Zadanie A

Oznaczmy (dla $a, b, c > 0$):

$$f(a, b, c) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

Oznaczmy ponadto: $X = \{f(a, b, c) | a, b, c > 0\}$

Łatwo teraz widzimy, że $f(a, b, c) + f(c, b, a) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+a} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+b} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+c} = 3$. Stąd łatwo widac, że $\sup X + \inf X = 3$.

Ponadto mamy, że $a + b < a + b + c$, a więc $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}$. Analogicznie $\frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}$ oraz $\frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c}$. Dodając te nierówności stronami uzyskujemy $f(a, b, c) > \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$.

Jednak biorąc $(a, b, c) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}, 1)$ uzyskujemy:

$$x_n = f(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}, 1) = \frac{n^{-2}}{n^{-2} + n^{-1}} + \frac{n^{-1}}{n^{-1} + 1} + \frac{1}{1 + n^{-2}}$$

.

Pokażemy, że $\inf_n x_n = 1$, co wraz z $x_n \in X$ oraz $\forall_{x \in X} x > 1$ da, że $\inf X = 1$. Mamy już, że $x_n > 1$. Załóżmy jednak, że istnieje większe ograniczenie górne: $1 + \epsilon$, dla $\epsilon > 0$.

Jednak gdy weźmiemy $n > \frac{2}{\epsilon} - 1$ uzyskamy, że $1+n > \frac{2}{\epsilon}$, czyli $\frac{\epsilon}{2} > \frac{1}{1+n}$. Mamy jednak, że $\frac{1}{1+n} = \frac{n^{-2}}{n^{-2}+n^{-1}} = \frac{n^{-1}}{n^{-1}+1}$. Stąd $\frac{\epsilon}{2} > \frac{n^{-2}}{n^{-2}+n^{-1}}$ oraz $\frac{\epsilon}{2} > \frac{n^{-1}}{n^{-1}+1}$. Ponadto: $1 > \frac{1}{1+n^{-2}}$. Dodając te nierówności stronami uzyskujemy: $1 + \epsilon > x_n$. To zaś oznacza, że $1 + \epsilon$ nie jest ograniczeniem dolnym ciagu (x_n).

Stąd $\inf X = 1$, a ponieważ $\sup X = 3 - \inf X$, to $\sup X = 2$.

Zadanie B

Dowód. Udowodnimy indukcyjnie, że $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, zaś $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Dla $n = 1$ (a nawet dla $n = 0$, gdy przyjmiemy konwencję, że suma pusta jest równa 0) teza zachodzi.

Załóżmy teraz, że zachodzi ona dla pewnego $n = m$ i udowodnijmy ją dla $n = m + 1$.

W tym celu zauważmy, że $\sum\limits_{k=1}^{m+1} k = (m+1) + \sum\limits_{k=1}^{m} k \overset{z.i.}{=} (m+1) + \frac{m(m+1)}{2}$ oraz $\sum\limits_{k=1}^{m+1} k^3 = (m+1)^3 + \sum\limits_{k=1}^{m} k^3 \overset{z.i.}{=} (m+1)^3 + \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$, gdzie z.i. nad znakiem równości oznacza skorzystanie z założenia indukcyjnego.

Wystarczy więc udowodnić: $\frac{(m+1)(m+2)}{2} \overset{?}{=} (m+1) + \frac{m(m+1)}{2}$ oraz $\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 \overset{?}{=} (m+1)^3 + \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$

W pierwszym przypadku mamy: $\frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{(m+1)m+(m+1)2}{2} = \frac{m(m+1)}{2} + (m+1)$, co jest poszukiwaną równością.

W drugim zaś zauważmy, że $\frac{(m+2)^2}{4} = \frac{m^2+4m+4}{4} = \frac{m^2}{4} + (m+1)$. Mnożąc tę równość przez $(m+1)^2$ uzyskujemy: $\left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right) = (m+1)^3 + \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)$, co znów jest poszukiwaną równością □

Zadanie C

Rozważmy dwa przypadki:

Przypadek $\pi \in \mathbb{Q}$

Wtedy $\exists_{a,b \in \mathbb{Z}^*_+} \pi = \frac{a}{b}$. (Możemy przyjąć, że $a, b > 0$, gdyż $\pi > 0$).

Jednak wtedy $|\sin a| = |\sin(b\pi)| = |0| = 0$. Łatwo zaś widać, że 0 jest ograniczeniem dolnym na wartości bezwzględne czegokolwiek, skąd wtedy $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}^*} |\sin n| = 0$.

Przypadek $\pi \notin \mathbb{Q}$

Znowu widzimy, że 0 jest ograniczeniem dolnym na wartości rozważanego ciągu. Załóżmy jednak, że istnieje większe ograniczenie: $\epsilon > 0$. Oczywiście $\epsilon \leqslant 1$, gdyż $\sin n \leqslant 1$.

Weźmy więc $\delta = \arcsin \epsilon$. Zauważmy, że $\frac{1}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ Wtedy na mocy twierdzenia udowodnionego na wykładzie inauguracyjnym, istnieje takie $k \in \mathbb{N}^*$, że $\frac{k}{2\pi} - \lfloor \frac{k}{2\pi} \rfloor \in (0, \frac{\delta}{2\pi})$. Wtedy jednak zauważmy, że $k - 2\pi \lfloor \frac{k}{2\pi} \rfloor \in (0, \delta)$. Ale $\sin k = \sin \left(k - 2\pi \lfloor \frac{k}{2\pi} \rfloor \right)$. Jednak stąd (i z monotoniczności funkcji sinus), widać, że $0 = \sin 0 < \sin k < \sin \delta = \epsilon$, co jest sprzecznością.

Stąd $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}^*} |\sin n| = 0$.