# Zadanie 1

Zauważmy, że środek małego okręgu będzie poruszał się ruchem jednostajnym po okręgu o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu 2. Sparametryzujmy zatem daną krzywą za pomocą połowy drogi, jaką przebył środek małego okręgu, tak, żeby tenże środek miał współrzędne $(2\cos t, 2\sin t)$.

Wiemy, że badany przez nas punkt porusza się względem środka małego okręgu ruchem po okręgu o promieniu 1, zatem ma względem tego środka jakieś współrzędne $(\cos(-\lambda t), \sin(-\lambda t))$ (obrót jest w stronę przeciwną do obrotu wykonywanego przez środek małego okręgu). Stąd widzimy, że po czasie $t$, punkt styczności obu okręgów ma argument (w sensie współrzędnej biegunowej) równy $t$, zatem mały okrąg zakreślił na większym łuk o długości $3t$. Z drugiej strony, wybrany punkt na małym okręgu przebył drogę $(1+\lambda)t$, gdyż efektywnie obrócił się o taki kąt: o kąt $t$ w wyniku ruchu małego okręgu i o kąt $\lambda t$ w wyniku obrotu małego okręgu Ruch odbywa się bez poślizgu, zatem $3t = (1+\lambda)t$, czyli $\lambda = 2$, skąd krzywą z zadania można sparametryzować następująco: $(x(t), y(t)) = (2\cos t + \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t))$.

Mamy teraz wektor prędkości: $v(t) = (x'(t), y'(t)) = (-2\sin t - 2\sin(2t), 2\cos t - 2\cos(2t))$. Jego długość:

$$\begin{aligned}\|v(t)\| &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \\ &= \sqrt{4(\sin t)^2 + 8\sin t\sin(2t) + 4(\sin(2t))^2 + 4(\cos t)^2 - 8\cos t\cos(2t) + 4(\cos(2t))^2} = \\ &= \sqrt{8 - 8\cos(t+2t)} = \sqrt{8 - 8\cos\left(2\cdot\frac{3t}{2}\right)} = \sqrt{8 - 8\left(1 - 2\left(\sin\frac{3t}{2}\right)^2\right)} = 4\left|\sin\frac{3t}{2}\right|\end{aligned}$$

Zatem chcemy policzyć $\int\limits_0^{2\pi} 4\left|\sin\frac{3t}{2}\right| dt$. Funkcja podcałkowa jest okresowa z okresem $\frac{2\pi}{3}$ i w przedziale całkowania mieszczą się dokładnie trzy okresy, ponadto na przedziale $[0, \frac{2\pi}{3}]$ funkcja ta jest nieujemna, zatem wynikiem jest $12\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin\frac{3t}{2} dt = 12\left[-\frac{2}{3}\cos\frac{3t}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = 12\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 = 16$.

# Zadanie 2

Zauważmy, że całka z zadania zachowuje się liniowo ze względu na funkcję $f$. Dla funkcji $f$ danej jako $f_\lambda(x) = \lambda$ dla pewnej stałej $\lambda$, widzimy, że całka ta jest zerem.

Niech $L$, $R$ będą takie, że $\frac{L}{a}, \frac{L}{b} < 1$; $\frac{R}{a}, \frac{R}{b} > 1$.

Mamy $\int\limits_L^R \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = \int\limits_L^R \frac{f(ax)dx}{x} - \int\limits_L^R \frac{f(bx)dx}{x} = \int\limits_{\frac{L}{a}}^{\frac{L}{b}} \frac{f(t)dt}{t} - \int\limits_{\frac{L}{b}}^{\frac{R}{b}} \frac{f(t)dt}{t} = \int\limits_{\frac{L}{a}}^{1} \frac{f(t)dt}{t} + \int\limits_1^{\frac{R}{a}} \frac{f(t)dt}{t} - \int\limits_{\frac{L}{b}}^{1} \frac{f(t)dt}{t} - \int\limits_1^{\frac{R}{b}} \frac{f(t)dt}{t} = \int\limits_{\frac{L}{a}}^{\frac{L}{b}} \frac{f(t)dt}{t} + \int\limits_{\frac{R}{b}}^{\frac{R}{a}} \frac{f(t)dt}{t}$.

Teraz, zauważmy, że dla funkcji $f_\dagger(x) = \begin{cases} 1-x & x\in[0,1] \\ 0 & x>1\end{cases}$ mamy, że dla dostatecznie dużych $R$ zachodzi $\int\limits_{\frac{R}{b}}^{\frac{R}{a}} \frac{f(t)dt}{t} = 0$, gdyż całkujemy funkcję stale równą zeru. Zaś dla bardzo małych $L$ mamy, że $\int\limits_{\frac{L}{a}}^{\frac{L}{b}} \frac{f(t)dt}{t} = \int\limits_{\frac{L}{a}}^{\frac{L}{b}} \frac{(1-t)dt}{t} = \int\limits_{\frac{L}{a}}^{\frac{L}{b}} \frac{dt}{t} - \int\limits_{\frac{L}{a}}^{\frac{L}{b}} dt = \ln\frac{L}{b} - \ln\frac{L}{a} - \frac{L}{b} + \frac{L}{a}$. Przy $L \to 0^+$ mamy wtedy, że wielkość ta dąży do liczby $\ln\frac{a}{b}$.

Rozważmy teraz dowolną funkcję $f$. Rozważmy funkcję $\widehat{f} = f - f_\lambda - (f(1)-\lambda)f_\dagger$. Funkcja ta ma w zerze wartość zero, w nieskończoności granicę zero. Ponadto całka z zadania dla funkcji $f$ to całka z zadania dla funkcji $\widehat{f}$ powiększona o wartość $(f(1)-\lambda)\ln\frac{a}{b}$.

