Zadanie 1

Część a

Podstawmy $x = \operatorname{tg}\alpha$. Wtedy $dx = \frac{1}{(\cos\alpha)^2}d\alpha$, $x^2+1 = \frac{1}{(\cos\alpha)^2}$, zatem dla $x \geqslant 0$ (czyli $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$, gdzie $\cos x > 0$) mamy: $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{d\alpha}{(1+\operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha} = \int \frac{d\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$. Podstawiając teraz $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (a więc $t \in [0,1)$) mamy $d\alpha = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Stąd $\int \frac{d\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+2t-t^2} = \int \left(\frac{1}{\sqrt{2}(t+\sqrt{2}-1)} - \frac{1}{\sqrt{2}(t-\sqrt{2}-1)}\right)dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{2}-1\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t-\sqrt{2}-1\right| + C$. Jednakże $x = \operatorname{tg}\alpha$, $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, zatem $x = \frac{2t}{1-t^2}$. Wystarczy znaleźć graniczne wartości t, którym odpowiadają graniczne wartości x, tj. 0 i $\frac{3}{4}$, tak, żeby obie leżały w $t \in [0,1)$ – na tym przedziale prawdziwe są wszystkie powyższe przejścia.

Widzimy, że $x = 0$ odpowiada $t = 0$, $x = \frac{3}{4}$ odpowiada $t = \frac{1}{3}$. Zatem wynik to

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{2}-1\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t-\sqrt{2}-1\right| + C\right)_0^{\frac{1}{3}}$$

czyli:

$$\frac{\ln\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\sqrt{2}+\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\sqrt{2}-1\right) + \ln(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}$$

Można to jeszcze prostymi, acz żmudnymi przekształceniami uprościć do $\frac{\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}}{\sqrt{2}}$.

Część b

Policzmy $\lim_{\alpha\to 2^-} \int_{\frac{7}{5}}^{\alpha} \frac{1-2x}{\sqrt{2+x-x^2}}dx$. Podstawiając $x = \frac{-1+\sqrt{9-4t}}{2}$ mamy $2+x-x^2 = t$, skąd $(1-2x)dx = dt$, zaś granice całkowania przechodzą na $\frac{36}{25}$ oraz $2+\alpha-\alpha^2$. Zatem pozostaje do obliczenia całka $\int_{\frac{36}{25}}^{2+\alpha-\alpha^2} \frac{1}{\sqrt{t}}dt = (2\sqrt{x})_{\frac{36}{25}}^{2+\alpha-\alpha^2} = 2\sqrt{2+\alpha-\alpha^2} - \frac{12}{5}$.

Przechodząc do granicy z $\alpha \to 2^-$ mamy $\int_{\frac{7}{5}}^{2} \frac{1-2x}{\sqrt{2+x-x^2}}dx = -\frac{12}{5}$.

Zadanie 2

Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt[n]{1-x^m}$. Wtedy $f^{-1}(x) = \sqrt[m]{1-x^n}$, ponadto $f(0) = 1, f(1) = 0$. Mamy jednak całkując najpierw przez części, a następnie przez podstawienie $y = f(x)$, że $\int_0^1 1 \cdot f(x)dx = (xf(x))_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx = (1\cdot 0 - 0 \cdot 1) - \int_0^1 f^{-1}(f(x))f'(x)dx = -\int_1^0 f^{-1}(y)dy = \int_0^1 f^{-1}(y)dy$.

Zatem całki z zadania są równe.

Zadanie 3

Mamy $a_n := \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x)^{-n}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x)(\cos x)^{-n-1}dx$. Całkując przez części mamy, że skoro $\int \cos x = \sin x$, $((\cos x)^{-n-1})' = (-n-1)(-\sin x)(\cos x)^{-n-2}$, to $I_n = (\sin x(\cos(x))^{-n-1})_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x(n+1)\sin x(\cos x)^{-n-2}dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n-1} - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-(\cos x)^2)(\cos x)^{-n-2}dx = \sqrt{3}2^n - (n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n$. Zatem $0 = \sqrt{3}\cdot 2^n - (n+1)a_{n+2} + na_n$, czyli dla $n \neq -1$ mamy $a_{n+2} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2^n}{n+1} + \frac{n}{n+1}a_n$.

Aby ustalić warunki początkowe, należy obliczyć a_0 oraz a_1. Oczywiście jednak $a_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1dx = \frac{\pi}{3}$.

Aby policzyć $a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$ możemy użyć podstawienia uniwersalnego $t = \tan\frac{x}{2}$. Wtedy $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, zaś $\tan\frac{0}{2} = 0$, $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, zatem $a_1 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{1-t^2}dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1-t}\right) dt = (\ln(1+t) - \ln(1-t))_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \ln\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \ln 1 + \ln 1 = \ln\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \ln\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Zadanie 4

Oznaczmy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako $f(x) = -\arctan(\cos(x))$. Wtedy $f'(x) = \frac{\sin(x)}{1+(\cos x)^2}$.

Stąd całkując przez części mamy $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+(\cos x)^2}dx = (-x\arctan(\cos(x)))_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\arctan(\cos(x))dx$.

Policzmy całkę $\int_0^{\pi}\arctan(\cos(x))dx$ podstawiając $y = \pi - x$. Mamy wtedy $\cos(y) = -\cos(x)$, $\arctan(\cos(y)) = -\arctan(\cos(x))$, $dy = -dx$. Zatem $\int_0^{\pi}\arctan(\cos(x))dx = \int_{\pi}^{0}(-\arctan(\cos(y)))(-dy) = -\int_0^{\pi}\arctan(\cos(y))dy$. Zatem $\int_0^{\pi}\arctan(\cos(x)) = 0$.

Stąd $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+(\cos x)^2}dx = -\pi\arctan(\cos(\pi)) + 0\cdot\arctan(\cos(0)) = \frac{\pi^2}{4}$.