Rozwiązania zadań z egzaminu z Teorii kategorii w podstawach informatyki, semestr zimowy 2015/2016

Krzysztof Pszeniczny (347208)

3 kwietnia 2016

1 Rozważania wstępne

1.1 Funktor $\mathcal{K}_{\Sigma,\Phi}$, $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}$

Niech Σ będzie sygnaturą algebraiczną, a Φ zbiorem Σ-równości. Określmy sygnaturę $\hat{\Sigma}$ tak, że ma te same sorty co Σ, a także te same operacje, lecz dodatkowo dla każdego sortu s ma stałą k_s. Niech ponadto $\hat{\Phi}$ będzie Φ rozpatrywanym jako zbiór $\hat{\Sigma}$-równości.

Mamy funktor zanurzenia $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi} : \mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}, \hat{\Phi})$, gdzie jako wartość stałej k_s w $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(A)$ kładziemy kluczyk sortu s algebry A. Łatwo widać, że zachowywanie kluczyków przez morfizmy w $\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$ odpowiada zachowywaniu stałych k_s w $\mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}, \hat{\Phi})$, zatem w oczywisty sposób $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}$ przesyła morfizmy na morfizmy, zatem jest funktorem.

Twierdzę, że ma on lewy sprzężony. Istotnie, niech A będzie algebrą należącą do $\mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}, \hat{\Phi})$. Niech $\approx \subseteq |A| \times |A|$ będzie najmniejszą kongruencją nad A generowaną przez równości $\hat{\Phi}$ oraz spełniającą dla każdej operacji $f : s_1 \times s_2 \times \cdots \times s_n \to s_0$ warunek

$$\forall_{a_{s_1},\ldots,a_{s_n}} \left(f(k_{s_1}, k_{s_2}, \ldots, k_{s_n}) \approx k_{s_0} \implies f(a_{s_1}, \ldots, a_{s_n}) \approx k_{s_0}\right) \tag{1}$$

(przecięcie dwóch takich kongruencji także spełnia powyższe warunki, zaś kongruencja utożsamiająca wszystko spełnia je, więc istnieje najmniejsza kongruencja spełniająca je).

Teraz $A_{/\approx}$ jest $\hat{\Sigma}$-algebrą spełniającą zbiór równości $\hat{\Phi}$, z naturalnie wyznaczonymi kluczkami: $(k_s)_s$, której każda operacja zamknięta ze względu na kluczyki jest stała. Zatem łatwo określamy A' należące do $\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$, które jest dokładnie równe algebrze $A_{/\approx}$, lecz jedynie zapominamy o istnieniu stałych k_s, lecz kładziemy ich wartości jako kluczyki algebry, tj. $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(A') = A_{/\approx}$.

Twierdzę, że A' jest obiektem wolnym nad A. Istotnie, mamy przekształcenie $\eta_A : A \to \mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(A')$, będące po prostu przekształceniem ilorazowym $A \to A_{/\approx}$.

Niech teraz $B' \in \mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$ będzie algebrą kluczykową, zaś $f : A \to \mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(B')$. Chcemy pokazać, że istnieje dokładnie jedno przekształcenie $f^\# : A' \to B'$ takie, że $\eta_A ; \mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(f^\#) = f$.

Jest to tak naprawdę własność uniwersalna algebry ilorazowej: ewaluując tę równość na obiekcie a widzimy, że $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(f^\#)([a]_\approx) = f(a)$, skąd widzimy, że wartości $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(f^\#)$ (a zatem i $f^\#$, gdyż teorio-zbiorowo są to te same funkcje na nośnikach: zmieniliśmy tylko „typ") są jednoznacznie wyznaczone przez wartości f. Zatem wystarczy tylko wykazać istnienie takiego $f^\#$. W tym celu zauważmy, że definicja $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(f^\#)([a]_\approx) = f(a)$ określa $f^\#$, o ile tylko jest niesprzeczna, tj. jeśli $a \approx b$, to $f(a) = f(b)$.

Jednakże łatwo widzimy, że jeśli jakaś operacja jest zamknięta przez kluczyki w A, to musi też być w $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(B')$, gdyż morfizmy zachowują kluczyki, a zatem jest ona stała w B'. Stąd zaś mamy, że dla $\approx' = \approx \cap K_f$, gdzie $aK_f b \iff f(a) = f(b)$ jest jądrem morfizmu f, zachodzą wszystkie równości z $\hat{\Phi}$ (trywialnie), a także implikacja 1.

Zatem $\approx \subseteq \approx'$ (gdyż $\approx$ jest najmniejszą kongruencją spełniającą podane warunki), skąd $K_f \subseteq \approx$, skąd widzimy, że istotnie, definicja $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(f^\#)([a]_\approx) = f(a)$, dobrze definiuje $f^\#$, przynajmniej jako funkcję na nośniku.

