Zadanie 1

Przypuśćmy nie wprost, że funkcja f nie spełnia tezy zadania. Niech

$$n = \min\{m \in \mathbb{Z}_+ : \forall_{x\in\mathbb{R}} f^{(m)}(x) \neq 0\}$$

Ponieważ $f \in C^\infty$, to funkcja $f^{(n)}$ jest ciągła, a ponieważ nigdy nie jest zerowa, to jest stałego znaku. Bez straty ogólności przyjmijmy, że jest stale dodatnia (przypadek funkcji stale ujemnej można rozważyć rozpatrując funkcję $-f$, która także spełnia warunki zadania).

Zatem wiemy, że funkcja $f^{(n-1)}$ jest stale rosnąca. Jeśli $n = 1$, to uzyskujemy, że funkcja f jest stale rosnąca, co jest sprzecznością, bo $f(0) < f(1) \leqslant \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(0)$, co jest sprzecznością.

Zatem $n > 1$ i w związku z tym wiemy, że $\exists_{x_0\in\mathbb{R}} f^{(n-1)}(x_0) = 0$ na mocy minimalności n. Stąd jednak mamy, że dla $y > x_0 + 1$ mamy $f^{(n-1)}(y) > f^{(n-1)}(x_0+1) > f^{(n-1)}(x_0) = 0$, zatem funkcja $f^{(n-2)}$ jest rosnąca na zbiorze $[x_0 + 1, \infty)$.

Co więcej, rośnie ona przynajmniej tak szybko jak funkcja $x \mapsto f^{(n-1)}(x_0+1)\cdot(x-x_0-1)+f^{(n-2)}(x_0+1)$, gdyż mają one równe wartości na punkcie $x_0 + 1$ oraz pochodna ich różnicy jest dodatnia.

To jednak oznacza, że $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n-2)}(x) = +\infty$, na mocy porównania z powyższą funkcją liniową. To zaś oznacza, że dla dostatecznie dużych x zachodzi $f^{(n-2)}(x) > 1$, zatem rozumując podobnie jak poprzednio uzyskujemy, że $f^{(n-3)}(x)$ dla dostatecznie dużych x rośnie przynajmniej liniowo.

Kontynuując to rozumowanie dochodzimy (po skończenie wielu krokach) do tego, że $f = f^{(0)}$ jest dla dostatecznie dużych x rosnąca przynajmniej liniowo.

Ale to jest sprzeczność, gdyż uzyskujemy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, a z założenia ta granica jest równa $f(0)$.

Zadanie 2

Najpierw zbadajmy jednostajną zbieżność na $[0, +\infty)$. Twierdzę, że tam ciąg f_n jest jednostajnie zbieżny do funkcji stale równej zeru.

Istotnie, zauważmy, że $f_n'(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(nx) - x\cdot n\cdot\frac{1}{1+n^2x^2}$. Ponadto $f_n''(x) = -\frac{n}{1+n^2x^2} - \frac{n(1+n^2x^2)-nx(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{2n^3x^2-2n(1+n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{-2n}{(1+n^2x^2)^2}$, co jest ujemne dla każdego x, zatem f_n' jest malejąca. Jednak łatwo widać, że $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(nx)\right) - \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 - 0 = 0$, zatem f_n' jest stale nieujemna, zatem f_n jest rosnąca.

Ponadto $f_n(0) = 0$, zatem supremum modułu będzie osiągnięte jako granica w $+\infty$, mamy jednak

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f_n(x) &= \lim_{x\to 0^+} f_n\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{n}{x}}{x} \\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+}\left((-1)\frac{-n}{x^2}\frac{1}{1+\frac{n^2}{x^2}}\right) \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{n}{n^2+x^2} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

gdzie aby użyć reguły de l'Hôpitala powinniśmy zauważyć, że $\arctan\frac{n}{x} \to \frac{\pi}{2}$ przy $x \to 0^+$.

