# Zadanie 1

Mamy na mocy nierówności $\frac{t}{t+1} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$, że:

$$\frac{n}{n+1} = (n^3-n^2)\frac{-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} + n \leqslant (n^3-n^2)\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + n \leqslant (n^3-n^2)\frac{-1}{n^2} + n = 1$$

Jednak obie skrajne strony dążą do 1, więc mamy $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n^3-n^2)\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+n\right) = 1$, który to fakt oznaczmy †.

Określmy $a_n = n(H_n - \ln n - \gamma)$, chcemy wtedy policzyć $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{H_n - \ln n - \gamma}{\frac{1}{n}} \overset{S}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1)}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} n(n-1)\left(\ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n-1}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{(n-1)^2}} \overset{S}{=} \\
&\overset{S}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)\right) - \left(\frac{n}{n-1}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n-1)^2}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)\right) - \left(\frac{n}{n-1}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{-2n+1}{n^2(n-1)^2}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n-1)^2\left(\frac{n+1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - \frac{n}{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{n-1}\right)}{-2n+1} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)^2\left(\frac{n+1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - \frac{n}{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{n-1}\right)}{-2+\frac{1}{n}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - (n-1)^2 - n^2(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) + n(n-1)}{-2+\frac{1}{n}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3-n^2-n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n^2 + 2n - 1 - (n^3-n^2)\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) + n^2 - n)}{-2+\frac{1}{n}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3-n^2)\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right) + n - \overbrace{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{\to 1} + \overbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{\to 0} - 1}{-2+\frac{1}{n}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3-n^2)\left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\right)\right) + n - 2}{-2+\frac{1}{n}} = \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3-n^2)\left(\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right) + n}{-2+\frac{1}{n}} = 1 + \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left((n^3-n^2)\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+n\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-2+\frac{1}{n}\right)} \overset{\dagger}{=} \\
&\overset{\dagger}{=} 1 + \frac{1}{-2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

# Zadanie 2

Zauważmy, że dla $n > \max(x, y) + 1$ wyrazy szeregu mają stały znak: każdy kolejny wyraz powstaje z przemnożenia poprzedniego przez dodatnią liczbę $\frac{x+n-1}{y+n-1}$. W związku z tym można obłożyć wyrazy modułem i zastosować znane kryteria dla szeregów o wyrazach dodatnich (chyba, że $x$ jest niedodatnią liczbą całkowitą, wtedy bowiem od pewnego miejsca wyrazy się zerują).

Zapiszmy kryterium Raabego dla tego szeregu: niech $b_n = n\left(\frac{\frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{y(y+1)\cdots(y+n-1)}}{\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)}} - 1\right) = n\left(\frac{y+n}{x+n} - 1\right) = n\frac{y-x}{x+n} = \frac{y-x}{\frac{x}{n}+1} \to y - x$.

Gdy $y - x > 1$, to rozważany szereg jest więc zbieżny, gdy zaś $y - x < 1$ – rozbieżny.

Pozostaje jedynie przypadek $y = 1 + x$:

Wtedy $n$-ty wyraz szeregu przybiera postać $\frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{y(y+1)\cdots(y+n-1)} = \frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{x}{x+n}$. Jednak widać, że gdyby szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{x+n}$ był zbieżny (dla $x \neq 0$), to zbieżny byłby także szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x+n}$, który jest rozbieżny na mocy kryterium zagęszczeniowego Cauchy'ego – dowód analogiczny jak dla szeregu harmonicznego.

Stąd: dla $y$ całkowitego niedodatniego, nie można mówić o szeregu z powodu zer w mianowniku, dla $x$ całkowitego niedodatniego szereg jest zbieżny, w pozostałych zaś przypadkach jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $y > 1 + x$.

