Zadanie D1

Oznaczmy $A_n = \sum_{k=n(n-1)/2+1}^{n(n+1)/2} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n-1)/2+k}$.

Zauważmy, że $A_n - A_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)/2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n(n-1)/2+k} - \frac{1}{n(n+1)/2+k} \right) = -\frac{1}{(n+1)(n+2)/2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n+1)/2+k-n(n-1)}{(n(n-1)/2+k)(n(n+1)}$

Stąd jednak $|A_n - A_{n+1}| \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)/2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n+2k}{(n(n-1)/2+k)(n(n+1)/2+k)} \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)/2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n+2n}{(n(n-1)/2)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)/2} + \frac{3n^2}{(n(n-1)/2)^2}$.

Jednak jak łatwo widać, oba te wyrazy są funkcjami wymiernymi stopnia -2, zatem asymptotyczne kryterium porównawcze da nam, że ponieważ szereg $\sum_n \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, to szereg $\sum_n |A_{2n-1} - A_{2n}|$ jest zbieżny, zatem zbieżny jest szereg $\sum_n (A_{2n-1} - A_{2n})$.

Zauważmy ponadto, że $0 \leqslant A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n-1)/2+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n-1)/2} = \frac{1}{(n-1)/2}$, co na mocy tw. o trzech ciągach daje, że A_n zbiega do zera.

Teraz udowodnimy, że istotnie szereg $S := 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ z treści zadania jest zbieżny.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Na mocy zbieżności szeregu $\sum_n (A_{2n-1} - A_{2n})$ istnieje takie N_1, że dla n, m spełniających $N_1 < n < m$ mamy $|A_{2n-1} - A_{2n} + A_{2n+1} - A_{2n+2} + \ldots + A_{2m-1} - A_{2m}| < \frac{\varepsilon}{5}$. Ponadto na mocy zbieżności ciągu A_n do zera istnieje takie N_2, że dla $n > N_2$ mamy $|A_n| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Niech $N = \max(N_1, N_2(N_2 - 1) + 1)$. Rozpatrzmy dowolne n, m spełniające $N < n < m$. Niech s będzie takie, że $s(s-1)/2 < n \leqslant s(s+1)/2$ zaś t takie, że $t(t-1)/2 < n \leqslant t(t+1)/2$. Jeśli $s = t$, to zauważmy, że suma wyrazów szeregu S na pozycjach $n, n+1, \ldots, m$ nie przekracza na moduł liczby A_s, co wynika wprost z definicji A_s. Zatem suma ta jest mniejsza niż $\frac{\varepsilon}{5}$.

W przeciwnym wypadku widzimy, że suma wyrazów szeregu S na pozycjach $n, n+1, \ldots, s(s+1)/2$ także nie przekracza na moduł $\frac{\varepsilon}{5}$, analogicznie z wyrazami na pozycjach $t(t-1)/2 + 1, \ldots, m$. Wystarczy więc pokazać, że wartość bezwzględna sumy wyrazów szeregu S na pozycjach $s(s+1)/2 + 1, \ldots, t(t-1)/2$ nie przekracza na moduł $\frac{3\varepsilon}{5}$. Jeśli $s+1 = t$ to wynika to z tego, że suma ta jest na moduł równa A_s. W przeciwnym wypadku, jeśli s jest nieparzyste, rozbijamy ten moduł sumy wyrazów nierównością trójkąta na sumę wyrazów na pozycjach $s(s+1)/2 + 1, \ldots, (s+1)(s+2)/2$ oraz $(s+1)(s+2)/2 + 1, \ldots, t(t-1)/2$, z czego ta pierwsza jest na moduł równa $A_{s+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$. Wystarczy więc pokazać, że dla s parzystego, suma wyrazów $s(s+1)/2 + 1, \ldots, t(t-1)/2$ nie przekracza $\frac{2\varepsilon}{5}$. Podobnie teraz jeśli $s+1 = t$, postępujemy jak powyżej, jeśli zaś nie, a t jest parzyste, redukujemy t o jeden znów rozbijając nierównością trójkąta na sumę wyrazów na pozycjach $s(s+1)/2+1, \ldots, (t-1)(t-2)/2$ oraz $(t-1)(t-2)/2 + 1, \ldots, t(t-1)/2$ widzimy, że ta druga jest na moduł równa $A_t < \frac{\varepsilon}{5}$. Wystarczy więc pokazać, że dla s parzystego, zaś t nieparzystego, moduł sumy wyrazów na pozycjach $s(s+1)/2+1, \ldots, t(t-1)/2$ jest mniejszy niż $\frac{\varepsilon}{5}$. Jednak suma ta to dokładnie $A_{s+1} - A_{s+2} + A_{s+3} - \ldots + A_{t-2} - A_{t-1}$, co na mocy założenia wynikającego z warunku Cauchy'ego dla szeregu $\sum_r (A_{2r-1} - A_{2r})$ istotnie jest mniejsze na moduł niż $\frac{\varepsilon}{5}$.

