# Zadanie 1

Twierdzę, że szukanym zbiorem jest $\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$.

*Dowód.* Weźmy dowolne $f$ spełniające warunki zadania.

Załóżmy, że istnieje takie $\zeta$, że $f(\zeta) = \xi$, że $\xi \neq \zeta$. Ustalmy teraz dowolne różne $\upsilon, \nu \in \mathbb{N} \setminus \{\zeta, \xi\}$ i określmy permutację $\varpi$ następująco:

$$\varpi(\vartheta) = \begin{cases} \upsilon & \text{gdy } \vartheta = \zeta \\ \zeta & \text{gdy } \vartheta = \upsilon \\ \nu & \text{gdy } \vartheta = \xi \\ \xi & \text{gdy } \vartheta = \nu \\ \vartheta & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Łatwo widać, że $\varpi$ istotnie jest zarówno injektywna jak i surjektywna, a więc jest permutacją. Jednak mamy wtedy, na mocy powyższych definicji i założeń, a także na podstawie równości z zadania:

$$f(\upsilon) = f(\varpi(\zeta)) = \varpi(f(\zeta)) = \varpi(\xi) = \nu$$

Jednak zauważmy, że równie dobrze możemy zamiast $\nu$ wybrać jakieś $\nu'$ różne od $\nu$, $\zeta$, $\xi$, oraz $\upsilon$ i postępując dokładnie analogicznie uzyskamy, że $f(\upsilon) = \nu'$. Jest to oczywista sprzeczność.

Stąd nie może istnieć takie $\zeta$, żeby $f(\zeta) \neq \zeta$, zatem dla każdego $\zeta$ musi zachodzić $f(\zeta) = \zeta$, a więc $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. □

# Zadanie 2

## Surjektywność

Twierdzę, że $F$ nie jest surjektywna.

*Dowód.* Oznaczmy $h = \lambda x.\varnothing$. Twierdzę, że $h$ nie jest wartością funkcji $F$. Załóżmy bowiem przeciwnie, że dla pewnego $f$ zachodzi $F(f) = h$. Wtedy jednak mamy, że dla każdego $X \subseteq \mathbb{N}$ zachodzi: $f(X) = F(f)(X) = h(X) = \varnothing$. Jednak oczywiście, gdy weźmiemy $X = \mathbb{N}$ otrzymamy sprzeczność, gdyż $f(42) \in f(\mathbb{N})$, więc $f(\mathbb{N})$ nie może być pusty. □

## Injektywność

Twierdzę, że $F$ jest injektywna.

*Dowód.* Załóżmy bowiem, że dla pewnych różnych $f$, $g$ zachodzi $F(f) = F(g)$. Ponieważ $f \neq g$, to istnieje takie $x \in \mathbb{N}$, że $f(x) \neq g(x)$. Ale jednak mamy, że $\{f(x)\} = f(\{x\}) = F(f)(\{x\}) = F(g)(\{x\}) = g(\{x\}) = \{g(x)\}$, co na mocy aksjomatu ekstensjonalności daje, że $f(x) = g(x)$, *quod est absurdum.* □