Dowody wstępne

Lemat 1 (Subaddytywność rzędu)**.** *Jeśli* $f, g : U \to W$ *są przekształceniami liniowymi między przestrzeniami skończonego wymiaru, to* $\dim \operatorname{im} f + \dim \operatorname{im} g \geqslant \dim \operatorname{im}(f+g)$.

Dowód. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą $\operatorname{im} f$, zaś $\beta_1, \ldots, \beta_m$ będzie bazą $\operatorname{im} g$. Weźmy dowolne $\xi \in \operatorname{im}(f+g)$. Wtedy istnieje takie Ξ, że $(f+g)(\Xi) = \xi$, czyli $f(\Xi) + g(\Xi) = \xi$. Jednak zapisując $f(\Xi)$ i $g(\Xi)$ we współrzędych bazy mamy: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n + b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \ldots + b_m\beta_m = \xi$, stąd łatwo widzimy, że układ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m$ rozpina przestrzeń $\operatorname{im}(f+g)$, skąd teza. □

Lemat 2 (Nierówność Sylvestra)**.** *Jeśli* $f, g : U \to U$ *są przekształceniami liniowymi przestrzeniami liniowej wymiaru* n*, to* $\dim \operatorname{im} f + \dim \operatorname{im} g \leqslant n + \dim \operatorname{im}(f \circ g)$*. Aby zachodziła równość, potrzeba i wystarcza, aby* $\ker f = \operatorname{im} g|_{\ker(f \circ g)}$.

Dowód. Z *rank-nullity theorem* mamy, że $\dim \operatorname{im} f + \dim \ker f = n$, analogicznie dla pozostałych przekształceń. Stąd teza jest równoważna: $\dim \ker f + \dim \ker g \geqslant \dim \ker(f \circ g)$.

Niech $h : \ker(f \circ g) \to W$ będzie obcięciem funkcji g. Wtedy oczywiście $\ker h = \ker g$, bo $\Xi \in \ker g \implies g(\Xi) = \vartheta \implies f(g(\Xi)) = \vartheta \implies \Xi \in \ker(f \circ g)$, a ponadto $\Xi \in \ker h \implies \Xi \in \ker g$, ponieważ h jest obcięciem funkcji g.

Jednak jeśli $\nu \in \ker(f \circ g)$, to $f(g(\nu)) = \vartheta$, skąd $g(\nu) \in \ker f$. Mamy stąd $\operatorname{im} h \subseteq \ker f$. Stąd $\dim \operatorname{im} h \leqslant \dim \ker f$. Stosując twierdzenie o rzędzie dla przekształcenia h mamy: $\dim \ker(f \circ g) = \dim \ker h + \dim \operatorname{im} h \leqslant \dim \ker g + \dim \ker f$, bo $\dim \ker h = \dim \ker g$ oraz $\dim \operatorname{im} h \leqslant \dim \ker f$. □

Lemat 3. *Jeśli* $X \supseteq Y \supseteq Z$ *są przestrzeniami liniowymi takimi, że* $\dim(X/Y)$ *i* $\dim(Y/Z)$ *są skończone, to* $\dim(X/Z) = \dim(X/Y) + \dim(Y/Z)$.

Dowód. Niech $\alpha_1 + Y, \alpha_2 + Y, \ldots, \alpha_n + Y$ będzie bazą X/Y, zaś $\beta_1 + Z, \ldots, \beta_m + Z$ będzie bazą Y/Z.

Niech teraz $\Xi \in X$. Wtedy można zapisać, że $\Xi = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n + \digamma$, gdzie $\digamma \in Y$. Jednak $\digamma$ można zapisać jako $\digamma = b_1\beta_1 + \ldots + b_m\beta_m + \varkappa$, gdzie $\varkappa \in Z$. Stąd jednak $\Xi = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n + b_1\beta_1 + \ldots + b_m\beta_m + \varkappa$, stąd łatwo widać, że wektory $\alpha_1 + Z, \alpha_2 + Z, \ldots, \alpha_n + Z, \beta_1 + Z, \ldots, \beta_m + Z$ rozpinają X/Z.

