Dowody wstępne

Lemat 1 (Wzór Shermana-Morrisona dla wyznacznika)**.** *Jeśli* $\mathbf{A}$ *jest macierzą odwracalną o* n *wierszach i* n *kolumnach, zaś* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *będą wektorami (pionowymi) o* n *wyrazach. Wtedy* $\det(\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}) = \left(1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\right) \det \mathbf{A}$.

Dowód. Zapiszmy:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^\mathsf{T} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}+\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}^\mathsf{T} & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}+\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^\mathsf{T}(\mathbf{I}+\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}) & \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{u}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}^\mathsf{T} & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{I}+\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}-\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^\mathsf{T}(\mathbf{I}+\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}) - (1+\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{u})\mathbf{v}^\mathsf{T} & 1+\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{u} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{I}+\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}-\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^\mathsf{T}+\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}) - \mathbf{v}^\mathsf{T} - \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{u})\mathbf{v}^\mathsf{T} & 1+\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{u} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & 1+\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{u} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Jednak $\det \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^\mathsf{T} & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}^\mathsf{T} & 1 \end{pmatrix} = 1$, gdyż są to macierze diagonalne z jedynkami na przekątnej, zaś $\det \begin{pmatrix} \mathbf{I}+\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \det(\mathbf{I}+\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T})$, na mocy rozwinięcia Laplace'a względem ostatniego wiersza, oraz $\det \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & 1+\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{u} \end{pmatrix} = 1 + \mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{u}$, gdyż jest to macierz diagonalna.

Stąd mamy, że dla każdych wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, $\det(I + \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}) = 1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{u}$.

Przechodząc do przypadku ogólnego, widzimy, że

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}) &= \det(\mathbf{A}(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T})) = \\
&= \det \mathbf{A} \det(\mathbf{I} + (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u})\mathbf{v}^\mathsf{T}) = (1+\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}) \det \mathbf{A}
\end{aligned}$$

□

Zadanie 1

Dowód. Pokażę, że wiersze tej macierzy są liniowo niezależne. Oznaczmy wiersze: $\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_n}$, tj. $\mathbf{w_i} = \left[(\lambda_1 + i - 1)^{-1}, (\lambda_2 + i\right.$

Załóżmy, że dla pewnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$ zachodzi $a_1\mathbf{w_1} + \ldots + a_n\mathbf{w_n} = 0$. Patrząc na k-ty wyraz obu stron widzimy, że $\frac{a_1}{\lambda_k} + \frac{a_2}{\lambda_k+1} + \ldots + \frac{a_n}{\lambda_k+n-1} = 0$. Mnożąc przez liczbę $\lambda_k(\lambda_k+1)\ldots(\lambda_k+n-1)$ różną od zera, widzimy, że $a_1P_1(\lambda_k) + a_2P_2(\lambda_k) + \ldots + a_nP_n(\lambda_k) = 0$, gdzie $P_r(x) = x(x+1)(x+2)\ldots(x+r-1)(x+r+1)\ldots(x+n-1)(x+n)$.

Każde P_r jest wielomianem stopnia $n-1$, zatem $P := a_1P_1 + \ldots + a_nP_n$ także jest wielomianem stopnia $n-1$, jednak $P(\lambda_k) = 0$ dla każdego k, zatem wielomian ten zeruje się w n punktach, zatem jest stale równy zeru.

Zauważmy, że jako wielomian jest on określony także w liczbach $0, -1, \ldots, -n+1$, zatem wstawmy liczbę $k \in \{0, -1, \ldots, -n+1\}$ do tego wielomianu.

Wtedy uzyskujemy jednak, że $P_k(k) \neq 0$, zaś $P_l(k) = 0$ dla $l \neq k$. Stąd mamy, że $P(k) = a_1P_1(k) + \ldots + a_nP(k) = a_kP_k(k)$, lecz $P(k) = 0$, $P_k(k) \neq 0$, zatem $a_k = 0$.

