Zadanie 1

Zapiszmy P – podprzestrzeń z zadania dana równaniami $x_1+x_2-1=0, x_1-x_3+x_4=0, x_1+x_3-x_5+1=0$, zaś Q – szukana podprzestrzeń.

Mamy $\dim P=2$, $\dim Q=3$, $P\|Q$, zatem $TP\subset TQ$. Mamy jednak, że TP jest opisane równaniami $x_1+x_2=0$, $x_1-x_3+x_4=0$, $x_1+x_3-x_5=0$.

Mamy jednak, że $TP=\{(t,-t,s-t,s-2t,s) : s,t\in\mathbb{R}\}$, co łatwo widać z układu równań (uzależniając wszystkie zmienne od x_1,x_5). Wstawiając $t=1, s=0$, a potem $t=0, s=1$ uzyskujemy łatwo $TP=\mathrm{lin}\{(1,-1,-1,-2,0),(0,0,1,1,1)\}$, gdyż wektory te są liniowo niezależne (schodki na pierwszej i ostatniej współrzędnej).

Musi być $TP\subset TQ$, $(1,3,0,-1,2)=\omega(M_1,M_2)\in TQ$, skąd

$$\mathrm{lin}\{(1,-1,-1,-2,0),(0,0,1,1,1),(1,3,0,-1,2)\}\subseteq TQ$$

Odejmując pierwszy wektor od ostatniego uzyskujemy

$$\mathrm{lin}\{(1,-1,-1,-2,0),(0,0,1,1,1),(0,4,1,1,2)\}\subseteq TQ$$

Odejmując dwukrotność drugiego wektora od trzeciego i mnożąc pierwszy przez cztery mamy:

$$\mathrm{lin}\{(4,-4,-4,-8,0),(0,0,1,1,1),(0,4,-1,-1,0)\}\subseteq TQ$$

Dodając ostatni wektor do pierwszego mamy

$$\mathrm{lin}\{(4,0,-5,-9,0),(0,0,1,1,1),(0,4,-1,-1,0)\}\subseteq TQ$$

Wektory te są liniowo niezależne (schodki na pierwszej, drugiej i ostatniej współrzędnej), zatem przez porównanie wymiarów

$$\mathrm{lin}\{(4,0,-5,-9,0),(0,0,1,1,1),(0,4,-1,-1,0)\}=TQ$$

Zatem

$$TQ=\{(4a,4c,-5a+b-c,-9a+b-c,b) : a,b,c\in\mathbb{R}\}$$

Zatem mamy łatwo, że przestrzeń TQ jest opisana równaniami $x_3=-\frac{5}{4}x_1+x_5-\frac{1}{4}x_2$, $x_4=-\frac{9}{4}x_1+x_5-\frac{1}{4}x_2$. Czyli $5x_1+x_2+4x_3-4x_5=0$, $9x_1+x_2+4x_4-4x_5=0$.

Aby uzyskać równania na Q należy wstawić jakiś punkt i policzyć wyrazy wolne. Wstawiając M_1 uzyskujemy $5x_1+x_2+4x_3-4x_5=8, 9x_1+x_2+4x_4-4x_5=8$ i są to równania na podprzestrzeń Q.

Zadanie 2

Sformułowanie „trójkąt A,B,C” w treści zadania rozumiem jako trójka punktów w położeniu ogólnym. Stąd w szczególności $\mathrm{aff}(A,B),\mathrm{aff}(A,C),\mathrm{aff}(B,C)$ są wymiaru 1, zaś $\mathrm{aff}(A,B,C)$ jest wymiaru 2.

Zapiszmy $A_1=\lambda B+(1-\lambda)C$, $B_1=\kappa C+(1-\kappa)A$, $C_1=\mu A+(1-\mu)B$, przy czym $\lambda,\kappa,\mu\notin\{0,1\}$.

Ponieważ A, B, C są w położeniu ogólnym, to $\mathrm{aff}(A,B)\neq\mathrm{aff}(A,C)$, gdyż w przeciwnym wypadku $\mathrm{aff}(A,B,C)=\mathrm{aff}(A,B)=\mathrm{aff}(A,C)$, lecz ta pierwsza przestrzeń jest wymiaru 2, a kolejne wymiaru 1. Ponadto $\mathrm{aff}(A,B)\cap\mathrm{aff}(A,C)\subsetneq\mathrm{aff}(A,B)$, zatem $\mathrm{aff}(A,B)\cap\mathrm{aff}(A,C)$ jest puste lub $\dim(\mathrm{aff}(A,B)\cap\mathrm{aff}(A,C))<1$, lecz $A\in\mathrm{aff}(A,B)\cap\mathrm{aff}(A,C)$, zatem $\dim(\mathrm{aff}(A,B)\cap\mathrm{aff}(A,C))=0$, czyli $\mathrm{aff}(A,B)\cap\mathrm{aff}(A,C)=\{A\}$.

