Zadanie 1

Część a

Gdy $w > 0$ mamy, że $|x|^w \sin \frac{1}{x}$ zbiega do 0 przy x dążącym do zera, gdyż $|x|^w$ zbiega do zera, zaś $\sin \frac{1}{x}$ jest ograniczony. Stąd wtedy f jest ciągła w zerze.

Gdy $w = 0$ mamy, że $|x|^w \sin \frac{1}{x} = \sin \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$, co nie ma granicy w 0, zatem f nie jest wtedy ciągła w zerze.

Gdy zaś $w < 0$ mamy, że $|x|^w$ dąży do nieskończoności przy x dążącym do 0. Gdyby jednak $|x|^w \sin \frac{1}{x}$ miało jakąkolwiek skończoną granicę w zerze, to musiałoby być, że $\sin \frac{1}{x}$ dążyłoby do 0 przy x dążącym do zera, co nie jest prawdą. Zatem dla $w < 0$ funkcja f nie jest ciągła w zerze.

Część b

Zauważmy, że $g(x) := \frac{|x|^w \sin \frac{1}{x}}{x}$ jest funkcją parzystą zmiennej x, gdyż licznik i mianownik są nieparzyste (co wynika z nieparzystości sinusa). Zatem do badania istnienia $\lim_{x \to 0} g(x)$, czyli $f'(0)$ wystarczy zbadać granicę prawostronną (jeśli nie istnieje ona lub jest ona różna od zera, to oczywiście granica obustronna nie może istnieć, zaś gdy prawostronna jest równa zeru, to oczywiście lewostronna też).

Stąd możemy badać wyrażenie (gdyż rozważamy jedynie dodatnie x): $\frac{|x|^w \sin \frac{1}{x}}{|x|} = |x|^{w-1} \sin \frac{1}{x}$, którego granicę w zerze zbadaliśmy w części a: istnieje ona wtedy i tylko wtedy, gdy $w - 1 > 0$ i jest ona wówczas zerowa, co pociąga za sobą, że $f'(0)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $w > 1$.

Część c

Dla $x > 0$ mamy, że $f'(x) = wx^{w-1} \sin \frac{1}{x} + x^w \cos \frac{1}{x} \frac{-1}{x^2} = wx^{w-1} \sin \frac{1}{x} - x^{w-2} \cos \frac{1}{x}$. Aby pochodna była ciągła w $x_0 = 0$ musi ona istnieć, zatem $w > 1$ na mocy poprzedniej części zadania, co daje, że pierwszy składnik zbiega do zera jako iloczyn funkcji ograniczonej i funkcji zbieżnej do zera. Należy zatem teraz rozstrzygnąć zbieżność $x^{w-2} \cos \frac{1}{x}$. Na mocy rozumowania izomorficznego z częścią a, granica ta istnieje (i jest równa zeru) wtedy i tylko wtedy, gdy $w > 2$.

Zatem pochodna ta jest prawostronnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $w > 2$. Jednak ponieważ $f(x) = -f(-x)$, to łatwo widać, że jest wtedy także lewostronnie ciągła.

Zadanie 2

Rozpatrzmy funkcje $\lambda x. \frac{f(x)}{x}$ oraz $\lambda x. \frac{1}{x}$. Są one ciągłe na $[a, b]$ oraz różniczkowalne na (a, b), zatem na mocy twierdzenia Cauchy'ego istnieje takie $c \in (a, b)$, że $\frac{f(a)/a - f(b)/b}{1/a - 1/b} = \frac{\frac{f'(c)c - f(c)}{c^2}}{-1/c^2}$, co przekształcone równoważnie daje $\frac{f(a)b - f(b)a}{b - a} = f(c) - f'(c)c$, skąd teza.

