Zadanie 1a

Rozważmy wpierw problem COOKIES', będący wersją problemu COOKIES, w którym dodatkowo można żądać, żeby pewne pary krawędzi miały przydzielony ten sam rodzaj ciasteczek.

Cookies, Cookies' $\in$ NP

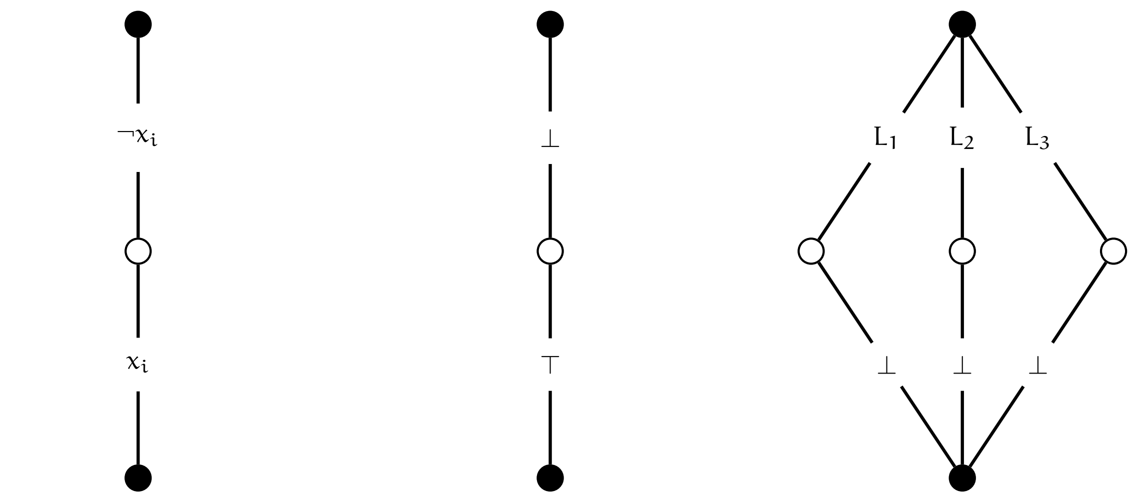
Oczywiście niedeterministyczna maszyna Turinga może łatwo w czasie wielomianowym rozstrzygnąć oba te problemy, wybierając niedeterministycznie ciasteczka dla każdej z krawędzi, a następnie zweryfikować, czy spełnione są wszystkie wymagania.

W obu przypadkach świadkami są przydziały ciasteczek.

Redukcja 3-SAT $\leqslant_P$ Cookies'

Rozważmy instancję problemu 3-SAT: $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$, gdzie C_k jest alternatywą trzech literałów, tj. x_i lub $\neg x_i$ dla $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Rozważmy graf G zbudowany z n gadżetów przedstawionych na rys. 1a, 1 gadżetu przedstawionego na rys. 1b oraz m gadżetów przedstawionych na rys. 1c, przy czym wszystkie te gadżety są parami rozłączne. Jest on oczywiście rozmiaru liniowego ze względu na rozmiar wejścia (z oczywistych względów mogę pomijać nieużywane zmienne).



(a) Gadżet zmiennej x_i (b) Gadżet prawdy/fałszu (c) Gadżet klauzuli $C = L_1 \vee L_2 \vee L_3$

Rysunek 1: Gadżety używane w konstrukcji. W każdym gadżecie para wierzchołków oznaczonych na czarno należy do zbioru S.

Wymagamy teraz, żeby krawędzie oznaczone tym samym symbolem miały przydzielone to samo ciasteczko, tj. każde $\perp$ występujące w każdym gadżecie klauzuli oraz w gadżecie prawdy/fałszu; a także każde x_i lub $\neg x_i$ kryjące się pod L_j w klauzulach.

Twierdzę, że szukane wartościowanie w 3-SAT istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje poprawny przydział ciasteczek w grafie G.

Wartościowanie $\mapsto$ przydział ciasteczek Załóżmy najpierw, że wartościowanie 3-SAT istnieje. Wtedy przydzielamy wszystkim krawędziom $\perp$ ciasteczka owocowe, wszystkim jednej krawędzi $\top$ ciasteczka czekoladowe, zaś krawędziom x_i – czekoladowe, jeśli w tym wartościowaniu zmienna x_i jest prawdziwa, zaś owocowe w przeciwnym wypadku. Krawędzie $\neg x_i$ mają ciasteczka przeciwne do ciasteczek x_i.

Oczywiście spełniliśmy warunki, żeby tak samo oznaczone krawędzie miały ten sam rodzaj ciasteczek. Pozostaje sprawdzić, czy dla każdej pary wierzchołków należącej do zbioru S istnieje ścieżka, na której nie powtarza się rodzaj ciasteczek. Dla par wynikających z gadżetów 1a oraz 1b jest to natychmiastowe. Dla pary wynikłej z gadżetu 1c wiemy, że któraś z klauzul L_1, L_2 lub L_3 jest prawdziwa przy rozważanym wartościowaniu, a zatem któraś z krawędzi im odpowiadających ma przypisane ciasteczka czekoladowe. Krawędź ta, przedłużona owocową krawędzią „w dół” daje poszukiwaną różnociasteczkową ścieżkę długości dwa z „górnego” do „dolnego” wierzchołka gadżetu.