Stąd mamy, że w szczególności punkt C_1 jest różny od punktu A_1, gdyż należą do tych przestrzeni i są różne od punktu A. $C_1=\mu A+(1-\mu)B$,

Analogicznie uzyskujemy, że A_1,B_1,C_1 są parami różne.

Teraz zauważmy, że $\omega(B,A_1)=\lambda\omega(B,B)+(1-\lambda)\omega(B,C)=(1-\lambda)\omega(B,C)$ oraz $\omega(A_1,C)=\lambda\omega(B,C)+(1-\lambda)\omega(C,C)=\lambda\omega(B,C)$, zatem $\omega(B,A_1)=\frac{1-\lambda}{\lambda}\omega(A_1,C)$, zatem $k_a=\frac{1-\lambda}{\lambda}$. Analogicznie $k_b=\frac{1-\kappa}{\kappa}$ oraz $k_c=\frac{1-\mu}{\mu}$.

Wynikanie $\Longrightarrow$

Załóżmy, że punkty A_1, B_1, C_1 leżą na jednej prostej, czyli $A_1 \in \operatorname{aff}(B_1, C_1)$ (z różności punktów B_1, C_1). Stąd istnieje element ciała ξ taki, że $A_1 = \xi B_1 + (1-\xi)C_1$.

Stąd $\lambda B + (1-\lambda)C = A_1 = \xi(\kappa C + (1-\kappa)A) + (1-\xi)(\mu A + (1-\mu)B) = (\xi(1-\kappa) + (1-\xi)\mu) A + ((1-\xi)(1-\mu)) B + (\xi\kappa) C$. Zatem $\xi(1-\kappa) + (1-\xi)\mu = 0$, $(1-\xi)(1-\mu) = \lambda$, $\xi\kappa = (1-\lambda)$.

Stąd zaś $\xi = \frac{1-\lambda}{\kappa}$, $1 - \xi = \frac{\lambda}{1-\mu}$ (ponieważ κ i $1-\mu$ są niezerowymi elementami ciała), zatem wstawiając to pierwszej równości uzyskujemy, $\frac{1-\lambda}{\kappa}(1-\kappa) + \frac{\lambda}{1-\mu}\mu = 0$, czyli $\frac{1-\lambda}{\kappa}(1-\kappa) = -\frac{\lambda}{1-\mu}\mu$, skąd z niezerowości μ, λ uzyskujemy $\frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{1-\kappa}{\kappa} \cdot \frac{1-\mu}{\mu} = -1$, czyli $k_a k_b k_c = -1$.

Wynikanie $\Longleftarrow$

Nie może wtedy na raz zachodzić $\lambda + \kappa = 1$, $\lambda + \mu = 1$, $\mu + \kappa = 1$, gdyż dawałoby to, że $\kappa = 1 - \lambda$, $\mu = 1 - \lambda$, zatem $1 = \mu + \kappa = 2 - 2\lambda$, zatem $2\lambda = 1$. Nad charakterystyką dwa jest to oczywista sprzeczność, nad każdą inną uzyskujemy $\lambda = \frac{1}{2}$, zatem i $\kappa = \mu = \frac{1}{2}$, skąd $k_a = k_b = k_c = 1$, co nie spełnia warunku $k_a k_b k_c = -1$. Zatem któraś z tych nierówności nie jest prawdziwa, bez straty ogólności załóżmy, że $\lambda + \kappa \neq 1$.