Zadanie 3

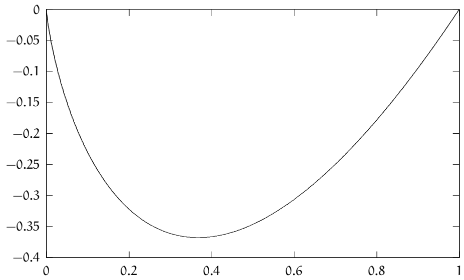
Zauważmy, że dla $0 < x < e$ mamy $0 < e^2 - x^2 < e^2$, zatem $\ln((e - x)(e + x)) < \ln e^2 = 2$. W połączeniu z faktem, że dla każdego $t > 0$ mamy $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$ uzyskujemy że $\frac{e-x}{x+e} + \frac{x+e}{e-x} - \ln(e - x) - \ln(x + e) > 0$. Jednak wyrażenie to jest dokładnie pochodną funkcji $f = \lambda x.(e - x) \ln(e + x) - (e + x) \ln(e - x)$, zatem jest ona rosnąca. Jednak w $x = 0$ przyjmuje wartość 0, zatem dla $0 < x < e$ mamy $(e - x) \ln(e + x) > (e + x) \ln(e - x)$. Obkładając obie strony funkcją eksponencjalną uzyskujemy $(e + x)^{e-x} > (e - x)^{e+x}$.

Zadanie 4

Zauważmy najpierw, że funkcja $f(x) = a^x - x$ jest ciągła, oraz $f(0) = 1$, $f(1) = a - 1 < 0$, zatem posiada ona miejsce zerowe. Ponadto $f'(x) = a^x \ln a - 1 < 0$ (bo $\ln a < 0$), zatem f jest malejąca, zatem to miejsce zerowe jest jedyne. Oznaczmy je M_a (jest to punkt stały przekształcenia $\lambda x.a^x$). Oczywiście mamy, że punkt (M_a, M_a) spełnia warunki zadania.

Załóżmy teraz, że punkt (x, y) dla $x \neq y$ spełnia warunki zadania. Wtedy łatwo widać, że $x, y > 0$, zatem możemy zapisać $\ln y = x \ln a$, $\ln x = y \ln a$. Ponieważ $\ln a < 0$, to łatwo mamy $\ln x, \ln y < 0$, skąd $x, y \in (0, 1)$.

Mamy wtedy jednak, że $\frac{\ln y}{x} = \ln a = \frac{\ln x}{y}$, zatem $x \ln x = y \ln y$. Rozpatrzmy zatem funkcję $g(x) = x \ln x$ na przedziale $x \in (0, 1)$. Jej pochodna jest równa $g'(x) = \ln x + 1$, co zeruje się w $x = \exp(-1)$, skąd uzyskujemy, że funkcja g jest najpierw malejąca, a potem rosnąca. Supremum wartości, jakie funkcja ta osiąga na $[0, 1]$, jest zero (bo $g(1) = 0$), zaś infimum $g(\exp(-1)) = -\exp(-1)$.



Rysunek 1: Wykres funkcji $\lambda x. x \ln x$ na przedziale $(0, 1)$

Zatem zauważmy, że z powyższego wynika, że dowolna wartość $X \in (-\exp(-1), 0)$ jest przez funkcję g osiągana dokładnie w dwóch punktach, oznaczmy je x_X, y_X (przy czym $x_X < y_X$). Łatwo widać, że funkcja przyporządkowująca liczbie X punkt x_X jest ciągła, analogicznie funkcja przyporządkowująca y_X (są to funkcje odwrotne do funkcji g na odpowiednich przedziałach). Zatem ciągła jest funkcja $r(X) = \frac{\ln x_X}{y_X}$.

Zauważmy, że z tego, co powiedzieliśmy o monotoniczności g wynika, że jeśli $X > X'$, to $0 < x_X < x_{X'} < \exp(-1) < y_{X'} < y_X < 1$. Zatem gdy maleje X, to x_X rośnie, zaś y_X maleje, zatem $\frac{\ln x_X}{y_X}$ rośnie, zatem funkcja $r(X)$ jest ściśle malejąca. Gdy $X \to 0$, to łatwo widać, że x_X dąży do 0, zaś y_X dąży do 1, zatem $r(X)$ dąży do $-\infty$, zaś gdy X dąży do $-\exp(-1)$, to x_X i y_X dążą do $\exp(-1)$ (ekstremum funkcji g), zatem $r(X)$ dąży do $\frac{\ln \exp(-1)}{\exp(-1)} = -e$.

Zatem zbiorem wartości funkcji r jest przedział $(-\infty, -e)$. To oznacza, że dla $\ln a \in (-\infty, -e)$, tj. $a \in (0, \exp(-e))$ mamy, że oprócz wspomnianego na początku punktu powstałego z wzięcia punktu stałego przekształcenia $\lambda x. a^x$, mamy jeszcze punkty (x_X, y_X) oraz (y_X, x_X) takie, że $\ln y = x \ln a$, $\ln x = y \ln a$, czyli właśnie warunki zadania i są to wtedy oczywiście jedyne takie punkty, co wynika z powyższych rozważań.