Załóżmy jednak, że nie są one liniowo niezależne. Wtedy $a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n + b_1\beta_1 + \ldots + b_m\beta_m \in Z$. Jednak stąd $a_1\alpha_1 + \ldots a_n\alpha_n \in Y$, bo $\beta_i \in Y$ oraz $Z \subseteq Y$. Jednak z liniowej niezależności $a_1 + Y, a_2 + Y, \ldots, a_n + Y$ mamy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Teraz mamy, że $b_1\beta_1 + \ldots + b_m\beta_m \in Z$. Jednak znów z liniowej niezależności $b_1 + Z, b_2 + Z, \ldots, b_m + Z$ mamy, że $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. Stąd istotnie $\alpha_1 + Z, \alpha_2 + Z, \ldots, \alpha_n + Z, \beta_1 + Z, \beta_2 + Z, \ldots, b_m + Z$ tworzą układ liniowo niezależny. □

Lemat 4. *Jeśli* $V \supseteq X, Y$ *są przestrzeniami liniowymi takimi, że* $\dim(V/Y)$ *jest skończony, to* $\dim(X/(X \cap Y)) \leqslant \dim(V/Y)$.

Dowód. Niech $\phi, \psi \in X$. Zauważmy, że w $X/(X \cap Y)$ wektory $\phi + (X \cap Y)$ i $\psi + (X \cap Y)$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi - \psi \in X \cap Y$, lecz należenie do X jest oczywiste, skąd jest to warunek równoważny $\phi - \psi \in Y$, czyli równości wektorów $\phi + Y$ i $\psi + Y$ w V/Y.

Stąd widzimy, że przekształcenie $f : X/(X \cap Y) \to V/Y$ dane jako $f(\Xi + (X \cap Y)) = \Xi + Y$ jest dobrze określone, tzn. wybierając wartości z tej samej klasy abstrakcji w dziedzinie uzyskamy ten sam obraz. Oczywiście jest to przekształcenie liniowe.

Niech $(\varpi_i + (X \cap Y))_{i \in I}$ będzie bazą $X/(X \cap Y)$ (I jest pewnym zbiorem indeksów). Zauważmy, że biorąc dowolną niezerową kombinację liniową $a_1\varpi_{i_1} + a_2\varpi_{i_2} + \ldots + a_n\varpi_{i_n} + (X \cap Y)$ mamy, że $f(a_1\varpi_{i_1} + a_2\varpi_{i_2} + \ldots + a_n\varpi_{i_n} + (X \cap Y)) = a_1\varpi_{i_1} + \ldots a_n\varpi_{i_n} + Y$. Jednak, gdyby prawa strona była równa Y, to $a_1\varpi_{i_1} + \ldots a_n\varpi_{i_n} \in Y$, ale skoro wszystkie $\varpi_\cdot$ należą do X, to wtedy $a_1\varpi_{i_1} + \ldots a_n\varpi_{i_n} \in (X \cap Y)$, co z liniowej niezależności daje $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Jednak wymiar V/Y jest skończony, więc wymiar $X/(X \cap Y)$ także. Gdyby bowiem był on nieskończony, to biorąc odpowiednio duży skończony podzbiór bazy w poprzednim rozumowaniu, uzyskalibyśmy w V/Y liniowo niezależny układ o mocy większej niż wymiar V/Y, co jest sprzecznością z tw. Steiniza.

Co więcej, widzimy teraz, że obrazem (skończonej) bazy $X/(X \cap Y)$ jest układ liniowo niezależny w V/Y, skąd $\dim X/(X \cap Y) \leqslant \dim V/Y$. □

Zadanie 1

Dowód. Mamy na mocy subaddytywności rzędu i faktu, że $\operatorname{rank}(-g) = \dim\operatorname{im}(-g) = \dim\operatorname{im} g = \operatorname{rank} g$, że $\operatorname{rank}(f+g) + \operatorname{rank}(g) = \operatorname{rank}(f+g) + \operatorname{rank}(-g) \geqslant \operatorname{rank}(f+g-g) = \operatorname{rank} f$, skąd $\operatorname{rank}(f+g) \geqslant \operatorname{rank} f - \operatorname{rank} g$. Analogicznie $\operatorname{rank}(f+g) \geqslant \operatorname{rank} g - \operatorname{rank} f$. Stąd $\operatorname{rank}(f+g) \geqslant |\operatorname{rank} f - \operatorname{rank} g|$. □

