Zadanie 3

Określmy automat $\mathcal{A}$ nad alfebetem $A' := A \sqcup \{^\wedge\}$, jako sumę rozłączną automatów $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ z doklejonym stanem q_0, z którego jedynymi krawędziami są krawędzie do stanów początkowych automatu $\mathcal{A}_1$ z wagą 1 i do stanów początkowych automatu $\mathcal{A}_2$ z wagą -1 – wszystkie te nowe krawędzie wczytują literę $^\wedge$. Jedynym stanem początkowym automatu $\mathcal{A}$, zaś stanami akceptującymi – stany akceptujące automatów $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$.

Oczywiście waga słowa $^\wedge a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ w automacie $\mathcal{A}$ jest równa różnicy wag słowa $a_1 a_2 \ldots, a_n$ w automatach $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$. Zatem problem z zadania jest równoważny pytaniu: czy każde słowo zaczynające się od $^\wedge$ ma w automacie $\mathcal{A}$ wagę zero.

Niech stany automatu $\mathcal{A}$ to będą $q_0, q_1, \ldots, q_n$, gdzie q_0 jest początkowy. Przypiszmy każdej literze $a \in A'$ macierz M_a wymiaru $(n+1) \times (n+1)$, taką, że $(M_a)_{i,j} = g(q_i, a, q_j)$. Dla $w = a_1 a_2 \ldots a_m$ określmy $M_w = M_{a_1} M_{a_2} \ldots M_{a_m}$. Łatwo widać przez indukcję po długości słowa, że $(M_w)_{i,j}$ jest sumą wag biegów automatu $\mathcal{A}$ po słowie w zaczynających się w stanie q_i i kończących w stanie q_j.

Istotnie, dla $m = 1$ jest to prawda z definicji, zaś $(M_{wa})_{i,j} = \sum_k (M_w)_{i,k} (M_a)_{k,j}$ jest dokładnie taką samą równością jaka zachodzi dla sumy wag biegów – po przeczytaniu w automat znajduje się w jakimś stanie q_k i doszedł tam w jakiś sposób ze stanu q_i, po czym przejdzie jedną literą do stanu q_j. Możliwy bieg z q_i do q_j bierze się z konkatenacji biegów z q_i do q_k i q_k do q_j, a rozdzielność mnożenia względem dodawania daje nam, że suma wag biegów zachowa się w sposób wyrażony powyższym równaniem.

Niech $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \end{pmatrix}$, zaś Q będzie wektorem pionowym o $n+1$ wyrazach, z których i-ty (licząc od zera) to jeden, gdy q_i jest stanem akceptującym, zaś zero w przeciwnym przypadku.

Wtedy łatwo widać, że PM_wQ jest macierzą 1×1, a jej jedyny wyraz to dokładnie $f_{\mathcal{A}}(w)$ – mnożenie macierzy znów zachowuje się tak samo jak własności automatów, tj. mnożenie przez P z lewej strony wymusza zaczynanie w stanie q_0, zaś mnożenie przez Q z prawej oznacza wysumowanie wag po wszystkich biegach kończących się w stanach akceptujących.

Niech teraz $V_k = \mathrm{lin}_{\mathbb{Q}}\{PM_\wedge M_w : |w| \leqslant k\}$. Oczywiście V_k jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{Q}$ i jest to podprzestrzeń przestrzeni $(n+1)$-wymiarowej. Ponadto oczywiście $V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \ldots \subseteq V_n \subseteq V_{n+1} \subseteq V_{n+2} \hookrightarrow \mathbb{Q}^{n+1}$. Zatem: $0 \leqslant \dim V_0 \leqslant \dim V_1 \leqslant \dim V_2 \leqslant \ldots \leqslant \dim V_n \leqslant \dim V_{n+1} \leqslant \dim V_{n+2} \leqslant n+1$.

To oznacza, że $\dim V_k = \dim V_{k+1}$ dla pewnego $k \leqslant n+2$. To zaś oznacza, że $V_{k+1} = V_k$. Oczywiście mamy $V_{i+1} = \mathrm{lin}_{\mathbb{Q}}\{M, MM_a : M \in V_i, a \in A'\}$, zatem łatwo widzimy, że jeśli dorzucenie do V_k przemnożenia V_k przez macierze odpowiadające literom nie dodało nic, tj. $\mathrm{lin}_{\mathbb{Q}}\{MM_a : M \in V_i, a \in A'\} \subseteq V_i$, to już nigdy nic nie zostanie dodane, tj. $\forall_{i \geqslant k} V_i = V_k$.

Przypuśćmy teraz, że dla każdego $i \leqslant n+2$ mamy $\forall_{M \in V_i} MQ = 0$. Wtedy oczywiście mamy na mocy powyższego, że $\forall_i \forall_{M \in V_i} MQ = 0$. To zaś w szczególności daje, że dla każdego słowa w mamy $PM_{\wedge w}Q = 0$, czyli $f_{\mathcal{A}}(^\wedge w) = 0$.

Jeśli jednak dla jakiegoś $i \leqslant n+2$ istnieje takie $M \in V_i$, że $MQ \neq 0$, to oczywiście musi to być spełnione także przez któryś z generatorów przestrzeni liniowej (gdyż funkcja $(\cdot Q) : \mathbb{Q}_1^{n+1} \to \mathbb{Q}$ jest przekształceniem liniowym, więc jej jądro jest przestrzenią liniową, a zatem jeśli generatory przestrzeni liniowej należą do jądra, to i cała przestrzeń), a zatem istnieje takie słowo w, że $PM_\wedge M_w Q \neq 0$, czyli $f_{\mathcal{A}}(^\wedge w) \neq 0$.

Z powyższych rozważań wynika, że wystarczy sprawdzić zachowanie automatu na słowach długości conajwyżej $n+2$ – jeśli na jakimś słowie waga jest niezerowa, to istnieje też krótkie słowo, na którym waga jest niezerowa. Sprawdzenia tego możemy albo dokonać brutalnie – jest skonczenie wiele krótkich słów i dla każdego z nich jest skończenie wiele biegów, albo też możemy policzyć przestrzenie V_k – zawsze jednak wykonamy skończenie wiele operacji, zatem maszyna Turinga jest w stanie rozstrzygnąć ten problem.