# Zadanie 3

Oznaczmy $q_i = \frac{1}{(j_1-j_i)(j_2-j_i)\cdots(j_{i-1}-j_i)(j_{i+1}-j_i)\cdots(j_m-j_i)}$. Zauważmy teraz, że:

$$\frac{1}{(n+j_1)(n+j_2)\cdots(n+j_m)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i}{n+j_i}$$

Istotnie, wymnażając równoważnie stronami przez $(n+j_1)\cdots(n+j_m)$ uzyskujemy:

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n+j_1)(n+j_2)\cdots(n+j_{i-1})(n+j_{i+1})\cdots(n+j_m)}{(j_1-j_i)(j_2-j_i)\cdots(j_{i-1}-j_i)(j_{i+1}-j_i)\cdots(j_m-j_i)}$$

Co jest prawdą: jest to wielomian interpolacyjny Lagrange'a[1] dla par $(-j_1, 1), (-j_2, 1), \ldots, (-j_m, 1)$.

Ponieważ jest to równość wielomianów, to w szczególności zgadzają się współczynniki przy $n^{m-1}$ po obu stronach. Po lewej jest to $0$ (bo $m > 2$), zaś po prawej $\sum_{i=1}^{m} q_i$. Oznaczmy jeszcze $M = \sum\limits_{i=1}^{m} |q_i|$.

Oznaczmy teraz $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+j_1)(n+j_2)\cdots(n+j_m)}$. Mamy $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{q_i}{n+j_i} = \sum\limits_{n=1+j_1}^{N+j_m} \frac{\alpha_{N,n}}{n}$, gdzie wykonując ostatnie przejście pogrupowaliśmy wyrazy sumy (skończonej) po mianownikach, zaś $\alpha_{N,n}$ są pewnymi stałymi, wziętymi z sumowania odpowiednich liczników, tj. liczb $q_z$ dla pewnych $z$. Stąd łatwo $|\alpha_{N,n}| \leqslant M$ na mocy nierówności trójkąta.

Zauważmy jednak, że dla $1 + j_m \leqslant n \leqslant N + j_1$ mamy $\alpha_{N,n} = 0$. Istotnie, każdy taki mianownik $n$ zostanie osiągnięty w wyniku sumowania: $\frac{q_1}{(n-j_1)+j_1} + \frac{q_2}{(n-j_2)+j_2} + \ldots + \frac{q_m}{(n-j_m)+j_m}$, co da w liczniku sumę $q_1 + \ldots + q_m = 0$.

Ponadto dla dostatecznie dużych $N$ (tj. większych niż $j_m$) liczby $\alpha_{N,i}$ dla $i = 1, 2, \ldots, j_m$ nie zmieniają się przy zwiększeniu $N$. Istotnie, żaden z mianowników $1, 2, \ldots, j_m$ nie będzie osiągnięty przez wyrażenia $\frac{q_i}{n+j_i}$ dla $n > j_m$.

Stąd $S_N = \sum\limits_{n=1}^{j_m} \frac{\alpha_{j_m+1,n}}{n} + \sum\limits_{n=N+j_1+1}^{N} \frac{\alpha_{N,n}}{n}$.

Drugi składnik jest sumą $j_1$ wyrazów, z których każdy dąży do $0$, gdy $N$ dąży do nieskończoności, gdyż $\frac{-M}{n} \leqslant \frac{\alpha_{N,n}}{n} \leqslant \frac{M}{n}$.

Stąd $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{n=1}^{j_m} \frac{\alpha_{j_m+1,n}}{n}$, lecz skoro liczby $q_i$ były wymierne, to liczby $\alpha_{N,n}$ jako ich sumy także. Stąd $S \in \mathbb{Q}$.

# Zadanie 4

Gdy $x \in \mathbb{N}$, szereg jest skończony, a więc zbieżny. Załóżmy więc, że $x \notin \mathbb{N}$. Oznaczmy $a_n = \binom{x}{n} n^{\alpha}$.

