Dowody wstępne

Lemat 1 (Subaddytywność rzędu). *Jeśli* $f, g : U \to W$ *są przekształceniami liniowymi między przestrzeniami skończonego wymiaru, to* $\dim \operatorname{im} f + \dim \operatorname{im} g \geqslant \dim \operatorname{im}(f+g)$.

Dowód. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą $\operatorname{im} f$, zaś $\beta_1, \ldots, \beta_m$ będzie bazą $\operatorname{im} g$. Weźmy dowolne $\xi \in \operatorname{im}(f+g)$. Wtedy istnieje takie Ξ, że $(f+g)(\Xi) = \xi$, czyli $f(\Xi) + g(\Xi) = \xi$. Jednak zapisując $f(\Xi)$ i $g(\Xi)$ we współrzędnych bazy mamy: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n + b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \ldots + b_m\beta_m = \xi$, stąd łatwo widzimy, że układ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m$ rozpina przestrzeń $\operatorname{im}(f+g)$, skąd teza. □

Lemat 2 (Nierówność Sylvestra). *Jeśli* $f, g : U \to U$ *są przekształceniami liniowymi przestrzeniami liniowej wymiaru* n, *to* $\dim \operatorname{im} f + \dim \operatorname{im} g \leqslant n + \dim \operatorname{im}(f \circ g)$. *Aby zachodziła równość, potrzeba i wystarcza, aby* $\ker f = \operatorname{im} g|_{\ker(f\circ g)}$.

Dowód. Z *rank-nullity theorem* mamy, że $\dim \operatorname{im} f + \dim \ker f = n$, analogicznie dla pozostałych przekształceń. Stąd teza jest równoważna: $\dim \ker f + \dim \ker g \geqslant \dim \ker(f \circ g)$.

Niech $h : \ker(f \circ g) \to W$ będzie obcięciem funkcji g. Wtedy oczywiście $\ker h = \ker g$, bo $\Xi \in \ker g \implies g(\Xi) = \vartheta \implies f(g(\Xi)) = \vartheta \implies \Xi \in \ker(f \circ g)$, a ponadto $\Xi \in \ker h \implies \Xi \in \ker g$, ponieważ h jest obcięciem funkcji g.

Jednak jeśli $v \in \ker(f \circ g)$, to $f(g(v)) = \vartheta$, skąd $g(v) \in \ker f$. Mamy stąd $\operatorname{im} h \subseteq \ker f$. Stąd $\dim \operatorname{im} h \leqslant \dim \ker f$. Stosując twierdzenie o rzędzie dla przekształcenia h mamy: $\dim \ker(f \circ g) = \dim \ker h + \dim \operatorname{im} h \leqslant \dim \ker g + \dim \ker f$, bo $\dim \ker h = \dim \ker g$ oraz $\dim \operatorname{im} h \leqslant \dim \ker f$. □

Lemat 3 (Nierówność Frobeniusa). *Jeśli* $f, g, h : U \to U$ *są przekształceniami liniowymi przestrzeniami liniowej wymiaru* n, *to* $\dim \operatorname{im}(f \circ g) + \dim \operatorname{im}(g \circ h) \leqslant \dim \operatorname{im} g + \dim \operatorname{im}(f \circ g \circ h)$.

Dowód. Z *rank-nullity theorem* mamy, że $\dim \operatorname{im} f + \dim \ker f = n$, analogicznie dla pozostałych przekształceń. Stąd teza jest równoważna: $\dim \ker(f \circ g) + \dim \ker(g \circ h) \geqslant \dim \ker g + \dim \ker(f \circ g \circ h)$, czyli $\dim \ker(f \circ g \circ h) - \dim \ker(g \circ h) \leqslant \dim \ker(f \circ g) - \dim \ker g$.

Zauważmy jednak, że $\ker g \subseteq \ker(f \circ g)$, $\ker(g \circ h) \subseteq \ker(f \circ g \circ h)$.

Zdefiniujmy przekształcenie liniowe $\psi : \ker(f \circ g \circ h)/\ker(g \circ h) \to \ker(f \circ g)/\ker g$ jako $\psi(\alpha + \ker(g \circ h)) = h(\alpha) + \ker g$.

Zauważmy najpierw, że jest to dobrze określone przekształcenie. Istotnie, gdyby $\alpha - \beta = \tau \in \ker(g \circ h)$, to $h(\alpha) - h(\beta) = h(\tau) \in \ker g$, a więc wartość ψ nie zależy od wyboru reprezentanta warstwy.

