Zadanie 1

Mamy przy założeniach zadania, że $(1-x)^{-p-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-p-1}{n}(-1)^n x^n$. Mamy jednak $\binom{-p-1}{n}(-1)^n = \frac{(-p-1)(-p-2)(-p-3)\ldots(-p-n)}{n!}(-1)^n = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}{n!} = \binom{n+p}{n}$.

Zadanie 2

Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ funkcja f jest ciągła na przedziale zwartym, to jest tam jednostajnie ciągła. Istnieje zatem takie $\delta > 0$, że jeśli tylko $|x-y| \leqslant \delta$, to $|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Niech $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ będą takie, że $x_i = a + i\delta$, wszystkie $x_i \in [a,b]$, zaś $a + k\delta \geqslant b$. Ponadto połóżmy $x_k = b$. Innymi słowy: stawiamy na przedziale $[a,b]$ punkty z odstępem δ.

Ciągi $(f_n(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ są zbieżne do $f(x_i)$ dla każdego i, zatem dla każdego i można wybrać takie N_i, że dla $n > N_i$ zachodzi nierówność $|f(x_i) - f_n(x_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Niech $N = \max(N_1, \ldots, N_k)$. Wtedy zauważmy, że dla dowolnego $x \in [x_{i-1}, x_i]$ zachodzi, że $f(x) - f_n(x) \leqslant \left(f(x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2}\right) - f_n(x_{i-1}) = (f(x_{i-1}) - f_n(x_{i-1})) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, gdzie pierwsza nierówność wynika z tego, że $f_n(x) \geqslant f_n(x_{i-1})$ oraz $f(x) - f(x_{i-1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Z drugiej strony, $f(x) - f_n(x) \geqslant \left(f(x_i) - \frac{\varepsilon}{2}\right) - f_n(x_i) = (f(x_i) - f_n(x_i)) - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = -\varepsilon$.

Zatem $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ dla $n > N$ i jest to oszacowanie niezależne od x. Zatem zbieżność jest jednostajna.

Zadanie 3

Niech d będzie wspólnym ograniczeniem na stopień tych wielomianów. Ustalmy dowolne $d+1$ parami różnych punktów wewnątrz przedziału, na którym mamy zbieżność punktową i oznaczmy je $x_1, \ldots, x_{d+1}$.

Niech $y_i = \lim_{n\to\infty} P_n(x_i)$. Oznaczmy ponadto

$$Q_i(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{d+1})}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{d+1})}$$

oraz $Q(x) = y_1Q_1(x) + \ldots + y_{d+1}Q_{d+1}(x)$. Jest to po prostu wielomian interpolacyjny Lagrange'a zgadzający się z funkcją graniczną na punktach $x_1, \ldots, x_{d+1}$.

Ustalmy dowolny przedział I długości skończonej. Niech $M_i = \sup_{x\in I} |Q_i(x)|$.

Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Dla $i = 1, 2, \ldots, d+1$ mamy $\lim_{n\to\infty} P_n(x_i) = y_i = Q(x_i)$, zatem istnieje takie N_i, że dla $n > N_i$ zachodzi $|P_n(x_i) - y_i| < \frac{\varepsilon}{(d+1)M_i}$.

Niech $N = \max(N_1, \ldots, N_{d+1})$. Rozpatrzmy teraz $n > N$. Mamy, że $Q(x) - P_n(x)$ jest wielomianem stopnia conajwyżej d, zatem możemy z wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a zapisać $Q(x) - P_n(x) = (Q(x_1) - P_n(x_1))\, Q_1(x) + \ldots + (Q(x_{d+1}) - P_n(x_{d+1}))\, Q_{d+1}(x)$.

Szacując nierównością trójkąta uzyskujemy: $|Q(x) - P_n(x)| \leqslant |Q(x_1) - P_n(x_1)|\,|Q_1(x)| + \ldots + |Q(x_{d+1}) - P_n(x_{d+1})|\,|Q_{d+1}($
$\frac{\varepsilon}{(d+1)M_1}M_1 + \ldots + \frac{\varepsilon}{(d+1)M_{d+1}}M_{d+1} = (d+1)\frac{\varepsilon}{d+1} = \varepsilon$ i jest to szacowanie niezależne od x, zatem $P_n \overset{I}{\rightrightarrows} Q$.

Stąd w szczególności mamy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $P_n(x) \to Q(x)$, gdyż wokół tego x możemy wziąć jakiś przedział długości skończonej i na nim mamy zbieżność jednostajną.

Zadanie 4

Ustalmy dowolne $x \in \mathbb{R}$. Niech I będzie przedziałem otwartym skończonej długości zawierającym x oraz 0 (np. dla $x \geqslant 0$ bierzemy $(-1, x+1)$, dla $x < 0$ bierzemy $(x-1, 1)$).