Łatwo jednak widać, że jest to morfizm algebr, oraz że zachowuje on kluczyki, co wynika wprost z definicji. Zatem $f^\#$ jest poprawnym morfizmem w $\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$.

Powstały w ten sposób funktor lewy sprzężony do $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}$ będę nazywał $\mathcal{K}_{\Sigma,\Phi}$. Zauważmy ponadto, że $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi} ; \mathcal{K}_{\Sigma,\Phi}$ jest funktorem identycznościowym: istotnie, jeśli $A = \mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(A_0)$, to w powyższym dowodzie najmniejszą relacją spełniającą podane warunki jest kongruencja identycznościowa, a zatem $A' = A_0$. Stąd wynika, że w obrazie funktora $\mathcal{K}_{\Sigma,\Phi}$ znajduje się cała kategoria $\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$.

2 Zadanie 1

2.1 Produkty

2.1.1 $\mathbf{KAlg}(\Sigma)$, $\mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)$

Mamy oczywisty funktor zapominania o kluczykach $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi} : \mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi)$, który utożsamia $\mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)$ z pełną podkategorią kategorii $\mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi)$

tych algebr, które są kluczykowe.

Niech $\mathcal{X} \subseteq |\mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)|$ będzie zbiorem obiektów, których produktu szukamy. Niech $\mathcal{X}' = \{\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}(X) : X \in \mathcal{X}\}$. Niech $P' = \prod \mathcal{X}'$ wraz z $\pi'_X : P' \to X$ dla każdego $X \in \mathcal{X}'$ będzie produktem w $\mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi)$. Twierdzę, że algebra P', gdy dobierzemy jako kluczyki krotki złożone z kluczyków algebr $\mathcal{X}'$. jest kluczykowa. Istotnie, jeśli jakaś operacja f jest zamknięta na kluczyki, to z konstrukcji algebry produktowej wiemy, że odpowiadająca jej operacja w każdej z algebr z $\mathcal{X}'$ też jest zamknięta na kluczyki (gdyż operacje w P' działają „po współrzędnych"), a zatem jest tam stała. Stąd, znów z konstrukcji algebry produktowej, stała też jest f w algebrze P'.

Zatem P należy do obrazu funktora $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$, zatem istnieje dokładnie jedno $P \in |\mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)|$ takie, że $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}(P) = P'$ oraz dla każdego $X \in \mathcal{X}$ mamy $\pi_X : P \to X$ takie, że $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}(\pi_X) = \pi'_X$. Twierdzę, że P wraz z rodziną $\{\pi_X\}_{X \in \mathcal{X}}$ jest produktem rodziny $\mathcal{X}$.

Istotnie, niech $O \in |\mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)|$ wraz z rodziną morfizmów $o_X : O \to X$ dla każdego $X \in \mathcal{X}$. Wtedy z własności uniwersalnej produktu mamy, że istnieje jedyny morfizm $f' : \mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}(O) \to P'$ taki, że $f'; \pi'_X = \mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}(o_X)$. Ale cofając f' przez funktor $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ (którego obraz jest pełną podkategorią) widzimy, że mamy dokładnie jeden morfizm $f : O \to P$ taki, że $f; \pi_X = o_X$.

Zatem istotnie, w $\mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)$ istnieją produkty dziedziczone z $\mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi)$.

Dowód dla $\mathbf{KAlg}(\Sigma)$ uzyskujemy przez wcięcie pustego zbioru równości.

2.1.2 $\mathbf{KKAlg}(\Sigma)$, $\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$

Rozumujemy analogicznie jak wyżej, biorąc jednak w miejsce funktora $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi} : \mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi)$, funktor $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi} : \mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}, \hat{\Phi})$.

2.2 Ekwalizatory

2.2.1 $\mathbf{KAlg}(\Sigma)$, $\mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)$

Pokażę, że już kategoria $\mathbf{KAlg}(\Sigma)$ nie ma ekwalizatorów wszystkich par równoległych morfizmów dla dowolnego Σ. Dowodzić to będzie oczywiście, że $\mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)$ także ich nie ma.

Weźmy bowiem sygnaturę Σ złożoną z jednego sortu s, bez jakichkolwiek stałych czy operacji (a zatem każda operacja zamknięta na kluczyki jest stała). Niech $X \in |\mathbf{KAlg}(\Sigma)|$ ma jednego inhabitanta sortu s (będącego zarazem kluczykiem), zaś $Y \in |\mathbf{KAlg}(\Sigma)|$ ma dwóch (z czego jeden jest kluczykiem). Istnieją wtedy dwa morfizmy z X do Y, nazwijmy je $f, g : X \to Y$, różniące się tym, na który element Y przesyłany jest kluczyk sortu s algebry X.

Przypuśćmy, że istnieje ekwalizator morfizmów f, g, tj. że istnieje $E \in |\mathbf{KAlg}(\Sigma)|$ oraz $e : E \to X$ takie, że $e; f = e; g$. Niech k będzie kluczykiem sortu s algebry E. Wtedy $e(k)$ musi być jedynym elementem sortu s w algebrze X. Jednakże to znaczy, że $f(e(k)) \neq g(e(k))$ z konstrukcji.