Mamy, że $\omega(A_1, B_1) = \omega(A_1, A) + \omega(A, B_1) = \lambda\omega(B, A) + (1-\lambda)\omega(C, A) + \kappa\omega(A, C) = \lambda\omega(B, A) + (1 - \lambda - \kappa)\omega(C, A)$, jednak ponieważ wektory $\omega(B, A), \omega(C, A)$ są liniowo niezależne, to $\omega(A_1, B_1) \notin \operatorname{lin}\omega(B, A)$, zatem $T\operatorname{aff}(A_1, B_1) \neq T\operatorname{aff}(A, B)$, zatem proste $\operatorname{aff}(A_1, B_1)$ oraz $\operatorname{aff}(A, B)$ nie są równoległe. Mamy więc ponadto, że $\operatorname{lin}(\omega(A_1, B_1), \omega(A, B)) = T\operatorname{aff}(A, B, C)$ (przez porównanie wymiarów), zatem stąd już łatwo mamy, że proste te przecinają się. Istotnie, istnieją w ciele elementy ξ, ζ takie, że $\xi\omega(A_1, B_1) + \zeta\omega(A, B) = \omega(A, A_1)$, zatem $\operatorname{aff}(A, B) \ni A + \zeta\omega(A, B) = A + \omega(A, A_1) + \xi\omega(A_1, B_1) = A_1 + \xi\omega(A_1, B_1) \in \operatorname{aff}(A_1, B_1)$.

Rozpatrzmy punkt $\hat{C}_1 \in \operatorname{aff}(A, B) \cap \operatorname{aff}(A_1, B_1)$. Nie może być, żeby $\hat{C}_1 = A$, gdyż mielibyśmy $A \in \operatorname{aff}(A_1, B_1)$, zatem $\operatorname{aff}(A, B_1) \subseteq \operatorname{aff}(A_1, B_1)$, skąd przez porównanie wymiarów (bo $A \neq B_1$) mamy $\operatorname{aff}(A, C) = \operatorname{aff}(A, B_1) = \operatorname{aff}(A_1, B_1)$. Jednak ponieważ $A_1 \in \operatorname{aff}(B, C)$, to mielibyśmy $A_1 \in \operatorname{aff}(B, C) \cap \operatorname{aff}(A, C)$, co jak stwierdziliśmy wcześniej, dawałoby $A_1 = C$. Zatem $\hat{C}_1 \neq A$. Analogicznie $\hat{C}_1 \neq B$. Jeszcze bardziej oczywiste jest $\hat{C}_1 \neq C$, gdyż w przeciwnym wypadku byłoby $C \in \operatorname{aff}(A, B)$, co jest sprzeczne z tym, że $\dim \operatorname{aff}(A, B, C) = 2$.

Mamy $\omega(A, \hat{C}_1) = k_{\hat{c}}\omega(\hat{C}_1, B)$. Ponieważ $A_1, B_1, \hat{C}_1$ tworzą przestrzeń afiniczną wymiaru jeden i żaden z nich nie jest wierzchołkiem trójkąta, to $k_a k_b k_{\hat{c}} = -1$. Jednak z założenia $k_a k_b k_c = -1$, zatem $k_c = k_{\hat{c}}$.

Stąd zaś mamy już łatwo, że $C_1 = \hat{C}_1$ z afinicznej niezależności punktów A, B, zatem punkty A_1, B_1, C_1 leżą na jednej prostej.

Zadanie 4

Przyjmę, że należy tezę udowodnić nad ciałem liczb rzeczywistych, gdyż w przeciwnym wypadku pojęcie przeciwległych wierzchołków traci sens. Choć swoją drogą, wystarczy mi charakterystyka ciała różna od 2, 3, 5.

Zauważmy, że $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B\right) + \frac{1}{4}C = \frac{1}{4}A + \frac{2}{4}B + \frac{1}{4}C = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}B\right) + \frac{1}{4}A$, zatem punkt $\frac{1}{4}A + \frac{2}{4}B + \frac{1}{4}C$ (oznaczony na rysunku jako X) należy do przecięcia pewnej pary poprowadzonych w zadaniu prostych.

Ponadto $\frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}C + \frac{1}{3}B\right) + \frac{2}{5}A = \frac{2}{5}A + \frac{2}{5}C + \frac{1}{5}B = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B\right) + \frac{2}{5}C$, zatem punkt $\frac{2}{5}A + \frac{1}{5}B + \frac{2}{5}C$ (oznaczony na rysunku jako Y) należy do przecięcia pewnej pary prostych z zadania.

Łatwo można teraz zobaczyć, że przekątnymi z zadania są $\operatorname{aff}(\frac{1}{4}A + \frac{2}{4}B + \frac{1}{4}C, \frac{2}{5}A + \frac{1}{5}B + \frac{2}{5}C)$, $\operatorname{aff}(\frac{2}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C, \frac{1}{5}A + \frac{2}{5}B + \frac{2}{5}C)$, $\operatorname{aff}(\frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{2}{4}C, \frac{2}{5}A + \frac{2}{5}B + \frac{1}{5}C)$.