Zbadajmy teraz jednostajną zbieżność na $(-\infty, 0]$. Twierdzę, że f_n jest tam zbieżny jednostajnie do funkcji $x \mapsto \pi x$.

Mamy bowiem $(f_n(x) - \pi x)'' = f_n''(x) < 0$, zatem $(f_n(x) - \pi x)'$ jest malejąca. Mamy ponadto $(f_n(x) - \pi x)' = -\frac{\pi}{2} - \arctan(nx) - x\cdot n\cdot\frac{1}{1+n^2x^2}$.

Analogicznie jak poprzednio, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f_n(x) - \pi x)' = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan(nx)\right) - \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 - 0 = 0$, zatem $(f_n(x) - \pi x)'(x)$ jest stale niedodatnia na $x \leqslant 0$, zatem ponieważ $f_n(0) - \pi\cdot 0 = 0$, to $f_n(x) - \pi x$ jest malejąca i osiąga supremum modułu jako granicę w minus nieskończoności.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(f_n(x)-\pi x) &= \lim_{x\to 0^-}\left(f_n\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{n}{x}}{x}\\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to 0^-}\left((-1)\frac{-n}{x^2}\frac{1}{1+\frac{n^2}{x^2}}\right)\\
&= \lim_{x\to 0^-}\frac{n}{n^2+x^2}=\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

gdzie aby użyć reguły de l'Hôpitala powinniśmy zauważyć, że $\arctan\frac{n}{x}\to-\frac{\pi}{2}$ przy $x\to 0^-$.

Teraz jednak mamy, że oznaczając funkcję $f(x)=\begin{cases}0 & x\geqslant 0\\ \pi x & x<0\end{cases}$ widzimy, że $\|f(x)-f_n(x)\|=\frac{1}{n}$, zatem istotnie $f_n\rightrightarrows f$.

Zadanie 3

Udowodnię warunek Cauchy'ego dla tego szeregu.
Ustalmy dowolne $\varepsilon>0$. Niech N będzie takie, że $\frac{1}{N}(2+\frac{\pi^2}{3})<\varepsilon$.
Dla $N<n\leqslant m$ mamy, że

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k(1+(x-k)^2)}\right| &\leqslant \left|\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{N(1+(x-k)^2)}\right|\\
&\leqslant \sum_{k=n}^{m}\left|\frac{1}{N(1+(x-k)^2)}\right|\\
&\leqslant \frac{1}{N}\cdot 2\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{1+l^2}\\
&\leqslant \frac{1}{N}\cdot 2\left(1+\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l^2}\right)\\
&\leqslant \frac{1}{N}\cdot 2\left(1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}\right)\\
&\leqslant \frac{1}{N}\cdot 2\cdot\left(1+\frac{\pi^2}{6}\right)<\varepsilon
\end{aligned}$$

gdzie przejście z drugiej do trzeciej linii polega na szacowaniu każdego ułamka z osobna: są conajwyżej dwa ułamki w rozważanej sumie, dla których $l\leqslant|x-k|<l+1$, można je szacować z góry przez $\frac{1}{1+l^2}$.

Stąd ten szereg jest zbieżny jednostajnie.

Zadanie 4

Oznaczmy $f_n(x)=\frac{1}{1+n^2x}$. Udowodnię indukcyjnie, że $f_n^{(m)}(x)=(-1)^m\frac{m!n^{2m}}{(1+n^2x)^{m+1}}$.

Istotnie, jest to prawda dla $f_n^{(0)}(x)=f_n(x)$. Teraz mamy $\left(f_n^{(m)}(x)\right)'=\left((-1)^m\frac{m!n^{2m}}{(1+n^2x)^{m+1}}\right)'=(-1)^m\frac{m!n^{2m}(-1)(m+1)n^2}{(1+n^2x)^{m+2}}=$ $(-1)^{m+1}\frac{(m+1)!n^{2m+2}}{(1+n^2x)^{m+2}}$, stąd istotnie powyższy wzór na pochodną jest poprawny dla każdego m.

