Zadanie 1

Obie funkcje podcałkowe są dodatnie, zatem badanie zbieżności sprowadza się do badania asymptotyki.

Pierwsza całka

Przy $x \to 0^+$ widzimy, że $\frac{1-e^{-cx}}{x^c+x^{2c}} = \frac{1-e^{-cx}}{-cx} \frac{-c}{x^{c-1}+x^{2c-1}}$. Pierwszy czynnik dąży do 1, zatem wystarczy zbadać asymptotykę drugiego czynnika. Całka $\int\limits_0^1 \frac{-c}{x^{c-1}+x^{2c-1}} dx$ zachowuje się asymptotycznie jak $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^{c-1}} dx$, która jest zbieżna na $c < 2$ i rozbieżna na $c \geqslant 2$.

Przy $x \to +\infty$ widzimy, że $1 - e^{-cx}$ dąży do 1, zatem należy zbadać asymptotykę funkcji $\frac{1}{x^c+x^{2c}}$. Całka $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^c+x^{2c}}$ zachowuje się asymptotycznie jak $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^{2c}}$, która jest zbieżna dla $c > \frac{1}{2}$ i rozbieżna dla $c \leqslant \frac{1}{2}$.

Zatem całka z zadania jest zbieżna dla $c \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ i rozbieżna poza tym przedziałem.

Druga całka

Przy $x \to 0^+$ mamy, że $\frac{(\sin x)^w}{x\sqrt{x}(\pi-x)} = \frac{(\sin x)^w}{x^w} \frac{1}{x^{1.5-w}(\pi-x)}$. Pierwszy czynnik dąży do 1, więc decydująca jest asymptotyka drugiego, skąd zbieżność jest wtedy i tylko wtedy, gdy $1.5 - w < 1$, czyli $w > 0.5$.

Przy $x \to \pi^-$ mamy, że $\frac{(\sin x)^w}{x\sqrt{x}(\pi-x)} = \frac{(\sin x)^w}{(\pi-x)^w} \frac{1}{x^{1.5}(\pi-x)^{1-w}}$. Mamy teraz, że pierwszy czynnik dąży do 1, zaś drugi zachowuje się przy π tak jak $\frac{1}{t^{1-w}}$ w otoczeniu zera, zatem całka jest zbieżna dla $1 - w < 1$, czyli $w > 0$.

Stąd całka z zadania jest zbieżna dla $w > 0.5$.

Zadanie 3

W jawnej puli z GAL* jest zadanie, żeby sprawdzić, że wielomiany Q_n są wektorami własnymi operatora $\phi : C^\infty([-1, 1]) \to C^\infty([-1, 1])$ takiego, że $\phi(f)(x) = ((1 - x^2)f'(x))'$, więc sprawdzę to.

Lemat 1. *Dla* $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ *takich, że* $2k-n-2 \geqslant 0$ *mamy:* $(2k-n-1)(n+1)!\left(\binom{n}{k}\binom{2k}{n+1} + \binom{n}{k-1}\binom{2k-2}{n+1}\right) = n(n+1)\binom{n}{k-1}\binom{2k-2}{n}n!$

Dowód. Mamy:

$$\begin{aligned}
L &= (2k-n-1)(n+1)!\left(\binom{n}{k}\binom{2k}{n+1} + \binom{n}{k-1}\binom{2k-2}{n+1}\right) = \\
&= (2k-n-1)(n+1)!\left(\frac{n!(2k)!}{k!(n-k)!(n+1)!(2k-n-1)!} + \frac{n!(2k-2)!}{(k-1)!(n-k+1)!(n+1)!(2k-n-3)!}\right) = \\
&= (2k-n-1)(n+1)!\frac{n!(2k-2)!}{(k-1)!(n-k+1)!(2k-2-n)!n!}\left(\frac{(2k)(2k-1)(n-k+1)}{k(2k-n-1)(n+1)} + \frac{2k-n-2}{n+1}\right) = \\
&= (n+1)!\binom{n}{k-1}\binom{2k-2}{n}\left(\frac{2(2k-1)(n-k+1)}{n+1} + \frac{(2k-n-2)(2k-n-1)}{n+1}\right) = \\
&= (n+1)!\binom{n}{k-1}\binom{2k-2}{n}\frac{2(2k-1)(n-k+1) + (2k-n-2)(2k-n-1)}{n+1}
\end{aligned}$$

Wystarczy teraz pokazać, że $\frac{2(2k-1)(n-k+1)+(2k-n-2)(2k-n-1)}{n+1} = n$. W tym celu możemy wymnożyć licznik uzyskując $4kn - 4k^2 + 4k - 2n + 2k - 2 + 4k^2 - 2kn - 2k - 2kn + n^2 + n - 4k + 2n + 2 = n^2 + n$, czyli istotnie licznik jest n-krotnością mianownika. Zatem teza lematu jest prawdziwa. □

Łatwo mamy, że:[1]