2.2.2 KKAlg(Σ), KKAlg(Σ, Φ)

Ponieważ funktor $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}$ pozwala nam rozpatrywać $\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$ jako pełną podkategorię kategorii $\mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}, \hat{\Phi})$, która jest zupełna, wystarczy sprawdzić, czy ekwalizator dowolnej pary równoległych morfizmów w obrazie funktora $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}$ należy do obrazu tego funktora.

Niech więc $X, Y \in |\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)|$ oraz $f, g : X \to Y$. Niech teraz $E \in |\mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}, \hat{\Phi})|$ wraz z $e : E \to \mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(X)$ będzie ekwalizatorem $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(f)$ oraz $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(g)$.

Z konstrukcji z wykładu wiemy, że $|E| = \{x \in |X| : \mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(f)(x) = \mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(g)(x)\}$, gdzie operacje działają w sposób dziedziczony z X. Wystarczy pokazać, że E jest algebrą kluczykową. Niech więc p będzie dowolną operacją w E, która jest zamknięta na kluczyki (wyznaczone przez stałe k_s). To zaś oznacza, że była ona zamknięta na kluczyki już w X, zatem jest tam stała, zatem w E też jest stała.

Zatem E jest algebrą kluczykową, skąd jest w obrazie funktora zanurzającego $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}$, zatem jedyny element przeciwobrazu E (oznaczmy go $\tilde{E}$) przy tym funktorze, wraz z jedynym elementem przeciwobrazu e (gdyż obraz tego funktora jest pełną podkategorią) (oznaczmy go $\tilde{e}$) jest ekwalizatorem w $\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$, gdyż ekwalizuje morfizmy f, g (bo jego obraz przy $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}$ ekwalizuje morfizmy $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(f)$ oraz $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(g)$) oraz dla dowolnego $O \in \mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$ wraz z morfizmem $o : O \to X$ takim, że $o; f = o; g$ mamy, po przejściu przez $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}$, że istnieje dokładnie jedno $u : \mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(O) \to E$ takie, że $u; e = \mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(o)$, przy czym ponieważ zarówno $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}(O)$ jak i E leżą w obrazie funktora $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}$, który jest pełną podkategorią, to istnieje dokładnie jeden morfizm $\tilde{u} : O \to \tilde{E}$ taki, że $\tilde{u}; \tilde{e} = o$.

2.3 Koprodukty

2.3.1 KAlg(Σ), KAlg(Σ, Φ)

Pokażę, że kategoria $\mathbf{KAlg}(\Sigma)$ nie ma obiektu początkowego. Będzie to dowodzić od razu, że nie ma ona koproduktów dowolnej rodziny obiektów, a także że $\mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)$ ich nie ma.

Weźmy bowiem sygnaturę Σ złożoną z jednego sortu s, bez jakichkolwiek stałych czy operacji. Przypuśćmy, że istnieje obiekt początkowy I w kategorii

$\mathbf{KAlg}(\Sigma)$. Musi on mieć kluczyk sortu s, oznaczmy go $\mathbf{k}_s$.

Rozpatrzmy teraz algebrę $A \in |\mathbf{KAlg}(\Sigma)|$, mającą dwa elementy sortu s. Wtedy istnieją przynajmniej dwa morfizmy z I do A, różniące się tym, na co jest przesyłany kluczyk sortu s. Zatem I nie jest obiektem początkowym.

2.3.2 $\mathbf{KKAlg}(\Sigma)$, $\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$

Funktor $\mathcal{K}_{\Sigma,\Phi} : \mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}, \hat{\Phi}) \to \mathbf{KKAlg}\Sigma, \Phi$ jest lewy sprzężony, zatem zachowuje kogranice oraz w jego obrazie jest cała kategoria będąca przeciwdziedziną. Zatem dla dowolnej rodziny obiektów w $\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$, bierzemy jakichkolwiek przedstawicieli ich przeciwobrazów przy $\mathcal{K}_{\Sigma,\Phi}$, następnie korzystamy z kozupełności kategorii $\mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}, \hat{\Phi})$, konstruując szukany koprodukt, po czym korzystając z tego, że $\mathcal{K}_{\Sigma,\Phi}$ zachowuje kogranice, uzyskujemy koprodukt w $\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$.

Dowód dla $\mathbf{KKAlg}(\Sigma)$ uzyskujemy przez wcięcie pustego zbioru równości.

2.4 Koekwalizatory

2.4.1 $\mathbf{KAlg}(\Sigma)$, $\mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)$

Pokażę, że już w $\mathbf{KAlg}(\Sigma)$ istnieje para równoległych morfizmów, dla których nie istnieje koekwalizator. Niech Σ będzie sygnaturą z dwoma sortami s, s' oraz szesnastoma operacjami $f_{ij} : s \to s'$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant 4$.