Zadanie 2

W rozwiązaniu będę używał faktów, które udowodniłem w poprzedniej pracy domowej: liczby elementów przestrzeni n-wymiarowej nad ciałem 7-wymiarowym: 7^n oraz liczby uporządkowanych liniowo niezależnych układów n wektorów w tej przestrzeni: $\prod_{k=0}^{n-1}\left(7^n - 7^k\right)$. Choć tam dowodziłem dla przestrzeni nad $GF(4)$, to dowód jest analogiczny dla $GF(7)$.

Część a

Zauważmy, że przekształcenie liniowe będzie jednoznacznie wyznaczone przez wartości na bazie. W związku z tym dla każdego z n wektorów bazy wybieramy na 7^n sposobów obraz tego wektora w ustalanym przekształceniu. Stąd mamy $(7^n)^n$ przekształceń.

Część b

Zauważmy, że znowu chcemy jedynie określić wartości na bazie. Chcemy jednak, aby jądro tego przekształcenia było trywialne. W związku z tym musimy na pewno wybrać takie wartości obrazów wektorów bazy, aby były one liniowo niezależne.

Istotnie, $0 = a_1 f(\alpha_1) + a_2 f(\alpha_2) + \ldots + a_n f(\alpha_n) = f(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n)$, więc aby $\ker f$ było trywialne musi zajść $a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n = 0$, czyli $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Jednak gdy wybierzemy $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ tak, aby był to układ liniowo niezależny, to łatwo widać, że rozpina ona całe $GF(7)^n$, więc $\dim\operatorname{im} f = n$, czyli jest to izomorfizm.

Stąd chcemy znaleźć liczbę liniowo niezależnych układów $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)$, co jak powiedzieliśmy wynosi $\prod_{k=0}^{n-1}\left(7^n - 7^k\right)$.

Zadanie 3

Dowód. Niech $W, U \subseteq V$. Mamy na podstawie lematów:

$$\infty > \dim(V/U) + \dim(V/W) \overset{4}{\geqslant} \dim(V/U) + \dim(U/(U\cap W)) \overset{3}{\geqslant} \dim(V/(U\cap W))$$

□

Zadanie 4

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $\operatorname{rank}(A+A^T) = \operatorname{rank}(B+B^T) = 2013$. Na mocy lematów (gdzie w razie potrzeby interpretujemy macierze jako macierze odpowiednich przekształceń liniowych mamy:

$$\begin{aligned}2\cdot 2013 = \operatorname{rank}(A+A^T) + \operatorname{rank}(B+B^T) &\overset{1}{\leqslant} \\ \overset{1}{\leqslant} \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} A^T + \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} B^T &= \\ = 2(\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B) \overset{2}{\leqslant} 2(\operatorname{rank} AB + 2013)& \\ = 2\cdot 2013&\end{aligned}$$

A więc wszystkie powyższe nierówności są rownościami. Stąd jednak $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B = 2013$, skąd przynajmniej jeden z tych rzędów jest mniejszy bądź równy $1006 = \lfloor\frac{2013}{2}\rfloor$. Załóżmy bez straty ogólności, że jest to $\operatorname{rank} A$. Wtedy $\operatorname{rank} A^T = \operatorname{rank} A < \frac{2013}{2}$, skąd z lematu 1 mamy $\operatorname{rank}(A+A^T) \leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} A^T < 2013$. □

Zadanie 5

Niech $\Finv : W \to Z$ będzie rozważanym izomorfizmem. Określmy funkcję $\beth : V \to V$ jako:

$$\beth(\Upsilon) = \begin{cases} \Finv(\Upsilon) & \text{gdy } \Upsilon \in W \\ \Upsilon & \text{gdy } \Upsilon \in Z \\ \vartheta & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Wtedy oczywiście $\beth^2 = \beth$, co jak udowodniliśmy na ćwiczeniach, jest równoważne byciu rzutem.