Zadanie 1

Wystarczy pokazać, że wektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ są liniowo niezależne, ze względu na porównanie wymiarów oraz niezależność założeń i tezy od permutacji wektorów.

Przypuśćmy, że $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ dla nie wszystkich wyrazów a_i równych zeru, co możemy, poprzez usunięcie wyrazów z $a_i = 0$ oraz przerzucenie wyrazów z $a_i < 0$ na drugą stronę[1]. Uzyskujemy wtedy $\sum_{i \in I_+} a_i \mathbf{e}_i = \sum_{j \in I_-} b_j \mathbf{e}_j := \mathbf{S}$, gdzie wszystkie współczynniki są dodatnie (tj. $b_j := -a_j$). Mamy oczywiście $I_+ \cap I_- = \varnothing$, a także $I_+ \cup I_- \neq \varnothing$ (bo nie wszystkie a_i były równe zeru).

Jeśli zachodzi warunek $I_+ = \varnothing$ lub $I_- = \varnothing$, to oczywiście $\mathbf{S} = \mathbf{0}$. W przeciwnym wypadku mamy następującą równość: $\langle \mathbf{S}, \mathbf{S} \rangle = \langle \sum_{i \in I_+} a_i \mathbf{e}_i, \sum_{j \in I_-} b_j \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{i \in I_+} \sum_{j \in I_-} a_i b_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle < 0$, co jest sprzecznością.

Zatem $I_+ = \varnothing$ lub $I_- = \varnothing$. Załóżmy bez straty ogólności ten drugi przypadek. Wtedy ponieważ $I_+ \cup I_- \neq \varnothing$, to $I_+ \neq \varnothing$.

Mamy więc $0 = \langle \mathbf{S}, \mathbf{e}_{n+1} \rangle = \langle \sum_{i \in I_+} a_i \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{n+1} \rangle = \sum_{i \in I_+} a_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{n+1} \rangle < 0$, co jest sprzecznością.

Zadanie 3

Musi być wtedy $m \leqslant n$. Niech A' będzie macierzą powstałą z macierzy A poprzez wzięcie przestrzeni rozpiętej na jej kolumnach, dopełnienie do bazy całego $\mathbb{R}^n$, a następnie zapisaniu tej nowej bazy jako kolumny macierzy A', przy czym te pierwotne wektory z macierzy A zajmują pierwszych m kolumn (w skrócie: uzupełniamy macierz A do macierzy odwracalnej $n \times n$ poprzez dopisanie jakichś kolumn z prawej strony).

Ta macierz posiada rozkład $A' = QR'$, gdzie Q jest macierzą ortogonalną, a R' górnotrójkątną z dodatnimi wyrazami na przekątnej, jak wynika z twierdzenia z wykładu. Teraz możemy uciąć ostatnie $n - m$ kolumn macierzy R' i łatwo widać, że uzyskamy macierz górnotrójkątną prostokątną z dodatnimi wyrazami na przekątnej: oznaczmy ją R. Mamy teraz $A = QR$, co widać przez popatrzenie na to jako mnożenie blokowe macierzy: ucinając $n - m$ kolumn z R', ucinamy $n - m$ kolumn z A'.

Jednoznaczność rozkładu QR macierzy kwadratowej została pokazana na wykładzie.

Zadanie 4

Łatwo widać, że pole takiego rzutu to połowa sumy pól rzutów ścian: gdy ustalimy płaszczyznę, na którą rzutujemy, to mamy bijekcję między „przodem" a „tyłem" sześcianu i pola rzutów tego przodu i tyłu są równe. Bijekcję tę ustalamy wystawiając z płaszczyzny proste prostopadłe przecinające sześcian. Każda taka prosta odpowiada jednemu punktowi w rzucie i łatwo widzimy, że każda taka prosta przetnie sześcian dwa lub zero razy, za wyjątkiem pewnego zbioru prostych, który przetnie sześcian raz: ale jest to brzeg rzutu, więc ma miarę zero.

Niech nasz sześcian będzie równoległościanem rozpiętym przez wektory bazy standardowej, które oznaczmy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Ustalmy płaszczyznę Π, na którą rzutujemy i niech $\mathbf{n}$ będzie znormalizowanym wektorem normalnym tej płaszczyzny. Niech $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ będą rzutami odpowiednio $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ na Π. Mamy wtedy, że sześć ścian tego sześcianu to równoległoboki rozpięte przez pary wektorów spośród zbioru $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ (z dokładnością do znaku, ale on nie zmienia pola).

