Zadanie 1

Zauważmy, że $|z^3| = |(-7-24i)\overline{z}| = |7+24i||z| = 25|z|$, skąd łatwo $|z| = 0$, $|z| = 5$, $|z| = -5$. Gdy $|z| = 0$, to $z = 0$ i istotnie jest to rozwiązanie. Gdy zaś $|z| = -5$ mamy oczywistą sprzeczność.

Został nam przypadek $|z| = 5$. Jednak wtedy mnożąc równanie z zadania stronami przez z (co jest różne od 0, a więc jest to przekształcenie równoważne), uzyskujemy, że $z^4 = -25(7+24i)$, jednak $(2-i)^4 = (3-4i)^2 = -7-24i$, a więc mamy, że $z^4 = \left(\sqrt[4]{25}\cdot(2-i)\right)^4$, skąd mamy łatwo, że $z = \pm\left(\sqrt{5}\cdot(2-i)\right)$ lub $z = \pm i\left(\sqrt{5}\cdot(2-i)\right)$. (Jeśli bowiem $a^4 = b^4 \neq 0$, to $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = 1$, skąd $\frac{a}{b} \in \{1,-1,i,-i\}$).

Zadanie 2

Mamy $\left(z^2-z+1\right)\left(z^4+z^3+z^2+z+1\right) = \left(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2\right)-\left(z^5+z^4+z^3+z^2+z\right)+\left(z^4+z^3+z^2+z+1\right) = z^6+z^4+z^3+z^2+1$.

Wystarczy więc osobno rozważyć pierwiastki wielomianu $L(z) = z^2-z+1$, a osobno $R(z) = z^4+z^3+z^2+z+1$.

Jednak $\left(z^2-z+1\right)(z+1) = z^3+1$, a więc pierwiastki L są pierwiastkami trzeciego stopnia z -1 różnymi od -1, a więc o argumentach: $\frac{\pi}{3}$ i $-\frac{\pi}{3}$. Jedyny z nich o dodatniej części urojonej to ten z argumentem $\frac{\pi}{3}$.

Pierwiastki R są to pierwiastki zespolone piątego stonia z jedynki (pomijając ją samą), a więc mają argumenty kolejno: $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{8\pi}{5}$. Łatwo jednak widać, że tylko dwa pierwsze mają dodatnią część urojoną (argument w przedziale $(0,\pi)$).

Mamy więc, że $\arg P = \frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{5}+\frac{4\pi}{5} = \frac{23\pi}{15}$.

Zadanie 3

Zauważmy, że przy założeniach zadania, równanie $\left(\frac{1}{y}\right)^{10}+\left(13\cdot\frac{1}{y}-1\right)^{10} = 0$ ma pierwiastki $y_i = z_i^{-1}$, $\overline{y_i} = \left(\overline{z_i}\right)^{-1}$, a więc wystarczy policzyć $y_1\overline{y_1}+\ldots+y_5\overline{y_5} = \frac{y_1\overline{y_1}+\overline{y_1}y_1}{2}+\ldots+\frac{y_5\overline{y_5}+\overline{y_5}y_5}{2} = \frac{|y_1|^2+|\overline{y_1}|^2+|y_2|^2+|\overline{y_2}|^2+\ldots+|y_5|^2+|\overline{y_5}|^2}{2}$, czyli połowę sumy kwadratów modułów pierwiastków tego równania (oznaczmy tę wielkość przez S).

Jednak przemnażając to równanie równoważnie stronami przez y^{10} (widać, że $y = 0$ nie jest rozwiązaniem tego równania), otrzymujemy równanie: $1+(13-y)^{10} = 0$, czyli $(y-13)^{10} = -1$.

Rozważmy więc przesunięcie płaszczyzny zespolonej o wektor od punktu 13 do 0. Wtedy chcemy policzyć sumę kwadratów odległości od punktu -13 rozwiązań równania $t^{10} = -1$. Rozwiązania te, jak łatwo widać, mają moduł równy jedności.

Zauważmy jednak, że $|t-(-13)|^2 = (t+13)\left(\overline{t}+13\right) = 169+1+13\left(t+\overline{t}\right) = 170+13\cdot 2\mathfrak{Re}\,(t)$, a więc wystarczy przesumować to wyrażenie po wszystkich pierwiastkach równania $t^{10} = -1$, czyli $2S = \sum_t (170+26\mathfrak{Re}\,(t)) = 170\cdot 10+26\sum_t \mathfrak{Re}\,(t)$. Jednak zauważmy, że ze wzorów Viete'a: $\sum_t t = 0$, a więc w szczególności $\sum_t \mathfrak{Re}\,(t) = \mathfrak{Re}\left(\sum_t t\right) = 0$, skąd mamy, że szukana suma wynosi $S = \frac{170\cdot 10+26\cdot 0}{2} = 850$.