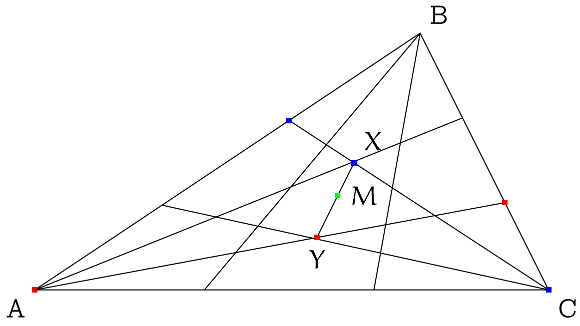
Ponadto $\frac{4}{9}\left(\frac{1}{4}A + \frac{2}{4}B + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{9}\left(\frac{2}{5}A + \frac{1}{5}B + \frac{2}{5}C\right) = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$, zatem punkt $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ (oznaczony jako M) należy do przekątnej łączącej punkty $\frac{1}{4}A + \frac{2}{4}B + \frac{1}{4}C$ oraz $\frac{2}{5}A + \frac{1}{5}B + \frac{2}{5}C$.

Jednak analogicznie należy on do pozostałych przekątnych. Zatem przecinają się one w jednym punkcie.

Zadanie 5

Część a

Możemy zapisać $\phi(p + v) = q + D\phi(v)$, dla ustalonych punktów początkowych p, q. Mamy jednak, że ponieważ $D\phi$ nie ma wartości własnej 1, to $D\phi - \mathrm{id}$ jest izomorfizmem. Zatem w szczególności istnieje takie v_0, że $(D\phi - \mathrm{id})(v_0) = \omega(q, p)$. Zatem $D\phi(v_0) = v_0 + \omega(q, p)$, zatem zaczepiając te wektory w punkcie q uzyskujemy $\phi(p + v_0) = q + D(\phi(v_0)) = q + v_0 + \omega(q, p) = p + v_0$, zatem $p + v_0$ jest punktem stałym.



Rysunek 1: Sytuacja z zadania czwartego

Część b

Niech p będzie punktem stałym tego przekształcenia. Ponieważ możemy zapisać $\phi(p+v) = q + D\phi(v)$ dla pewnego q, zaś wstawienie $v = 0$ daje nam $p = q$, to mamy, że $\phi(p+v) = p + D\phi(v)$.

Gdyby $D\phi$ miało wartość własną 1 z wektorem własnym v_0, to byłoby $\phi(p+v_0) = p + D\phi(v_0) = p + v_0$, zatem mielibyśmy, że $p + v_0$ byłoby punktem stałym, ale jest to punkt różny od p.

Zatem $D\phi$ nie ma wartości własnej 1. Niech teraz U będzie podprzestrzenią niezmienniczą. Wtedy $\phi_{|U}$ jest przekształceniem afinicznym i także nie ma wartości własnej 1. Na mocy części a, przekształcenie to ma punkt stały. Ale jedynym punktem stałym jest p, zatem $p \in U$.

Zadanie 6

Rozwiążmy układ równań $f(x, y, z) = (x, y, z)$, czyli

$$\begin{cases} 5x - 2y - 3z &= 0 \\ -2x + 2y - 6z &= -6 \\ -3x - 6y - 3z &= -12 \end{cases}$$

Widzimy, że $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ spełnia ten układ równań.

Dodając drugie równanie do pierwszego oraz trzykrotność drugiego do pierwszego mamy

$$\begin{cases} -3x - 0y - 9z &= -6 \\ -2x + 2y - 6z &= -6 \\ -9x - 0y - 21z &= -30 \end{cases}$$

Licząc wyznacznik układu $\det \begin{pmatrix} -3 & 0 & -9 \\ -2 & 2 & -6 \\ -9 & 0 & -21 \end{pmatrix}$ możemy rozwinąć rozwinięciem Laplace'a względem drugiej kolumny uzyskując $2 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ -9 & -21 \end{pmatrix} = -36 \neq 0$, zatem układ ten jest oznaczony i ma dokładnie jedno rozwiązanie, zatem $p := (1, 1, 1)$ jest jedynym punktem stałym przekształcenia afinicznego f.

