Wiemy, że

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \tag{1}$$

$$\lim \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \tag{2}$$

Zauważmy teraz, że

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1 \tag{3}$$

Zapiszmy więc

$$\begin{aligned}
q_{n+1} :=& \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
=& \frac{\frac{(n+1)!\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(n)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{n^n}} \\
=& (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} \\
=& \frac{n^n}{(n+1)^n}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} \\
=& \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} \\
=& \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2-1}} \\
\stackrel{3}{=}& \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n^2-1} \\
=& \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2-1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n^2-1} \\
=& \left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^2\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n^2-1} \\
\geqslant& \left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^2\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

Co jak widać, z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy, oraz twierdzenia o granicy podciągu, mamy, że wyrażenie to dąży do $e^2e^{-1} = e$. W związku z tym, dla $n > n_0$, zachodzi $q_n > 2$.

Jednak wtedy dla $n > n_0$ zachodzi: $a_n = a_{n_0-1}q_{n_0}q_{n_0+1}\cdots q_n \geqslant a_{n_0-1}2^{n-n_0}$, jednak $a_{n_0-1} > 0$, więc z twierdzenia o dwóch ciągach, $\lim a_n = \infty$.