Mamy wtedy, że dla każdego n zachodzi $\frac{x}{n} \in I$. Twierdzę, że dla $k \geqslant 2$ mamy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} f^{(k)}\left(\frac{x}{n}\right)$ złożony z wyrazów równych $\left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{(k)}$ jest zbieżny jednostajnie.

Istotnie, $f^{(k)}_{|\overline{I}}$ jest funkcją ciągłą na przedziale domkniętym, więc jest ona ograniczona, i niech $M = \sup_{x\in \overline{I}} \left|f^{(k)}(x)\right|$.

Mamy wtedy, że $\left|\frac{1}{n^k} f^{(k)}\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{n^k}$, zaś szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^k}$ jest zbieżny, zatem na mocy kryterium Weierstraßa mamy jednostajną zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} f^{(k)}\left(\frac{x}{n}\right)$.

Wystarczy jeszcze zauważyć, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)$ jest zbieżny dla $x = 0$, tak samo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'\left(\frac{x}{n}\right)$, gdyż oba te szeregi mają wszystkie wyrazy zerowe.

Zatem uzyskujemy, że na przedziale I funkcja $F(x)$ jest klasy C^∞, na mocy twierdzenia o tym, że jednostajna zbieżność ciągu pochodnych wraz ze zbieżnością ciągu funkcji chociaż w jednym punkcie implikuje zbieżność jednostajną ciągu funkcji, oraz że pochodną jej granicy jest granica pochodnych.

Zadanie 5

Mamy $\frac{d^{2k}}{dx^{2k}} \frac{\cos(n^2x)}{2^n} = \frac{(-1)^k n^{4k} \cos(n^2x)}{2^n}$, zaś $\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}} \frac{\cos(n^2x)}{2^n} = \frac{(-1)^{k+1} n^{4k+2} \sin(n^2x)}{2^n}$, zatem łatwo widzimy, że l-ta pochodna jest ograniczona na moduł przez $\frac{n^{2l}}{2^n}$, a szereg złożony z tych wartości jest zbieżny, zatem łatwo przez kryterium Weierstraßa widzimy, że istotnie $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ (dowód taki jak w wielu zadaniach wcześniej: aby pokazać, że funkcja jest tej klasy w otoczeniu x_0 bierzemy to (skończone) otoczenie i tam można stosować twierdzenie o jednostajnej zbieżności pochodnych).

Przypuśćmy, że $f(x)$ rozwija się w szereg potęgowy o dodatnim promieniu zbieżności R (wokół $x_0 = 0$).

Wtedy na mocy twierdzenia Taylora musi to być szereg Taylora. Zatem możemy zapisać

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2k}}{(2k)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^{4k}}{2^n} \right) \tag{1}$$

gdyż 2k-ta pochodna $f(x)$ w zerze jest równa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^{4k} \overbrace{\cos(n^2 \cdot 0)}^{=1}}{2^n}$, zaś $2k+1$-sza zeruje się w zerze, ponieważ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} n^{4k+2} \overbrace{\sin(n^2 \cdot 0)}^{=0}}{2^n} = 0$.

Jednakże szereg z równości 1 jest bezwzględnie zbieżny dla $|x| < R$. Zatem zbieżny dla $|x| < R$ jest szereg:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{n^{4k}}{2^n} \right)$$

Jest to suma podwójna o wszystkich wyrazach dodatnich, oraz zbieżna, zatem mamy prawo zamienić kolejność sumowania, uzyskując zbieżność dla $|x| < R$ szeregu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{n^{4k}}{2^n} \right)$$

czyli, przegrupowując:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^2x)^{2k}}{(2k)!} \right)$$

Jednak wewnętrzny szereg, jak łatwo widać, jest rozwinięciem w szereg potęgowy funkcji $\cosh(t) = \frac{\exp(t)+\exp(-t)}{2}$ wokół zera, którego wartość następnie obliczono w punkcie n^2x.

Mamy jednak łatwo, że $\cosh(t) > \frac{\exp(t)}{2}$ i stosując kryterium porównawcze zbiezności szeregów mamy łatwo, że zbieżny dla $|x| < R$ jest szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{e^{n^2x}}{2} \right)$$

Rozpatrzmy dowolne $0 < x < R$. Łatwo widać, dla $n > \frac{1}{x}$ mamy $e^{n^2x} > e^n > 2^n$, zatem wyrazy szeregu są równe przynajmniej $\frac{1}{2}$, zatem nie dąży do zera, zatem sprzeczność, gdyż ten szereg miał być zbieżny dla $|x| < R$.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $f(x)$ nie rozwija się w szereg potęgowy o dodatnim promieniu zbieżności.