Zadanie 1

Oznaczmy wierzchołki tego siedmiokąta przez $A_1, \ldots, A_7$ (w tej kolejności), przy czym w razie potrzeby będę przyjmował $A_8 = A_1, A_9 = A_2, \ldots$.

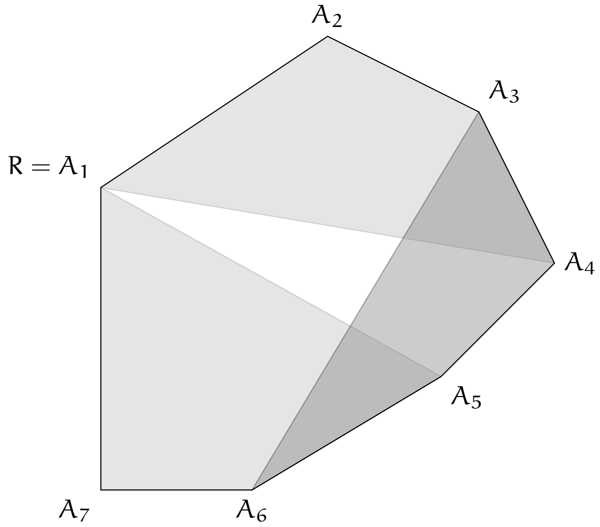
Oznaczmy X_i – zbiór punktów leżących po tej stronie prostej A_iA_{i+3}, po której nie leżą punkty A_{i+1}, A_{i+2} (tj. nie leży tam czworokąt $A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}$).

Teza sprowadza się do pokazania, że $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_7 \neq \varnothing$. Istotnie, punkt o którym mowa w tezie należy do tego przecięcia, zaś łatwo widać, że to przecięcie leży we wnętrzu siedmiokąta (np. zauważając, że $X_1 \cap X_5$ jest kątem o wierzchołku w punkcie A_1, i przecinając go z półpłaszczyzną X_3 łatwo widzimy, że uzyskamy zbiór ograniczony zawarty wewnątrz siedmiokąta.

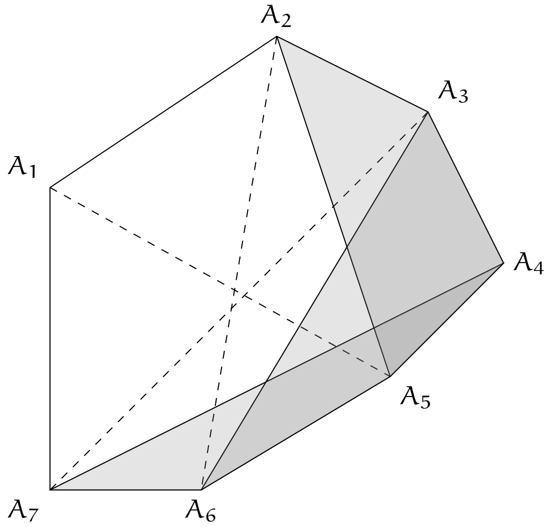
Jednak zbiory X_i są wypukłe w $\mathbb{R}^2$, zatem wystarczy pokazać (na mocy lematu udowodnionego na ćwiczeniach), że dowolne trzy zbiory X_i, X_j, X_k mają niepuste przecięcie.

Rozpatrzmy więc pewne X_i, X_j, X_k. Oczywiście można rozpatrywać tylko takie trójki, że i, j, k są parami różne, gdyż naszych zbiorów jest więcej niż dwa, więc żadne przypadki zdegenerowane nie wchodzą w grę. (Gdyby np. $X_i \cap X_j = \varnothing$, to wystarczy dobrać dowolne inne X_k, nie trzeba powtarzać i lub j).

Rozpatrzmy punkty $A_i, A_j, A_k, A_{i+3}, A_{j+3}, A_{k+3}$, tj. wierzchołki rozważanych przekątnych. Mamy dwa przypadki: albo pewne dwa spośród nich się pokrywają, albo są one parami różne i wtedy po prostu są to wszystkie wierzchołki siedmiokąta za wyjątkiem jednego.



(a) Przypadek 1



(b) Przypadek 2.

Rysunek 1: Rysunki do zadania pierwszego

W pierwszym przypadku, widzimy, że mamy sytuację, że rozpatrujemy dwie przekątne wychodzące z tego samego wierzchołka R, zatem przecięcie odpowiednich zbiorów $X_\cdot$ jest kątem, a dorzucenie kolejnej przekątnej obetnie ten kąt, ale z wypukłości danego siedmiokąta widzimy, że ta trzecia przekątna musi przecinać tamten kąt, bo inaczej R nie byłby wierzchołkiem wypukłego siedmiokąta.

