Zadanie 1

Niech $f(x) = \exp(-x)$. Zauważmy, że o ile o x_0 nie wiemy praktycznie nic, to już $x_1 = f(x_0) > 0$, skąd $x_2 = f(x_1) \in (0, f(0)) = (0, 1)$, $x_3 = f(x_2) \in (f(1), f(0)) = (\exp(-1), 1)$. Zauważmy jednak, że stąd indukcyjnie mamy, że dla $n \geqslant 3$ zachodzi $x_n \in (\exp(-1), 1)$. Istotnie, x_3 spełnia ten warunek, zaś $x_n \in (\exp(-1), 1) \implies x_n \in (0, 1) \implies x_{n+1} = f(x_n) \in (\exp(-1), 1)$.

Zauważmy, że na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej mamy, że dla każdego $x \leqslant y$ zachodzi $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\vartheta)$ dla pewnego $\vartheta \in [x, y]$. Jednak gdy ograniczymy x, y do przedziału $[\exp(-1), 1]$, to widzimy, że $f'(\vartheta) \in (\exp(-1), \exp(-\exp(-1)))$.

Jednak $\exp(-1) \in [0, 1]$, skąd $\exp(-\exp(-1)) < \exp(-0) = 1$.

Ustalając $\Lambda = \min(\exp(-1), \exp(-\exp(1))) \in (0, 1)$ mamy, że dla każdych $x, y \in (\exp(-1), 1)$ zachodzi $|f(x) - f(y)| \leqslant \Lambda|x - y|$, stąd f jest na tym przedziale przekształceniem zwężającym. Stąd jednak na mocy twierdzenia Banacha o punkcie stałym, ma ono na tym przedziale punkt stały i ciąg $x_n = f(x_{n-1})$ brany od x_3 (zawarty z rzeczonym przedziale) jest zbieżny do tego punktu stałego.

Można też zauważyć, że istnieje takie $g = e^{-g}$, gdyż funckja $\lambda x.exp(-x) - x$ dla $x = 0$ osiąga wartość dodatnią, zaś dla $x = 1$ ujemną, a więc posiada ona miejsce zerowe na mocy tw. Darboux. Mamy teraz $|g-x_n| = |f(g) - f(x_{n-1})| \leqslant \Lambda|g - x_{n-1}|$. Stąd indukcyjnie $0 \leqslant |g - x_n| \leqslant \Lambda^{n-3}|g - x_3|$ dla $n \geqslant 3$. Stąd na mocy tw. o trzech ciągach mamy $x_n \to g$.

Zadanie 2

Udowodnię najpierw tzw. nierówność Cauchy'ego-Schwarza, tj., że dla $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ prawdą jest, że

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots y_n^2}$$

Niech bowiem $t \in \mathbb{R}$. Wtedy mamy $0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (x_it + y_i)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(x_i^2t^2 + 2x_iy_it + y_i^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2\right) t^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} 2x_iy_i\right) t + \left(\sum_{k=1}^{n} y_i^2\right)$

Jednak otrzymaliśmy stale nieujemny trójmian kwadratowy zmiennej t. Stąd jego wyróżnik musi być niedodatni, czyli

$$\left(\sum_{k=1}^{n} 2x_iy_i\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_i^2\right) \leqslant 0$$

skąd wyjściowa nierówność (uwagi wymaga jedynie przypadek gdy $\sum_{k=1}^{n} 2x_iy_i < 0$, ale wtedy nier. Cauchy'ego-Schwarza jest trywialnie prawdziwa).

Zauważmy teraz, że dla każdego n mamy:

$$\sqrt{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_i}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} b_i}} = \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_ib_{\sigma_n(i)}}} \leqslant \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} a_ib_{\sigma_n(i)}}{n}} \leqslant \sqrt{\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_{\sigma_n(i)^2}}}{n}} = \sqrt[4]{\frac{\sum_{k=1}^{n} a_i^2}{n}}\sqrt[4]{\frac{\sum_{k=1}^{n} b_i^2}{n}}$$

gdzie pierwsza nierówność wynika z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną, zaś druga z nierówności Cauchy'ego-Schwarza.