Zatem szereg S spełnia warunek Cauchy'ego, zatem jest zbieżny.

Zadanie D2

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
&S - S_{2k-1} = a_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} - a_{2k+3} + \ldots = \\
&= \frac{a_{2k}}{2} + \frac{a_{2k}}{2} - \frac{a_{2k+1}}{2} - \frac{a_{2k+1}}{2} + \frac{a_{2k+2}}{2} + \frac{a_{2k+2}}{2} - \frac{a_{2k+3}}{2} - \frac{a_{2k+3}}{2} + \frac{a_{2k+4}}{2} + \ldots = \\
&= \frac{a_{2k}}{2} + \underbrace{\left(\frac{a_{2k}}{2} - \frac{a_{2k+1}}{2}\right) - \left(\frac{a_{2k+1}}{2} - \frac{a_{2k+2}}{2}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{a_{2k+2}}{2} - \frac{a_{2k+3}}{2}\right) - \left(\frac{a_{2k+3}}{2} - \frac{a_{2k+4}}{2}\right)}_{>0} + \ldots > \\
&> \frac{a_{2k}}{2}
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy to, że $a_n \to 0$, możliwość nawiasowania szeregu zbieżnego oraz fakt, że $\frac{a_{2k}}{2} - \frac{a_{2k+1}}{2} > \frac{a_{2k+1}}{2} - \frac{a_{2k+2}}{2}$.

Analogicznie:

$$S - S_{2k} = -a_{2k+1} + a_{2k+2} - a_{2k+3} + \ldots =$$
$$= \frac{-a_{2k+1}}{2} - \frac{a_{2k+1}}{2} + \frac{a_{2k+2}}{2} + \frac{a_{2k+2}}{2} - \frac{a_{2k+3}}{2} - \frac{a_{2k+3}}{2} + \frac{a_{2k+4}}{2} + \ldots =$$
$$= -\frac{a_{2k+1}}{2} \underbrace{-\left(\frac{a_{2k+1}}{2} - \frac{a_{2k+2}}{2}\right) + \left(\frac{a_{2k+2}}{2} - \frac{a_{2k+3}}{2}\right)}_{<0} \underbrace{-\left(\frac{a_{2k+3}}{2} - \frac{a_{2k+4}}{2}\right) + \left(\frac{a_{2k+4}}{2} - \frac{a_{2k+5}}{2}\right)}_{<0} + \ldots <$$
$$< -\frac{a_{2k+1}}{2}$$

Na mocy tych samych faktów. □

Zadanie D3

Powiemy, że funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną równą g jeśli $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ istnieje i jest równa g. Zapisujemy wtedy $f'(x_0) = g$.

Jak pokazaliśmy na wykładzie, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Lemat 1 (Rolle). *Jeśli funkcja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest ciągła w* $[a, b]$ *oraz różniczkowalna w* (a, b)*, a ponadto* $f(a) = f(b)$*, to istnieje* $c \in (a, b)$ *takie, że* $f'(c) = 0$.

Dowód. Na mocy udowodnionego na wykładzie tw. Weierstraßa o osiąganiu kresów, istnieją $x_0, y_0 \in [a, b]$ takie, że $f(x_0) = \inf f$, $f(y_0) = \sup f$.