Połowa sumy pól rzutów to, jak łatwo widać, pola równoległoboków rozpiętych przez $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$, przez $\mathbf{a}', \mathbf{c}'$ oraz $\mathbf{b}', \mathbf{c}'$. Policzmy pierwsze z tych pól, pozostałe są analogiczne. Mamy $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \lambda \mathbf{n}$ oraz $\langle \mathbf{a}', \mathbf{n} \rangle = 0$, skąd łatwo $\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = \lambda \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \lambda$, skąd $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}$. Analogicznie $\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}$.

Mamy, że pole równoległoboku rozpiętego na $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$ to $\|\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'\|$, lecz $\mathbf{a}', \mathbf{b}' \perp \mathbf{n}$, zatem $\mathbf{a}' \times \mathbf{b}' \| \mathbf{n}$, skąd ponieważ $\|\mathbf{n}\| = 1$, to

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'\| &= |\langle \mathbf{a}' \times \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle| = \left|\det \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a}' & \mathbf{b}' & \mathbf{n} \end{array}\right]\right| = \\
&= \left|\det \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} & \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} & \mathbf{n} \end{array}\right]\right| = \\
&= \left|\det \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{n} \end{array}\right]\right| = |\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle| = \\
&= |\langle \mathbf{c}, \mathbf{n} \rangle|
\end{aligned}$$

Analogicznie wyznaczając pole rzutu dla pozostałych równoległoboków uzyskujemy, że pole rzutu sześcianu na Π to $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle| + |\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle| + |\langle \mathbf{c}, \mathbf{n} \rangle| = \|\mathbf{n}\|_1$.

Zapisując jednak $\mathbf{n} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$ uzyskujemy, że chcemy zmaksymalizować wyrażenie $|x| + |y| + |z|$ przy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Mamy jednak $\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geqslant \frac{|x|+|y|+|z|}{3}$, z równością osiąganą dla $|x| = |y| = |z|$. Zatem maksymalne pole wynosi $3\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{3}$.

Uogólnienie

Można też zauważyć, że rozumowanie to uogólnia się na wyższe wymiary: gdy rozpatrzymy jednostkową kostkę n-wymiarową rozpiętą przez wektory bazy standardowej i zrzutujemy go prostopadle na przestrzeń $(n-1)$-wymiarową o znormalizowanym wektorze normalnym $\mathbf{n}$, to także analogiczny argument z wystawianiem prostych daje bijekcję między „przodem" a „tyłem" kostki i uzyskujemy, że $(n-1)$-objętość rzutu

[1] Swoją drogą, ten proces był przez Arabów nazwany *al-ǧabr*, a skoro przenoszę wyrazy liniowe, to to istotnie jest algebra liniowa

to połowa sumy $(n-1)$-objętości rzutów $(n-1)$-wymiarowych ścian.

Mamy, że każda taka $(n-1)$-wymiarowa ściana wyznaczona jest przez pewnych $(n-1)$ wektorów bazowych, i każde $(n-1)$ wektorów bazowych wyznacza dwie ściany, zatem połowa sumy $(n-1)$-objętości rzutów $(n-1)$-wymiarowych ścian to po prostu suma $(n-1)$-objętości rzutów $(n-1)$-wymiarowych ścian incydentnych z punktem $\mathbf{0}$.

Jednak znów ten sam argument z przekształcaniem iloczynu wektorowego używając postaci wyznacznikowej iloczynu mieszanego daje, że $(n-1)$-objętość rzutu $(n-1)$-wymiarowej ściany rozpiętej przez wszystkie wektory bazowe za wyjątkiem $\mathbf{a}$, jest równa $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle|$, stąd uzyskujemy, że sumaryczna $(n-1)$-objętość rzutu kostki to $\|\mathbf{n}\|_1$, przy czym ustaliliśmy $\|\mathbf{n}\|_2 = 1$, skąd znów dzięki nierówności między średnią kwadratową a arytmetyczną uzyskujemy, że szukana maksymalna objętość to $\sqrt{n}$.