Na ćwiczeniach dowodziliśmy, że gdy $r_n > 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} r_n = r \in \mathbb{R}$, to $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} r_k}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} r_k} = r$. Stąd mamy, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_i}}\sqrt{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} b_i}} = \sqrt{AB}$ na mocy twierdzenia o arytm. wł. granicy i ciągłości pierwiastka kwadratowego.

Ponadto zauważmy, że ciągi a_n^2 i b_n^2 zbiegają odpowiednio do A^2 i B^2, skąd $\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{\frac{\sum_{k=1}^{n} a_i^2}{n}} \sqrt[4]{\frac{\sum_{k=1}^{n} b_i^2}{n}} = \sqrt[4]{A^2B^2} = \sqrt{AB}$ na mocy nieujemności A, B oraz wyżej wspomnianych faktów. Stąd na mocy tw. o trzech ciągach mamy, że i $\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} a_i b_{\sigma_n(i)}}{n}}$ zbiega do $\sqrt{AB}$.

Zadanie 3

Dowód. Niech α będzie pierwiastkiem wielomianu $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 =: P(x)$. Ponieważ dla $n' < n$ zachodzi $\frac{C}{n'} > \frac{C}{n}$, możemy założyć, że $P(x)$ nie ma pierwiastków wymiernych. Gdyby bowiem miał, moglibyśmy go podzielić przez wielomian pierwszego stopnia o współczynnikach wymiernych, uzyskując wielomian o wsp. wymiernych (ale możemy je przemnożyć przez wspólny mianownik) i niższym stopniu. Z tezy jednak dla wielomianu o niższym stopniu wynika od razu teza dla wielomianu o stopniu wyższym i tym samym pierwiastku.

Zauważmy, że wystarczy nam rozważać liczby wymierne o dodatnich mianownikach, gdyż dla n parzystego to i tak nie ma znaczenia, zaś dla n nieparzystego widać, że nierówność dla ujemnych mianowników jest trywialna.

Oznaczmy

$$\begin{aligned} L(p,q) &= \sum_{w=1}^{n} \left(a_w \cdot \left(\sum_{k=0}^{w-1} \left(\alpha^k \left(\frac{p}{q}\right)^{w-1-k} \right)\right)\right) \\ &= a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1-k} \right) + a_{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-2} \alpha^k \left(\frac{p}{q}\right)^{n-2-k} \right) + \ldots + \\ &+ a_3 \left(\alpha^2 + \alpha\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2 \right) + a_2 \left(\alpha + \frac{p}{q}\right) + a_1 \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że

$$\begin{aligned} \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \cdot |L(p,q)| &= \left|\left(\alpha - \frac{p}{q}\right) \cdot L(p,q)\right| = \left|\left(\alpha - \frac{p}{q}\right) \cdot \left(\sum_{w=1}^{n} \left(a_w \cdot \left(\sum_{k=0}^{w-1} \left(\alpha^k \left(\frac{p}{q}\right)^{w-1-k} \right)\right)\right)\right)\right| \\ &= \left| \sum_{w=1}^{n} \left(a_w \left(\alpha - \frac{p}{q}\right) \cdot \sum_{k=0}^{w-1} \left(\alpha^k \left(\frac{p}{q}\right)^{w-1-k} \right)\right)\right| \\ &= \left| \sum_{w=1}^{n} \left(a_w \left(\alpha^w - \left(\frac{p}{q}\right)^w \right)\right)\right| = \left| \sum_{w=0}^{n} (a_w \alpha^w) - \sum_{w=0}^{n} \left(a_w \left(\frac{p}{q}\right)^w \right)\right| \\ &= \left| P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left| P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \end{aligned}$$

Ponieważ $\frac{p}{q}$ nie jest pierwiastkiem wielomianu P, wynika stąd, że $\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \neq 0$, skąd także $L(p,q) \neq 0$.

Udowodnię, że istnieje stała $T > 0$, że dla $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| <= 1$ zachodzi $1 > T|L(p,q)|$. Istotnie, jest to równoważne temu, że $|L(p,q)| \leqslant \frac{1}{T}$. Zauważmy jednak, że gdy określimy funkcję $f : [\alpha - 1, \alpha + 1] \to \mathbb{R}_+$ taką, że $|L(p,q)| = f\left(\frac{p}{q}\right)$ (tzn. w definicji L za $\frac{p}{q}$ podstawiam wszędzie x i obkładam całą definicję modułem), to jest ona ciągła. Stąd na przedziale domkniętym jest ograniczona, więc w szczególności istnieje istnieje ograniczenie górne $\tau > 0$. Biorąc $T = \frac{1}{\tau}$ uzyskujemy odpowiednie T.