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_k \binom{n}{k}(-1)^k x^{2k} \\
Q_n(x) &= \sum_k \binom{n}{k}(2k)(2k-1)\dots(2k-n+1)(-1)^k x^{2k-n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2k}{n} n!(-1)^k x^{2k-n} \\
Q_n'(x) &= \sum_k \binom{n}{k}\binom{2k}{n} n!(2k-n)(-1)^k x^{2k-n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2k}{n+1}(n+1)!(-1)^k x^{2k-n-1} \\
(1-x^2)Q_n'(x) &= \sum_k x^{2k-n-1}\left((-1)^k\binom{n}{k}\binom{2k}{n+1}(n+1)! - (-1)^{k-1}\binom{n}{k-1}\binom{2(k-1)}{n+1}(n+1)!\right) \\
&= \sum_k (-1)^k x^{2k-n-1}(n+1)!\left(\binom{n}{k}\binom{2k}{n+1} + \binom{n}{k-1}\binom{2k-2}{n+1}\right) \\
((1-x^2)Q_n'(x))' &= \sum_k (-1)^k x^{2k-n-2}(2k-n-1)(n+1)!\left(\binom{n}{k}\binom{2k}{n+1} + \binom{n}{k-1}\binom{2k-2}{n+1}\right) \\
&= \sum_k (-1)^k x^{2k-n-2} n(n+1)\binom{n}{k-1}\binom{2k-2}{n} n! = -n(n+1)Q_n(x)
\end{aligned}
$$

Zatem Q_n jest wektorem własnym operatora liniowego ϕ (z wartością własną $-n(n+1)$).

Jednak zauważmy, że operator ten jest (rzeczywisty) samosprzężony, gdyż $\langle\phi(f), g\rangle = \int_{-1}^{1}((1-x^2)f'(x))'g(x)dx = \underbrace{\left[(1-x^2)f'(x)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)f'(x)g'(x)dx = \underbrace{\left[(1-x^2)g'(x)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)g'(x)f'(x)dx = \int_{-1}^{1}((1-x^2)g'(x))'f(x)dx = \langle f, \phi(g)\rangle$.

Zatem jak wiemy z galu, jego wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne.

Zadanie 4

Przypuśćmy, że funkcja g nie jest ciągła, lecz spełnia warunek z zadania. Skoro g nie jest ciągła, to posiada punkt nieciągłości i jest tam przynajmniej jednostronnie nieciągła. Dla uproszczenia przyjmijmy (przez ewentualną izometrię), że g jest lewostronnie nieciągła w zerze oraz $g(0) = 0$.

Skonstruujmy indukcyjnie zbiory I_n w następujący sposób: $I_0 = [0, 1]$, następnie wycinamy środkowy odcinek o długości $\frac{1}{4}$ i nazywamy to I_1, następnie z każdego z pozostałych odcinków wycinamy środkowy odcinek długości $\frac{1}{16}$ i nazywamy to I_2. Ogólnie w n-tym kroku bierzemy zbiór I_{n-1} składający się z jakichś odcinków i wycinamy z każdego z nich środkowe $\frac{1}{4^n}$ i nazywamy to I_n.

Widzimy, że na n-tym etapie konstrukcji mamy 2^n odcinków, z każdego wyrzucimy odcinek długości 4^{-n}, zatem wyrzucamy coś długości 2^{-n} i sumując to po $n = 1, 2, \dots$ widzimy, że wycięliśmy łącznie coś długości $\frac{1}{2}$.

Zatem zbiór $I = \bigcap_n I_n$ nie jest miary zero. Ponadto, jeśli wyrzucaliśmy odcinki otwarte, to I_n są domknięte, więc I jako przecięcie zbiorów domkniętych jest domknięte.

Funkcje $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiujemy tak: na zbiorze I_n jest ona równa 0, zaś na każdym odcinku wyrzuconym w kroku $k \leqslant n$ jest ona wypukłą funkcją kwadratową taką, że na krańcach odcinka ma wartość 0, zaś w swoim minimum ma wartość $-\frac{1}{n}$.

Teraz widzimy, że f_n są funkcjami ciągłymi. Co więcej, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ biorąc n takie, że $\frac{1}{n} < \varepsilon$ widzimy, że dla $m_1, m_2 > n$ mamy $|f_{m_1}(x) - f_{m_2}(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon$, gdyż jeżeli na jakimś x te funkcje się różnią, to to może być jedynie dlatego, że np. $x \in I_{m_1} \setminus I_{m_2}$, lecz to daje, że wtedy $f_{m_1}(x) = 0$, $0 \geqslant f_{m_2}(x) \geqslant -\frac{1}{m_2} \geqslant -\frac{1}{n} \geqslant -\varepsilon$. (Analogicznie dla $x \in I_{m_2} \setminus I_{m_1}$).

Zatem ciąg f_n jest jednostajnie zbieżny, zatem jego granica $f := \lim f_n$ jest funkcją ciągłą, więc całkowalną w sensie Riemanna.

