1 Zadanie

1.1 Część a

Dowód. Załóżmy nie wprost, że taki punkt nie istnieje. Niech ℓ będzie symetralną odcinka PQ. Niech teraz $\mathcal{B} = \{A \cap (PR \cup RQ) | R \in \ell\}$. Skoro dla każdego punktu R przynajmniej jeden z odcinków PR, RQ nie jest rozłączny z A, to znaczy, że w szczególności jest to prawda dla punktów $R \in \ell$.

Stąd $\mathcal{B}$ jest niepustą rodziną niepustych zbiorów. Ponadto, dla $R_1 \neq R_2$ zbiory $PR_1 \cup R_1Q$ i $PR_2 \cup R_2Q$ mają przecięcie równe: $\{P, Q\}$, lecz żaden z tych punktów nie należy do A, zatem $\mathcal{B}$ jest rodziną parami rozłącznych zbiorów.

Niech więc $\psi : \mathcal{B} \to A$ będzie funkcją wyboru na $\mathcal{B}$. Jak już powiedzieliśmy, $\mathcal{B}$ jest rodziną parami rozłącznych zbiorów, stąd ψ jest injekcją.

Jednak łatwo widać, że ψ daje nam także injekcję z ℓ w A. Istotnie, każdy element $\mathcal{B}$ jest jednoznacznie wyznaczony przez $R \in \ell$. Formalnie: niech $\hat{\psi} : \ell \to A$ daną jako $\hat{\psi}(R) = \psi(A \cap (PR \cup RQ))$. Wtedy $\hat{\psi}$ jest injekcją. Gdyby bowiem dla pewnych $R_1 \neq R_2$ było $\hat{\psi}(R_1) = \hat{\psi}(R_2)$, to mielibyśmy, że $\psi(A \cap (PR_1 \cup R_1Q)) = \psi(A \cap (PR_2 \cup R_2Q))$, jednak lewa strona należy do $PR_1 \cup R_1Q$, zaś prawa do $PR_2 \cup R_2Q$, a są to zbiory rozłączne.

Stąd mamy, że $\mathfrak{C} = |\ell| \leqslant |A| \leqslant \aleph_0$, co jest sprzecznością. □

1.2 Część b

Niech $R = \{\{(T, V) | T, V \in \pi \wedge T \neq V\} | \pi \in L\}$, zaś $\psi : R \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ będzie funkcją wyboru na R, natomiast $K = \{X | \exists_{t \in R} (\psi(t) = (X, Y) \vee \psi(t) = (Y, X))\}$ Innymi słowy: z każdej prostej z L. wybieramy dwa różne punkty i czynimy z nich zbiór K. Oczywiście $K \subseteq \mathcal{L}$. Łatwo teraz widać, że ponieważ L był przeliczalny, to R także, stąd i K.

Lemat 1. *Dla dowolnych stałych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ nie wszystkich równych 0, istnieje płaszczyzna o równaniu $\alpha x + \beta y + \gamma z = r$ dla pewnego $r \in \mathbb{R}$ rozłączna z K.*

Dowód. Niech teraz $\tau : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R}^3)$ będzie funkcją zadaną jako: $\tau(r) =$ płaszczyzna $\alpha x + \beta y + \gamma z = r$.

Udowodnię, że istnieje takie r, że $\tau(r) \cap K = \varnothing$. Przypuśćmy bowiem przeciwnie, że dla każdego $r \in \mathbb{R}$ zbiór $\tau(r) \cap K$ jest niepusty. Postępując tak jak w części a, oznaczmy $\mathcal{B} = \{\tau(r) \cap K | r \in \mathbb{R}\}$ – jest to niepusta rodzina niepustych, parami rozłącznych[1].

