Będę oznaczał różnicę symetryczną przez $\triangle$.

Określmy funkcję $\psi : P_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ w następujący sposób:

$$\psi(X)(n) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n \notin X \\ 1 & \text{gdy } n \in X \end{cases}$$

Oczywiście jest to iniekcja, zaś każda wartość funkcji ψ jest ciągiem od pewnego miejsca stale równym zero. Ponadto, każdy ciąg od pewnego miejsca stale równy zero jest wartością funkcji ψ – wystarczy po prostu skonstruować zbiór X używając reguł definiujących funkcję ψ.

Gdy $X \neq Y$, to zauważmy, że $X \triangle Y$ to dokładnie zbiór tych liczb, które należą do dokładnie jednego ze zbiorów X, Y, są to zatem dokładnie te liczby, które opisują pozycje w ciągach $\psi(X)$ oraz $\psi(Y)$, na których te ciągi się różnią.

1 Relacja $\leqslant_1$

Lemat 1. *Jeśli* $A, B \in P_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$ *są takie, że* $A \leqslant_1 B$*, to* $\max A \leqslant \max B$.

Dowód. Gdy $A = B$ teza zachodzi trywialnie. Załóżmy zatem, że $A \neq B$. Przypuśćmy, że $\max B < \max A$. Wtedy oczywiście mamy, że $\max A \notin B$, zatem $\max A \in A \triangle B$. Stąd $\max(A \triangle B) \geqslant \max A$.

Z definicji, $\max(A \triangle B) \in A \triangle B$. Jednak jak łatwo widać, $A \triangle B \subseteq A \cup B$, jednak $\max(A \cup B) = \max(\max A, \max B)$. Skoro jednak $\max B < \max A$, to $\max(A \cup B) = \max A$. Jednak to nam daje, że $\max(A \triangle B) \leqslant \max(A \cup B) \leqslant \max A$.

Zatem $\max(A \cup B) = \max A$. Jednak z założenia, $\max(A \cup B) \in B$. Stąd jednak mamy, że $\max B \geqslant \max(A \cup B) = \max A$, wbrew założeniu. □

Zdefiniujmy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zbiór

$$\mathcal{X}_n = \{X \in P_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \mid \forall_{m \in \mathbb{N}}. m > n \implies m \notin X\}$$

tj. zbiór wszystkich podzbiorów $\mathbb{N}$ ograniczonych z góry przez n. Określmy teraz funkcję $\varphi_n : \mathcal{X}_n \to \{0,1\}^{n+1}$ jako:

$$\varphi_n(X)(i) = \psi(X)(n-i)$$

dla $i = 0, 1, \ldots, n$ – tj. $\varphi_n(X)$ jest ciągiem polegającym na wzięciu pierwszych $n+1$ bitów ciągu $\psi(X)$ (bo wszystkie pozostałe są na pewno zerami) i przeczytaniu ich wspak. Oczywiście łatwo widać, że φ_n jest bijekcją, czego dowód jest analogiczny jak w wielu innych zadaniach z prac domowych – jest to po prostu prosta modyfikacja funkcji przyporządkowującej zbiorowi jego indykator.

Zauważmy teraz, że dla $A, B \in \mathcal{X}_n$ mamy $A \leqslant_1 B \iff \varphi_n(A) \leqslant_{\text{lex}} \varphi_n(B)$. Dla $A = B$ jest to trywialne. Dla $A \neq B$, mamy, że warunek $\max(A \triangle B) \in A$ (czyli istota tego, żeby $A <_1 B$, bo $A \neq B \implies A \triangle B \neq \varnothing$), oznacza dokładnie tyle, że na najpóźniejszej pozycji, na której ciągi $\psi(A)$ oraz $\psi(B)$ się różnią, $\psi(A)$ ma wartość 0, zaś $\psi(B)$ ma wartość 1. Prawa strona równoważności zaś jest temu równoważna, gdyż pierwsza pozycja, na której różnią się ciągi $\varphi_n(A)$ oraz $\varphi_n(B)$ to z definicji ostatnia pozycja, na której różnią się ciągi $\psi(A)$ oraz $\psi(B)$.