Na mocy części b zadania piątego, każda podprzestrzeń niezmiennicza musi zawierać ten punkt stały. Ponadto można zapisać $f(p+v) = p + Df(v)$. Jeśli U jest podprzestrzenią niezmienniczą, to znaczy, że dla $p+v \in U$ zachodzi $p + Df(v) \in U$, zatem z tego, że $v \in TU$ wynika, że $Df(v) \in TU$. W drugą stronę, jeśli z tego, że $v \in TU$ wynika, że $Df(v) \in TU$ oraz $p \in U$, to $p + v \in U$, zatem $p + Df(v) \in U$.

Wystarczy więc teraz znaleźć przestrzenie niezmiennicze przekształcenia Df, gdyż przestrzenie niezmiennicze przekształcenia f będą to tamte przestrzenie zaczepione w punkcie p.

Jednak zauważmy, że $Df(1, 2, 3) = (-7, -14, -21) = -7(1, 2, 3)$, $Df(3, 0, -1) = (21, 0, -7) = 7(3, 0, -1)$, $Df(0, 3, -2) = (0, 21, -14) = 7(0, 3, -2)$.

Ponieważ $(3, 0, -1)$ oraz $(0, 3, -2)$ są liniowo niezależne (schodki), to przestrzeń własna związana z wartością własną 7 jest wymiaru dwa, stąd łatwo widzimy (z teorii związanej z postaciami Jordana), że $\mathbb{R}^3 = \mathrm{lin}(1, 2, 3) \oplus \mathrm{lin}(3, 0, -1) \oplus \mathrm{lin}(0, 3, -2)$, i są to przestrzenie niezmiennicze.

Rozpatrzmy jakąś przestrzeń niezmienniczą U. Jeśli U nie jest przestrzenią zerową, to zawiera jakiś wektor $x = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, gdzie $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (3, 0, -1)$, $v_3 = (0, 3, -2)$. W takim wypadku zawiera też wektor $f(x) = -7\alpha v_1 + 7\beta v_2 + 7\gamma v_3$. Zatem zawiera też wektor $f(x)+7x = 14\beta v_2 + 14\gamma v_3$ oraz wektor $f(x)-7x = -14\alpha v_1$.

Stąd łatwy wniosek, że $U = (U \cap \operatorname{lin} v_1) \oplus (U \cap \operatorname{lin}(v_2, v_3))$ i są to przestrzenie niezmiennicze. Co więcej, jeśli T jest podprzestrzenią niezmienniczą $\operatorname{lin} v_1$, zaś V jest podprzestrzenią niezmienniczą $\operatorname{lin}(v_2, v_3)$, to $T \oplus V$ jest podprzestrzenią niezmienniczą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Podprzestrzenie niezmiennicze przestrzeni $\operatorname{lin} v_1$ to przestrzeń zerowa i całe $\operatorname{lin} v_1$.

Podprzestrzenie niezmiennicze przestrzeni $\operatorname{lin}(v_2, v_3)$ mogą być wymiaru 0, 1 lub 2. Łatwo teraz widać, że mogą to być przestrzenie postaci: $\{0\}$, $\operatorname{lin} v_1$, $\operatorname{lin}(\xi v_1 + v_2)$ (dla dowolnego ξ) oraz $\operatorname{lin}(v_1, v_2)$. Wynika to stąd, że jeśli taka podprzestrzeń zawiera dwie nieproporcjonalne kombinacje liniowe wektorów v_1, v_2, to jest już wymiaru 2, zatem jest równa $\operatorname{lin}(v_1, v_2)$.

Zatem podsumujmy: podprzestrzeniami niezmienniczymi przekształcenia f są:

- $(1, 1, 1) + \{0\}$
- $(1, 1, 1) + \operatorname{lin}(1, 2, 3)$
- $(1, 1, 1) + \operatorname{lin}(3, 0, -1)$
- $(1, 1, 1) + \operatorname{lin}\{(1, 2, 3), (3, 0, -1)\}$
- $(1, 1, 1) + \operatorname{lin}\{\xi(1, 2, 3) + (0, 3, -2)\}$
- $(1, 1, 1) + \operatorname{lin}\{(1, 2, 3), \xi(1, 2, 3) + (0, 3, -2)\}$
- $(1, 1, 1) + \operatorname{lin}\{(3, 0, -1), (0, 3, -2)\}$
- $(1, 1, 1) + \operatorname{lin}\{(1, 2, 3), (3, 0, -1), (0, 3, -2)\}$