Niech teraz $\varphi : \mathcal{B} \to K$ będzie funkcją wyboru na $\mathcal{B}$. Widzimy jednak, że daje nam ona funkcję injektywną $\hat{\varphi} : \mathbb{R} \to K$ daną jako $\hat{\varphi}(r) = \varphi(\tau(r) \cap K)$. Gdyby bowiem dla pewnych $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ takich, że $r_1 \neq r_2$ zachodziło $\hat{\varphi}(r_1) = \hat{\varphi}(r_2)$, to z definicji $\hat{\varphi}$ byłoby $\varphi(\tau(r_1) \cap K) = \varphi(\tau(r_2) \cap K)$, ale lewa strona należy do $\tau(r_1)$, zaś prawa do $\tau(r_2)$, zaś są to zbiory rozłączne.

Stąd mielibyśmy, że $\mathfrak{C} = |\mathbb{R}| \leqslant |K| \leqslant \aleph_0$, co jest sprzecznością. Mamy więc jednak, że istnieje takie $r \in \mathbb{R}$, że $\tau(r) \cap K = \varnothing$. □

Lemat 2. *Dla dowolnego przeliczalnego zbioru X prostych na płaszczyźnie π istnieje punkt $T \in \pi$, który nie należy do $\bigcup X$ – tj. nie należy do żadnej z tych prostych.*

Dowód. Niech ℓ będze prostą nienależącą do X: wszystkich prostych jest $\mathfrak{C}$, zaś $|X| = \aleph_0$, więc taka prosta istnieje. Twierdzę, że istnieje $R \in \ell$ takie, że $\ell \notin \bigcup X$. Przypuścmy bowiem przeciwnie.

Niech teraz $\tau : \ell \to P(X)$ będzie zdefiniowane jako: $\tau(R) = \{\mu \in X | R \in \mu\}$. Łatwo widać, że dla $R_1, R_2 \in \ell$ takich, że $R_1 \neq R_2$ zbiory $\tau(R_1)$ oraz $\tau(R_2)$ są rozłączne. Gdyby bowiem istniała prosta $\mu \in X$ taka, że $\mu \in \tau(R_1)$ oraz $\mu \in \tau(R_2)$, to mielibyśmy, że $R_1 \in \mu$, $R_2 \in \mu$, ale dwa punkty jednoznacznie wyznaczają prostą, zatem $\mu = \ell$, zaś z założenia $\ell \notin X$.

Stąd τ jest niepustą rodziną parami rozłącznych niepustych zbiorów. Niech $A = \{\tau(R) | R \in \ell\}$. Niech $\varphi : A \to X$ będzie funkcją wyboru na A. Określmy $\hat{\varphi} : \ell \to X$ jako $\hat{\varphi}(R) = \varphi(\tau(R))$. Twierdzę, że jest to injekcja. Gdyby bowiem dla $R_1, R_2 \in \ell$ takich, że $R_1 \neq R_2$ zachodziło, że $\hat{\varphi}(R_1) = \hat{\varphi}(R_2)$ to mielibyśmy z definicji, że $\varphi(\tau(R_1)) = \varphi(\tau(R_2))$, lecz lewa strona należy do $\tau(R_1)$, zaś prawa do $\tau(R_2)$, zaś są to zbiory rozłączne – sprzeczność.

Stąd mamy, że $\mathfrak{C} = |\ell| \leqslant |X| = \aleph_0$ – sprzeczność. □

[1] Bo dla $r_1 \neq r_2$, płaszczyzny $\tau(r_1)$ oraz $\tau(r_2)$ są oczywiście rozłączne.

Lemat 3. *Dla dowolnego punktu* $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{L}$ *oraz dowolnej płaszczyzny* $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ *istnieje punkt* $Y \in \pi$ *taki, że odcinek* XY *jest rozłączny z* $\mathcal{L}$.

Dowód. Zauważmy, że możemy zrzutować wszystkie proste z L na płaszczyznę π czymś w rodzaju rzutu stereograficznego z punktu X: umieszczamy w punkcie X żarówkę i patrzymy, gdzie na płaszczyźnie π wypadnie cień prostych z X. Łatwo się przekonać (geometria z LO), że tak powstałe rzuty będą prostymi: mógłby to być punkt, gdyby X sam leżał na jakiejś prostej z L, ale tak nie jest.