Zauważmy jednak, że

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \cdot |L(p,q)| \cdot q^n = \left| q^n P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left| a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n \right|$$

Jednak wartość pod modułem jest całkowita i, jak wyżej wspomnieliśmy, niezerowa, skąd moduł ten jest równy conajmniej jeden.

Stąd mamy: $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \cdot |L(p,q)| \cdot q^n \geqslant 1 > T|L(p,q)|$, czyli $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{T}{q^n}$.

Gdy zaś $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > 1$, widać, że $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^n}$, a więc dla wszystkich już liczb wymiernych $\frac{p}{q}$ mamy, przy przyjęciu $C = \min(T, 1)$, że $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n}$ □

Zadanie 4

Udowodnię, że granicą tego ciągu jest $g = \inf \frac{x_n}{n}$. W tym celu ustalmy $\varepsilon > 0$. Chcemy znaleźć takie N, że dla $n > N$ zachodzi $\left|\frac{x_n}{n} - g\right| \leqslant \varepsilon$.

Z definicji kresu dolnego, istnieje takie N_1, że $\frac{x_{N_1}}{N_1} \leqslant g + \frac{\varepsilon}{2}$, gdyż inaczej istniałoby większe ograniczenie dolne. Niech t będzie liczbą naturalną tak dużą, że dla $r = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$ zachodzi $\frac{x_r}{t} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ Rozpatrzmy teraz pewne $n > N_1 t$. Podzielmy je z resztą przez N_1 uzyskując $aN_1 + r$. Oczywiście $a \geqslant t$. Teraz mamy, że:

$$\frac{x_n}{n} = \frac{x_{aN_1+r}}{aN_1+r} \leqslant \frac{x_{aN_1} + x_r}{aN_1+r} \leqslant \frac{\overbrace{x_{N_1} + x_{N_1} + \ldots + x_{N_1}}^{a} + x_r}{aN_1+r} =$$
$$= \frac{a x_{N_1}}{aN_1+r} + \frac{x_r}{aN_1+r} \leqslant \frac{a x_{N_1}}{aN_1} + \frac{x_r}{a} \leqslant g + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{x_r}{t} \leqslant g + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = g + \varepsilon$$

Stąd wzięcie $N = N_1 t$ spełnia warunek granicy.

Zadanie 5

Zauważmy, że $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} > \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$, a więc jest to ciąg rozbieżny. Tak samo ciąg $(\ln n)^2$ jest rozbieżny i rosnący. Mamy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}}{\frac{1}{2}(\ln n)^2} \overset{[S]}{=} 2 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{(\ln n)^2 - (\ln(n-1))^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n\,(\ln n - \ln(n-1))\,(\ln n + \ln(n-1))} =$$
$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln \frac{n}{n-1}} \frac{\ln n}{\ln n + \ln(n-1)} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln \frac{n}{n-1}} \frac{1}{1 + \frac{\ln(n-1)}{\ln n}} = \dagger$$

Jednak zauważmy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$, biorąc n na tyle duże, żeby $\exp(\varepsilon) \geqslant 1 + \frac{1}{n-1}$ mamy $(\ln n) - \varepsilon = \ln \frac{n}{\exp(\varepsilon)} \leqslant \ln \frac{n}{1+\frac{1}{n-1}} = \ln(n-1) \leqslant \ln n$, więc dzieląc przez $\ln n$ i stosując twierdzenie o trzech ciągach mamy, że $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n-1)}{\ln n} = 1$.

Teraz zauważmy, że $\ln \frac{n}{n-1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$. Stąd jednak $n\frac{\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n-1}} \leqslant n \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \leqslant n\frac{1}{n-1}$ na mocy nierówności z wykładu. To jednak daje $1 \leqslant n \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \leqslant \frac{n}{n-1}$. Skrajne ciągi dążą do 1, więc na mocy twierdzenia o trzech ciągach, $\lim_{n\to\infty} n \ln \frac{n}{n-1} = 1$.

