Zadanie 1

Oznaczmy te wektory własne $v_1, \dots, v_{n+1}$ zaś odpowiadające im wartości własne $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$. Każdy wybór n wektorów spośród $v_1, \dots, v_{n+1}$ daje bazę, w której f diagonalizuje się. Mamy więc, że dla każdego $i = 1, \dots, n-1$ zachodzi, że f ma w pewnej bazie postać $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n)$. Zatem $\chi_f(t) = \prod_{j \neq i}(t - \lambda_j)$.

Z jednoznaczności rozkładu wielomianu na czynniki nierozkładalne (której dowodzi się analogicznie jak dla liczb całkowitych – wykonalny jest algorytm Euklidesa (przy dzieleniu z resztą maleje stopień), zatem zachodzi lemat Euklidesa, co łatwo implikuje jednoznaczność rozkładu) mamy, że $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$. Istotnie, gdyby dla pewnych i, j było $\lambda_i \neq \lambda_j$, to moglibyśmy zapisać $\chi_f(t)$ na dwa sposoby różniące się liczbą czynników $(t - \lambda_i)$ (mianowcie wzięlibyśmy bazy $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ oraz $v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n$.

Teraz zaś mamy, że $f - \lambda_1 \mathrm{id}$ ma w jądrze n liniowo niezależnych wektorów: $v_1, \dots, v_n$, zatem $f = \lambda_1 \mathrm{id}$.

Zadanie 2

Zapiszmy $u_n = \frac{p_n}{q_n}$. Wtedy $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = u_{n+1} = \frac{3\frac{p_n}{q_n}+2}{\frac{p_n}{q_n}+4} = \frac{3p_n+2q_n}{p_n+4q_n}$. Możemy zatem przyjąc, że $p_{n+1} = 3p_n + 2q_n$, $q_{n+1} = p_n + 4q_n$. Stąd $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

Oznaczmy $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Widzimy łatwo, że $A(1,1)^T = 5(1,1)^T$ oraz $A(2,-1)^T = 2(2,-1)^T$, zatem $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)^{-1}$, skąd łatwo $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Zatem ponieważ $(p_n, q_n)^T = A^n(p_0, q_0)^T = A^n(0,1)^T$, to $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot 5^n}{3} \\ -\frac{2^n}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n}{3} \\ \frac{2 \cdot 5^n + 2^n}{3} \end{pmatrix}$

Skąd już łatwo $u_n = \frac{2 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 5^n + 2^n} = \frac{2 - 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n}{2 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}$, co oczywiście jest zbieżne do $\frac{2}{2} = 1$.

Zadanie 4

Oznaczmy $A = (a_{i,j})_{i,j=0}^{12}$. Wtedy łatwo $a_{i,j} = \epsilon^{ij}$. Ponadto niech $A = M(\varphi)_{st}^{st}$.

Policzmy $A^2 = (b_{i,j})_{i,j=0}^{12}$. Mamy $b_{i,j} = \sum_{k=0}^{12} a_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=0}^{12} \epsilon^{ik} \epsilon^{kj} = \sum_{k=0}^{12} \left(\epsilon^{i+j}\right)^k$. Zauważmy jednak, że jeśli $\epsilon^{i+j} = 1$, to suma ta jest równa 13, zaś gdy tak nie jest, to ϵ^{i+j} jest pierwiastkiem pierwotnym z jedności stopnia 13, a więc powyższa suma jest zerowa (korzystam tu z wiedzy o pierwiastkach pierwotnych z pierwszego semestru).

Ale $\epsilon^{i+j} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $13 | i+j$, co jak łatwo widać jest spełnione jedynie dla $(i,j) = (0,0)$ oraz $(i,j) = (k, 13-k)$ dla $k = 1, 2, \dots, 12$. Zatem

$$A^2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 13 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 13 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

To przekształcenie zatem przemnaża pierwszą współrzędną przez 13 (w bazie standardowej), zaś pozostałe przemnaża przez 13 i zapisuje wspak (tzn. druga współrzędna staje się trzynastą, trzecia dwunastą, ..., trzynasta drugą).

Zauważmy, że gdy $s_1, \dots, s_{13}$ będą wektorami bazy standardowej, to wektorami własnymi tego przekształcenia są wektory: s_1 z wartością własną 13, oraz $s_k + s_{15-k}$ dla $k = 2, \dots, 7$ z wartością własną 13, oraz $s_k - s_{15-k}$ dla $k = 2, \dots, 7$ z wartością własną -13. Są one oczywiście wszystkie liniowo niezależne, gdyż bardzo łatwo można sprowadzić je do bazy standardowej operacjami elementarnymi, zatem 13 i -13 są jedynymi wartościami własnymi φ^2 i przekształcenie to diagonalizuje się, zaś krotnościami 13 i -13 są odpowiednio 7 i 6.

Teraz zauważmy, że możemy φ zapisać w postaci górnotrójkątnej, zaś podnosząc taką górnotrójkątną macierz do kwadratu uzyskamy, że ona też będzie górnotrójkątna, zaś wartości na diagonali podnoszą się do kwadratu – ale to są dokładnie wartości własne φ.

