jest połączony i-tą żarówką. Wtedy użycie kilku przycisków ma taki efekt jak ich suma w $GF(2)^n$.

Skonstruujemy indukcyjnie układ n liniowo niezależnych przycisków. Załóżmy, że już skonstruowaliśmy układ $0 \leqslant d < n$ liniowo niezależnych przycisków: $\varpi_1, \ldots, \varpi_d$.

Twierdzę, że istnieje niepusty zbiór żarówek taki, że każdy z przełączników $\varpi_1, \ldots, \varpi_d$ jest połączony z parzyście wieloma żarówkami z tego zbioru.

Istotnie, zapisując te przełączniki jako wiersze macierzy mamy, że jest to macierz o d wierszach i n kolumnach, zatem łatwo mamy, że jej jądro jest nietrywialne. Niech więc ν będzie niezerowym wektorem z jądra tej macierzy.

Zauważmy, co to oznacza: ponieważ przemnożenie wektora przez taką macierz oznacza wzięcie nad $GF(2)$ iloczynu skalarnego ze wszystkimi wierszami macierzy, daje nam to łatwo, że $\langle\varpi_i, \nu\rangle = 0$, skąd łatwo mamy, że gdy wybierzemy żarówki odpowiadające zapalonym bitom wektora ν, to każdy przełącznik ϖ_i przełącza parzyście wiele żarówek z tego zbioru.

Z liniowości iloczynu skalarnego łatwo mamy, że dla $\varkappa \in \mathrm{lin}(\varpi_1, \ldots, \varpi_d)$ zachodzi $\langle\varkappa, \nu\rangle = 0$. Na mocy warunków zadania mamy jednak, że istnieje przełącznik υ taki, że przełącza on nieparzyście wiele żarówek ze zbioru odpowiadającego zapalonym bitom wektora ν. Stąd $\langle\upsilon, \nu\rangle = 1$.

Zatem $\upsilon \notin \mathrm{lin}(\varpi_1, \ldots, \varpi_d)$. Stąd układ $\varpi_1, \ldots, \varpi_d, \upsilon$ jest liniowo niezależny.

Stąd mamy, że istnieje układ liniowo niezależny przełączników $\varpi_1, \ldots, \varpi_n$. Jednak to oznacza, że jest on bazą przestrzeni $GF(2)^n$, zatem dla każdego wyboru żarówek istnieje kombinacja liniowa przycisków, która zgasi te żarówki.