Udowodnię, że $\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(m)}$ jest zbieżny jednostajnie na dowolnym przedziale $[R,+\infty)$. Mamy, że $f_n^{(m)}$ jest monotoniczna, oraz przy $x\to\infty$ dąży do zera, zatem maksimum modułu jest osiągane w punkcie $x=R$.

Mamy jednak, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(m)}(R)$ jest zbieżny bezwzględnie, przez asymptotyczne kryterium porównawcze z szeregiem $\sum\frac{1}{n^2}$. Zatem kryterium Weierstraßa daje, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(m)}$ jest zbieżny jednostajnie na $[R,\infty)$.

Ustalmy dowolne $x_0 \in (0, +\infty)$. Na przedziale $[\frac{x_0}{2}, \infty)$ szereg pochodnych dowolnego (w tym zerowego) rzędu funkcji z zadania jest zbieżny jednostajnie, a więc także punktowo, zatem uzyskujemy, że dowolny z tych szeregów zadaje funkcję różniczkowalną. Stąd $f \in C^\infty\left([\frac{x_0}{2}, +\infty)\right)$, zatem jest gładka w otoczeniu punktu x_0.

Zatem $f \in C^\infty((0, +\infty))$.

Zadanie 5

Zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ na $|x| < 1$ jest oczywista. Istotnie, dla $|x| < 1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n x^n|$ jest zbieżny, a ma wyrazy nieujemne, zatem używając asymptotycznego kryterium porównawczego uzyskujemy łatwo zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$, skąd uzyskujemy, że i szereg określający funkcję $f(x)$ jest zbieżny dla $|x| < 1$.

Niech $g = \liminf_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)}$. Przypuśćmy, że $g < \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. To oznacza, że dla $\lim_{n\to\infty} \inf_{m \geqslant n} \frac{a_m}{b_m} > g$. Niech $M \in (g, \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geqslant n} \frac{a_m}{b_m})$. Wiemy, że dla dostatecznie dużych n (tj. $n > n_0$) zachodzi nierówność $\inf_{m \geqslant n} \frac{a_m}{b_m} > M$, zatem dla $m \geqslant n_0$ zachodzi $a_m > Mb_M$ (na mocy dodatniości b_m).

Mamy jednak

$$\begin{aligned}
g &= \liminf_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \liminf_{x\to 1^-} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n} = \liminf_{x\to 1^-} \left(\frac{\sum_{n=1}^{n_0} a_n x^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n} + \frac{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n} \right) \\
&= \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{\sum_{n=1}^{n_0} a_n x^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n} \right) + \liminf_{x\to 1^-} \left(\frac{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n} \right) \geqslant 0 + \liminf_{x\to 1^-} \left(\frac{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} M b_n x^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n} \right) \\
&= M
\end{aligned}$$

Gdyż $\lim_{x\to 1^-} \frac{\sum_{n=1}^{n_0} a_n x^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n} = 0$, gdyż licznik jest ograniczony, zaś mianownik dąży do nieskończoności (z założenia $\sum b_n = \infty$), zaś $\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} M b_n x^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n} \right) = M$, gdyż licznik jest M-krotnością mianownika (który dąży do nieskończoności) pomniejszonego o stałą (tj. o $\sum_{n=1}^{n_0} b_n x^n$). Otrzymaliśmy $g \geqslant M$, zatem uzyskujemy sprzeczność, bo $g < M$ z założenia.

Nierówność $\liminf_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \limsup_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ jest oczywista.

Nierówność $\limsup_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ dowodzi się analogicznie jak $\liminf_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, tj. niewprost zakładamy, że $g := \limsup_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} > \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, skąd biorąc $M \in (\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}, g)$ uzyskujemy łatwo, że dla $m > m_0$ zachodzi $a_m < Mb_m$, i powtarzając rachunek uzyskujemy $g \leqslant M$, co jest sprzecznością.