Analogiczne rozumowanie prowadzi do wniosku, że wszystkie liczby a_k są niezerowe, zatem wiersze rozważanej macierzy są liniowo niezależne, zatem (jak było na wykładzie) wyznacznik jest niezerowy. □

Zadanie 2

Dowód. Zauważmy, że gdy przemnożymy tę macierz przez wektor $\left[10^5, 10^4, \ldots, 10, 1\right]^\mathsf{T}$, to w wyniku uzyskamy właśnie wektor złożony z liczb powstałych poprzez przeczytanie wierszy macierzy jako zapisu dziesiętnego.

Stąd, operując w liczbach modulo 17 (a tworzą one ciało), widzimy, że wektor ten (po zredukowaniu modulo 17) należy do jądra macierzy. Stąd macierz ta nad ciałem 17-elementowym ma wyznacznik równy zeru, gdyż nie ma pełnego rzędu.

Jednak wyznacznik liczony definicją permutacyjną wykorzystuje jedynie operacje pierścienia, a więc (jak wspomnieliśmy na ćwiczeniach): jeśli wyznacznik macierzy o wyrazach całkowitych brany w ciele o 17 elementach jest zerowy, to brany jako wyznacznik nad ciałem liczb rzeczywistych będzie podzielny przez 17. □

Zadanie 4

Kiedyś na ćwiczeniach schodkowaliśmy macierz Vandermonde'a:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Na podstawie tego schodkowania łatwo można wyciągnąć wniosek, że wyznacznikiem tej macierzy jest $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)$.

Oznaczmy:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \binom{n-1}{n-1}b_1^{n-1} & \binom{n-1}{n-2}b_1^{n-2} & \dots & \binom{n-1}{0}b_1^{0} \\ \binom{n-1}{n-1}b_2^{n-1} & \binom{n-1}{n-2}b_2^{n-2} & \dots & \binom{n-1}{0}b_2^{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{n-1}b_n^{n-1} & \binom{n-1}{n-2}b_n^{n-2} & \dots & \binom{n-1}{0}b_n^{0} \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że $\det \mathbf{A} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)$, zaś $\det \mathbf{B} = \prod_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_j - b_i)$.

Istotnie, $\mathbf{A}$ jest macierzą Vandermonde'a, zaś $\mathbf{B}$ powstaje z macierzy Vandermonde'a poprzez: zamianę kolumny i-tej z $(n-i+1)$-szą dla $i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (tj. napisanie kolumn w odwrotnej kolejności) oraz przemnożenie kolumn przez odpowiednie współczynniki dwumianowe. Zamiany kolumn spowodują powstanie czynnika $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, zaś symbole Newtona wyciągają się przed wyznacznik.

Teraz przemnóżmy i-ty wiersz macierzy $\mathbf{A}$ przez j-tą kolumnę macierzy $\mathbf{B}^\mathsf{T}$ (tj. skalarnie mnożymy i-ty wiersz macierzy $\mathbf{A}$ oraz j-ty wiersz macierzy $\mathbf{B}$): $a_i^0\binom{n-1}{n-1}b_j^{n-1} + a_i^1\binom{n-1}{n-2}b_j^{n-2} + \dots + a_i^{n-2}\binom{n-1}{1}b_j^1 + a_i^{n-1}\binom{n-1}{0}b_j^0 = (a_i + b_j)^{n-1}$.

Zatem wyznacznik, który mamy policzyć, to

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^\mathsf{T}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}^\mathsf{T} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \prod_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} ((a_j - a_i)(b_j - b_i))$$

Zadanie 5

Dowód. Niech $\mathbf{A}$ będzie daną macierzą skośniesymetryczną, zaś $\mathbf{F}$ będzie macierzą złożoną z samych jedynek, zaś $\mathbf{f}$ będzie wektorem złożonym z samych jedynek, tj. $\mathbf{f}\mathbf{f}^\mathsf{T} = \mathbf{F}$.

