Lemat 1. $\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-4)^n = \binom{2n}{n}$.

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}
\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-4)^n &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4)^n = \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{n!}2^n = \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{n!}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} = \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

□

Zadanie 0

Funkcja $r(x) = x - f(x) = ax^p + \psi(x)$, gdzie $\psi(x) = o(^p)$ jest określona w prawostronnym otoczeniu zera. Ponieważ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\psi(x)}{x^p} = 0$, to w pewnym otoczeniu $[0, \delta_0)$ mamy $|\frac{\psi(x)}{x^p}| < \frac{a}{2}$, zatem w tym otoczeniu $r(x) > \frac{ax^p}{2}$, co jest dodatnie dla $x > 0$. Ponadto $r(0) = 0$. Ponadto analogicznie możemy zapisać $f(x) = x + o(x)$ i wywnioskować, że dla $x \in [0, \delta_1)$ mamy $f(x) > 0$. Ustalmy $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$.

Wtedy dla $x_0 \in [0, \delta)$ mamy, że x_n jest ciągiem nierosnącym i ograniczonym przez zero, zatem ma granicę g. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n - f(x_n) = 0$. Stąd jednak, ponieważ w przedziale $[0, \delta)$ mamy $x_n - f(x_n) \geqslant \frac{ax_n^p}{2} \geqslant 0$ (możemy to zastosować dla całego ciągu, gdyż jeśli $x_0 \in [0, \delta)$, to dowolne $x_n \in [0, \delta)$) to na mocy twierdzenia o trzech ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{ax_n^p}{2} = 0$, zatem $g = \lim\limits_{n\to 0} x_n = 0$.

Policzmy na mocy tw. Stolza oraz korzystając z faktu, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g = 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^{1-p}}{n} &\overset{S}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^{1-p} - x_n^{1-p}}{(n+1)-n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(f(x_n)^{1-p} - x_n^{1-p}\right) \\
&\overset{\leftarrow}{=} \lim_{x\to 0^+} \left(f(x)^{1-p} - x^{1-p}\right) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left(x^{1-p}\left(\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{1-p} - 1\right)\right) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left(x^{1-p}\left(\left(1 - ax^{p-1} + o(x^{p-1})\right)^{1-p} - 1\right)\right) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left(x^{1-p}\left(1 + \binom{1-p}{1}\left(-ax^{p-1} + o(x^{p-1})\right) + o\left(-ax^{p-1} + o(x^{p-1})\right) - 1\right)\right) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left(x^{1-p}\left(1 - a(1-p)x^{p-1} + o(x^{p-1}) - 1\right)\right) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left(a(p-1) + o(1)\right) = a(p-1)
\end{aligned}$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^{\frac{1}{1-p}}} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^{1-p}}{n}\right)^{\frac{1}{1-p}} = (a(p-1))^{\frac{1}{1-p}}$, zatem $x_n \sim (a(p-1))^{\frac{1}{1-p}} n^{-\frac{1}{p-1}}$.

Zadanie 1

Oznaczmy $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$. Mamy jednak $f(x) \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x^4}$, zatem $f(x) = (1-x)\frac{1}{1-x^4} = (1-x)\left(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \ldots\right) = 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + x^{12} - x^{13} + \ldots$. Szereg ten opisuje funkcję f ponieważ jest ona iloczynem dwóch funkcji analitycznych, więc jest analityczna.

Ponieważ szereg dla $\frac{1}{1-x^4}$ był zbieżny dla $|x| < 1$, to ten także. Ponadto dla $x = 1$ uzyskujemy szereg $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, który nie jest zbieżny, zaś dla $x = -1$ szereg $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$, który także nie jest zbieżny. Zatem przedziałem zbieżności jest $(-1, 1)$.

Oznaczmy $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. Wtedy $g'(x) = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \cdot \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Zapiszmy funkcję $\widehat{g}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)4^n}$. Jej pochodną jest funkcja $\widehat{g}'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = g'(x)$. Wynikają z tego dwie rzeczy: po pierwsze, ponieważ $\widehat{g}'$ ma promień zbieżności równy jeden, to $\widehat{g}$ też. Po drugie, ponieważ funkcje g oraz $\widehat{g}$ mają równe pochodne, to różnią się o stałą, ale ponieważ $g(0) = 0 = \widehat{g}(0)$, to $g(x) = \widehat{g}(x)$ dla $x \in (-1, 1)$.

Należy jeszcze zbadać zachowanie na krańcach przedziału. Jednak, jak było dowodzone w pierwszym semestrze, $4^{-n}\binom{2n}{n} = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$, zatem szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)4^n}$ jest zbieżny na mocy kryterium porównawczego z szeregiem $\frac{1}{n^{3/2}}$. Stąd $\widehat{g}(1)$ i $\widehat{g}(-1)$ są zbieżne bezwzględnie.

Zadanie 2

Niech I będzie otwartym otoczeniem zera, na którym zarówno f jak i g rozwijają się w szereg potęgowy. Wtedy zauważmy, że funkcja $h(x) = f(x) - g(x)$ też rozwija się na tym otoczeniu w szereg potęgowy $h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ i na mocy warunków zadania $h\left(\frac{1}{k}\right) = 0$ dla dostatecznie dużych k naturalnych.