Gdy zaś $X \notin (-\exp(-1), 0)$, funkcja g nie osiąga wartości X w dwóch różnych punktach na przedziale $(0, 1)$, zatem nie może istnieć taki punkt (x, y), który spełniałby warunki zadania i byłoby $x \neq y$.

Podsumowując, dla $a \in (0, \exp(-e))$ mamy trzy takie punkty, dla $a \in [\exp(-e), 1)$ jeden.

Zadanie 5

Niech $D = \mathrm{Rg}(f)$ będzie zbiorem wartości funkcji f. Zauważmy, że wtedy dla $d \in D$ mamy, że $f(f(d)) = d \geqslant 0$, gdyż istnieje x, że $d = f(x)$. Ponadto na mocy ciągłości funkcji f mamy, że D jest przedziałem (być może zdegenerowanym lub niewłaściwym).

Zauważmy jednak, że stąd $f_{|D}$ jest bijekcją, gdyż posiada funkcję odwrotną (samą siebie). Zatem jest różnowartościowa, a różnowartościowa funkcja ciągła na przedziale jest ściśle monotoniczna.

Przypuśćmy, że D jest przedziałem o niepustym wnętrzu. Skoro $f(f(d)) = d$ na przedziale D, to także $f(f(d)) - d$ jest tożsamościowo równe zeru, zatem i jego pochodna jest tożsamościowo zerowa. Stąd $f'(d)f'(f(d)) - 1 = 0$ dla wszystkich $d \in D$, w szczególności f' nie ma miejsc zerowych na D.

Jeśli $f_{|D}$ jest rosnąca, to łatwo widać, że gdyby $d < f(d)$, to $f(d) < f(f(d)) = d$ – sprzeczność, zaś gdyby $d > f(d)$, to $f(d) > f(f(d)) = d$ – sprzeczność. Zatem $f_{|D} = \mathrm{id}_D$. Jeśli $\inf D \in \mathbb{R}$, to z ciągłości mamy $f(\inf D) = \inf D$, zatem $\inf D \in D$, analogicznie $\sup D \in D$ jeśli tylko $\sup D \in \mathbb{R}$. Wiemy jednak, że $f(x) \geqslant 0$, zatem D ma ograniczenie dolne, zatem $\inf D \in D$ oraz $f(\inf D) = \inf D$. Jednak to oznacza, że funkcja f osiąga w $\inf D$ kres dolny swojego zbioru wartości, zatem jest to ekstremum lokalne (a nawet i globalne), zatem f' musi się tam zerować, co daje sprzeczność.

Jeśli zaś $f_{|D}$ jest malejąca oraz $\inf D \in \mathbb{R}$, to wiemy, że dla dostatecznie małych $\delta > 0$ mamy, że $(\inf D, \inf D + \delta] \in D$, zaś $f_{|[\inf D, \inf D + \delta]}$ jest ciągła i określona na przedziale domkniętym, więc osiąga supremum. Zauważmy, że na $(\inf D, \inf D + \delta]$ jest ona ściśle malejąca, zatem supremum musi być osiągnięte w $\inf D$, czyli $f(\inf D) = \sup_{[\inf D, \inf D+\delta]} f = \sup_D f = \sup D$, gdyż funkcja f jest malejąca na D, a jest to jej zbiór wartości i jest ona permutacją tego zbioru. To zaś oznacza, że $\sup D \in D$, a więc w szczególności $\sup D \in \mathbb{R}$ i przeprowadzając symetryczne rozumowanie mamy, że $\inf D \in D$. Jednak jak wiemy z założeń, D jest ograniczone z dołu przez zero, zatem istotnie $\inf D, \sup D \in D$, oraz $f(\sup D) = \inf D$. Stąd jednak w punkcie $\sup D$ funkcja f przyjmuje kres dolny swojego zbioru wartości, czyli pochodna się tam zeruje, co daje sprzeczność.

Uzyskane sprzeczności wskazują, że fałszywe jest założenie o tym, że D ma niepuste wnętrze. Zatem $D = \{a\}$ dla pewnego $a \geqslant 0$, skąd funkcja f jest tożsamościowo równa a. Łatwo widać, że spełnia ona warunki zadania.