Stąd stosujemy lemat 2 i mamy, że istnieje punkt Y na płaszczyźnie π, który nie należy do cienia, a zatem nasze „światło" z punktu X – tj. odcinek XY nie przecięło żadnej prostej z L. □

Niech teraz π będzie płaszczyzną, o której mowa w lemacie 1. Niech teraz G będzie punktem, o którym mowa w lemacie 3 jako punkcie Y, gdy ustalimy w nim $X = P$ zaś H będzie punktem, który daje ten sam lemat dla $X = Q$.

Wiemy, że odcinek PG oraz odcinek HQ są rozłączne z $\mathcal{L}$. Zauważmy jednak, że warunki na płaszczyznę π implikują, że żadna prosta z L nie jest podzbiorem π. Istotnie, gdyby pewne $\ell \in L$ było podzbiorem π, to w szczególności ponieważ $|\ell \cap K| \geqslant 2$, to do π należałyby punkty z K a nie należą.

Stąd jendnak widzimy, że zbiór $V = \{\ell \cap \pi | \ell \in L\}$ jest zbiorem złożonym z singletonów i być może zbioru pustego, stąd $\bigcup V$ jest przeliczalny. Na mocy części a zadania, zastosowanej dla płaszczyzny π oraz punktów H, G jako punktów P, Q z jej treści, istnieje punkt $R \in \pi$ taki, że HR oraz RG są rozłączne z $\bigcup V$. To jednak oznacza, że odcinki HR i RG są rozłączne z $\mathcal{L}$, skąd łamana $PGRHQ$ jest rozłączna z $\mathcal{L}$.

2 Zadanie

Niech $\mathcal{J}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji powracających. Mamy oczywiście, że $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, a zatem $|\mathcal{J}| \leqslant |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{C}$.

Zdefiniujmy teraz funkcję $\psi : P(\mathbb{N}) \to \mathcal{J}$ w następujący sposób:

$$\psi(X)(n) = \begin{cases} n & \text{gdy } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \in X \\ n+1 & \text{gdy } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \notin X \text{ oraz } n \text{ jest parzyste} \\ n-1 & \text{gdy } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \notin X \text{ oraz } n \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$$

Innymi słowy: dla $n \in X$ mamy $f(2n) = 2n$, $f(2n+1) = 2n+1$, zaś dla $n \notin X$ mamy $f(2n) = 2n+1$, $f(2n+1) = 2n$.

Łatwo nawet widać, że $\psi(X) \circ \psi(X) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Istotnie, niech $n \in \mathbb{N}$.

Gdy $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \in X$, mamy $\psi(X)(n) = n$, a zatem $\psi(X)(\psi(X)(n)) = n$. Gdy zaś $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \notin X$, to gdy n jest parzyste, to mamy $\psi(X)(n) = n+1$, lecz jednak wtedy $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \notin X$, [2] a zatem $\psi(X)(\psi(X)(n)) = \psi(X)(n+1) = n$. Gdy zaś n jest nieparzyste, mamy $\psi(X)(n) = n-1$, lecz jednak wtedy $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \notin X$, [3] a zatem $\psi(X)(\psi(X)(n)) = \psi(X)(n-1) = n$.

Stąd istotnie $\psi(X)$ jest funkcją powracającą.

Pokażemy, że ψ jest injekcją. Załóżmy, że dla $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ mamy $\psi(X) = \psi(Y)$. Wtedy mamy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ następujące warunki są równoważne:

- $n \in X$
- $\psi(X)(2n) = 2n$
- $\psi(Y)(2n) = 2n$
- $n \in Y$.

Stąd mamy, że $X = Y$.

Zatem ψ jest injekcją, stąd $|\mathcal{J}| \geqslant |P(\mathbb{N})| = \mathfrak{C}$. Twierdzenie Cantora-Bernsteina daje teraz $|\mathcal{J}| = \mathfrak{C}$.

[2] Albowiem wtedy $n = 2k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, stąd $\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor = k = \lfloor \frac{2k}{2} \rfloor$
[3] Albowiem wtedy $n = 2k+1$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, stąd $\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor = k = \lfloor \frac{2k}{2} \rfloor$