Jeśli $\{x_0, y_0\} \subseteq \{a, b\}$, czyli oba kresy są osiągane na krańcach przedziału, to łatwo widzimy, że f jest funkcją stałą, i jak łatwo widać z definicji pochodnej, jest ona wszędzie na (a, b) równa zeru.

Zatem rozważmy przypadek, gdy choć jeden z kresów jest osiągany we wnętrzu dziedziny f. Bez straty ogólności, załóżmy, że jest to infimum.

Wtedy jednak $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$, bo $f(x) \geqslant f(x_0)$, zaś $x - x_0 < 0$.

Z drugiej strony $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$, bo $f(x) \geqslant f(x_0)$, zaś $x - x_0 > 0$.

Zatem $f'(x_0) = 0$. □

Lemat 2 (Lagrange). *Jeśli* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest ciągła w* $[a, b]$ *oraz różniczkowalna w* (a, b)*, to istnieje* $c \in (a, b)$ *takie, że* $f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.

Dowód. Niech $g(x) = f(x) - \frac{f(a)-f(b)}{a-b}x$. Wtedy $g(a) - g(b) = f(a) - f(b) - \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(a-b) = 0$, zaś dla $x_0 \in (a, b)$ mamy $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-\frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right) = f'(x_0) - \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$..

Zatem jest to funkcja różniczkowalna i ciągła (ciągłość wynika z faktów z wykładu), zatem spełnione są założenia tw. Rolle'a (lematu 1). Istnieje więc takie $c \in (a, b)$, że $g'(c) = 0$, czyli na mocy powyższego $f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$. □

Lemat 3. *Jeśli* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą w* $[a, b]$ *i różniczkowalną w* (a, b)*, oraz jej pochodna na* (a, b) *jest zawsze dodatnia (ujemna), to funkcja ta jest rosnąca (malejąca).*

Dowód. Rozpatrzmy dowolne $x, y \in [a, b]$ takie, że $x < y$. Wiemy na mocy lematu 2 zastosowanego dla przedziału $[x, y]$, że istnieje $c \in (x, y)$ takie, że $f'(c) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, jednak $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$), $x - y < 0$, zatem i $f(x) < f(y)$ ($f(x) > f(y)$). □

Zapiszmy tezę równoważnie: dla $x > 1$ zachodzi:

$$\frac{x-1}{1+(x-1)/2} < \ln x < \frac{(x-1)(1+(x-1)/2)}{x}$$

Dowód. Popatrzmy na pierwszą nierówność. Niech $f(x) = \ln x - \frac{x-1}{1+(x-1)/2}$.

Mamy dla $x_0 > 1$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\ln x - \frac{x-1}{1+(x-1)/2} - \ln x_0 - \frac{x_0-1}{1+(x_0-1)/2}}{x-x_0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\ln x - \ln x_0}{x-x_0} - \frac{\frac{x-1}{1+(x-1)/2} - \frac{x_0-1}{1+(x_0-1)/2}}{x-x_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_0} - \lim_{x\to x_0}\left(\frac{(x-1)(1+(x_0-1)/2)-(x_0-1)(1+(x-1)/2)}{(1+(x-1)/2)(1+(x_0-1)/2)(x-x_0)}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_0} - \lim_{x\to x_0}\left(\frac{x-x_0+(xx_0-x)/2-1-(x_0-1)/2-x_0-(x_0x-x)/2+1+(x-1)/2}{(1+(x-1)/2)(1+(x_0-1)/2)(x-x_0)}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_0} - \lim_{x\to x_0}\left(\frac{x-x_0}{(1+(x-1)/2)(1+(x_0-1)/2)(x-x_0)}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_0} - \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{(1+(x-1)/2)(1+(x_0-1)/2)}\right) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{(1+(x_0-1)/2)^2} =$$

$$= \frac{(1+(x_0-1)/2)^2 - x_0}{x_0(1+(x_0-1)/2)^2} = \frac{(x_0/2+1/2)^2-x_0}{x_0(x_0/2+1/2)^2} = \frac{(x_0/2-1/2)^2}{x_0(x_0/2+1/2)^2} > 0$$

Zatem na dowolnym przedziale $[1, a]$ ta funkcja jest rosnąca, zatem jest rosnąca na $[1, +\infty)$. Jednak zauważmy, że dla $x = 1$ mamy $f(x) = 0$, zatem dla $x > 1$ zachodzi $f(x) > 0$.