## Przypadek, gdy $\alpha \geqslant x + 1$

Pokażemy, że wtedy $\lim |a_n| \neq 0$, więc w szczególności szereg $\sum_n a_n$ nie jest zbieżny. W tym celu pokażemy, że ciąg $b_n = \left|\binom{x}{n}(n-x)^{\alpha}\right|$ nie jest zbieżny do zera.

[1] było na GAL-u

Mamy bowiem, że dla $n > x$ zachodzi $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n-x}{n+1}\frac{(n-x+1)^\alpha}{(n-x)^\alpha} = \frac{n-x}{n+1}\left(1+\frac{1}{n-x}\right)^\alpha \geqslant \frac{n-x}{n+1}\left(1+\frac{\alpha}{n-x}\right) \geqslant \frac{n-x}{n+1}\left(1+\frac{x+1}{n-x}\right) = \frac{n-x}{n+1}\frac{n+1}{n-x} = 1$, skąd ciąg $b_n$ jest niemalejący i łatwo widać, że niezerowy, a więc nie dąży do 0.

Gdyby jednak $\lim |a_n| = 0$, to w szczególności mnożąc ten ciąg przez zbieżny do 1 ciąg $\left(\frac{n-x}{n}\right)^\alpha$ uzyskalibyśmy zbieżność do zera ciągu $b_n$, co jak udowodniliśmy nie jest prawdą.

Stąd szereg $\sum_n a_n$ nie jest zbieżny.

## Przypadek, gdy $\alpha < x+1$

### Podprzypadek, gdy $x+1 \geqslant 0$

Wtedy zauważmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\binom{x}{n}(n+1)^{x+1}\right| \in \mathbb{R}$. Istotnie, wyrazy tego ciągu są dodatnie[2] wystarczy więc pokazać, że są malejące. W tym celu policzmy iloraz wyrazu $n+1$-szego przez $n$-ty.

Wynosi on (po skróceniu powtarzających się wyrazów symbolu Newtona i wzięciu modułu[3]): $\frac{n-x}{n+1}\cdot\frac{(n+2)^{x+1}}{(n+1)^{x+1}}$. Zauważmy jednak, że

$$(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{x+1}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{n-x}-1}{\frac{n+1}{n-x}} \leqslant \ln\frac{n+1}{n-x}$$

Obkładając obie strony funkcją wykładniczą uzyskujemy $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{x+1} \leqslant \frac{n+1}{n-x}$, czyli poszukiwane $\frac{n-x}{n-1}\frac{(n+2)^{x+1}}{(n+1)^{x+1}} \leqslant 1$. Stąd ciąg $\left|\binom{x}{n}(n+1)^{x+1}\right|$ jest zbieżny. Jednak przemnożony przez również dodatni i nierosnący ciąg $\left((n+1)^{\alpha-(x+1)}\right)$ zbieżny do 0 daje on ciąg $\left(\left|\binom{x}{n}(n+1)^\alpha\right|\right)$, który stąd jest malejący monotonicznie do 0. Stąd kryterium Leibniza daje, że szereg $\sum_n \binom{x}{n}(n+1)^\alpha$ jest zbieżny. Jednak ciąg $d_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = \left(1-\frac{1}{n-1}\right)^\alpha$ jest monotoniczny i zbieżny, a więc ograniczony, skąd na mocy kryterium Abela szereg $\sum_n \binom{x}{n}(n+1)^\alpha\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = \sum_n a_n$ jest zbieżny.

### Podprzypadek, gdy $x+1 < 0$

Zauważmy, że wtedy dla $n > x$:

$$(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant (x+1)\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{x+1}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{n-x}-1}{\frac{n+1}{n-x}} \leqslant \ln\frac{n+1}{n-x}$$

Obkładając skrajne wyrażenia funkcją wykładniczą uzyskujemy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1} \leqslant \frac{n+1}{n-x}$, czyli $1 \geqslant \frac{n-x}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{x+1}$, skąd ciąg $\left(\left|\binom{x}{n}n^{x+1}\right|\right)$ jest nierosnący, zaś jest ograniczony z dołu przez 0, skąd jest zbieżny. Jednak przemnożony przez również dodatni i nierosnący ciąg $\left(n^{\alpha-(x+1)}\right)$ zbieżny do 0 daje on ciąg $(|a_n|)$, który stąd jest malejący monotonicznie do 0.