Niech $A \in |\mathbf{Alg}(\Sigma)|$ będzie algebrą nad Σ mającą cztery elementy sortu s: a, b, c, d oraz cztery elementy sortu s': $x, \bar{x}, y, \bar{y}$, przy czym jako makro metajęzyka będę rozumiał $\bar{\bar{x}} = x$. Operacje definiujemy tak, że dla każdej pary obiektów z $\{a, b, c, d\} \times \{x, \bar{x}, y, \bar{y}\}$, (dla ustalenia uwagi: (a, x)) odpowiednią operację definiujemy jako: $f(a) = x$ oraz $f(\_) = \bar{x}$ dla $\_ \neq a$.

Niech $A' \in |\mathbf{KAlg}(\Sigma)|$ będzie zadane jako: $|A'| = A \times \{0, 1\}$ (iloczyn po każdym sorcie osobno), kluczykami niech będą $(a, 0) : s$ oraz $(x, 1) : s'$, zaś każda operacja f niech działa: $f_{A'}((t, b)) = (f_A(t), b)$. Oczywiście żadna operacja nie jest zamknięta na kluczyki, zatem jest to algebra kluczykowa.

Niech $\phi : A' \to A'$ będzie zadane jako $\phi((t, b)) = (t, 1 - b)$. Oczywiście, że jest to endomorfizm algebr: $\phi(f_{A'}((t, b))) = \phi((f_A(t), b)) = (f_A(t), 1 - b) = f_{A'}((t, 1 - b)) = f_{A'}(\phi(t, b))$.

Przypuśćmy, że istnieje koekwalizator ϕ oraz $id_{A'}$, tj. obiekt $K \in |\mathbf{KAlg}(\Sigma)|$ wraz z morfizmem $\psi : A' \to K$, że $id_{A'}; \psi = \phi; \psi$ oraz dla każdego obiektu $X \in |\mathbf{KAlg}(\Sigma)|$ wraz z morfizmem $\xi : A' \to X$ takim, że $id_{A'}; \xi = \phi; \xi$ istnieje jedyny morfizm $\zeta : K \to X$, że $\xi = \psi; \zeta$.

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, bend left, "id_{A'}"] \arrow[r, bend right, "\phi"'] & A' \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\forall\xi"] & K \arrow[d, dashed, "\exists!\zeta"] \\
& & X
\end{tikzcd}
$$

Niech teraz $P = A/\sim_P$, gdzie $\sim_P$ to najmniejsza kongruencja spełniająca $x \sim_P \bar{x}$ – jest to jedyne nietrywialne utożsamienie, którego ona dokonuje. Na tak określonej algebrze możemy położyć kluczyki: kluczykiem sortu s niech będzie $[a]_{\sim_P}$, kluczykiem sortu s' niech będzie $[x]_{\sim_P} = [\bar{x}]_{\sim_P}$. Łatwo widać, że wszystkie operacje zamknięte na kluczyki są stałe (gdyż jeśli operacja w ogóle ma w obrazie kluczyk, to jest już stała). Mamy morfizm $\xi_P : A' \to P$ zdefiniowany jako $\xi_P((t,b)) = [t]_{\sim_P}$ – łatwo widać, że jest on zgodny z operacjami.

Analogicznie definiujemy $Q = A/\sim_Q$, gdzie $\sim_Q$ to najmniejsza kongruencja spełniająca $y \sim_Q \bar{y}$, oraz morfizm $\xi_Q : A' \to Q$ zdefiniowany jako $\xi_Q((t,b)) = [t]_{\sim_Q}$.

$$
\begin{tikzcd}
& & Q \\
A' \arrow[r, bend left, "id_{A'}"] \arrow[r, bend right, "\phi"'] & A' \arrow[ur, "\xi_Q"] \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\xi_P"'] & K \arrow[u, dashed, "\exists!\zeta_Q"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\zeta_P"] \\
& & P
\end{tikzcd}
$$

Mamy $\xi_P((y,b)) \neq \xi_P((\bar{y},b))$, a zatem i $\phi((y,b)) \neq \phi((\bar{y},b))$. Analogicznie $\phi((x,b)) \neq \phi((\bar{x},b))$. Mamy także $\xi_P((x,b)) \neq \xi_P((y,b))$ zatem $\phi((x,b)) \neq \phi((y,b))$. Kontynuując te rozważania uzyskujemy, że w K muszą być przynajmniej cztery elementy sortu s': $\tilde{x} = \phi((x,0)), \tilde{\bar{x}} = \phi((\bar{x},0)), \tilde{y} = \phi((y,0)), \tilde{\bar{y}} = \phi((\bar{y},0))$ i wszystkie one są parami różne. (Oczywiście $\phi((x,b)) = \phi((x,1-b))$ etc, gdyż $(id_{A'};\phi)((x,b)) = (\psi;\phi)((x,b)))$

Analogicznie uzyskujemy, że istnieją przynajmniej cztery elementy sortu s: $\tilde{a} = \phi((a,0)), \tilde{b} = \phi((b,0)), \tilde{c} = \phi((c,0)), \tilde{d} = \phi((d,0))$ i są one wszystkie parami różne (np. $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ uzyskujemy zauważając $\xi_P((a,0)) \neq \xi_P((b,0))$).