W drugim przypadku bez straty ogólności możemy założyć, że mamy użyte (każdy dokładnie raz) wszystkie wierzchołki siedmiokąta za wyjątkiem A_1. Teraz widzimy, że z A_5 wychodzi teraz tylko jedna przekątna odcinająca czworokąt, mianowicie przekątna A_2A_5. Zatem musieliśmy jej użyć, skąd nie mogliśmy użyć przekątnej A_2A_6, zatem musieliśmy użyć przekątnej A_6A_3 (bo coś musi być incydentne z A_6), zatem nie mogliśmy użyć A_3A_7, zatem musieliśmy użyć A_4A_7.

Stąd w tym przypadku badamy przecięcie $X_2 \cap X_3 \cap X_4$, ale jak łatwo widać, A_1 wraz z pewnym swoim otoczeniem należy do $X_2 \cap X_3 \cap X_4$, zatem jest to zbiór niepusty.

Stąd dowolne trzy spośród zbiorów X_i się przecinają, zatem wszystkie się przecinają.

Zadanie 3

Ujednorodnijmy równanie: $x^4 + y^4 - x^2yz = 0$ i oznaczmy $F(x, y, z) = x^4 + y^4 - x^2yz$. Na mocy faktu z ćwiczeń, punkt osobliwy (a, b, c) ma $F'_x(a, b, c) = F'_y(a, b, c) = F'_z(a, b, c) = 0$. Ale $F'_z(a, b, c) = -a^2b$, zatem $a = 0$ lub $b = 0$. Stąd jednak łatwo uzyskujemy, że $a = b = 0$, przez wstawienie do równania krzywej.

Zatem jedynym punktem osobliwym jest $[0 : 0 : 1]$, czyli $(0, 0)$, i istotnie spełnia on $F'_x(a, b, c) = F'_y(a, b, c) = F'_z(a, b, c) = 0$.

Jak łatwo widać, jeśli dla jakiegoś punktu mamy $x = 0$, to $y = 0$, zatem dowolny punkt różny od $(0, 0)$ możemy połączyć z punktem $(0, 0)$ prostą nierównoległą do osi OY.

Zapiszmy więc równanie $y = \alpha x$. Wtedy mamy $x^4 + \alpha^4 x - \alpha x^3 = 0$, zatem (ponieważ punkt $(0, 0)$) nas nie interesuje, uzyskujemy $x = \frac{\alpha}{1+\alpha^4}$, skąd $y = \frac{\alpha}{1+\alpha^4}$.

Stąd ponieważ dla jednego α uzyskaliśmy dokładnie jeden punkt, i dla każdego niezerowego punktu można dobrać α, widzimy, że $\alpha \mapsto \left(\frac{\alpha}{1+\alpha^4}, \frac{\alpha^2}{1+\alpha^4}\right)$ jest parametryzacją tej krzywej.

Ponadto przyjmując $\alpha = 0$ uzyskujemy punkt $(0, 0)$, zatem pomimo naszego pierwotnego wykluczenia go, uzyskaliśmy go i łatwo widać, że $\alpha = 0$ to jedyny możliwy wybór α, dla którego go uzyskamy. Zatem jest to parametryzacja.

Zadanie 4

Zapiszmy $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, $h(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_m$. Połóżmy $F([x : z]) = [a_n x^n z^0 + a_{n-1}x^{n-1}z^1 + a_{n-2}x^{n-2}z^2 + \ldots + a_0 x^0 z^n : b_m x^m z^0 + b_{m-1}x^{m-1}z^1 + \ldots + b_0 x^0 z^m]$. Jest to na każdej współrzędnej wyrażenie jednorodne, zatem jest to dobrze zdefiniowane przekształcenie przestrzeni rzutowej w samą siebie.

Ponadto jeśli $h(x) \neq 0$, zaś $z = 1$, uzyskujemy łatwo, że $F([x, 1]) = [f(x), 1]$.

Zadanie 5

Możemy patrzeć na formę dwuliniową $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ opisaną macierzą A, niech ponadto $\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ będzie bazą standardową.

