Zadanie 1

Niech $\mathcal{A}$ będzie danym NBA (niedeterministycznym Büchiego automatem) o zbiorze stanów Q. Dla każdego słowa w możemy zapisać funkcję $f_w : Q \to Q \to \{\perp, +, \top\}$ taką, że $f_w(q_0)(q_1) = \perp$, jeśli automat $\mathcal{A}$ nie ma biegu po słowie w zaczynającego się w stanie q_0 i kończącego w q_1, $f_w(q_0)(q_1) = +$ jeśli taki bieg ma, ale każdy taki bieg omija stany akceptujące, zaś $f_w(q_0)(q_1) = \top$ jeśli istnieje bieg z q_0 do q_1 przechodzący przez stan akceptujący.

Rzecz jasna, mając dane f_w i f_v można łatwo obliczyć f_{wv}. Zatem zauważmy, że jeśli oznaczymy $w_i = 10^{2^i}$, tj. $w_0 = 1, w_1 = 100, w_2 = 10000, \ldots$, to ciąg f_{w_i} jest zdefiniowany rekurencyjnie, tj. każdy kolejny element można obliczyć z poprzedniego. Jednakże możliwych funkcji $Q \to Q \to \{\perp, +, \top\}$ jest skończenie wiele, zatem ciąg ten jest od pewnego miejsca okresowy, tj. istnieje takie k_0 i r, że $f_{w_{k+r}} = f_{w_k}$ dla $k > k_0$. Co więcej, maszyna Turinga może wyliczać kolejne f_{w_i} aż natrafi na cykl.

Zauważmy, że teraz dla każdego $n \geqslant 0$ mamy

$$f_{w_{k_0} w_{k_0+1} \cdots w_{k_0+r-1}} = f_{w_{k_0+nr} w_{k_0+nr+1} \cdots w_{k_0+nr+r-1}}$$

Zauważmy jednak, że słowo z zadania jest postaci $w_0 w_1 w_2 \cdots$. A zatem maszyna Turinga może policzyć $f_{w_0 w_1 \cdots w_{k_0-1}}$, zobaczyć w jakich stanach automat $\mathcal{A}$ mógł się znaleźć po przeczytaniu tego słowa (oznaczmy je Q'), a następnie policzyć funkcję $\phi = f_{w_{k_0} w_{k_0+1} \cdots w_{k_0+r-1}}$.

Teraz widać, że istnieje bieg akceptujący na słowie z zadania o ile istnieje bieg akceptujący po słowie $w_{k_0} w_{k_0+1} \cdots$ zaczynający się w którymś ze stanów z Q'. Taki bieg musi nieskonczenie często znajdować się w stanie akceptującym, zatem wystarczy i należy sprawdzić, czy na nieskończenie wielu spośród z podfragmentów bazowych postaci $f_{w_{k_0+nr} w_{k_0+nr+1} \cdots w_{k_0+nr+r-1}}$ automat przechodzi przez stan akceptujący. Ale na każdym z tych podfragmentów zachowanie automatu jest wyznaczone funkcją ϕ.

Stwórzmy więc graf G, którego wierzchołkami są stanu automatu $\mathcal{A}$, zaś między q_1 i q_2 istnieje krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi(q_1)(q_2) \neq \perp$, co więcej, jest ona czerwona, gdy $\phi(q_1)(q_2) = \top$ i czarna wpp.

Łatwo widać, że wystarczy sprawdzić, czy istnieje cykl osiągalny z Q' niezłożony wyłącznie z czarnych krawędzi. Istotnie, każdy taki cykl daje przynajmniej jeden bieg automatu $\mathcal{A}$ taki, że na nieskończenie wielu podfragmentach bazowych przechodzimy przez stan akceptujący: są to dokładnie te podfragmenty, które odpowiadają czerwonym krawędziom na cyklu.