Jednak (jak wspomnieliśmy na ćwiczeniach), dla dostatecznie dużych $n$ znaki $\binom{x}{n}$ są naprzemienne: każdy kolejny taki symbol powstaje z przemnożenia poprzedniego przez $\frac{x-n+1}{n} < 0$. Stąd na mocy kryterium Leibniza, szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny.

# Zadanie 5

Oznaczmy $a_n = n^{-2}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)$.

Zauważmy, że dla $n > x$ wyrazy $a_n$ oraz $a_{n+1}$ mają taki sam znak. Istotnie, wtedy $1+\frac{x}{n+1} > 0$, a także $n^{-2}, (n+1)^{-2} > 0$, a więc iloraz jest dodatni.

Zastosujmy więc kryterium Raabego:

$$\begin{aligned} b_n &= n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = n\left(\frac{n^{-2}}{(n+1)^{-2}}\frac{1}{1+\frac{x}{n+1}}-1\right) = \\ &= \frac{(n+1)^2}{n}\frac{n+1}{x+n+1} - n = \frac{(n+1)^3 - n\cdot n\cdot(x+n+1)}{n(x+n+1)} = \\ &= \frac{n^3+3n^2+3n+1-n^2x-n^3-n^2}{nx+n^2+n} = \frac{(2-x)+3n^{-1}+n^{-2}}{n^{-1}(x+1)+1} \to 2-x \end{aligned}$$

[2] gdyby któryś był zero, to łatwo widać, że wszystkie kolejne też, co da zbieżność do liczby rzeczywistej 0

[3] dla dostatecznie dużych $n$ mamy $n > x$

Stąd gdy $2 - x > 1$, tj. gdy $x < 1$, szereg jest zbieżny, zaś dla $2 - x < 1$, tj. dla $x > 1$ – szereg jest rozbieżny. Pozostaje przypadek $x = 1$. Wtedy mamy $a_n = n^{-2} \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = n^{-2} \frac{n+1}{1} = \frac{n+1}{n^2}$.

Jednak $\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$, a więc dla $x = 1$, na mocy kryterium porównawczego oraz rozbieżności szeregu harmonicznego, badany szereg jest rozbieżny.

# Zadanie 6

Na wykładzie udowodniliśmy, że $\sum_n \cos(nx)$ ma sumy ograniczone dla dowolnego $x$, dla którego $\cos x \neq 1$. Stąd łatwo mamy, że $\sum_n \cos((n-1)\pi)$ ma sumy ograniczone, a więc na mocy kryterium Dirichleta szereg $\sum_n \frac{\cos((n-1)\pi)}{(\ln n)^2}$ jest zbieżny. Analogicznie mamy dla szeregu $\sum_n \frac{\sin((n-1)\pi)}{(\ln n)^2}$.

Dla dostatecznie dużych $n$ ciągi $\sin \frac{\pi}{n+1}$ oraz $\cos \frac{\pi}{n+1}$ są monotoniczone i ograniczone. Stąd na mocy kryterium Abela mamy, że szeregi $\sum_n \frac{\cos((n-1)\pi)}{(\ln n)^2} \cos \frac{\pi}{n+1}$ oraz $\sum_n \frac{\sin((n-1)\pi)}{(\ln n)^2} \sin \frac{\pi}{n+1}$ są zbieżne. Stąd ich różnica jest zbieżna, ale $\sum_n \left( \frac{\cos((n-1)\pi)}{(\ln n)^2} \cos \frac{\pi}{n+1} - \frac{\sin((n-1)\pi)}{(\ln n)^2} \sin \frac{\pi}{n+1} \right) = \sum_n \frac{\cos\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{n+1}\right)}{(\ln n)^2} = \sum_n \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{(\ln n)^2}$, stąd ten ostatni szereg jest zbieżny, skąd teza.