Dla $n = 1$ mamy, że macierz ta już jest diagonalna (bo jest zerowa), więc ona sama jest odpowiedzią. Dla $n > 1$ widzimy, $\det A \neq 0$. Istotnie, gdyby dodać do pierwszego wiersza tej macierzy wszystkie pozostałe, uzyskalibyśmy, że składałby się on z samych $(n-1)$-ek, dzieląc przez $(n-1)$ mielibyśmy tam wiersz złożony z samych jedynek, i teraz odejmując go od każdego pozostałego wiersza uzyskalibyśmy, że te pozostałe wiersze byłyby zerowe, za wyjątkiem minus jedynek na przekątnej, i teraz dodając te wiersze do pierwszego uzykalibyśmy już macierz diagonalną z niezerowymi wyrazami na przekątnej. Stąd jest to macierz nieosobliwa.

Wtedy $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f((x_0, \ldots, x_{n-1}), (y_0, \ldots, y_{n-1})) = \sum_{i \neq j} x_i y_j$.

Rozważmy najpierw $n = 2^k$. Zauważmy teraz, że jeśli $y_0 + \ldots + y_{n-1} = S$, to

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i(S - y_i) \tag{1}$$

Zatem w szczególności dla $S = 0$, mamy, że

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i \tag{2}$$

Oznaczmy $\mathbf{v}_{r,r+2p-1} = (\mathbf{e}_r + \ldots + \mathbf{e}_{r+p-1}) - (\mathbf{e}_{r+p} + \ldots + \mathbf{e}_{r+2p-1})$. Wszystkie te wektory mają S (to jest sumę współrzędnych równą zeru).

Wtedy łatwo widzimy, że jeśli $[r, r + 2p - 1] \cap [r', r' + 2p' - 1] = \varnothing$, to $f(\mathbf{v}_{r,r+2p-1}, \mathbf{v}_{r'+2p'-1}) = 0$, co wynika łatwo z 2, gdyż pozycje niezerowych współrzędnych są różne. Tak samo mamy, jeśli $[r, r + 2p - 1] \subseteq [r', r' + p' - 1]$: we wzorze 2 mamy wtedy, że dla x_i niezerowych (tj. $i \in [r, r + 2p - 1]$) mamy $y_i = 1$, zatem $f(\mathbf{v}_{r,r+2p-1}, \mathbf{v}_{r'+2p'-1}) = -\sum x_i = 0$. Analogicznie dla $[r, r + 2p - 1] \subseteq [r' + p', r' + 2p' - 1]$ – mamy tam $y_i = -1$.

Widać, że układ $W = (\mathbf{v}_{2^s d, 2^s(d+1)-1})_{s=1,\ldots,k\, d=1,2,\ldots,2^{k-s-1}}$ ma tę własność, że jego wektory są parami ortogonalne, zaś każdy z nich ma kwadrat (w sensie formy) ujemny. Istotnie, każda para różnych wektorów podpada pod któryś z wymienionych wyżej przypadków. Intuicyjnie: bierzemy najpierw wektory $\mathbf{e}$ dwójkami: zerowy z pierwszym, drugi z trzecim, czwarty z piątym, ..., potem czwórkami: od zerowego do trzeciego, od czwartego do siódmego, ..., potem ósemkami, szesnastkami, ..., przy czym w każdej takiej grupie pierwszą połowę bierzemy ze znakiem plus, a drugą ze znakiem minus. Ponadto dowolny taki wektor ma kwadrat ujemny, co wynika wprost ze wzoru 2, gdyż wystąpi tam minus suma kwadratów współrzędnych wektora.

Biorąc jeszcze wektor $\mathbf{s} = \mathbf{e}_0 + \ldots + \mathbf{e}_{n-1}$ widzimy, że jego kwadrat (w sensie formy) jest dodatni (przez bezpośredni rachunek). Gdy teraz weźmiemy dowolny wektor $\mathbf{u} \in W$, to licząc $f(\mathbf{s}, \mathbf{u})$ ze wzoru 2 uzyskujemy łatwo, że ponieważ wszystkie $x_i = 1$, to $f(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = -\sum y_i = 0$. Zatem układ $W \cup \{\mathbf{s}\}$ jest układem ortogonalnym wektorów, z których jeden ma kwadrat dodatni, zaś $2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 1 = 2^k - 1$ kwadrat ujemny. Tych wektorów jest n, zatem jest to baza. Zatem w przypadku $n = 2^k$ dla $k > 0$, wynikową macierzą jest $\operatorname{diag}(1, -1, -1, -1, -1, \ldots, -1)$.