Zatem dokładnie 7 wartości własnych φ ma kwadrat równy 13, zaś dokładnie 6 ma kwadrat równy -13.

Zatem jest s wartości własnych równych $\sqrt{13}$, t równych $-\sqrt{13}$, u równych $i\sqrt{13}$ i v równych $-i\sqrt{13}$.

Jednak wtedy $\operatorname{tr} A = (s-t)\sqrt{13}+(u-v)i\sqrt{13}$. Ale ponieważ $|\operatorname{tr} A| = \sqrt{13}$, to $(s-t)^2+(u-v)^2 = 1$. Zatem $|s-t|, |u-v| \in \{0,1\}$. Jednak $u+v = 6$, zatem i $u-v$ jest parzyste, zatem $u = v$, analogicznie $s = t \pm 1$.

Stąd łatwo mamy jedynie dwie możliwości: $s = 4, t = 3, u = 3, v = 3$ oraz $s = 3, t = 4, u = 3, v = 3$. Jednak w tej drugiej wyznacznik ma znak dodatni, gdyż $(-1)^4 i^3 (-i)^3 = 1$. Zatem wartościami własnymi są $\sqrt{13}$ (czterokrotnie), $-\sqrt{13}$ (trzykrotnie), $i\sqrt{13}$ (trzykrotnie) oraz $-i\sqrt{13}$ (trzykrotnie).

Zadanie 5

Liczbę nazwę ciekawą, jeśli spełnia warunek zadania, tzn. ma same cyfry nieparzyste, a każde dwie kolejne różnią się o dwa. Niech a_n będzie liczbą tych n-cyfrowych liczb ciekawych, które się kończą na 1 lub 9; b_n – kończących się na 3 lub 7, zaś c_n – kończących się na 5.

Łatwo teraz mamy, że $a_n = b_{n-1}$, $b_n = a_{n-1} + 2c_{n-1}$ zaś $c_n = b_{n-1}$. Istotnie, każdą liczbę kończącą się na 1 lub 9 mogę uzyskać tylko z liczb kończących się na 3 lub 7 i to na dokładnie jeden sposób. Każdą liczbę kończącą się na 3 lub 7 mogę uzyskać albo z liczby kończącej się na 1 lub 9 (w sposób bijektywny) lub z liczby kończącej się na 5 (tutaj na dwa sposoby – mogę dopisać 3 lub 7), zaś liczbę kończącą się na 5 mogę uzyskać tylko z liczb kończących sie na 3 lub 7.

Stąd łatwo wstawiając mamy $b_n = b_{n-2} + 2b_{n-2} = 3b_{n-2}$. Łącząc to z $a_1 = 2, b_1 = 2, c_1 = 1$, skąd $a_2 = 2, b_2 = 4, c_2 = 2$ mamy $b_{999} = 3^{499} b_1 = 2 \cdot 3^{499}$, $b_{1000} = 3^{499} b_2 = 4 \cdot 3^{499}$, skąd $a_{1000} = c_{1000} = 2 \cdot 3^{499}$, zatem wynikiem jest $a_{1000} + b_{1000} + c_{1000} = 8 \cdot 3^{499}$.

Zadanie 6

Oznaczmy $S = M_1 + \ldots + M_r$.

Mamy wtedy łatwo, że $M_i S = S$, gdyż mnożenie grupy przez jeden z jej elementów permutuje ją.

Sumując to po wszystkich $i = 1, 2, \ldots, r$ uzyskujemy $(M_1 + \ldots + M_r)S = rS$, zatem $S^2 = rS$.

Niech v będzie wektorem własnym S (nad ciałem liczb zespolonych) o wartości własnej λ. Wtedy $S^2 v = rSv$ daje $\lambda^2 v = r\lambda v$. Z niezerowości v uzyskujemy łatwo, że $\lambda = 0$ lub $\lambda = r$.

Jednak $\operatorname{tr} S = \sum \operatorname{tr} M_i = 0$, zatem jedyną wartością własną S jest 0 (w przeciwnym razie ślad jako suma wartości własnych z krotnościami byłby dodatnią wielokrotnością r). Niech więc ψ będzie przekształceniem wyznaczanym przez macierz S (w bazach standardowych). Możemy wtedy znaleźć bazę B, że ψ ma w niej postać górnotrójkątną. Wtedy łatwo musi mieć zera na przekątnej (wartości własne). Stąd w tej bazie łatwo uzyskujemy, że $\psi - r\mathrm{id}$ jest pełnego rzędu (ma postać górnotrójkątną z liczbami niezerowymi na przekątnej). Wtedy $\psi^2 = r\psi$, zatem $\psi(\psi - r\mathrm{id}) = 0$, jednak ponieważ $\psi - r\mathrm{id}$ jest pełnego rzędu, to jest odwracalne, zatem $\psi = 0$, skąd $S = 0$.