Stąd obcięcie relacji $\leqslant_1$ do zbioru $\mathcal{X}_n$ jest relacją częściowego porządku, gdyż $\leqslant_{\text{lex}}$ taką jest.

Stąd łatwo widać, że gdy weźmiemy $X \in P_{\text{fin}}(\mathbb{N})$, to biorąc odpowiednio duże n (tj. takie, żeby $X \in \mathcal{X}_n$), uzyskamy, że $X \leqslant_1 X$. Tak samo biorąc $X, Y \in P_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ oraz wystarczająco duże n dostajemy, że $X \leqslant_1 Y \wedge Y \leqslant_1 X \implies X = Y$. Analogicznie biorąc $A, B, C \in P_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ i odpowiednio duże n otrzymamy, że $A \leqslant_1 B \wedge B \leqslant_1 C \implies A \leqslant_1 C$, gdzie wszystkie te własności wynikną z odpowiednich własności porządku leksykograficznego. Stąd $\leqslant_1$ jest relacją częściowego porządku.

Pokażemy teraz, że jest to relacja dobrze ufundowana. Przypuśćmy nie wprost, że $C_1, C_2, \ldots$ jest nieskończonym ciągiem malejącym. Z lematu 1 mamy, że dla każdego $i \in \mathbb{N}$, ponieważ $C_i \leqslant_1 C_1$, to $\max C_1 \geqslant \max C_i$, zatem $\max C_1$ jest ograniczeniem górnym wszystkich zbiorów $C_1, C_2, \ldots$. Jednak daje to, że $C_i \in \mathcal{X}_{\max C_1}$, zatem relacja $\leqslant_1$ na tych zbiorach jest izomorficzna z relacją $\leqslant_{\text{lex}}$ na krotkach długości $\max C_1$, która jak było na wykładzie, jest dobrze ufundowana. Daje to sprzeczność, gdyż $\varphi_{\max C_1}(C_1), \varphi_{\max C_1}(C_2), \ldots$ stanowiłby nieskończony ciąg malejący w tej relacji.

2 Relacja $\leqslant_2$

Niech teraz $\preceq$ będzie porządkiem leksykograficznym na zbiorze ciągów binarnych od pewnego miejsca równych zeru, przy czym alfabet jest uporządkowany $1 < 0$. Zauważmy teraz, że dla $X, Y \in P_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ zachodzi, że $X \leqslant_2 Y \iff \psi(X) \preceq \psi(Y)$.

Istotnie, jeśli $X = Y$, to $\psi(X) = \psi(Y)$ i odwrotnie (bo ψ jest iniekcją). Gdy $X \neq Y$, to zauważmy, że $X \triangle Y$ to dokładnie zbiór tych liczb, które należą do dokładnie jednego ze zbiorów X, Y, są to zatem dokładnie te liczby, które opisują pozycje w ciągach $\psi(X)$ oraz $\psi(Y)$, na których te ciągi się różnią. Warunek $\min(X \triangle Y) \in X$ oznacza dokładnie tyle, że na najwcześniejszej pozycji, na której ciągi $\psi(X)$ i $\psi(Y)$ się różnią, $\psi(X)$ ma wartość 1, (bo $\min(X \triangle Y) \in X$), zaś $\psi(Y)$ ma wartość 0, co jest dokładnie definicją porządku leksykograficznego nad alfabetem $1 < 0$. Zatem istotnie $\leqslant_2$ jest porządkiem izomorficznym z $\preceq$, gdyż ψ jest bijekcją zachowującą porządek.

Jednak $\preceq$ jest porządkiem częściowym, zatem $\leqslant_2$ także. Ponadto w $\preceq$ istnieje nieskończony ciąg malejący $c_1, c_2, \ldots$ zadany jako:

$$c_n = \underbrace{111\ldots11}_{n}00000000\ldots$$

Istotnie, $c_{n+1} \preceq c_n$, gdyż pierwszą pozycją na której się one różnią jest $(n+1)$-sza, zaś na niej c_{n+1} ma jedynkę, a c_n zero. Zatem $\preceq$ nie jest dobrze ufundowany, skąd i $\leqslant_2$ nie jest.