Zauważmy teraz, że jest to monomorfizm. W tym celu pokażemy, że $\ker \psi$ jest trywialne. Załóżmy bowiem, że $\alpha + \ker(g \circ h) \in \ker \psi$. Stąd mamy, że $\vartheta + \ker g = \psi(\alpha + \ker(g \circ h)) = h(\alpha) + \ker g$, stąd $h(\alpha) \in \ker g$, skąd $\alpha \in \ker(g \circ h)$, czyli $\alpha + \ker(g \circ h) = \ker(g \circ h)$, skąd jądro jest rzeczywiście trywialne.

Stąd mamy, że $\dim \operatorname{im} \psi = \dim(\ker(f \circ g \circ h)/\ker(g \circ h)) = \dim \ker(f \circ g \circ h) - \dim \ker(g \circ h)$, jednak $\operatorname{im} \psi \subseteq \ker(f \circ g)/\ker g$, a więc $\dim \ker(f \circ g \circ h) - \dim \ker(g \circ h) = \dim \operatorname{im} \psi \leqslant \dim \ker(f \circ g) - \dim \ker g$, skąd dowodzona nierówność zachodzi. □

Lemat 4. *Jeśli* $X, Y \in K_n^n$ *o wyrazach odpowiednio* $(x_{i,j})$, $(y_{i,j})$, *to* $\operatorname{tr}(X^T Y) = \sum_{i,j} x_{i,j} y_{i,j}$.

Dowód. W macierzy $X^T Y$ wyraz o współrzędnych j, j ma postać: $\sum_i x_{i,j} y_{i,j}$, a więc ślad będzie postaci $\sum_j \sum_i x_{i,j} y_{i,j}$. □

Zadanie 1

Część a

Dowód. Niech $\psi : V/\ker f \to \operatorname{im} f$ będzie dane wzorem $\psi(\alpha + \ker f) = f(\alpha)$. Zauważmy, że jest to dobrze zdefiniowana funkcja: gdy $\alpha - \beta \in \ker f$, to $f(\alpha) - f(\beta) = 0$. Ponadto trywialnie jest to przekształcenie liniowe, bo $\psi(a(\alpha + \ker f) + b(\beta + \ker f)) = \psi(a\alpha + b\beta + \ker f) = f(a\alpha + b\beta) = af(\alpha) + bf(\beta)$

Niech teraz $\tau + \ker f \in \ker \psi$. Wtedy wiemy, że $\vartheta = \psi(\tau + \ker f) = f(\tau)$, a więc $\tau \in \ker \psi$, czyli jądro tego przekształcenia jest trywialne – jest to monomorfizm.

Niech teraz $\tau \in \operatorname{im} f$. Wtedy istnieje $\varkappa \in V$, że $f(\varkappa) = \tau$, co daje $\psi(\varkappa + \ker f) = \tau$, czyli $\operatorname{im} \psi = \operatorname{im} f$ – jest to epimorfizm.

Stąd jest to izomorfizm. □

Część b

Dowód. Zdefiniujmy $\psi : (U+W)/W \to U/(U\cap W)$ jako $\psi(\underbrace{\alpha}_{\in U}+\underbrace{\beta}_{\in W}+W) = \alpha + (U\cap W)$.

Najpierw udowodnijmy niezależenie od wyboru reprezentanta. Załóżmy bowiem, że $\varkappa - \rho \in W$, gdzie $\varkappa = \alpha+\beta$, $\rho = \gamma+\delta$, dla $\alpha,\gamma \in U$, zaś $\beta,\delta \in W$ (w szczególności rozważamy sytuację, gdy $\varkappa = \rho$, lecz są to różne zapisy na sumę czegoś z U i czegoś z W).

Mamy wtedy, że oczywiście $\alpha - \gamma \in U$, zaś $W \ni \varkappa - \rho = \alpha - \gamma + \underbrace{\beta - \delta}_{\in W}$, skąd $\alpha - \gamma \in W$. Stąd zaś $\alpha - \gamma \in (U \cap W)$, skąd istotnie wartość ψ nie zależy od wyboru reprezentanta.