Ponieważ ζ_P i ζ_Q są morfizmami algebr, łatwo można przerachować, że wszystkie szesnaście operacji zachowuje się na $\tilde{a}, \ldots, \tilde{d}$ analogicznie jak w algebrze A, lecz „po dopisaniu $\tilde{\cdot}$ nad zmienną”.

Niech k będzie kluczykiem sortu s w algebrze K, zaś k' – kluczykiem sortu s'. Gdyby $k \in \{\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}\}$, zaś $k' \in \{\tilde{x}, \tilde{\bar{x}}, \tilde{y}, \tilde{\bar{y}}\}$, to z konstrukcji algebry

A uzyskalibyśmy, że któryś z szesnastu morfizmów przeprowadza k na k', co daje sprzeczność, gdyż odpowiednie przekształcenie nie jest stałe.

Zatem któryś z kluczyków nie jest postaci $\tilde{\cdot}$. Pozostaje teraz wykluczyć możliwe przypadki.

Oczywiście nie może istnieć element sortu s', który nie jest w obrazie żadnej operacji: gdyby istniał, przekształcenie ζ_P nie byłoby jednoznaczne – mogłoby go przesłać na dowolny element sortu s' w P.

Zatem musi istnieć choć jeden element sortu s różny od $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$, oznaczmy go t.

Niech teraz K' będzie algebrą, która powstaje z K przez dodanie dodatkowej kopii t' elementu t, na której wszystkie operacje zachowują się jak na oryginalnym t, zaś kluczyki pozostają bez zmian (oczywiście ta algebra także jest kluczykowa).

Możemy w oczywisty sposób rozszerzyć $\psi : A' \to K$ do $\psi' : A' \to K'$ (teoriomnogościowo: $\psi = \psi'$) i zachodzi wówczas $id_{A'}; \psi' = \phi; \psi'$, a zatem z własności uniwersalnej koekwalizatora musi istnieć dokładnie jeden morfizm ζ taki, że $\psi; \zeta = \psi'$. Jednak łatwo wskazać dwa takie morfizmy: jeden będący standardowym włożeniem w nadalgebrę, zaś drugi różniący się od włożenia w nadalgebrę tym, że posyłają t na t'.

Zatem K nie może być koekwalizatorem.

2.4.2 $\mathbf{KKAlg}(\Sigma)$, $\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$

Dowód przeprowadzamy analogicznie jak dla koproduktów: korzystając z kozupełności kategorii $\mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}, \hat{\Phi})$ konstruujemy koekwalizator obrazów rozważanych morfizmów przy $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}$, po czym korzystając z zachowywania kogranic przez $\mathcal{K}_{\Sigma,\Phi}$ uzyskujemy szukany koekwalizator w $\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$.

Dowód dla $\mathbf{KKAlg}(\Sigma)$ uzyskujemy przez wcięcie pustego zbioru równości.

3 Zadanie 2

3.1 $\mathcal{U}_\sigma : \mathbf{KAlg}(\Sigma') \to \mathbf{KAlg}(\Sigma)$

Niech Σ będzie sygnaturą z jednym sortem s, bez jakichkolwiek operacji, zaś Σ' sygnaturą z dwoma sortami: s, s', bez jakichkolwiek operacji, zaś $\sigma : \Sigma \to \Sigma'$ będzie włożeniem: $s_\Sigma \mapsto s_{\Sigma'}$.

Rozważmy algebrą X w kategorii $\mathbf{KAlg}(\Sigma)$, której nośnik ma dokładnie jeden element sortu s (będący zarazem kluczykiem), oraz algebrę Y w kategorii $\mathbf{KAlg}(\Sigma')$, której nośnik ma dokładnie jeden element sortu s (będący zarazem kluczykiem) oraz dwa elementy sortu s' (z których jeden jest kluczykiem). Oczywiście są to kluczykowe algebry, gdyż wobec braku operacji każda algebra mająca kluczyki jest algebrą kluczykową.

Jeśliby istniał funktor F, lewy sprzężony do $\mathcal{U}_\sigma$, to istniałaby bijekcja $Hom(FX, Y) \simeq Hom(X, \mathcal{U}_\sigma Y)$. Jednakże zbiór po prawej stronie jest mocy 1, gdyż $|\mathcal{U}_\sigma Y|$ ma dokładnie jeden element sortu s. Jednakże $|FX|$ musi mieć przynajmniej jeden element sortu s' — mianowicie kluczyk tego sortu. Zatem widzimy, że jeśli istnieje choć jeden morfizm ϕ z FX do Y, to istnieje też drugi — przesyła on kluczyk sortu s' na ten z elementów sortu s' algebry Y, na który nie przesyła go ϕ.