Teraz zauważmy, że dla funkcji $\widehat{f}$ mamy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie otoczenie zera, że w nim $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$, zatem dla $L$ wystarczająco małych, tj. takich, żeby $\frac{L}{a}, \frac{L}{b}$ były w tym otoczeniu zachodzi:

$$-\varepsilon\ln\frac{a}{b} = -\varepsilon\int\limits_{\frac{L}{a}}^{\frac{L}{b}} \frac{dt}{t} < \int\limits_{\frac{L}{a}}^{\frac{L}{b}} \frac{f(t)dt}{t} < \varepsilon\int\limits_{\frac{L}{a}}^{\frac{L}{b}} \frac{dt}{t} = \varepsilon\ln\frac{a}{b}$$

Zatem z dowolności $\varepsilon$ widzimy, że $\lim\limits_{L\to 0^+} \int\limits_{\frac{L}{a}}^{\frac{L}{b}} \frac{f(t)dt}{t} = 0$.

Analogiczne oszacowania możemy zapisać dla „otoczeń nieskończoności”, tj. przedziałów $[M, +\infty)$, gdzie też uzyskamy $\lim\limits_{R\to +\infty} \int\limits_{\frac{R}{a}}^{\frac{R}{b}} \frac{f(t)dt}{t} = 0$.

Łącząc argumenty z zadania mamy ostatecznie $\int\limits_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = (f(1) - \lambda) \ln \frac{a}{b}$.

# Zadanie 6

Policzmy

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sinh(\alpha x)e^{-inx}dx = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{(\alpha-in)x}dx - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{(-\alpha-in)x}dx = \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{(\alpha-in)x}}{\alpha-in}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{(-\alpha-in)x}}{-\alpha-in}\right]_{-\pi}^{\pi} = \\
&= \frac{1}{4\pi(\alpha-in)}\left(e^{(\alpha-in)\pi} - e^{(\alpha-in)(-\pi)}\right) + \frac{1}{4\pi(\alpha+in)}\left(e^{(-\alpha-in)\pi} - e^{(-\alpha-in)(-\pi)}\right) = \\
&= \frac{1}{4\pi(\alpha-in)}\left(e^{\alpha\pi}(-1)^n - e^{-\alpha\pi}(-1)^n\right) + \frac{1}{4\pi(\alpha+in)}\left(e^{-\alpha\pi}(-1)^n - e^{\alpha\pi}(-1)^n\right) = \\
&= \frac{(-1)^n}{4\pi}\left(e^{\alpha\pi}\left(\frac{1}{\alpha-in} - \frac{1}{\alpha+in}\right) - e^{-\alpha\pi}\left(\frac{1}{\alpha+in} - \frac{1}{\alpha-in}\right)\right) = \\
&= \frac{(-1)^n}{4\pi}\left(e^{\alpha\pi}\frac{2in}{\alpha^2+n^2} + e^{-\alpha\pi}\frac{-2in}{\alpha^2+n^2}\right) = \frac{(-1)^n in \sinh(\alpha\pi)}{2\pi(\alpha^2+n^2)}
\end{aligned}$$

Zatem szeregiem Fouriera jest $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n in \sinh(\alpha\pi)}{2\pi(\alpha^2+n^2)} e^{inx}$.

# Zadanie 7

Tę funkcję rozwinę w rzeczywisty szereg Fouriera.
Funkcja ta jest parzysta, więc współczynniki przy $\sin(nx)$ są zerowe.
Wyraz wolny: $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}[-\cos x]_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi}$.

Współczynnik przy $\cos x$: $a_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(x) dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin x \cos(x) dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin(2x) dx = 0$, gdyż $\sin(2x)$ ma wykres symetryczny względem punktu $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Współczynnik przy $\cos(nx)$ dla $n > 1$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin x \cos(nx) dx = \\
&= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin(x-nx)+\sin(x+nx)}{2} dx = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi} \sin((1-n)x)dx + \int\limits_0^{\pi} \sin((1+n)x)dx\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos((1-n)x)}{1-n}\right]_0^{\pi} + \left[-\frac{\cos((1+n)x)}{1+n}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-(-1)^{1-n}+1}{1-n} + \frac{-(-1)^{1+n}+1}{1+n}\right) = \\
&= \frac{1+(-1)^n}{\pi}\left(\frac{1}{1-n} + \frac{1}{1+n}\right) = \frac{1+(-1)^n}{\pi}\frac{2}{1-n^2} = \frac{4}{\pi(1-n^2)}[2|n]
\end{aligned}$$

gdzie $[P] = \begin{cases} 1 & \text{gdy } P \\ 0 & \text{gdy } \neg P \end{cases}$ jest nawiasem Iversona.

Zatem mamy szereg $-\frac{4}{\pi}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4k^2)}\cos(2kx)$, jest on zbieżny do funkcji $f$, gdyż jest to funkcja o wahaniu ograniczonym.

Wstawiając $x=\frac{\pi}{2}$ mamy $1=f(\frac{\pi}{2})=-\frac{4}{\pi}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4\pi(1-4k^2)}$.

Policzmy teraz $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^2dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x-\sin x\cos x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=1$.

Tożsamość Parsevala daje więc $1=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx=\frac{\left(-\frac{8}{\pi}\right)^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi(1-4k^2)}\right)^2=\frac{32}{\pi^2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(1-4k^2)^2}$, czyli $\frac{\pi^2}{16}=2+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4k^2)^2}$.