Liniowość ψ: $\psi(a(\underbrace{\alpha}_{\in U}+\underbrace{\beta}_{\in W}+W) + b(\underbrace{\gamma}_{\in U}+\underbrace{\delta}_{\in W}+W)) = \psi(\underbrace{a\alpha+b\gamma}_{\in U}+\underbrace{a\beta+b\delta}_{\in W}+W) = (a\alpha+b\gamma+(U\cap W)) = a(\alpha+(U\cap W)) + b(\gamma+(U\cap W)) = a\psi(\underbrace{\alpha}_{\in U}+\underbrace{\beta}_{\in W}+W) + b\psi(\underbrace{\gamma}_{\in U}+\underbrace{\delta}_{\in W}+W)$.

Gdy $\ker\psi \ni \tau = \underbrace{\alpha}_{\in U}+\underbrace{\beta}_{\in W}+W$, to $U\cap W = \psi(\tau) = \alpha + (U\cap W)$, skąd $\alpha \in (U\cap W) \implies \alpha \in W$, ale wtedy $\alpha+\beta \in W$, skąd $\tau = \alpha+\beta+W = W$. Stąd $\ker\psi$ jest trywialne, więc ψ jest monomorfizmem.

Dowolne $\tau \in U/(U\cap W)$ można przedstawić jako $\underbrace{\alpha}_{\in U}+(U\cap W)$. Wtedy jednak $\psi(\alpha+\vartheta+W) = \alpha+(U\cap W) = \tau$. Stąd ψ jest epimorfizmem.

Stąd ψ jest izomorfizmem. □

Część c

Dowód. Niech $\psi : (V/U)/(W/U) \to V/W$ będzie zadany jako $\psi((\alpha+U)+W/U) = \alpha+W$.

Najpierw udowodnimy, że wartość ψ nie zależy od wyboru reprezentantów. Najpierw udowodnimy niezależenie od wyboru reprezentanta warstwy ze względu na W/U, tj. $(\alpha+U)+W/U = (\beta+U)+W/U \implies \alpha+W = \beta+W$. W tym celu zauważmy, że $\alpha-\beta+U \in W/U$, a więc $\alpha-\beta+\underbrace{\rho}_{\in U} = \underbrace{\tau}_{\in W}+\underbrace{\sigma}_{\in U}$, skąd $\alpha-\beta = \underbrace{\tau-\rho+\sigma}_{\in(W+U)=W} \in W$.

Teraz udowodnimy, że dla ustalonego już $\tau+W/U$ wartość $\psi(\tau+W/U)$ nie zależy od wyboru α w zapisie $\tau = \alpha+U$. Mamy bowiem, że dla $\alpha+U = \beta+U$ zachodzi $\alpha-\beta \in U$, skąd $\alpha-\beta \in W$.

Liniowość ψ jest oczywista, dowód analogicznie trywialny jak w części b. Epimorficzność ψ jest także natychmiastowa, gdyż dla każdego $\alpha \in V$, warstwa $\alpha+W$ jest osiągana dla $(\alpha+U)+W/U$ wprost z definicji ψ.

Teraz pokażemy monomorficzność ψ. Załóżmy bowiem, że $\tau = (\alpha+U)+W/U \in \ker\psi$. Stąd $\psi(\tau) = \alpha+W = W$, czyli $\alpha \in W$. Stąd zaś $\alpha+U \in W/U$, czyli $\tau = W/U$, co dowodzi trywialności jądra.

Stąd ψ jest izomorfizmem. □

Zadanie 3

Są to trywialne konsekwencje lematów 1, 2, 3.

Zadanie 4

Niech V będzie jakąś podprzestrzenią o tej własności, zaś niech $X_2,\dots,X_d$ będą jej bazą. Oznaczmy $Y_i = X_i - X_i^T$. Twierdzę, że układ $Y_1,\dots,Y_d$ jest liniowo niezależny. Załóżmy bowiem, że dla pewnych liczb $a_1,\dots,a_d$ zachodzi $0 = a_1Y_1 + \dots a_dY_d$. Wtedy z definicji macierzy Y_i mamy $0 = a_1\left(X_1 - X_1^T\right)+\dots+a_d\left(X_d - X_d^T\right)$, skąd $a_1X_1+\dots+a_dX_d = a_1X_1^T+\dots+a_dX_d^T = (a_1X_1+\dots+a_dX_d)^T$, skąd macierz $D := a_1X_1+\dots+a_dX_d \in V$ jest symetryczna. Wiemy jednak, że $\operatorname{tr}(DD) = 0$, skąd $\operatorname{tr}\left(D^TD\right) = 0$, lecz wielkość ta na mocy lematu 4 jest równa sumie kwadratów wyrazów macierzy D, skąd wszystkie te wyrazy są zerami, więc $D = 0$, co z liniowej niezależności $X_1,\dots,X_d$ daje, że $a_1 = a_2 = \dots = a_d = 0$.