Popatrzmy na drugą nierówność. Zapiszmy $g(x) = \ln x - \frac{(x-1)(1+(x-1)/2)}{x}$.

Mamy dla $x_0 > 1$:

$$g'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\ln x - \frac{(x-1)(1+(x-1)/2)}{x} - \ln x_0 + \frac{(x_0-1)(1+(x_0-1)/2)}{x_0}}{x-x_0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\ln x - \ln x_0}{x-x_0}\right) - \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\frac{(x-1)(1+(x-1)/2)}{x} - \frac{(x_0-1)(1+(x_0-1)/2)}{x_0}}{x-x_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_0} - \lim_{x\to x_0}\left(\frac{x_0(x-1)(1+(x-1)/2)-x(x_0-1)(1+(x_0-1)/2)}{xx_0(x-x_0)}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_0} - \lim_{x\to x_0}\left(\frac{x_0(x^2-1)/2 - x(x_0^2-1)/2}{xx_0(x-x_0)}\right) = \frac{1}{x_0} - \lim_{x\to x_0}\left(\frac{(x-x_0)(xx_0+1)/2}{xx_0(x-x_0)}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_0} - \lim_{x\to x_0}\left(\frac{(xx_0+1)/2}{xx_0}\right) = \frac{1}{x_0} - \frac{x_0^2+1}{2x_0^2} = \frac{2x_0 - x_0^2 - 1}{2x_0^2} = \frac{-(x_0-1)^2}{2x_0^2} < 0$$

Zatem na dowolnym przedziale $[1, a]$ ta funkcja jest malejąca, zatem jest malejąca na $[1, +\infty)$. Jednak zauważmy, że dla $x = 1$ mamy $g(x) = 0$, zatem dla $x > 1$ zachodzi $g(x) > 0$.

Zatem teza. □

Zadanie D5

Zauważmy, że nie może być $m_1 = 1$, gdyż wtedy szereg ten ma sumę ściśle większą niż jeden.

Ponadto zauważmy, że wszystkie dopuszczalne szeregi dla $m_1 > 1$ są zbieżne. Istotnie, każdy kolejny wyraz jest przynajmniej dwa razy mniejszy od poprzedniego, zatem na mocy kryteriów z wykładu szereg jest zbieżny.

Zauważmy, że ponieważ $\frac{1}{m_1 m_2 \dots m_n} < \frac{1}{m_1^n}$, to

$$\frac{1}{m_1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_1 m_2 \cdots m_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^n} = \frac{\frac{1}{m_1}}{1-\frac{1}{m_1}} = \frac{1}{m_1 - 1}$$

W związku z tym, gdyby pewne x miało dwie różne reprezentacje $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_1 \cdots m_n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_1' \cdots m_n'}$, to musiałyby się one zaczynać tym samym $m_1 = m_1'$. Zauważmy wtedy jednak, że $m_1 x - 1 = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m_2 m_3 \cdots m_n} =$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m_2' m_3' \cdots m_n'}$, zatem musiałoby na mocy tego samego argumentu być $m_2 = m_2'$. Indukcyjnie, kontynuując to rozumowanie otrzymujemy, że dla każdego k mamy $m_k = m_k'$.

Aby udowodnić istnienie reprezentacji, dokonajmy następującej indukcyjnej konstrukcji: ustalamy $x_1 = x$ i następnie dla $n = 2, 3, \ldots$ ustalamy m_n takie, żeby $x_n \in \left(\frac{1}{m_n}, \frac{1}{m_n - 1}\right]$, a następnie $x_{n+1} = m_n x_n - 1$.