W drugą stronę, jeśli automat ma bieg akceptujący na rozważanym słowie, to nieskończenie często musiał odwiedzać jakiś stan w momencie wchodzenia do kolejnego podfragmentu bazowego, nazwijmy go q_∞. Wtedy oczywiście musiało mu się zdarzyć przejść przez stan akceptujący między jakimiś dwoma wejściami do stanu q_∞, a zatem istnieje cykl przechodzący przez q_∞ przechodzący przynajmniej raz czerwoną krawędzią.

Zadanie 2

Na początku konwertujemy dany niedeterministyczny Büchiego automat do deterministycznego Rabina automatu $\mathcal{A}$ o zbiorze stanów Q, stanie początkowym q_0 i rodzinie zbiorów stanów akceptujących $\mathcal{F}$. Bez straty ogólności, zakładamy, że nie ma stanów nieosiągalnych.

Oznaczmy przez $(*)$ warunek: *Dla każdego stanu* $q \in Q$ *i dla każdych dwóch cykli* α_1, α_2 *z* q *do* q *(niekoniecznie prostych), o zbiorach odwiedzanych stanów:* T_1, T_2*, jeśli* $T_1 \in \mathcal{F}$*, to* $T_1 \cup T_2 \in \mathcal{F}$*.*

Zauważmy, że warunek ten może sprawdzić maszyna Turinga, iterując się po wszystkich q, T_1, T_2 i sprawdzając, czy istnieje cykl od q do q przechodzący dokładnie przez wierzchołki T_1 (i następnie: to samo dla T_2), innymi słowy: czy podgraf indukowany przez T_1 (T_2, odpowiednio) jest silnie spójny. Pokażę, że ten warunek jest równoważny rozpoznawalności przez DBA.

Rozpoznawany przez DBA $\implies (*)$

Niech $\mathcal{B}$ będzie deterministycznym Büchiego automatem akceptującym ten sam język co $\mathcal{A}$. Przypuśćmy, że dla pewnych $q \in Q$, i α_1, α_2 – cykli od q do q takich, że $T_1 \in \mathcal{F}$, ale $T_1 \cup T_2 \notin \mathcal{F}$.

Niech w_0 będzie słowem powodującym przejście automatu $\mathcal{B}$ ze stanu początkowego do q, w_i – słowem powodującym przejście ze stanu q do q po cyklu α_i dla $i \in \{1, 2\}$.

Wtedy oczywiście $w_0 w_1^\omega$ jest słowem akceptowanym przez $\mathcal{A}$, gdyż stany występujące nieskończenie często to dokładnie T_1, a $T_1 \in \mathcal{F}$. Jednakże na tym słowie automat $\mathcal{B}$ musi w pewnym momencie wejść do stanu akceptującego, a zatem istnieje takie k_1, że automat $\mathcal{B}$ przechodzi na słowie $w_0 w_1^{k_1}$ przez stan akceptujący.

Teraz popatrzmy na słowo $w_0 w_1^{k_1} w_2 w_1^\omega$. Analogiczny argument mówi, że istnieje takie k_2, że na słowie $w_0 w_1^{k_1} w_2 w_1^{k_2}$ automat $\mathcal{B}$ przechodzi dwa razy przez stan akceptujący.

Kontynuując tę konstrukcję uzyskujemy słowo $w = w_0 w_1^{k_1} w_2 w_1^{k_2} w_2 w_1^{k_3} w_2 \cdots$, na którym automat $\mathcal{B}$ znajduje się nieskończenie często w stanie akceptującym, a zatem $\mathcal{B}$ akceptuje w, zatem i $\mathcal{A}$ musi akceptować w, lecz jednak zbiór stanów występujących nieskończenie często w jego biegu na w to $T_1 \cup T_2 \notin \mathcal{F}$.

$(*) \implies$ rozpoznawany przez DBA

Załóżmy, że język rozpoznawany przez $\mathcal{A}$ spełnia warunek $(*)$.

Wtedy dla $q \in Q$ stwórzmy deterministyczny Büchiego automat $\mathcal{B}_q$ którego zbiorem stanów będzie $\{\top\} \sqcup (Q \times (\{\bot\} \sqcup \mathcal{P}(Q)))$. Automat ten zaczyna bieg w stanie $(q_0, \bot)$ i jedynym stanem akceptującym jest $\top$.