Wstawiając otrzymane granice otrzymujemy $\dagger = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+1} = 1$ na mocy twierdzenia o arymetycznych własnościach granicy.

Stąd $S_n \sim \frac{(\ln n)^2}{2}$.

Zadanie 6

Dowód. Aby udowodnić wypukłość, ustalmy $x, y \in [a, b]$, $x < y$, $\lambda \in [0, 1]$ i sprawdźmy, czy $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

Określmy indukcyjnie ciągi l_n, r_n takie, że $0 \leqslant l_n \leqslant \lambda \leqslant r_n \leqslant 1$ oraz $f(l_n x + (1-l_n)y) \leqslant l_n f(x) + (1-l_n)f(y)$, $f(r_n x + (1-r_n)y) \leqslant r_n f(x) + (1-r_n)f(y)$, $\lim_{n\to\infty} r_n - l_n = 0$. Oczywiście wtedy $l_n x + (1-l_n)y \geqslant \lambda x + (1-\lambda)y \geqslant r_n x + (1-r_n)y$.

W tym celu ustalmy $l_0 = 0$, $r_0 = 1$. Gdy ustalone mamy już wyrazy do n-tego włącznie, wyraz $n+1$-szy ustalamy w następujący sposób: niech $c = \frac{l_n + r_n}{2}$. Zauważmy, że skoro $r_n f(x) + (1-r_n)f(y) \geqslant f(r_n x + (1-r_n)y)$ oraz $l_n f(x) + (1-l_n)f(y) \geqslant f(l_n x + (1-l_n)y)$, to dodając stronami mamy: $(r_n + l_n)f(x) + (2 - r_n - l_n)f(y) \geqslant f(r_n x + (1-r_n)y) + f(l_n x + (1-l_n)y) \geqslant 2f(\frac{l_n+r_n}{2} \cdot x + (1 - \frac{l_n+r_n}{2}) \cdot y)$, czyli $cf(x) + (1-c)f(y) \geqslant f(cx + (1-c)y)$.

Gdy zachodzi $c < \lambda$, ustalamy $l_{n+1} = l_n$, $r_{n+1} = c$, zaś gdy $c \geqslant \lambda$ ustalamy $l_{n+1} = c$, $r_{n+1} = r_n$.

Dla ustalenia uwagi, załóżmy, że f jest niemalejąca. Wtedy mamy $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant f(l_n x + (1-l_n)y) \leqslant l_n f(x) + (1-l_n)f(y)$. Jednak zauważmy, że $\lim_{n\to\infty} l_n = \lambda$, gdyż $l_n \leqslant \lambda \leqslant r_n$, zaś $\lim_{n\to\infty}(l_n - r_n) = 0$.

Stąd przechodząc do granicy przy $n \to \infty$ w zapisanej nierówności mamy, że $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ na mocy twierdzenia o szacowaniu.

Gdyby f była nierosnąca, dowód byłby analogiczny, lecz należało by zamiast ciągu l_n użyć ciągu r_n, tzn. $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant f(r_n x + (1-r_n)y) \leqslant r_n f(x) + (1-r_n)f(y)$. □

Zadanie 7

Oznaczmy $\vartheta = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, tj. dodatnie rozwiązanie równania $\vartheta^2 = 3 + \vartheta$. Niech $f(x) = \sqrt{3+x}$. Łatwo widać, że $f(\vartheta) = \vartheta$.

Udowodnimy indukcyjnie, że $c_n < \vartheta$.

Dla $n = 0$ mamy $c_0 = 0 < \vartheta$. W kroku indukcyjnym załóżmy $c_{n-1} < \vartheta$. Zauważmy, że f jest funkcją rosnącą, więc $c_n = f(c_{n-1}) < f(\vartheta) = \vartheta$.

Stąd łatwo mamy, że dla każdego n zachodzi $0 < c_n < \vartheta$. Zauważmy teraz, że w tym przedziale $f(x) > x$. Istotnie $\sqrt{3+x} > x \iff 3 + x > x^2 \iff x \in (\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2})$ na mocy dodatniości x.

