Zadanie 1

Oznaczmy

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D = A_3$$

$$L = L_1L_2L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Istotnie, mamy wówczas $A = LDL^T$.
Chcemy

$$LDL^T x = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Oznaczając $x_1 = DL^T x$ widzimy, że $Lx_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}^T$, co jest układem z macierzą trójkątną, rozwiązujemy go, uzyskując $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 & 9 \end{pmatrix}^T$. Teraz oznaczając $x_2 = L^T x$ mamy $Dx_2 = x_1$, skąd łatwo $x_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}^T$. Teraz mamy $L^T x = x_2$, co jako układ z macierzą trójkątną rozwiązujemy, uzyskując:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zadanie 6

Zapisując pomiary $f(x_i) = y_i$ widzimy, że: $Ax = b$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \\ 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Poszukajmy rozkładu $QA = R$.

Mamy $H_1 = I - \frac{u_1 u_1^T}{\gamma_1}$, gdzie $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T + \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ oraz $\gamma_1 = \frac{1}{2}(3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) = 6$.

Niech $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}^T$ będzie drugą kolumną macierzy A. Mamy teraz $H_1 v_2 = v_2 - \frac{u_1^T v_2}{\gamma_1} u_1 = v_2 - \frac{-6}{6} u_1 = v_2 + u_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Teraz chcemy przeprowadzić odbiciem Hausholdera wektor $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T$ na wielokrotność $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$. W tym celu zapiszmy $\hat{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T - \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Mamy wtedy $\gamma_2 = \frac{1}{2}(5^2 + 2^2 + 1^2) = 15$. Zatem $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, i mamy $H_2 = I - \frac{u_2 u_2^T}{\gamma_2}$.

Mamy teraz $Q = H_2 H_1$, $R = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Policzmy $c = Qb = H_2 H_1 b = H_2 \left(b - \frac{u_1^T b}{\gamma_1} u_1 \right) = H_2 b_2$, gdzie $b_2 = b - \frac{u_1^T b}{\gamma_1} u_1 = b - \frac{18}{6} u_1 = \begin{pmatrix} -10 & 2 & -1 & 11 \end{pmatrix}^T$. Dalej, $c = H_2 b_2 = b_2 - \frac{u_2^T b_2}{\gamma_2} u_2 = b_2 - \frac{3}{15} u_2 = \begin{pmatrix} -10 & 3 & -\frac{3}{5} & \frac{54}{5} \end{pmatrix}^T$.

Chcemy więc zminimalizować $\|b - Ax\| = \|Q^{-1}(Qb - QAx)\| = \|Qb - QAx\| = \|c - Rx\|$, w tym celu wystarczy rozwiązać układ równań

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Rozwiązując widzimy, że $a_1 = 1$, $a_0 = \frac{13}{2}$.