1 Zadanie

1.1 Część a

1.1.1 Zwrotność

Dowód. Niech $B \in \mathcal{A}$. Zauważmy, że dla każdego $b \in B$ mamy $b \leqslant b$, zatem prawdziwe jest zdanie $\forall_{b \in B}\ \exists_{c \in B} b \leqslant c$, zatem $B \preceq B$. □

1.1.2 Przechodniość

Dowód. Niech $B, C, D \in \mathcal{B}$ i $B \preceq C$ oraz $C \preceq D$. Aby udowodnić, że $B \preceq D$ weźmy dowolne $b \in B$. Na mocy założenia, że $B \preceq C$, istnieje $c \in C$, takie, że $b \leqslant c$. Teraz na mocy założenia, że $C \preceq D$, istnieje $d \in D$, że $c \leqslant d$. Na mocy przechodniości relacji $\leqslant$, mamy, że $b \leqslant d$.

Stąd dla każdego $b \in B$ istnieje $d \in D$ takie, że $b \leqslant d$. □

1.1.3 Antysymetryczność

Dowód. Załóżmy, że $B, C \in \mathcal{C}$ oraz $B \preceq C$, $C \preceq B$. Aby udowodnić, że $B = C$ przypuśćmy nie wprost, że jest przeciwnie. Mamy wtedy $B \not\subseteq C$ lub $C \not\subseteq B$. Załóżmy bez straty ogólności, że $B \not\subseteq C$.

Istnieje więc $c \in C$ takie, że $c \notin B$. Na mocy założenia, że $C \preceq B$, mamy, że istnieje $b \in B$ takie, że $c \leqslant b$. Teraz na mocy założenia, że $B \preceq C$ mamy, że istnieje $d \in C$ takie, że $b \leqslant d$.

Na mocy przechodniości relacji $\leqslant$ mamy, że $c \leqslant d$. Jednak $c, d \in C$, a C jest antyłańcuchem, zatem $c = d$. Teraz mamy, że $c \leqslant b$ oraz $b \leqslant c$, skąd z antysymetryczności relacji $\leqslant$ mamy, że $b = c$. Jednak $b \in B$, a założyliśmy, że $c \notin B$ – sprzeczność. □

1.2 Część b

Nie.

Dowód. Rozpatrzmy zbiór $A = \mathbb{Z} \cup \{\mathbb{Z}\}$ [1] z porządkiem zadanym jako rozszerzenie standardowego porządku na $\mathbb{Z}$ o fakt, że $\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$. Innymi słowy: do liczb całkowitych dokładamy coś nieporównywalne z żadną z nich.

Jest to oczywiście częściowy porządek. Ma on element maksymalny $\mathbb{Z}$. Pokażę, że wyindukowany stąd zbiór $\langle \mathcal{A}, \preceq \rangle$ nie ma elementu maksymalnego.

Przypuśćmy bowiem nie wprost, że pewien antyłańcuch B jest elementem maksymalnym. Oczywiście zachodzi każdy z poniższych warunków:

1. $B \neq \varnothing$ – gdyż w przeciwnym razie byłoby $B \preceq \{\mathbb{Z}\}$, lecz $B \neq \{\mathbb{Z}\}$,
2. $B \neq \{\mathbb{Z}\}$ – gdyż w przeciwnym razie byłoby $B \preceq \{0, \mathbb{Z}\}$, lecz $B \neq \{0, \mathbb{Z}\}$,
3. $B \neq \{r\}$ dla pewnej liczby całkowitej r – gdyż w przeciwnym razie byłoby $B \preceq \{r+1, \mathbb{Z}\}$, lecz $B \neq \{r+1, \mathbb{Z}\}$,
4. $B \neq \{r, \mathbb{Z}\}$ dla pewnej liczby całkowitej r – gdyż w przeciwnym razie byłoby $B \preceq \{r+1, \mathbb{Z}\}$, lecz $B \neq \{r+1, \mathbb{Z}\}$,
5. $|B \cap \mathbb{Z}| < 2$ – gdyż w przeciwnym razie B nie byłby antyłańcuchem, gdyż zawierałby przynajmniej dwie liczby całkowite, a są one porównywalne.