Automat ten czytając słowo symuluje zachowanie automatu $\mathcal{A}$, pamiętając zbiór stanów od ostatniego znalezienia się w stanie $\top$ (lub $\bot$ jeśli stan $\top$ nie wystapił nigdy wcześniej). Jednakże, jeśli automat $\mathcal{A}$ miałby wejść do stanu q gdy trzymany zbiór stanów jest $\bot$ lub należy do $\mathcal{F}$, to automat $\mathcal{B}$ wchodzi wyjątkowo do stanu $\top$. Ze stanu $\top$ automat wychodzi tak jak ze stanu $(q, \{q\})$.

Niech teraz $\mathcal{B}$ będzie automatem produktowym, tj. iloczynem automatów $\mathcal{B}_q$ po $q \in Q$, akceptującym jeśli choć jeden z nich znajduje się w stanie $\top$. Oczywiście automat ten jest deterministycznym Büchiego automatem, wystarczy zatem sprawdzić, że rozpoznaje on dokładnie ten sam język, co automat $\mathcal{A}$.

$L(\mathcal{A}) \subseteq L(\mathcal{B})$

Niech w będzie ω-słowem akceptowanym przez $\mathcal{A}$, niech F będze zbiorem stanów występujących nieskończenie często w biegu na tym słowie i niech $q \in F$.

Twierdzę, że wówczas sam automat $\mathcal{B}_q$ akceptuje słowo w. Istotnie, zauważmy, że automat $\mathcal{B}_q$ wejdzie do stanu $\top$ przynajmniej raz – przy pierwszym wystąpieniu stanu q w biegu automatu $\mathcal{A}$.

Załóżmy teraz, że stan $\top$ wystąpi w biegu automatu $\mathcal{B}_q$ po raz n-ty. Od tego miejsca automat $\mathcal{A}$ odwiedzi stan q jeszcze nieskończenie wiele razy, niech $T_1, T_2, \ldots$ będą zbiorami stanów odwiedzanych przez niego między kolejnymi wystąpieniami stanu q. Zauważmy, że dla pewnych $i \leqslant j$ zachodzi $T_i \cup T_{i+1} \cup \ldots \cup T_j = F$ – istotnie, dla dostatecznie dużych i zachodzi $T_i \subseteq F$, gdyż stany spoza F pojawiają się jedynie skończenie często. Ponadto każdy ze stanów z F musi wystąpić nieskończenie często, więc biorąc dostatecznie duże j „złapiemy" je wszystkie.

Jednak teraz warunek $(*)$ mówi, że $T_1 \cup \ldots \cup T_j \in \mathcal{F}$, a zatem automat $\mathcal{B}_q$ wejdzie jeszcze do stanu $\top$, najpóźniej w momencie, w którym „kończy się" T_j.

Zatem automat $\mathcal{B}_q$ wejdzie do stanu akceptującego nieskończenie często.

$L(\mathcal{B}) \subseteq L(\mathcal{A})$

Niech w będzie ω-słowem akceptowanym przez $\mathcal{B}$. Wtedy istnieje takie q, że $\mathcal{B}_q$ nieskończenie często wchodzi do stanu $\top$. Niech $T_1, T_2, \ldots$ będą zbiorami stanów, jakie $\mathcal{A}$ odwiedza między kolejnymi pozycjami słowa, na których $\mathcal{B}_q$ wchodzi do $\top$. Z konstrukcji, $T_i \in \mathcal{F}$. Jednakże łatwo widać, że zbiór stanów występujących nieskończenie często w biegu $\mathcal{A}$ na w (oznaczmy go F) jest sumą tych zbiorów T_i, które pojawiają się nieskończenie często w ciągu $T_1, T_2, \ldots$. Ale warunek $(*)$ daje nam, że takie skończone sumy elementów $\mathcal{F}$ należą do $\mathcal{F}$, zatem $F \in \mathcal{F}$, czyli automat $\mathcal{A}$ akceptuje słowo w.