Stąd $c_n = f(c_{n-1}) > c_{n-1}$. Ciąg c_n jest więc ograniczony z góry i rosnący więc ma granicę g. Zauważmy jednak, że z równania $c_n = f(c_{n-1})$ i ciągłości funkcji f wynika, że $g = f(g)$, ale $g \geqslant 0$, więc $g = \vartheta$.

Zadanie 8

Powiemy, że półprosta jest *dobra*, jeśli nie przecina żadnego wierzchołka łamanej ani nie jest równoległa do żadnego odcinka tej łamanej.

Zauważmy, że dla każdego punktu tylko skończenie wiele półprostych z niego wychodzących nie jest dobrych.

Teraz dla każdego punktu płaszczyzny nieleżącego na danej łamanej wykonajmy następujący krok: prowadzimy dowolną dobrą półprostą z tego punktu i liczymy ile razy przecina się z daną łamaną. Gdy przetnie się parzystą liczbę razy, ten punkt malujemy na czerwono, zaś gdy nieparzyście wiele razy – na niebiesko.

Zauważmy, że nasza łamana dzieli płaszczyznę na spójne obszary (formalny dowód wymagałby twierdzenia Jordana o krzywej). Udowodnię teraz, że nie istnieją w jednym obszarze dwa punkty pomalowane na różne kolory. Ten dowód będzie też się stosował do tego, że każdy punkt ma jednoznacznie wyznaczony kolor.

Załóżmy więc, że istnieją punkty A, B (niekoniecznie różne) i dobre półproste l, k o początku w odpowiednio tych punktach, oraz jakaś krzywa prosta m łącząca punkty A i B nieprzecinająca danej łamanej (jej istnieje wynika ze spójności obszarów, na jakie łamana dzieli płaszczyznę), takie że l przecina łamaną nieparzyście wiele razy, zaś k – parzyście wiele.

Na razie załóżmy, że krzywa m nie przecina półprostych k, l.

Zauważmy, że pólprosta l, krzywa m i półprosta k łącznie wyznaczają pewną krzywą bez samoprzecięć, która z obu stron dąży do nieskończoności (tzn. oddala się dowolnie daleko od wybranego punktu płaszczyzny). Łatwo widać (znów: formalny dowód wymagałby tw. Jordana o krzywej), że taka krzywa dzieli płaszczyznę na dwa obszary, oznaczmy je X i Y.

Jednak zauważmy, że każde przecięcie łamanej z tą krzywą powoduje przejście łamanej z X do Y lub na odwrót. Stąd łatwo widać, że liczba przecięć łamanej z krzywą musi być parzysta, gdyż obchodząc całą łamaną muszę spowrotem trafić do tej samej części X lub Y z której zacząłem.

Ale zauważmy, że nasza krzywa z założenia przecina łamaną w nieparzyście wielu punktach – l przecina nieparzyście wiele razy, k – parzyście wiele razy, zaś m – także parzyście (a nawet zero) — sprzeczność.

Teraz wróćmy do przypadku co gdy m jednak przecina półproste k i l. Zauważmy, że wtedy mogło nam powstać więcej niż dwa obszary na które płaszczyznę dzieli nasza krzywa. Jednakże zauważmy, że istotne są tylko te dwa nieskończone obszary, zaś skończone obszary powstałe poprzez przecięcie m z półprostymi k i l nigdy nie mają części wspólnej z rozważaną łamaną, więc można je pominąć w powyższym dowodzie.

Stąd widać, że każdy punkt płaszczyzny pokolorowaliśmy jednoznacznie na niebiesko i czerwono i każdy obszar jest pokolorowany na jeden kolor. Załóżmy, że pewne dwa sąsiadujące obszary P, Q mają taki sam kolor. Wtedy wybierając punkt V w P wystarczająco blisko wspólnego brzegu P i Q widzimy, że wychodzi z niego continuum półprostych przecinających rzeczony brzeg.

Tylko skończenie wiele z nich może być niedobrych, więc wybieramy jakąś dobrą. I teraz biorąc jakikolwiek punkt W na tej półprostej, jednak już w obszarze Q widzimy, że oczywiście powinny być one pomalowane na inne kolory, gdyż nasza półprosta z punktu V przecina łamaną raz więcej niż ta sama półprosta, ale obcięta tak, aby wychodziła z W.

Stąd każde dwa sąsiadujące obszary mają różne kolory.