1 Zadanie

1.1 Część a

1.1.1 Uogólniona składowa wyznaczona przez $\lambda i.0$

Niech $r \in [0, \infty)$. Zauważmy, że na mocy zasady Archimedesa istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $2n + 1 > r$. Stąd jednak $r \in C_n$, skąd $r \notin U \setminus C_n$, skąd $r \notin \bigcap_{i \in i} U \setminus C_i = \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} C_i^0$.

Mamy więc, że $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} C_i^0 = \varnothing$.

1.1.2 Uogólniona składowa wyznaczona przez $\lambda i.1$

Zauważmy, że chcemy znaleźć iloczyn $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} C_i^1 = \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} C_i$. Jednak łatwo widzimy, że $C_i \subseteq C_{i+1}$. Stąd $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} C_i = C_0$, a więc $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} C_i = [0, 1)$.

1.2 Część b

Wprowadźmy tzw. *nawias Iversona*, tj. funkcję $[\cdot] : \{\text{prawda}, \text{fałsz}\} \to \{0, 1\}$ daną jako:

$$[P] = \begin{cases} 1 & \text{gdy } P \\ 0 & \text{gdy } \neg P \end{cases}$$

1.2.1 Niestała funkcja wyznaczająca pustą uogólnioną składową

Niech $f = \lambda x.[x = 0]$.

Znowu jednak działa rozumowanie z części 1.1.1: dla każdego $r \in [0, \infty)$ istnieje liczba $n \in \mathbb{N}_+$, że $2n+1 > r$. Wtedy $r \in C_n$, ale wtedy $r \notin C_n^0 = U \setminus C_n$, a więc $r \notin \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} C_i^{f(i)}$, bo w tym przecięciu C_n wystąpi z 0 w górnym indeksie, bo $f(n) = 0$.

Stąd $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} C_i^{f(i)} = \varnothing$.

1.2.2 Niestała funkcja wyznaczająca niepustą uogólnioną składową

Niech $f = \lambda x.[x \neq 0]$. Zauważmy, że $1 \in C_0^0 = [1, \infty)$ oraz dla $n > 0$ mamy $1 \in C_n^1 = [0, 2n + 1)$, a więc $1 \in \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} C_i^{f(i)}$, więc w szczególności nie jest to zbiór pusty.

1.3 Część c

Zastanówmy się, jakie warunki musi spełniać $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, aby odpowiednia uogólniona składowa była niepusta. Powiemy, że funkcja jest dobra, gdy $f = \lambda(x : \mathbb{N}).[x \geqslant c]$ dla pewnego $c \in \mathbb{N}$.

1.3.1 Niepuste uogólnione składowe są wyznaczone przez funkcje dobre

Dowód. Oczywiście, gdyby dla pewnych $i, j \in \mathbb{N}$ takich, że $i < j$ zachodziło $f(i) = 1, f(j) = 0$, to gdyby $r \in \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} C_i^{f(i)}$, to mielibyśmy w szczególności $r \in C_i^1 \cap C_j^0 = [0, 2i + 1) \cap [2j + 1, \infty) = \varnothing$, co jest sprzecznością.

Stąd mamy, że jeśli $f(i) = 1, f(j) = 0$, to $i \geqslant j$. Niech $A_f = \{n | f(n) = 1\}$. Przypadek $A_f = \varnothing$ daje $A_f = \lambda x.0$, rozważony w 1.1.1, więc aby mieć niepustą uogólnioną składową, musimy mieć $A_f \neq 0$. Niech teraz $m_f = \min A_f$.

Zauważmy teraz, że $f = \lambda x.[x \geqslant m_f]$. Istotnie, gdyby $x \geqslant m_f$ i $f(x) = 0$, to mielibyśmy sprzeczność, gdyż $f(m_f) = 1$, zaś gdyby $x < m_f$ i $f(x) = 1$ znów mielibyśmy sprzeczność. Stąd biorąc $c = m_f$ mamy tezę. $\square$

1.3.2 Funkcje dobre jednoznacznie wyznaczają niepuste uogólnione składowe

Dowód. Niech $f = \lambda x.[x \geqslant c]$. Dla $c = 0$ rozpatrzyliśmy to w części 1.1.2.

Twierdzę, że dla $c > 0$ zachodzi $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i^{f(i)} = (2c-1, 2c+1)$. W tym celu zauważmy, że $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i^{f(i)} = \left(\bigcap_{i<c} C_i^0\right) \cap \left(\bigcap_{i \geqslant c} C_i^1\right) = \left(\bigcap_{i<c} (2i+1, \infty)\right) \cap \left(\bigcap_{i \geqslant c} [0, 2i+1)\right) = (2(c-1)+1, \infty) \cap [0, 2c+1) = (2c-1, 2c+1)$.

Stąd istotnie, uogólniona składowa wyznaczana przez funkcję dobrą jest niepusta i dla różnych c otrzymujemy różne składowe. □

Jednak biorąc $\varphi(c : \mathbb{N}) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i^{(\lambda x.[x \geqslant c])(i)}$ widzimy, że mamy bijekcję między $\prod_{\mathcal{C}}^+$ a $\mathbb{N}$, na mocy powyższych.

2 Zadanie

2.1 Część a

Nie, gdyż $(2, 6) \in \tau$ oraz $(6, 3) \in \tau$, ale $(2, 3) \notin \tau$.

2.2 Część b

Niech $C = \{n \in \mathbb{N}_+ | n = 1 \vee n \text{ parzyste}\}$, zaś $D = \bigcup\{B | B \text{ jest kliką oraz } 2 \in B\}$

2.2.1 $C \subseteq D$

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$ mamy, że $\{2, 2n\}$ jest kliką, a więc $2n \in D$. Ponadto $\{1, 2\}$ jest kliką, a więc $1 \in D$. □

2.2.2 $D \subseteq C$

Dowód. Niech $b \in D$. Wtedy istnieje takie B będące kliką, że $2 \in B$ oraz $b \in B$. Stąd $b|2$ lub $2|b$, czyli $b = 1$ lub b jest parzyste. □

Stąd $D = C$. Jednak nie jest to klika, gdyż $(4, 6) \notin \tau$, lecz $4, 6 \in D$.

2.3 Część c

Niech $T = \{2^k | k \in \mathbb{N}\}$. Zauważmy, że jest to klika. Istotnie, dla $2^k, 2^l$ mamy, że $k < l$ i wtedy $2^k | 2^l$ lub też $k \geqslant l$ i wtedy $2^l | 2^k$.

Załóżmy jednak, że istnieje taka klika U, że $T \subsetneq U$. Wtedy istnieje takie $u \in U$, że $u \notin T$. Gdyby dla nieskończenie wielu k zachodziło $2^k | u$, to mielibyśmy $u = 0$, a tak nie jest. Stąd istnieje największe k, że $2^k | u$, tj. $2^{k+1} \nmid u$. Stąd ponieważ $2^{k+1}, u \in U$, to $u | 2^{k+1}$, ale jednak to oznacza, że $u = 2^l$ dla pewnego $l \in \mathbb{N}$, czyli $u \in T$ — sprzeczność.