Zatem szukany funktor nie istnieje.

3.2 $\mathcal{U}_{\sigma,\Phi} : \mathbf{KAlg}(\Sigma', \Phi') \to \mathbf{KAlg}(\Sigma)$

Podpunkt (a) jest szczególnym przypadkiem tego podpunktu, z $\Phi' = \varnothing$, zatem i tu odpowiedź jest negatywna.

3.3 $\mathcal{U}^{\mathcal{K}}_\sigma : \mathbf{KKAlg}(\Sigma') \to \mathbf{KKAlg}(\Sigma)$

Odpowiedź pozytywna jest konsekwencją odpowiedzi pozytywnej na pytanie poniżej, przy pustym zbiorze równości Φ'.

3.4 $\mathcal{U}^{\mathcal{K}}_{\sigma,\Phi} : \mathbf{KKAlg}(\Sigma', \Phi') \to \mathbf{KKAlg}(\Sigma)$

Wobec zanurzenia $\mathcal{I}_{\Sigma,\varnothing} : \mathbf{KKAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\hat{\Sigma})$ wystarczy pokazać, że funktor $\mathcal{U}^{\mathcal{K}}_{\sigma,\Phi}; \mathcal{I}_{\Sigma,\varnothing}$ ma lewy sprzężony: wystarczy potem jego lewy sprzężony ograniczyć do obrazu funktora $\mathcal{I}_{\Sigma,\varnothing}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{KKAlg}(\Sigma', \Phi') \arrow[r, "\mathcal{U}^{\mathcal{K}}_{\sigma,\Phi}"] \arrow[d, "\mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}"] & \mathbf{KKAlg}(\Sigma) \arrow[d, "\mathcal{I}_{\Sigma,\varnothing}"] \\
\mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}', \hat{\Phi}') \arrow[r, "\mathcal{F}_{\sigma,\Phi}"] & \mathbf{Alg}(\hat{\Sigma})
\end{tikzcd}$$

Zauważmy, jednak, że $\mathcal{U}^{\mathcal{K}}_{\sigma,\Phi}; \mathcal{I}_{\Sigma,\varnothing} = \mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}; \mathcal{F}_{\sigma,\Phi}$, gdzie $\mathcal{F}_{\sigma,\Phi} : \mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}', \hat{\Phi}') \to \mathbf{Alg}(\hat{\Sigma})$ jest funktorem reduktu w zwykłych algebrach, co wynika wprost z definicji powyższych funktorów.

Na mocy faktu z wykładu, $\mathcal{F}_{\sigma,\Phi}$ posiada lewy sprzężony, oznaczmy go $\mathcal{G}_{\sigma,\Phi} : \mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}) \to \mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}', \hat{\Phi}')$. Twierdzę, że $\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}; \mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}$ jest lewym sprzężonym do $\mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}; \mathcal{F}_{\sigma,\Phi}$, co łatwo wynika z definicji funktora sprzężonego jako takiego, który indukuje naturalną bijekcję hom-zbiorów, lecz ponieważ na wykładzie przyjmowaliśmy inną, udowodnię coś słabszego: funktor $\mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}; \mathcal{F}_{\sigma,\Phi}$

posiada lewy sprzężony. Jest on oczywiście ciągły, jako złożenie funktorów ciągłych (gdyż mających lewe sprzężone), jego kategoria, z której wychodzi jest lokalnie mała i zupełna (gdyż ma produkty i ekwalizatory).

$$\mathbf{KKAlg}(\Sigma', \Phi') \xrightarrow{\mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}} \mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}', \hat{\Phi}') \xrightarrow{\mathcal{F}_{\sigma,\Phi'}} \mathbf{Alg}(\hat{\Sigma})$$

$$\mathbf{KKAlg}(\Sigma', \Phi') \xleftarrow[\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}]{} \mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}', \hat{\Phi}') \xleftarrow[\mathcal{G}_{\sigma,\Phi'}]{} \mathbf{Alg}(\hat{\Sigma})$$

Niech $A \in |\mathbf{Alg}(\hat{\Sigma})|$. Niech $A' \in |\mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}, \hat{\Phi})|$ będzie obiektem wolnym nad A względem funktora $\mathcal{F}_{\sigma,\Phi}$, tj. niech $\eta_A^{\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}} : A \to \mathcal{F}_{\sigma,\Phi}(A')$ będzie jednością, taką że dla każdego $B' \in |\mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}, \hat{\Phi})|$ i morfizmu $f : A \to \mathcal{F}_{\sigma,\Phi}(B')$ istnieje dokładnie jeden morfizm $f^{\#_{\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}}$ taki, że $\eta_A^{\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}; \mathcal{F}_{\sigma,\Phi}(f^{\#_{\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}}) = f$

$$\begin{array}{ccccc}
A & \xrightarrow{\eta_A^{\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}} & \mathcal{F}_{\sigma,\Phi}(A') & & A' \\
& \searrow^{f} & \Big\downarrow \mathcal{F}_{\sigma,\Phi}\left(f^{\#_{\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}}\right) & & \vdots\ \exists! f^{\#_{\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}} \\
& & \mathcal{F}_{\sigma,\Phi}(B') & & B'
\end{array}$$