Jednak zauważmy, że $Y_i^T = -Y_i$, są to więc macierze antysymetryczne. Jednak przestrzeń macierzy antysymetrycznych jest wymiaru $\frac{n^2-n}{2}$: każda taka macierz jest jednoznacznie wyznaczona przez swoje wartości nad główną przekątną: taka macierz musi mieć zerową główną przekątną, zaś wartość pola a_{ij} jednoznacznie wyznacza wartość pola a_{ji}. Stąd $d \leqslant \frac{n^2-n}{2}$ na mocy lematu Steinitza.

Z drugiej strony przestrzeń macierzy, w których wszystkie pola na lub poniżej głównej przekątnej są zerowe, tj. $a_{ij} = 0$ dla $i \geqslant j$ spełnia warunek zadania (gdy weźmiemy dwie takie macierze A, B i popatrzymy na wzór z lematu 4 dla $\operatorname{tr}\left(\left(A^T\right)^T B\right)$, to zobaczymy, że jest tam suma składników, z czego każdy jest zerowy, bo dla dowolnych i, j przynajmniej jeden z warunków $i \geqslant j$, $i \leqslant j$ jest prawdziwy). Przestrzeń ta jest oczywiście wymiaru $\frac{n^2-n}{2}$, gdyż tyle jest pól nad główną przekątną, zaś wartości tam stojące mogą być dowolne: innymi słowy, przestrzeń ta jest rozpinana przez macierze, które mają w każdym polu 0 za wyjątkiem jednego, w którym mają 1.

Zadanie 5

Dowód. Niech $X(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. Na ćwiczeniach udowodniliśmy, że komutator ma zerowy ślad, skąd łatwo widać, że dla każdych A, B, można tak dobrać liczby $a, b, c \in \mathbb{R}$, żeby $AB - BA = X(a, b, c)$.

Określmy dla macierzy $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ liczbę $\det T = ad - bc$. Zauważmy teraz, że dla macierzy $U = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ mamy $\det(TU) = \det \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix} = (ap + br)(cq + ds) - (aq + bs)(cp + dr) = acpq + adps + bcqr + bdrs - acpq - adqr - bcps - bdrs = adps + bcqr - adqr - bcps = ad(ps - qr) + bc(qr - ps) = (ad - bc)(ps - qr) = \det T \cdot \det U$.

Ponieważ $(AB - BA)^n = I$, to mamy $1 = \det I = \det(AB - BA)^n = (\det(AB - BA))^n = (\det X(a, b, c))^n = (-a^2 - bc)^n$. Stąd $a^2 + bc = \pm 1$.

Zauważmy teraz, że $(X(a, b, c))^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = \pm I$, skąd na pewno $(X(a, b, c))^4 = I$.

Teraz zaś zauważmy indukcyjnie, że $(X(a, b, c))^{2k} = \pm I$, $(X(a, b, c))^{2k+1} = \pm X(a, b, c)$. Stąd gdyby $(X(a, b, c))^{2k+1} = I$, to mielibyśmy, że $I = \pm X(a, b, c)$, jednak ślad lewej strony wynosi 2, zaś prawej 0 – sprzeczność. □

Zadanie 6

Dowód. Z liniowości śladu mamy $0 = \operatorname{tr}(AA^T + BB^T - AB - A^T B^T) = \operatorname{tr}(A(A^T - B) + (B - A^T)B^T) = \operatorname{tr}(A(A^T - B)) + \operatorname{tr}((B - A^T)B^T) = \operatorname{tr}(A(A^T - B)) + \operatorname{tr}(B^T(B - A^T)) = \operatorname{tr}(A(A^T - B) - B^T(A^T - B)) = \operatorname{tr}((A - B^T)(A^T - B)) = \operatorname{tr}((A^T - B)^T(A^T - B))$, gdzie wykorzystaliśmy zerowość śladu komutatora.

Jednak na mocy lematu 4 mamy, że zerowość tego ostatniego śladu implikuje zerowość sumy kwadratów wyrazów macierzy $A^T - B$, a więc zerowość tejże macierzy, co daje $A = B^T$. □