Gdy $\mathbf{A}$ jest odwracalna, to mamy na mocy lematu 1, że $\det(\mathbf{A} + b\mathbf{F}) = \det(\mathbf{A} + b\mathbf{f}\mathbf{f}) = (1 + b\mathbf{f}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}) \det \mathbf{A}$. Wystarczy zatem pokazać, że $\mathbf{f}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = 0$. Traktując tę wartość jako macierz 1x1 widzimy, że jest ona symetryczna, zatem $\dagger = \mathbf{f}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \left(\mathbf{f}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}\right)^\mathsf{T} = \mathbf{f}^\mathsf{T}\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\mathsf{T}\mathbf{f}$, lecz jednak jeśli $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, to także $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{I}$, zatem odwrotność transpozycji to transpozycja odwrotności. Mamy teraz, że $\dagger = \mathbf{f}^\mathsf{T}\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{f}^\mathsf{T}\left(-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{f}$

na mocy antysymetryczności $\mathbf{A}$. Znowu jednak, jeśli $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, to trywialnie $(-\mathbf{A})(-\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}$, zatem $\dagger = \mathbf{f}^\top(-\mathbf{A}^{-1})\mathbf{f} = -\mathbf{f}^\top\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = -\dagger$, zatem $\dagger = 0$ i istotnie $\det(\mathbf{A} + b\mathbf{F}) = \det \mathbf{A}$.

Gdy zaś $\det \mathbf{A} = 0$, to chcemy pokazać, że dla każdego b rzeczywistego, $\det(\mathbf{A} + b\mathbf{F}) = 0$. Załóżmy więc, że dla pewnego b wyznacznik ten jest niezerowy. Oczywiście musi być wtedy $b \neq 0$.

Zauważmy, że gdy A jest stopnia n (parzystego), to $\det(\mathbf{A} + b\mathbf{F}) = \det\left((\mathbf{A} + b\mathbf{F})^\top\right) = \det(\mathbf{A}^\top + b\mathbf{F}^\top) = \det(-\mathbf{A} + b\mathbf{F}) = (-1)^n \det(\mathbf{A} - b\mathbf{F}) = \det(\mathbf{A} - b\mathbf{F})$.

Zauważmy, jak te wielkości są powiązane w lemacie 1. Mamy $\det(\mathbf{A} - b\mathbf{F}) = \det((\mathbf{A} + b\mathbf{F}) - (2b\mathbf{f})\mathbf{f}^\top) = (1-2b\mathbf{f}^\top(\mathbf{A} + b\mathbf{F})^{-1}\mathbf{f})\det(\mathbf{A}+b\mathbf{F})$. Dzieląc obustronnie przez wielkość $\det(\mathbf{A}-b\mathbf{F}) = \det(\mathbf{A}+b\mathbf{F})$, uzyskujemy $1 = 1 - 2b\mathbf{f}^\top(\mathbf{A} + b\mathbf{F})^{-1}\mathbf{f}$, zatem $0 = \mathbf{f}^\top(\mathbf{A} + b\mathbf{F})^{-1}\mathbf{f}$, gdyż $2b \neq 0$.

To nam jednak daje, że $0 = \det \mathbf{A} = \det((\mathbf{A} + b\mathbf{F}) - (b\mathbf{f})\mathbf{f}^\top) = (1 - b\mathbf{f}^\top(\mathbf{A} + b\mathbf{F})^{-1}\mathbf{f})\det(\mathbf{A} + b\mathbf{F}) = \det(\mathbf{A} + b\mathbf{F}) \neq 0$, co jest sprzecznością.

Zatem zawsze $\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{A} + b\mathbf{F})$. □

Zadanie 6

Dowód. Dokonajmy indukcji po k. Dla $k = 0$ teza jest oczywista,

Załóżmy więc, że dla $k < K$ teza zachodzi i rozpatrzmy ją dla $k = K$. Zapiszmy

$$D = \det\begin{pmatrix} \binom{n}{m_0} & \binom{n}{m_0-1} & \binom{n}{m_0-2} & \cdots & \binom{n}{m_0-k+1} & \binom{n}{m_0-k} \\ \binom{n}{m_1} & \binom{n}{m_1-1} & \binom{n}{m_1-2} & \cdots & \binom{n}{m_1-k+1} & \binom{n}{m_1-k} \\ \binom{n}{m_2} & \binom{n}{m_2-1} & \binom{n}{m_2-2} & \cdots & \binom{n}{m_2-k+1} & \binom{n}{m_2-k} \\ \binom{n}{m_3} & \binom{n}{m_3-1} & \binom{n}{m_3-2} & \cdots & \binom{n}{m_3-k+1} & \binom{n}{m_3-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{m_k} & \binom{n}{m_k-1} & \binom{n}{m_k-2} & \cdots & \binom{n}{m_k-k+1} & \binom{n}{m_k-k} \end{pmatrix}$$