Zadanie 5

Lemat 1. *Dla dowolnych* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ *zachodzi:*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}\rangle \mathbf{a}$$

Dowód. Na ćwiczeniach pokazaliśmy, że $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle \mathbf{w}$. Wstawiając $\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{a}$, $\mathbf{w} = \mathbf{c}$, uzyskujemy $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle \mathbf{a} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\rangle \mathbf{c}$, lecz $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{a}\rangle = 0$, skąd teza. ☐

Załóżmy, że $\mathbf{a} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $\mathbf{b} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, $\mathbf{c} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$. Czyli na mocy własności iloczynu wektorowego, $\mathbf{a} \perp \mathbf{u}, \mathbf{v}$; $\mathbf{b} \perp \mathbf{v}, \mathbf{w}$; $\mathbf{c} \perp \mathbf{w}, \mathbf{u}$. Zatem ponieważ $\mathbf{u} \perp \mathbf{a}, \mathbf{c}$, a wektory $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ są liniowo niezależne, to $\mathbf{u} \| \mathbf{a} \times \mathbf{c}$. Zatem $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{a} \times \mathbf{c}$. Analogicznie $\mathbf{v} = \kappa \mathbf{a} \times \mathbf{b}$; $\mathbf{w} = \mu \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

Teraz mamy, że

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \lambda\kappa\, (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \lambda\kappa \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \times \mathbf{b}\rangle \mathbf{a} = \\
&= -\lambda\kappa \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}\rangle \\
\mathbf{b} &= \kappa\mu\, (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\kappa\mu\, (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \\
&= -\kappa\mu \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{c}\rangle \mathbf{b} = \kappa\mu \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}\rangle \mathbf{b} \\
\mathbf{c} &= \lambda\mu\, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \lambda\mu\, (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \\
&= \lambda\mu \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \times \mathbf{a}\rangle \mathbf{c} = -\lambda\mu \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}\rangle \mathbf{c}
\end{aligned}$$

czyli musi być $1 = -\lambda\kappa\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}\rangle$, $1 = \kappa\mu\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}\rangle$, $1 = -\lambda\mu\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}\rangle$.

Wymnażając stronami uzyskane trzy warunki mamy $1 = \lambda^2\kappa^2\mu^2 \left(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}\rangle\right)^3$. Stąd w szczególności uzyskujemy $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}\rangle > 0$, czyli rozpisując z definicji iloczynu wektorowego: $\det \left[\ \mathbf{b} \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{a}\ \right] > 0$, czyli równoważnie $\det \left[\ \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid \mathbf{c}\ \right] > 0$, czyli baza $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jest pozytywnie zorientowana.

Teraz załóżmy, że $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}\rangle > 0$. Wtedy możemy określić $\lambda\kappa\mu = \left(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}\rangle\right)^{-\frac{3}{2}}$, skąd postulując $1 = -\lambda\kappa\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}\rangle$ uzyskujemy wartość μ. Stosując pozostałe uzyskane wyżej analogiczne równości uzyskujemy wartości λ, κ. Łatwo widać, że wtedy uzyskujemy, że istotnie spełnione są równości sprzed dwóch akapitów, zatem $\mathbf{a} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $\mathbf{b} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, $\mathbf{c} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$.

Stąd odpowiedzią na pytanie z zadania jest pozytywna orientacja układu $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Zadanie 6

Zadanie nie precyzuje, co rozumiemy przez „najlepiej pasująca”, więc przyjmę interpretację, że chodzi o zminimalizowanie sumy kwadratów odległości tej prostej od punktów, ale „odległości” mierzonej w pionie[2]. Zapiszmy więc: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mamy wtedy, że jeśli szukana prosta ma równanie $y = ax + b$, to $\left\| \mathbf{A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \mathbf{b} \right\|$ jest błędem przybliżenia. Aby go zminimalizować, na mocy faktu z ćwiczeń należy rozwiązać równanie $\mathbf{A}^T\mathbf{A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$, czyli $\begin{pmatrix} 18 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$. Wyznacznik macierzy kwadratowej po lewej stronie jest niezerowy, więc jest dokładnie jedno rozwiązanie, a łatwo widać, że $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$ spełniają go. Zatem szukaną prostą jest prosta $y = 2 - \frac{x}{2}$.

[2] Taką interpretację zdaje się przyjmować Wolfram Alpha