Zadanie 4

Oczywiście jednym z pierwiastków równania $z^4+z^3+z^2+z+1 = 0$ (oznaczmy jest ‡) jest liczba $\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ (gdyż przemnażając to równanie przez $z-1$ otrzymujemy równanie $z^5-1 = 0$).

Zauważmy, że:

$$\begin{aligned}\left(2z^2+z+2\right)^2 &= 4z^4+z^2+4+4z^3+8z^2+4z = 4z^4+4z^3+9z^2+4z+4\\ &\overset{\ddagger}{=} -4\left(z^3+z^2+z+1\right)+4z^3+9z^2+4z+4 = 5z^2 = \left(\sqrt{5}z\right)^2\end{aligned}$$

Skąd $\left(2z^2+z+2+\sqrt{5}z\right)\left(2z^2+z+2-\sqrt{5}z\right) = 0$, czyli któryś z nawiasów się zeruje.

Zajmijmy się najpierw pierwszym równaniem: $2z^2+\left(1+\sqrt{5}\right)z+2 = 0$. Wyróżnik trójmianu: $\Delta = \left(1+\sqrt{5}\right)^2-4\cdot 2\cdot 2 = 2\sqrt{5}-10$, skąd pierwiastki: $z = \frac{-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4}$, jednak widzimy, że $2\sqrt{5} < 2\cdot 5 = 10$, a więc pierwiastek w tym wzorze jest urojony (właściwie: każde z dwóch wartościowań tego pierwiastka (co oznaczyłem znakiem

$\pm$) jest urojone). To zaś oznacza, że oba te pierwiastki mają jako swoją część rzeczywistą liczbę $\frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$, zaś poszukiwane $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ ma zarówno część rzeczywistą jak i urojoną dodatnią.

Zajmijmy się więc drugim równaniem $2z^2+\left(1-\sqrt{5}\right)z+2 = 0$. Wyróżnik trójmianu: $\Delta = \left(1-\sqrt{5}\right)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = -2\sqrt{5}-10$, skąd pierwiastki: $z = \frac{-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{-2\sqrt{5}-10}}{4}$. Oba te pierwiastki mają taką samą część rzeczywistą i jest ona dodatnia, a ponieważ więcej pierwiastków już nie ma, to stwierdzamy, że $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Zadanie 5

Zauważmy, że wszystkie wierzchołki szukanego 2013-kąta foremnego są pierwiastkami równania $z^{2013} = 1$. Chcemy obliczyć iloczyn odległości liczby 1 (jednego z tych wierzchołków) do wszystkich pozostałych wierzchołków, a więc wielkość $\prod_{z\neq 1}|z-1|$. Zauważmy jednak, że jeśli z jest pierwiastkiem tego równania, to $\overline{z}$ także (i za wyjątkiem $z = 1$ są to różne liczby), a ponadto: $|z-1|\cdot|\overline{z}-1| = (z-1)(\overline{z}-1)$, a więc wystarczy policzyć iloczyn $\prod_{z\neq 1}(z-1)$. Wielomianem, którego pierwiastkami są liczby $z-1$ jest wielomian $(z+1)^{2013}-1$, jednak ponieważ jego pierwiastkiem jest także 0 (odległość liczby 1 od samej siebie), interesuje nas iloczyn pierwiastków wielomianu $\frac{(z+1)^{2013}-1}{z}$, który jak łatwo widać ze wzorów Viete'y i dwumianu Newtona jest równy 2013.

Zadanie 6

Dowód. Udowodnię kontrapozycję tezy, tzn., że jeśli $\left|z+z^{-1}\right| > 2$, to $\left|z^3+z^{-3}\right| > 2$.

Zauważmy, że: $\left|z^3+z^{-3}\right| + 3\left|z+z^{-1}\right| \overset{\Delta}{\geqslant} \left|z^3+z^{-3}+3z+3z^{-1}\right| = \left|z^3+3z^2z^{-1}+3zz^{-2}+z^{-3}\right| = \left|\left(z+z^{-1}\right)^3\right| = \left|z+z^{-1}\right|^2\cdot\left|z+z^{-1}\right| > 4\left|z+z^{-1}\right|$, skąd mamy, że $\left|z^3+z^{-3}\right| > \left|z+z^{-1}\right| > 2$. $\square$