Zadanie 1

Ponieważ $f(x) > 0$, oznaczmy $g(x) = \ln f(x) = \sin(2x) \ln \tan x$ dla $x \in J$. Wtedy $g'(x) = 2\cos(2x) \ln \tan x + \sin(2x)\frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{\tan x} = 2\cos(2x)\ln\tan x + \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x}\frac{\cos x}{\sin x} = 2\cos(2x)\ln\tan x + 2$.

Jednak na $(0, \frac{\pi}{4})$, $\cos 2x$ jest malejący i dodatni, zaś $\tan x$ rosnący i z przedziału $(0, 1)$, zatem jego logarytm jest rosnący i ujemny, zatem $-\ln\tan x$ jest malejący i dodatni, zatem $-2\cos(2x)\ln\tan x$ jest malejący, czyli $g'(x)$ rośnie.

Ponadto $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ (gdyż $\ln\tan\frac{\pi}{4} = 0$). Mamy zaś $g'(x) = 2 + 2\cos(2x)\ln\sin x - 2\cos(2x)\ln\cos x$. Aby policzyć granicę w zerze, zauważmy, że $2\cos(2x)\ln\sin x < 2 \cdot 1 \cdot \ln x$, gdyż $0 < \cos(2x) < 1$, $\sin x < x$ w prawostronnym otoczeniu zera. Zatem przy $x \to 0$ mamy $2\cos(2x)\ln\sin x \to -\infty$, zaś ponieważ $2\cos(2x)\ln\cos x$ jest w zerze określone i ciągłe, to łatwo $\lim_{x\to 0} g'(x) = -\infty$.

Zatem na przedziale $(0, \frac{\pi}{4})$, pochodna jest rosnąca i osiągnie wartość zero, gdyż na końcach przedziału dąży do $-\infty$ i 2. Co więcej, osiągnie je dokładnie raz i ponieważ będzie ona tam rosnąca w dowolnie małym otoczeniu, to istotnie w tym punkcie g osiąga swoje minimum lokalne.

Ponadto $g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin(\pi - 2x)\ln\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 = 2\sin(2x)\ln\frac{1}{\tan x} + 2 = 2 - 2\sin(2x)\ln\tan x = -g(x)$. Zatem wykres funkcji g jest symetryczny względem punktu $(\frac{\pi}{4}, 0)$. Zatem jeśli funkcja w pewnym punkcie osiąga ekstremum lokalne, to w punkcie $\frac{\pi}{2} - t$ osiągnie ekstremum lokalne, ale to drugie (tzn. minimum przechodzi na maksimum, a maksimum na minimum).

W tej chwili wiemy już, że funkcja osiąga po dokładnie jednym ekstremum lokalnym każdego typu i ich suma wynosi $\frac{\pi}{2}$. Należy jeszcze zbadać jej zachowanie na końcach przedziału.

Ale jednak $g(x) = 2\sin x\cos x(\ln\sin x - \ln\cos x) = 2\cos x\sin x\ln\sin x - 2\sin x\cos x\ln\cos x$. Przy $x \to 0$ pierwszy składnik tej ostatniej sumy dąży do zera (bo $t\ln t \to 0$ przy $t \to 0$, zaś kosinus dąży do 1), zaś drugi dąży do zera, gdyż sinus dąży do zera, jak i zresztą logarytm kosinusa.

Zatem $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Taka sama oczywiście jest granica przy $x \to \frac{\pi}{2}$. Jednak funkcja ta nie jest stała (jak pokazaliśmy, pochodna osiąga np. wartość dwa), zatem nie jest możliwe, aby to zero było oboma kresami zbioru wartości, ale ponieważ na mocy powyższych dowodów jest on symetryczny względem zera, to stąd łatwo mamy, że na końcach przedziału nie są osiągane kresy, zatem znalezione wcześniej ekstrema lokalne są ekstremami globalnymi i funkcja osiąga w nich swe kresy. Ponadto szukana suma $u + v$ wynosi $\frac{\pi}{2}$.

Zadanie 3

Zapiszmy $f(x) = \tan(\sin x) - \sin(\tan x)$ dla $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Wtedy mamy $f'(x) = \cos(x)\frac{1}{\cos^2(\sin x)} - \frac{1}{\cos^2 x}\cos(\tan x) = \frac{(\cos x)^3 - (\cos\sin x)^2(\cos\tan x)}{(\cos x\cos(\sin x))^2}$. Mianownik jest stale dodatni. Aby pokazać, że f jest rosnąca, wystarczy pokazać, że licznik jest dodatni.