Rozpatrzmy teraz dowolne $n > 1$. Istnieje takie k, żeby $2^k \geqslant n$. Niech F będzie formą dwuliniową opisaną macierzą jak z zadania, lecz wymiaru 2^k, niech V będzie przestrzenią na której działa forma F, zaś V_1 będzie przestrzenią rozpiętą przez pierwszych n wektorów bazowych. Wtedy oczywiście $f = F_{|V_1 \times V_1}$. Mamy, że f i F są nieosobliwe, zatem wystarczy wyznaczyć tylko sygnaturę f.

Sygnatura f musi zawierać chociaż jedną jedynkę, gdyż wektor $\mathbf{s} = \mathbf{e}_0 + \ldots + \mathbf{e}_{n-1}$ ma kwadrat dodatni (dowód jak wyżej dla $n = 2^k$), więc forma ta nie może być ujemnie określona. Gdyby jednak zawierała więcej niż jedną jedynkę, mielibyśmy sprzeczność, gdyż biorąc V_2 – dopełnienie ortogonalne do sumy prostej mielibyśmy, że liczba jedynek w sygnaturze F (która jest równa jeden) jest sumą liczby jedynek w sygnaturze $F_{|V_1 \times V_1}$ (większej niż jeden) oraz $F_{|V_2 \times V_2}$ (nieujemnej). Zatem sprzeczność, i f ma sygnaturę: jedna jedynka, $n - 1$ minus jedynek, zatem A jest kongruentna do macierzy $\operatorname{diag}(1, -1, -1, -1, \ldots, -1)$.

Zadanie 6

Przez de facto przeformułowanie definicji widzimy: X jest podprzestrzenią izotropową wtedy i tylko wtedy, gdy $X \subseteq X^\perp$, zaś $f_{|X \times X}$ jest niezdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy $X \cap X^\perp = \varnothing$.

Mamy teraz, że $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$. Istotnie, jeśli coś jest ortogonalne do sumy U i W, to musi też oczywiście być ortogonalne do każdego z U, W, a jeśli coś jest ortogonalne do U i do W, to z dwuliniowości formy musi być też ortogonalne do $U + W$. Teraz mamy, że $(U + W) \cap (U + W)^\perp = (U + W) \cap U^\perp \cap W^\perp = (\dagger)$.

Ponieważ $U \subseteq U^\perp$, to $(U + W) \cap U^\perp = U + (W \cap U^\perp)$ (gdyż dodawanie elementów U nie wyprowadza nas z $U^\perp$). Teraz $(\dagger) = (U + (W \cap U^\perp)) \cap W^\perp$. Ponieważ $W \cap U^\perp \subseteq W \subseteq W^\perp$, to $(\dagger) = (U \cap W^\perp) + (W \cap U^\perp)$.

Załóżmy teraz, że $f_{|(U+W)\times(U+W)}$ jest niezdegenerowana. Wtedy $\{0\} = (U + W) \cap (U + W)^\perp = (\dagger) = (U \cap W^\perp) + (W \cap U^\perp)$. Zatem $U \cap W^\perp = W \cap U^\perp = \{0\}$. Oznaczając $n = \dim V$ mamy $\dim U + (n - \dim V) \leqslant n$, $\dim W + (n - \dim U)) \leqslant n$, skąd $\dim U = \dim W$, zatem $U \oplus W^\perp$ jest wymiaru n, czyli $U \oplus W^\perp = V$. Analogicznie $W \cap U^\perp = V$.

Załóżmy teraz, że $V = U \oplus W^\perp$. Zauważmy, że ponieważ $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ oraz $X^\perp + Y^\perp \subseteq (X \cap Y)^\perp$ (gdyż $X \cap Y \subseteq X, Y$), to $V = W^\perp + U \subseteq W^\perp + (U^\perp)^\perp \subseteq (W \cap U^\perp)^\perp$, zatem $(W \cap U^\perp)^\perp = V$, skąd z niezdegenerowaności formy mamy $W \cap U^\perp = \{0\}$. Stąd ponieważ $U \cap W^\perp = W \cap U^\perp = \{0\}$, to $(U + W) \cap (U + W)^\perp = (\dagger) = \{0\}$, zatem $f_{|(U+W)\times(U+W)}$ jest niezdegnerowana.

Analogicznie postępujemy, jeśli $V = W \oplus U^\perp$.