Niech teraz $A'' \in |\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)|$ będzie obiektem wolnym nad A' względem funktora $\mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}$, tj. niech $\eta_{A'}^{\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}} : A' \to \mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}(A'')$ będzie jednością, taką że dla każdego $B'' \in |\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)|$ i morfizmu $g : A' \to \mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}(B'')$ istnieje dokładnie jeden morfizm $g^{\#_{\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}}$ taki, że $\eta_{A'}^{\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}; \mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}(g^{\#_{\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}}) = g$

$$\begin{array}{ccccc}
A' & \xrightarrow{\eta_{A'}^{\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}} & \mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}(A'') & & A'' \\
& \searrow^{g} & \Big\downarrow \mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}\left(g^{\#_{\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}}\right) & & \vdots\ \exists! g^{\#_{\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}} \\
& & \mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}(B'') & & B''
\end{array}$$

Połóżmy teraz $\eta_A = \eta_A^{\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}; \mathcal{F}_{\sigma,\Phi}\left(\eta_{A'}^{\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}\right) : A \to (\mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}; \mathcal{F}_{\sigma,\Phi})(A'')$.

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\eta_{A'}^{\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}"] & \mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}(A'')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A^{\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}"] \arrow[rr, bend right, "\eta_A"'] & \mathcal{F}_{\sigma,\Phi}(A') \arrow[r, "\mathcal{F}_{\sigma,\Phi}\left(\eta_{A'}^{\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}\right)"] & (\mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}; \mathcal{F}_{\sigma,\Phi})(A'')
\end{tikzcd}$$

Rozpatrzmy teraz $B'' \in |\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)|$ wraz z morfizmem $h : A \to (\mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}; \mathcal{F}_{\sigma,\Phi})(B'')$. Wiemy, że istnieje jedyny morfizm $h^{\#\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}} : A' \to \mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}(B'')$ taki, że $\eta_A^{\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}; \mathcal{F}_{\sigma,\Phi}(h^{\#\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}) = h$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A^{\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}"] \arrow[dr, "h"'] & \mathcal{F}_{\sigma,\Phi}(A') \arrow[d, "\mathcal{F}_{\sigma,\Phi}\left(h^{\#\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}\right)"] \\
& \mathcal{F}_{\sigma,\Phi}(\mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}(B''))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A' \arrow[d, "\exists! h^{\#\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}"'] \arrow[dr, "\eta_{A'}^{\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}"] & \\
\mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}(B'') & \mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}(A'') \arrow[l, "\mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}\left(\left(h^{\#\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}\right)^{\#\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}\right)"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B'' & A'' \arrow[l, "\exists!\left(h^{\#\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}\right)^{\#\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}"]
\end{tikzcd}$$

Teraz wiemy, że istnieje jedyny morfizm $\left(h^{\#\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}\right)^{\#\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}} : A'' \to B''$ taki, że $\eta_{A'}^{\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}; \mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}\left(\left(h^{\#\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}\right)^{\#\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}\right) = h^{\#\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}$.

Mamy zatem

$$\eta_A^{\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}; \mathcal{F}_{\sigma,\Phi}\left(\eta_{A'}^{\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}; \mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}\left(\left(h^{\#\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}\right)^{\#\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}\right)\right) = h$$

czyli

$$\left(\eta_A^{\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}; \mathcal{F}_{\sigma,\Phi}\left(\eta_{A'}^{\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}\right)\right); \mathcal{F}_{\sigma,\Phi}\left(\mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}\left(\left(h^{\#\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}\right)^{\#\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}\right)\right) = h$$

czyli

$$\eta_A; (\mathcal{I}_{\Sigma',\Phi'}; \mathcal{F}_{\sigma,\Phi})\left(\left(h^{\#\mathcal{G}_{\sigma,\Phi}}\right)^{\#\mathcal{K}_{\Sigma',\Phi'}}\right) = h$$

Zatem spełnione są wszystkie założenia twierdzenia o istnieniu lewych sprzężonych.