Przypuśćmy, że $h(x)$ nie jest funkcją tożsamościowo równą zeru. Ponieważ jest sumą szeregu potęgowego, to znaczy to, że istnieje pewne n takie, że $a_n \neq 0$. Weźmy więc najmniejsze takie n. Z ciągłości funkcji danej szeregiem potęgowym mamy $h(0) = 0$, gdyż $\frac{1}{k} \to 0$, zatem $a_0 = 0$, czyli $n > 0$.

Popatrzmy teraz na funkcję $\widehat{h}(x) = \frac{h(x)}{x^n}$. Dla $x \in I \setminus \{0\}$ jest ona zadana szeregiem potęgowym $\sum_{i=0}^{\infty} a_{i-n} x^i$. Jednak w związku z tym możemy ustalić wartość $\widehat{h}(0) = a_n$. Teraz jednak mamy, że ponieważ $h\left(\frac{1}{k}\right) = 0$, to także $\widehat{h}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{h\left(\frac{1}{k}\right)}{\left(\frac{1}{k}\right)^n} = 0$, zatem z ciągłości musielibyśmy uzyskać $\widehat{h}(0) = 0$, co daje sprzeczność, gdyż założyliśmy, że $a_n \neq 0$.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że funkcja $h(x)$ rozwija się w szereg o wszystkich współczynnikach zerowych, zatem $f(x) = g(x)$ dla $x \in I$.

Zadanie 3

Policzmy na razie rozwinięcie $h(x)$ w formalny szereg potęgowy (tj. element pierścienia $\mathbb{R}[[X]]$) $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Mamy $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = h(x)g(x) = 1$, zatem $a_0 b_0 = 1$, a dla $n > 0$ uzyskujemy $a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n = 0$, zatem mamy $a_0 = 1$, $a_n = -\left(a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n\right)$ dla $n > 0$. Należy teraz pokazać, że szereg ten ma dodatni promień zbieżności.

Funkcja $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| x^k$ określona we wnętrzu przedziału zbieżności szeregu dla $h(x)$ (jest on tam bezwzględnie zbieżny) jest ciągła i w zerze osiąga wartość zero, zatem istnieje taka $\delta > 0$, że dla $0 \leqslant x \leqslant \delta$ zachodzi $|\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| x^k| < 1$.

Pokażę indukcyjnie, że $|a_k| \leqslant \delta^{-k}$. Istotnie, dla $k = 0$ teza jest trywialna, gdyż $a_k = 1$. Dla $k > 0$ mamy zaś na mocy nierówności trójkąta i założenia indukcyjnego, że

$$\begin{aligned}
|a_k| &= |a_{k-1} b_1 + \ldots + a_0 b_k| \leqslant |a_{k-1}||b_1| + \ldots + |a_0||b_k| \\
&\leqslant \delta^{-(k-1)}|b_1| + \ldots + \delta^0 |b_k| = \delta^{-k}\left(\delta^1 |b_1| + \ldots + \delta^k |b_k|\right) \\
&\leqslant \delta^{-k}\left(\delta^1 |b_1| + \ldots + \delta^k |b_k| + \ldots\right) \\
&< \delta^{-k}
\end{aligned}$$

co kończy dowód kroku indukcyjnego.

Stąd jednak $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \delta^{-1}$, zatem promień zbieżności szeregu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ wynosi przynajmniej δ. Zauważmy jednak, że gdy oznaczymy przez R minimum z promieni zbieżności szeregów $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ oraz $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, a także promienia, na którym ten drugi szereg opisuje funkcję g, to na przedziale $(-R, R)$ iloczyn tych szeregów wynosi jeden, zatem ponieważ ten drugi opisuje funkcję g, to ten pierwszy opisuje funkcję h.

Zadanie 4

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ dla $|x| < \frac{1}{4}$. Rozwija się ona w szereg potęgowy $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{i}(-4x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

Zatem $(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$. Szukany iloczyn skalarny (oznaczmy go s_n) jest współczynnikiem przy x^n w iloczynie Cauchy'ego (splocie) tego szeregu samym ze sobą, zatem $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \left((1-4x)^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$. Z jednoznaczności szeregu potęgowego mamy $s_n = 4^n$.

Zadanie 5

Niech $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Wiemy, że $a_0 = a_1 = 0$ na mocy faktu, że $f(0) = f'(0) = 0$. Porównajmy współczynniki przy x^n po obu stronach równości funkcji zadanych szeregami funkcyjnymi: $f''(x) - x^2 f''(x) = 2 + xf'(x)$. Dla $n = 0$ uzyskujemy $2 \cdot 1 \cdot a_2 = 2$, skąd $a_2 = 1$. Zaś dla $n > 0$ mamy $(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n = na_n$, czyli $(n+2)(n+1)a_{n+2} = n^2 a_n$, czyli $a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} a_n$.

Mamy więc, że dla parzystego $n = 2k > 0$ zachodzi

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{(2k-2)^2}{2k(2k-1)} \cdot \frac{(2k-4)^2)}{(2k-4)^2} \cdots \frac{2^2}{4 \cdot 3} a_2 \\ &= \frac{2\left(2^{k-1}(k-1)!\right)^2}{(2k)!} = \frac{2 \cdot 4^{k-1}(k-1)!^2}{(2k)!} \end{aligned}$$

Dla nieparzystego $n = 2k+1$ mamy $a_{2k+1} = \frac{(2k-1)^2}{(2k+1)2k} \cdots \frac{1^2}{3 \cdot 2} a_1 = 0$, bo $a_1 = 0$, zatem ostatecznie uzyskujemy

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4^{k-1}\left((k-1)!\right)^2}{(2k)!} x^{2k}$$