# Zadanie 7

Zauważmy, że na mocy nierówności Bernoulliego mamy: $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} \geqslant 1 + \frac{1}{3n^2}$ oraz $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{3}} \geqslant 1 - \frac{1}{3n^2} = \frac{3n^2-1}{3n^2}$, skąd łatwo

$$\frac{3n^3}{3n^2 - 1} \geqslant \underbrace{n\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}}_{= \sqrt[3]{n^3+n}} \geqslant n + \frac{1}{3n} \tag{1}$$

Szeregi $\sum_n \cos n$ oraz $\sum_n \sin n$ mają ograniczone sumy częściowe, zatem szeregi $\sum_n \frac{\cos n}{\ln n}$ oraz $\sum_n \frac{\sin n}{\ln n}$ są zbieżne na mocy kryterium Dirichleta, bo $\frac{1}{\ln n}$ jest zbieżny monotonicznie do 0. Teraz zauważmy, że funkcje $\cos \frac{1}{3n}$ oraz $\sin \frac{1}{3n}$ są dla dostatecznie dużych $n$ monotoniczne i ograniczone. Stąd na mocy kryterium Abela, szeregi $\sum_n \frac{\cos n}{\ln n} \sin \frac{1}{3n}$ oraz $\sum_n \frac{\sin n}{\ln n} \cos \frac{1}{3n}$ są zbieżne. Teraz dodając je mamy, że szereg $\sum_n \frac{\cos n \sin \frac{1}{3n} + \sin n \cos \frac{1}{3n}}{\ln n} = \sum_n \frac{\sin\left(n + \frac{1}{3n}\right)}{\ln n}$ jest zbieżny.

Teraz pokażę, że szereg $\sum_n \frac{\sin\left(n+\frac{1}{3n}\right) - \sin \sqrt[3]{n^3+n}}{\ln n}$ jest zbieżny bezwzględnie. W tym celu należy udowodnić zbieżność szeregu $\sum_n \left| \frac{\sin\left(n+\frac{1}{3n}\right) - \sin \sqrt[3]{n^3+n}}{\ln n} \right|$. Mamy jednak, że dla dostatecznie dużych $n$ na mocy lipschitzowskości sinusa:

$$\left| \sin\left(n + \frac{1}{3n}\right) - \sin \sqrt[3]{n^3+n} \right| \leqslant \left| n + \frac{1}{3n} - \sqrt[3]{n^3+n} \right| \overset{1}{\leqslant} \frac{3n^3}{3n^2-1} - \left(n + \frac{1}{3n}\right)$$
$$= \frac{3n^3 \cdot 3n - (3n^2-1) \cdot n \cdot 3n - (3n^2-1)}{3n(3n^2-1)} = \frac{1}{9n^3 - 3n} < \frac{1}{n^3}$$

Jednak szereg o wyrazie $\frac{1}{n^3}$ jest zbieżny, jak pokazaliśmy na wykładzie.

Stąd szereg $\sum_n \left| \sin\left(n + \frac{1}{3n}\right) - \sin \sqrt[3]{n^3+n} \right|$ jest zbieżny, a zatem szereg $\sum_n \frac{\sin\left(n+\frac{1}{3n}\right) - \sin \sqrt[3]{n^3+n}}{\ln n}$ jest zbieżny bezwzględnie, na mocy kryterium porównawczego.

Odejmując go od zbieżnego szeregu $\sum_n \frac{\sin\left(n+\frac{1}{3n}\right)}{\ln n}$ mamy zbieżność szeregu $\sum_n \frac{\sin \sqrt[3]{n^3+n}}{\ln n}$, czego należało dowieść.