3.5 $\mathcal{J}_\Sigma : \mathbf{KKAlg}(\Sigma) \to \mathbf{KAlg}(\Sigma)$

Niech $A \in \mathbf{KAlg}(\Sigma)$. Niech $A' \in \mathbf{KKAlg}(\Sigma)$ będzie zadanie przez: $A' = T_{\hat{\Sigma}}(A \sqcup \{k_s\}_s)/\equiv$, gdzie $\hat{\Sigma}, k_s$ jest zdefiniowane jak wyżej, zaś $\equiv$ jest najmniejszą kongruencją wyznaczoną przez równości w A, tj. jeśli w A zachodzi $f(a_1, \ldots, a_k) = a$, to w $\equiv$ utożsamiamy $f(a_1, \ldots, a_k) \equiv a$ (jako napisy). Kluczykiem sortu s w A' jest $[k_s]_\equiv$. Łatwo widać, że żadna operacja arności większej niż 0 nie jest zamknięta na kluczyki, gdyż $\equiv$ nie utożsamia w żaden sposób napisów postaci $f(k_{s_1}, k_{s_2}, \ldots, k_{s_n})$ z czymkolwiek innym. Zatem istotnie, A' jest algebrą kluczykową.

Możemy teraz określić $\eta_A : A \to \mathcal{J}_\Sigma(A')$ w oczywisty sposób: $\eta_A(x) = [x]_\equiv$. Łatwo widać teraz z definicji $\equiv$, że η_A jest morfizmem (gdyż $\equiv$ było kongruencją wyznaczoną przez równości w A).

Niech teraz $B' \in \mathbf{KKAlg}(\Sigma)$ będzie dowolną kluczykową Σ-algebrą i niech $f : A \to \mathcal{J}_\Sigma(B')$ będzie morfizmem algebr. Musimy pokazać, że istnieje dokładnie jeden morfizm $f^\# : A' \to B'$ taki, że $\eta_A; \mathcal{J}_\Sigma(f^\#) = f$.

Ewaluując powyższy warunek na elemencie $a \in |A|$ uzyskujemy (pomijając włożenie $\mathcal{J}_\Sigma$ dla uproszczenia zapisu): $f^\#([a]_\equiv) = f(a)$. Ponadto $f^\#$ ma być morfizmem w kategorii **KKAlg**, zatem musi przekształcać kluczyki na kluczyki, stąd $f^\#([k_s]_\equiv) = \mathbf{k}_s$. Wartości na wszystkich generatorach algebry A' są zatem wyznaczone jednoznacznie, zatem szukane $f^\#$ jeśli tylko istnieje, to jest jedyne.

Jednakże jego istnienie jest oczywiste: rozumując analogicznie jak na wykładzie tworzymy z własności uniwersalnej algebry termów przekształcenie $f^\& : T_{\hat{\Sigma}}(A \sqcup \{k_s\}_s) \to B'$ zadane jako $f^\&(a) = f(a)$, $f^\&(k_s) = \mathbf{k}_s$, po czym stwierdzamy, że faktoryzuje się ono przez przekształcenie ilorazowe $T_{\hat{\Sigma}}(A \sqcup \{k_s\}_s) \to A'$, gdyż jeśli jakieś równości zachodziły w A, to są one zachowywane przez f, gdyż f jest morfizmem algebr, zatem analogiczne równości na obrazach zachodzą też w B'.

3.6 $\mathcal{J}_{\Sigma,\Phi} : \mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)$

Mamy oczywisty funktor zapominania o kluczykach $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi} : \mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi)$, który utożsamia $\mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)$ z pełną podkategorią kategorii $\mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi)$ tych algebr, które są kluczykowe.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{KKAlg}(\Sigma', \Phi') \arrow[r, "\mathcal{J}_{\Sigma,\Phi}"] \arrow[d, "\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}"] & \mathbf{KAlg}(\Sigma) \arrow[d, "\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}"] \\
\mathbf{Alg}(\hat{\Sigma}', \hat{\Phi}') \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi)
\end{tikzcd}$$

Wystarczy, że pokażemy, że $\mathcal{J}_{\Sigma,\Phi};\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ ma lewy sprzężony, jego obcięcie algebr do kluczykowych będzie lewym sprzężonym dla $\mathcal{J}_{\Sigma,\Phi}$.

Teraz zauważmy, że możemy zapisać, że $\mathcal{J}_{\Sigma,\Phi};\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi} = \mathcal{I}_{\Sigma,\Phi};\mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F} : \mathbf{Alg}(\hat{\Sigma},\hat{\Phi}) \to \mathbf{Alg}(\Sigma,\Phi)$ jest funktorem brania reduktu względem morfizmu sygnatur zapominającego o kluczykach (jako stałych k_s). Na mocy faktu z wykładu, istnieje lewy sprzężony do funktora $\mathcal{F}$. Rozumując teraz analogicznie jak przy pokazywaniu lewego sprzężonego dla $\mathcal{U}^{\mathcal{K}}_{\sigma,\Phi} : \mathbf{KKAlg}(\Sigma',\Phi') \to \mathbf{KKAlg}(\Sigma)$, stwierdzamy, że także $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi};\mathcal{F}$ ma lewy sprzężony, jako złożenie dwóch funktorów mających lewy sprzężony.