Zadanie 62

a $\implies$ c

Załóżmy, że $\operatorname{Spec} R$ jest niespójne, a zatem $\operatorname{Spec} R = A \cup B$ dla A, B – rozłącznych domkniętych. Z definicji topologii Zariskiego mamy $A = V(I)$, $B = V(J)$ dla pewnych ideałóœ $I, J \subseteq R$. Mamy $V(IJ) = V(I) \cup V(J) = \operatorname{Spec} R$, a zatem IJ jest podzbiorem każdego ideału pierwszego, a zatem $IJ \subseteq \sqrt{0}$. Ponadto $V(I+J) = V(I) \cap V(J) = \varnothing$, a zatem $I + J$ zawiera jakiś element odwracalny, a zatem $I + J = R$. Stąd istnieją $\alpha \in A, \beta \in B$ takie, że $\alpha + \beta = 1$.

Mamy $\alpha\beta \in \sqrt{0}$ a zatem istnieje n takie, że $(\alpha\beta)^n = 0$. Teraz zauważmy, że $(\alpha+\beta)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \alpha^k \beta^{2n-k}$. Wyraz $\binom{2n}{n} \alpha^n \beta^n$ jest zerowy, a zatem

$$1 = (\alpha + \beta)^{2n} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \alpha^k \beta^{2n-k}}_{:=a} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} \alpha^k \beta^{2n-k}}_{:=b}$$

Mamy teraz $a + b = 1$, zaś w iloczynie ab każdy składnik będzie podzielny przez $\alpha^n \beta^n$ (bo w a są podzielne przez β^n, zaś w b przez α^n). Zatem $ab = 0$.

Jendkaże zauważmy, że $a \in A$, $b \in B$, a zatem $a, b \neq 1$, zatem w myśl $a = 1 - b$ mamy, że $a(1 - a) = 0$, $a \notin \{0, 1\}$.

c $\implies$ b

Było na ćwiczeniach.

b $\implies$ a

Niech $I = ((1, 0)), J = ((0, 1))$. Wtedy mamy, że $I + J = ((0, 1), (1, 0)) \ni (1, 1) = 1$, zatem $I + J = R$, czyli $V(I) \cap V(J) = V(I + J) = \varnothing$. Ponadto $IJ = 0$, więc $V(I) \cup V(J) = V(IJ) = \operatorname{Spec} R$, zatem $\operatorname{Spec} R = V(I) \cup V(J)$ jest rozkładem na sumę rozłącznych zbiorów domkniętych, co dowodzi, że $\operatorname{Spec} R$ jest niespójny.

Zadanie 65

Część a

Przypuśćmy, że $I_x \subseteq J$ dla pewnego ideału J.W tedy istnieje $f \in J \setminus I_x$, a zatem $f(x) \neq 0$. Rozpatrzmy funkcję ciągłą $X \ni y \mapsto \frac{f(y)}{f(x)} \in \mathbb{R}$. Należy ona do J, zaś różnica jej i funkcji stale równej 1 zeruje się w x, a zatem należy do I_x, czyli tym bardziej do J, a zatem ich suma, czyli funkcja stale równa 1 należy do J, skąd $J = (1)$.

Ponadto $I_x \neq (1)$, gdyż $(y \mapsto 1) \notin I_x$.

Część b

Surjektywność

Rozpatrzmy dowolny ideał I. Chcemy pokazać, że $I \subseteq I_x$ dla pewnego x (w szczególności stosując to dla I będącego ideałem maksymalnym pokażemy, że $I = I_x$ dla pewnego x). Jeśli nie zawiera on się w żadnym I_x, to znaczy, że dla każdego $x \in X$ istnieje funkcja $f_x \in I$, taka, że $f_x(x) \neq 0$. Z ciągłości istnieje U_x – otwarte otoczenie x takie, że $\forall_{u \in U_x} f_x(u) \neq 0$. Zbiór $\{U_x : x \in X\}$ jest pokryciem przestrzeni X, wybierzmy na mocy zwartosci podpokrycie skończone: $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Teraz widzimy, że $f = y \mapsto f_{x_1}(y)^2 + f_{x_2}(y)^2 + \ldots + f_{x_n}(y)^2$ jest funkcją należącą do I (jako skończona suma elemenów I przemnożonych przez jakieś funkcje ciągłę). Ponadto widzimy, że dla każdego y mamy $f(y) > 0$. Określmy $h(y) = f(y)^{-1}$. Wtedy funkcja $y \mapsto f(y)h(y) = 1$ należy do I, a zatem $I = (1)$.

A zatem $I \subseteq I_x$, w szczególności każdy ideał maksymalny jest postaci $\Phi(x)$.

Injektywność

Przypuśćmy, że $I_x = I_y$ dla pewnych $x, y \in X$, $x \neq y$. Jednakże wiemy, że przestrzeń zwarta Hausdorffa jest normalna, a zatem istnieje funkcja f ciągła taka, że $f(x) = 0$, $f(y) = 1$. Mamy wtedy $f \in I_x = I_y \not\ni f$ – sprzeczność.

Ciągłość

Wystarczy pokazać, że przeciwobraz zbioru bazowego jest otwarty, czyli, że przeciwobraz zbioru $V(f)$ jest domknięty dla każdego $f \in C(X)$. Zauważmy jednak, że $\Phi(x) = I_x \in V(f) \iff (f) \subseteq I_x \iff f(x) = 0$. Widzimy teraz, że $\Phi^{-1}(V(f)) = \{x \in X : f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ jest domknięty.

Domkniętość

Niech $F \subseteq X$ będzie zbiorem domkniętym. Dla $U \supseteq F$ – otwartego określmy funkcję $f_U : X \to \mathbb{R}$ taką, że $f_U(X \setminus U) \subseteq \{1\}$, $f_U(F) \subseteq \{0\}$ (na mocy lematu Urysohna, gdyż przestrzeń zwarta Hausdorffa jest normalna). Niech $I = (f_U)_{U \supseteq F}$. Twierdzę, że $V(I) = \Phi(F)$.

Istotnie, jeśli $J \in \Phi(F)$, czyli $J = I_x$ dla pewnego $x \in F$, to mamy, że dla każdego $U \supseteq F$ mamy $f_U(x) = 0$, zatem $(f_U) \subseteq I_x$, zatem i $(f_U)_{U \supseteq F} \subseteq I_x$.

W drugą stronę, jeśli $J \notin \Phi(F)$, to $J = I_x$ dla pewnego $x \notin F$. Wtedy na mocy normalności istnieje takie $U \supseteq F$ otwarte, że $x \notin U$. Wtedy mamy, że $f_U(x) = 1$, a zatem $(f_U) \not\subseteq I_x$, czyli tym bardziej $(f_U)_{U \supseteq F} \not\subseteq I_x$.

Zatem $\Phi(F) = V(I)$, co jest zbiorem domkniętym.