Wykonajmy (w tej kolejności) operacje: do ostatniej kolumny dodajmy przedostatnią, następnie do przedostatniej przed-przedostatnią, …, do trzeciej dodajmy drugą, do drugiej pierwszą. Uzyskujemy:

$$D = \det\begin{pmatrix} \binom{n}{m_0} & \binom{n}{m_0} + \binom{n}{m_0-1} & \binom{n}{m_0-1} + \binom{n}{m_0-2} & \cdots & \binom{n}{m_0-k+2} + \binom{n}{m_0-k+1} & \binom{n}{m_0-k+1} + \binom{n}{m_0-k} \\ \binom{n}{m_1} & \binom{n}{m_1} + \binom{n}{m_1-1} & \binom{n}{m_1-1} + \binom{n}{m_1-2} & \cdots & \binom{n}{m_1-k+2} + \binom{n}{m_1-k+1} & \binom{n}{m_1-k+1} + \binom{n}{m_1-k} \\ \binom{n}{m_2} & \binom{n}{m_2} + \binom{n}{m_2-1} & \binom{n}{m_2-1} + \binom{n}{m_2-2} & \cdots & \binom{n}{m_2-k+2} + \binom{n}{m_2-k+1} & \binom{n}{m_2-k+1} + \binom{n}{m_2-k} \\ \binom{n}{m_3} & \binom{n}{m_3} + \binom{n}{m_3-1} & \binom{n}{m_3-1} + \binom{n}{m_3-2} & \cdots & \binom{n}{m_3-k+2} + \binom{n}{m_3-k+1} & \binom{n}{m_3-k+1} + \binom{n}{m_3-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{m_k} & \binom{n}{m_k} + \binom{n}{m_k-1} & \binom{n}{m_k-1} + \binom{n}{m_k-2} & \cdots & \binom{n}{m_k-k+2} + \binom{n}{m_k-k+1} & \binom{n}{m_k-k+1} + \binom{n}{m_k-k} \end{pmatrix}$$

$$D = \det\begin{pmatrix} \binom{n}{m_0} & \binom{n+1}{m_0} & \binom{n+1}{m_0-1} & \cdots & \binom{n+1}{m_0-k+2} & \binom{n+1}{m_0-k+1} \\ \binom{n}{m_1} & \binom{n+1}{m_1} & \binom{n+1}{m_1-1} & \cdots & \binom{n+1}{m_1-k+2} & \binom{n+1}{m_1-k+1} \\ \binom{n}{m_2} & \binom{n+1}{m_2} & \binom{n+1}{m_2-1} & \cdots & \binom{n+1}{m_2-k+2} & \binom{n+1}{m_2-k+1} \\ \binom{n}{m_3} & \binom{n+1}{m_3} & \binom{n+1}{m_3-1} & \cdots & \binom{n+1}{m_3-k+2} & \binom{n+1}{m_3-k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{m_k} & \binom{n+1}{m_k} & \binom{n+1}{m_k-1} & \cdots & \binom{n+1}{m_k-k+2} & \binom{n+1}{m_k-k+1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Zauważmy, że minor powstały z usunięcia 1-szej kolumny i r-tego wiersza powyższej macierzy jest postaci