Jednak zauważmy, że f zeruje się na zbiorze I i nie jest zerem na $[0, 1] \setminus I$ (gdyż każda wartość $x \notin I$ musi nie należeć już do jakiegoś I_k i wtedy począwszy od $n = k$ mamy, że $f_n(x) = f_k(x) < 0$).

[1] Stosuję tu konwencję, że sumuję po wszystkich $k \in \mathbb{Z}$, lecz po prostu dla k spoza odpowiedniego przedziału odpowiednie symbole Newtona są zerowe, więc taki skrót notacyjny nic nie zmienia

Skoro funkcja g nie jest lewostronnie ciągła w zerze, to istnieje takie $\varepsilon > 0$, że dla każdego $\delta > 0$ mamy, że istnieje $x \in (-\delta, 0)$, że $|g(x)| > \varepsilon$.

Rozpatrzmy dowolne $x \in I$. Wtedy $f(x) = 0$, więc $g(f(x)) = 0$.

W dowolnym otoczeniu punktu x istnieje liczba wymierna r o mianowniku będącym potęgą dwójki, a te liczby to dokładnie środki przedziałów, które wyrzucaliśmy w konstrukcji zbiorów I, zatem $r \notin I$. Zatem $f(r) < 0$, więc istnieje takie u in $(f(r), 0)$, że $|g(u)| > \varepsilon$. Jednak funkcja f jest ciągła, więc na przedziale między x a r osiąga wartość u. Powiedzmy, że robi to w punkcie t. Wtedy $|g(f(t))| = |g(u)| > \varepsilon$.

Zatem funkcja $g \circ f$ na dowolnym otoczeniu punktu x przyjjmuje wartości większe na moduł niż ε. A to oznacza, że nie jest ona ciągła w punkcie x.

Zatem zbiór punktów nieciągłości funkcji $g \circ f$ zawiera zbiór I, a on nie jest miary zero. Zatem $g \circ f$ nie jest całkowalna w sensie Riemanna. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że g musi być ciągła.

Zadanie 5

Niech F, G będą odpowiednio funkcjami pierwotnymi funkcji f, g. Ponieważ f, g są niemalejące, to F, G są wypukłe.

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i niech $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Jest to podział odcinka $[a, b]$ na równe fragmenty.

Oznaczmy $u_k = F(x_k) - F(x_{k-1})$, $v_k = G(x_k) - G(x_{k-1})$. Teraz mamy, że $u_{k+1} = F(x_{k+1}) - F(x_k) \geqslant F(x_k) - F(x_{k-1}) = u_k$ (dla takich k, żeby napisy miały sens). Analogicznie $v_{k+1} \geqslant v_k$.

Ponadto $u_k + \ldots + u_n = \int\limits_{x_k}^{x_n} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^{x_k} f(x)dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)dx - \int\limits_a^{x_k} g(x)dx = \int\limits_{x_k}^{x_n} g(x)dx = v_k + \ldots + v_n$ i dla $k = 0$ zachodzi równość. Ponadto na mocy twierdzenia o wartości średniej mamy $u_k = \frac{f(\zeta_k)}{n}$, $v_k = \frac{g(\xi_k)}{n}$ dla $\zeta_k, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Oznaczmy $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako $\phi_n(x) = \sqrt{1 + n^2x^2}$. Wtedy $\phi_n'(x) = \frac{n^2x}{sqrt 1+n^2x^2}$,

$$\phi_n''(x) = \frac{n^2\sqrt{1+n^2x^2} - n^2x \cdot \frac{n^2x}{\sqrt{1+n^2x^2}}}{1+n^2x^2} = \frac{n^2 + n^4x^2 - n^4x^2}{(1+n^2x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{n^2}{(1+n^2x^2)^{1.5}} > 0$$

zatem ϕ_n jest funkcją wypukłą.

Zatem na mocy dowodzonej na ćwiczeniach nierówności Karamaty, $\phi_n(u_1) + \ldots + \phi_n(u_n) \geqslant \phi_n(v_1) + \ldots + \phi_n(v_n)$. Stąd $\sqrt{1 + f(\zeta_1)^2} + \ldots + \sqrt{1 + f(\zeta_n)^2} \geqslant \sqrt{1 + g(\xi_1)^2} + \ldots + \sqrt{1 + g(\xi_n)^2}$. Dzieląc stronami przez n widzimy, że są to jedne z możliwych sum Riemannowskich funkcji $x \mapsto \sqrt{1 + f(x)^2}$, $x \mapsto \sqrt{1 + g(x)^2}$. Funkcje te są całkowalne w sensie Riemanna, jako funkcje ciągłe.

Zatem przechodząc do granicy z $n \to +\infty$ mamy $\int\limits_a^b \sqrt{1 + f(x)^2}dx \geqslant \int\limits_a^b \sqrt{1 + g(x)^2}dx$.