Zadanie 6 – doprecyzowanie

Zauważmy, że macierz $\mathbf{C}$ jest hermitowska, macierz $\mathbf{b}^*\mathbf{b}$ także, zatem $\mathbf{C} - \frac{\mathbf{b}^*\mathbf{b}}{a}$ także.

Aby udowodnić dodatnią określoność, zauważmy, że w napisie:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{b}^*}{\sqrt{a}} & \mathbf{I}_{n-k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} - \frac{\mathbf{b}^*\mathbf{b}}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{a} & \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{a}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-k-1} \end{pmatrix}$$

gdy z każdej macierzy usuniemy k ostatnich wierszy i k ostatnich kolumn, to pozostaje on prawdą (gdyż mnożymy przez macierze trójkątne).

Z kryterium Sylvestera wiemy, że każda prawa strona każdego takiego ucięcia ma dodatni wyznacznik. Zatem lewa też. Ale to daje, że dodatni wyznacznik ma ucięcie środkowej macierzy, skąd na mocy kryterium Sylvestera jest ona dodatnio określona.

Stąd podany tu algorytm sprowadzi macierz $\mathbf{H}$ do hermitowskiej, dodatnio określonej macierzy o większej wartości k.