Przydział ciasteczek $\mapsto$ wartościowanie Bez straty ogólności, możemy przyjąć, że krawędź $\top$ ma przydzielone ciasteczka czekoladowe, w razie potrzeby zamieniając rodzaje ciasteczek miejscami. Twierdzę, że wartościowanie, które przypisuje zmiennej x_i prawdę wtedy i tylko wtedy, gdy krawędzie etykietowane x_i są czekoladowe, jest świadectwem spełnialności rozważanej formuły 3-SAT.

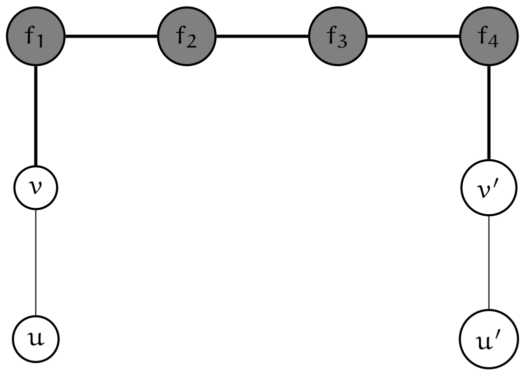
Istotnie, musimy pokazać, że każda klauzula jest spełniona, niech więc będzie to klauzula $C = L_1 \vee L_2 \vee L_3$. Popatrzmy na odpowiadający jej gadżet. Oczywiście wszystkie krawędzie w tym gadżecie oznaczone $\perp$ mają ciasteczka owocowe, gdyż gadżet prawdy/fałszu wymusza, żeby krawędzie $\top$ i $\perp$ miały przeciwne rodzaje ciasteczek. Któraś z krawędzi oznaczonych L_1, L_2, L_3 ma przypisane ciasteczka czekoladowe, co jest wymuszone przez to, że „górny” i „dolny” wierzchołek gadżetu są parą w S, zaś istnieją jedynie trzy ścieżki długości conajwyżej dwa między nimi, etykietowane: $L_1\perp$, $L_2\perp$, $L_3\perp$.

Dla ustalenia uwagi załóżmy, że krawędź L_1 ma przypisane ciasteczka czekoladowe. Teraz widzimy, że jeśli $L_1 = x_i$, to krawędź x_i ma przypisane ciasteczka czekoladowe, a zatem zmiennej x_i przypisaliśmy prawdę, więc literał L_1 jest spełniony, a zatem klauzula C jest spełniona. Jeśli jednak $L_1 = \neg x_i$, to krawędź $\neg x_i$ ma przypisane ciasteczka czekoladowe, co wobec gadżetu zmiennej x_i implikuje, że krawędź x_i ma przypisane ciasteczka owocowe, a zatem zmienną x_i wartościujemy na fałsz, a zatem $\neg x_i$ jest prawdą, czyli C jest spełniona.

Redukcja Cookies' $\leqslant_P$ Cookies

Niech graf G, ze zbiorem par wierzchołków S oraz zbiorem par krawędzi T będzie instancją problemu Cookies'.

Zbudujemy graf G' ze zbiorem par wierzchołków S' poprzez dołożenie nowych wierzchołków i krawędzi dla każdego elementu zbioru T, w sposób opisany na rys. 2. Konstrukcja ta jest oczywiscie wielomianowa (a nawet liniowa) ze względu na rozmiar instancji (G, S, T).



Rysunek 2: Gadżet wymuszający równość rodzajów ciasteczek krawędzi uv oraz $u'v'$. Nowo dorzucone wierchołki (osobne dla każdej instancji gadżetu) są zaznaczone na szaro, nowo dorzucone krawędzie są pogrubione. Do zbioru S dorzucamy pary $\{u, f_1\}, \{v, f_2\}, \{f_1, f_3\}, \{f_2, f_4\}, \{f_3, v'\}, \{f_4, u'\}$.

Oznaczmy przez $c(e)$ rodzaj ciasteczek przypisany krawędzi e. Jeśli $uv, u'v' \in T$, to musimy zapewnić, że $c(uv) = c(u'v')$. Zauważmy, że w gadżecie z rys. 2 dla każdej pary dorzuconych do S par wierzchołków, istnieje tylko jedna ścieżka między nimi długości conajwyżej 2.

Zatem narzucone więzy oznaczają, że $c(uv) \neq c(vf_1) \neq c(f_1f_2) \neq c(f_2f_3) \neq c(f_3f_4) \neq (f_4v') \neq c(v'u')$, (zapis $x \neq y \neq z$ rozumiem jako skrót notacyjny zapisu $x \neq y \wedge y \neq z$). skąd ponieważ mamy tylko dwa rodzaje ciasteczek, a zatem możemy dokonywać eliminacji podwójnej negacji, otrzymujemy, że jest to równoważne: $c(uv) = c(f_1f_2) = c(f_3f_4) = c(v'u') \neq c(vf_1) = c(f_2f_3) = c(f_4v')$.

Oczywiście, jeśli mamy dowolne przypisanie ciasteczek w problemie Cookies' dla G, zgodne z S oraz T, to możemy łatwo zgodnie z powyższym wzorem przypisać ciasteczka dla krawędzi dorzuconych przez wszystkie gadżety, uzyskując poprawne przypisanie ciasteczek w problemie Cookies w grafie G' zgodnym z S'.

W drugą stronę, jeśli mamy poprawne przypisanie ciasteczek w problemie Cookies dla grafu G', zgodne z S', to na mocy powyższych równości $c(e) = c(e')$ dla $\{e, e'\} \in T$, a zatem obcinając to przypisanie do grafu G orzymujemy poprawne przypisanie w problemie Cookies' dla grafu G, zgodne z S (oczywiście) i T.