Zauważmy, że taka konstrukcja sprawia, że ponieważ $x_n \leqslant \frac{1}{m_n - 1}$, to $x_{n+1} \leqslant \frac{m_n}{m_n - 1} - 1 = \frac{1}{m_n - 1}$, zatem $m_{n+1} \geqslant m_n$ z definicji. W szczególności jeśli $x_n \leqslant 1$, to $x_{n+1} \leqslant 1$. Ponadto mamy, że $x_n > 0$, gdyż $x_n = m_{n-1} x_{n-1} - 1 > m_{n-1} \frac{1}{m_{n-1}} - 1 = 0$.

Ustalmy teraz N, że dla $1 \leqslant k \leqslant N$ mamy

$$\frac{1}{m_k} + \frac{1}{m_k m_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{m_k m_{k+1} \ldots m_{N-1} m_N} < x_k \leqslant \frac{1}{m_k} + \frac{1}{m_k m_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{m_k m_{k+1} \ldots m_{N-1} (m_N - 1)}$$

Istotnie, dla $k = N$ wynika to z konstrukcji, gdyż $\frac{1}{m_N} < x_M \leqslant \frac{1}{m_N - 1}$. Załóżmy więc, że jest to prawda dla jakiegoś $k = K > 2$ i udowodnimy, że jest to prawda dla $k = K - 1$. Istotnie mamy, że

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_K} + \frac{1}{m_K m_{K+1}} + \ldots + \frac{1}{m_K m_{K+1} \cdots m_{N-1} m_N} < x_K \\ \leqslant \frac{1}{m_K} + \frac{1}{m_K m_{K+1}} + \ldots + \frac{1}{m_K m_{K+1} \cdots m_{N-1} (m_N - 1)} \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_K} + \frac{1}{m_K m_{K+1}} + \ldots + \frac{1}{m_K m_{K+1} \cdots m_{N-1} m_N} < m_{K-1} x_{K-1} - 1 \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{m_K} + \frac{1}{m_K m_{K+1}} + \ldots + \frac{1}{m_K m_{K+1} \cdots m_{N-1} (m_N - 1)} \end{aligned}$$

Skąd

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{m_K} + \frac{1}{m_K m_{K+1}} + \ldots + \frac{1}{m_K m_{K+1} \cdots m_{N-1} m_N} < m_{K-1} x_{K-1} \leqslant \\ \leqslant 1 + \frac{1}{m_K} + \frac{1}{m_K m_{K+1}} + \ldots + \frac{1}{m_K m_{K+1} \cdots m_{N-1} (m_N - 1)} \end{aligned}$$

Co daje

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_{K-1}} + \frac{1}{m_{K-1} m_K} + \ldots + \frac{1}{m_{K-1} m_K \ldots m_{N-1} m_N} < x_{K-1} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{m_{K-1}} + \frac{1}{m_{K-1} m_K} + \ldots + \frac{1}{m_{K-1} m_K \cdots m_{N-1} (m_N - 1)} \end{aligned}$$

Co kończy dowód kroku indukcyjnego. W szczególności dla $k = 1$ uzyskujemy

$$\frac{1}{m_1} + \ldots + \frac{1}{m_1 m_2 \cdots m_N} < x \leqslant \frac{1}{m_1} + \ldots + \frac{1}{m_1 m_2 \cdots m_{N-1} (m_N - 1)} \tag{1}$$

Jednak różnica skrajnych stron to $\frac{1}{m_1 m_2 \cdots m_{N-1}} \left(\frac{1}{m_N - 1} - \frac{1}{m_N}\right) = \frac{1}{m_1 m_2 \cdots m_{N-1} m_N (m_N - 1)} \leqslant \frac{1}{2^N}$ (gdyż $m_i \geqslant 2$), co przy N dążącym do nieskończoności dąży do 0.

Jak już powiedzieliśmy, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_1 m_2 \cdots m_n}$ istnieje, zatem lewa strona w nierówności 1 ma granicę przy $N \to \infty$, zatem prawa też ma granicę i jest ona równa granicy lewej strony, skąd na mocy twierdzenia o trzech ciągach, ciąg stale równy x też ma taką granicę, ale granica tego ciągu to x.

Zatem $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_1 m_2 \cdots m_n}$.