Zauważmy jednak, że w rozważanym przedziale $x, \sin x, \cos x \in [0, 1]$, a w tym przedziale cosinus jest dodatni, wklęsły i malejący. Zatem $\sqrt[3]{(\cos\sin x)^2\cos\tan x} \leqslant \frac{2\cos\sin x + \cos\tan x}{3} \leqslant \cos(\frac{2\sin x + \tan x}{3}) = \dagger$ na mocy nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną oraz nierówności Jensena.

Teraz, ponieważ cos jest malejący w przedziale $[0, 1]$ ($\frac{2\sin x + \tan x}{3}$ tam należy, jako średnia arytmetyczna trzech liczb z tego przedziału), wystarczy pokazać $2\sin x + \tan x \geqslant 3x$, gdyż to da nam $\dagger \leqslant \cos x$. Ale zauważmy, że funkcja $g(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$ ma pochodną $2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3$, zaś na mocy nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną, $\frac{\cos x + \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\cos x\cos x\frac{1}{\cos^2 x}}$, zatem $g'(x) \geqslant 0$, a ponieważ $g(0) = 0$, to $g(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (0, \frac{\pi}{4}]$.

Stąd mamy, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{4}]$. Jednak $f(0) = 0$, zatem $f(x) > 0$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{4})$.

Zadanie 4

Łatwo widać, że $x_i \in [-1, 1]$. Ponadto ponieważ zadania zarówno w założeniach ($\sum x_i^2$) jak i funkcji do obliczenia ($\cos x_i$) zmienne x_i są obłożone funkcjami parzystymi, to możemy przyjąć $x_i \in [0, 1]$. Ponadto wtedy $\cos x_i \in [0, 1]$.

Łatwo więc widać, że wystarczy maksymalizować funkcję $\ln\prod_{i=1}^n \cos\sqrt{t_i}$ przy $\sum_{i=1}^n t_i = 1$.

Rozpatrzmy funkcję $f(t) = \ln\cos\sqrt{t}$ dla $t \in [0, 1]$. Mamy $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(-\sin\sqrt{4})\frac{1}{\cos\sqrt{t}} = \frac{-\tan\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}$. Aby pokazać, że f jest funkcją wklęsłą, wystarczy dowieść, że $\frac{\tan u}{u}$ (dla $u \in (0, 1]$) jest rosnący (gdyż wtedy funkcję

$f'(t)$ uzyskujemy przez złożenie z rosnącą funkcją pierwiastek oraz przez przemnożenie przez minus jeden).

Ale to jest oczywiste, gdyż jego pochodna $\frac{d}{du}\frac{\tan u}{u} = \frac{\frac{u}{\cos^2 u} - \tan u}{u^2}$, zaś $\frac{u}{\cos^2 u} - \tan u > 0$, bo po równoważnym przemnożeniu przez $\cos^2 u$ uzyskamy $u - \sin u \cos u > 0$, czyli $\frac{1}{2}(2u - \sin(2u)) > 0$. Stąd istotnie f' jest malejący, zatem f jest funkcją wklęsłą.

Stąd uzyskujemy na mocy nierówności Jensena, że

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant nf\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) = n \ln\left(\cos\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$$

Wystarczy więc policzyć $\sup_n \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

W tym celu zdefiniujmy $r(x) = \frac{\ln\cos x}{x^2}$ dla $x \in (0, 1]$. Widać, że jeśli pokażemy, że funkcja ta jest (słabo) malejąca i ma skończoną granicę w zerze, to granica ta logarytmem będzie poszukiwanym supremum. Istotnie, chcemy znaleźć $\sup_n \exp\left(r\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

Zatem policzmy $r'(x) = \frac{(-\sin x)\frac{1}{\cos x}x^2 - \ln\cos x\cdot(2x)}{x^4} = \frac{-x\tan x - 2\ln\cos x}{x^3}$. Chcemy pokazać, że licznik jest niedodatni. W zerze jest on równy zeru, zatem wystarczy pokazać, że funkcja $q(x) = x \operatorname{tg} x + 2\ln\cos x$ jest rosnąca na $x \in [0, 1]$. Aby to pokazać, zróżniczkujmy ją, uzyskując $q'(x) = \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x} + 2(-\sin x)\frac{1}{\cos x} = \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \sin x\cos x}{\cos^2 x} = \frac{2x - \sin(2x)}{2\cos^2 x} > 0$. Zatem istotnie q jest rosnąca, zatem licznik w r' jest niedodatni, zatem r jest nierosnąca.

Mamy ponadto $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, $\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, zatem $\ln\cos x = -\frac{x^2}{2!} + o(x^2) + o(x^4) + o((\cos x - 1)^2) = -\frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, zatem $\lim_{x\to 0} r(x) = -\frac{1}{2}$, zatem szukanym supremum jest $\exp\left(-\frac{1}{2}\right)$.