$$D_r = \det\begin{pmatrix} \binom{n+1}{m_0} & \binom{n+1}{m_0-1} & \cdots & \binom{n+1}{m_0-k+2} & \binom{n+1}{m_0-k+1} \\ \binom{n+1}{m_1} & \binom{n+1}{m_1-1} & \cdots & \binom{n+1}{m_1-k+2} & \binom{n+1}{m_1-k+1} \\ \binom{n+1}{m_2} & \binom{n+1}{m_2-1} & \cdots & \binom{n+1}{m_2-k+2} & \binom{n+1}{m_2-k+1} \\ \binom{n+1}{m_3} & \binom{n+1}{m_3-1} & \cdots & \binom{n+1}{m_3-k+2} & \binom{n+1}{m_3-k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{n+1}{m_{r-1}} & \binom{n+1}{m_{r-1}-1} & \cdots & \binom{n+1}{m_{r-1}-k+2} & \binom{n+1}{m_{r-1}-k+1} \\ \binom{n+1}{m_{r+1}} & \binom{n+1}{m_{r+1}-1} & \cdots & \binom{n+1}{m_{r+1}-k+2} & \binom{n+1}{m_{r+1}-k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{n+1}{m_k} & \binom{n+1}{m_k-1} & \cdots & \binom{n+1}{m_k-k+2} & \binom{n+1}{m_k-k+1} \end{pmatrix}$$

co na mocy założenia indukcyjnego dla

- n o jeden większego,
- k o jeden mniejszego,
- liczb $m_0, m_1, \ldots, m_{r-1}, m_{r+1}, \ldots, m_k \geqslant k-1$

jest równe

$$E_r = \det \begin{pmatrix} \binom{n+1}{m_0} & \binom{n+2}{m_0} & \cdots & \binom{n+k-1}{m_0} & \binom{n+k}{m_0} \\ \binom{n+1}{m_1} & \binom{n+2}{m_1} & \cdots & \binom{n+k-1}{m_1} & \binom{n+k}{m_1} \\ \binom{n+1}{m_2} & \binom{n+2}{m_2} & \cdots & \binom{n+k-1}{m_2} & \binom{n+k}{m_2} \\ \binom{n+1}{m_3} & \binom{n+2}{m_3} & \cdots & \binom{n+k-1}{m_3} & \binom{n+k}{m_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{n+1}{m_{r-1}} & \binom{n+2}{m_{r-1}} & \cdots & \binom{n+k-1}{m_{r-1}} & \binom{n+k}{m_{r-1}} \\ \binom{n+1}{m_{r+1}} & \binom{n+2}{m_{r+1}} & \cdots & \binom{n+k-1}{m_{r+1}} & \binom{n+k}{m_{r+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{n+1}{m_k} & \binom{n+2}{m_k} & \cdots & \binom{n+k-1}{m_k} & \binom{n+k}{m_k} \end{pmatrix}$$

Rozwijając wyznacznik D zapisany w równości 1 rozwinięciem Laplace'a względem pierwszej kolumny uzyskujemy

$$D = \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{m_i} (-1)^{i+1} D_i \tag{2}$$

Jednak rozwijając wyznacznik

$$E = \det \begin{pmatrix} \binom{n}{m_0} & \binom{n+1}{m_0} & \binom{n+2}{m_0} & \cdots & \binom{n+k-1}{m_0} & \binom{n+k}{m_0} \\ \binom{n}{m_1} & \binom{n+1}{m_1} & \binom{n+2}{m_1} & \cdots & \binom{n+k-1}{m_1} & \binom{n+k}{m_1} \\ \binom{n}{m_2} & \binom{n+1}{m_2} & \binom{n+2}{m_2} & \cdots & \binom{n+k-1}{m_2} & \binom{n+k}{m_2} \\ \binom{n}{m_3} & \binom{n+1}{m_3} & \binom{n+2}{m_3} & \cdots & \binom{n+k-1}{m_3} & \binom{n+k}{m_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ \binom{n}{m_k} & \binom{n+1}{m_k} & \binom{n+2}{m_k} & \cdots & \binom{n+k-1}{m_k} & \binom{n+k}{m_k} \end{pmatrix}$$

względem pierwszej kolumny uzyskujemy

$$E = \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{m_i} (-1)^{i+1} E_i \tag{3}$$

jednak ponieważ $D_i = E_i$, to stąd uzyskujemy $D = E$ przez porównanie równości 2 i 3, co kończy dowód kroku indukcyjnego.

$\square$