Jednak łatwo widać, że żaden antyłańcuch nie może spełnić ich wszystkich – sprzeczność. □

1.3 Część c

Jeśli dopuszczamy $A = \varnothing$, to nie – wówczas biorąc $A = \varnothing$ widzimy, że istnieje tylko jeden antyłańcuch – antyłańcuch pusty i istotnie jest on elementem maksymalnym (a nawet największym). Jednak oczywiście nie istnieje element maksymalny w A, bo nie istnieje tam żaden element.

Jeśli zaś nie dopuszczamy, to tak.

[1] na pewno $\mathbb{Z} \notin \mathbb{Z}$ na mocy aksjomatu regularności, zatem mogę użyć go jako nowego elementu

Dowód. Niech B będzie elementem maksymalnym w $\langle \mathcal{A}, \preceq \rangle$. Zauważmy, że $B \neq \varnothing$. Gdyby bowiem $B = \varnothing$, to ponieważ $A \neq \varnothing$, co daje $a \in A$, mielibyśmy, że $\{a\}$ byłoby antyłańcuchem i byłoby większe niż B. Zatem $B \neq \varnothing$.

Stąd istnieje $x \in B$. Twierdzę, że x jest elementem maksymalnym w $\langle A, \leqslant \rangle$. Przypuśćmy bowiem, że jest przeciwnie. Wtedy istnieje takie $x' \in B$, że $x < x'$. Rozpatrzmy zbiór

$$C = (B \setminus \{z \in B \mid z \leqslant x'\}) \cup \{x'\}$$

Po pierwsze, zauważmy, że jest to antyłańcuch. Weźmy bowiem dowolne $p, q \in C$ takie, że $p < q$. Jeśli żaden z tych elementów nie jest równy x', to znaczy, że należały też do B, zatem B nie jest antyłańcuchem. Stąd któryś z nich jest równy x'.

Jednak jak wynika z definicji zbioru C, nie ma tam elementów ściśle mniejszych niż x'. Zatem $p = x'$. Tedy mamy, że $x' < q$. Jednak ponadto $x < x'$, zatem $x < q$, zaś zarówno x, jak i q należały do B, które w związku z tym nie może być antyłańcuchem.

Zatem C jest antyłańcuchem. Pokażemy, że $B \preceq C$. Rozpatrzmy dowolne $b \in B$. Jeśli $b \leqslant x'$, to koniec, gdyż $x' \in C$. W przeciwnym zaś wypadku, $b \in C$, co znów daje koniec, gdyż $b \leqslant b$.

Jednak $x' \notin B$, zaś $x' \in C$, zatem $B \neq C$. To zaś daje, że B nie był elementem maksymalnym. ☐

2 Zadanie

2.1 Część a

2.1.1 Zwrotność

Dowód. Niech $f \in \mathcal{F}$. Wtedy dla każdego $a \in \mathbb{Z}$ zachodzi, że $f^{-1}(a) \leqslant f^{-1}(a)$, co daje, że $f \preceq f$. ☐

2.1.2 Przechodniość

Dowód. Niech $f, g, h \in \mathcal{F}$, takie, że $f \preceq g$ oraz $g \preceq h$. Rozpatrzmy dowolne $a \in \mathbb{Z}$. Na mocy założenia, że $f \preceq g$ mamy, że $f^{-1}(a) \leqslant g^{-1}(a)$. Na mocy założenia, że $g \preceq h$ mamy, że $g^{-1}(a) \leqslant h^{-1}(a)$. Na mocy przechodniości relacji $\leqslant$ mamy, że $f^{-1}(a) \leqslant h^{-1}(a)$.

Zatem z dowolności a mamy, że $f \preceq h$. ☐

2.1.3 Antysymetryczność

Dowód. Niech $f, g \in \mathcal{F}$, takie, że $f \preceq g$ oraz $g \preceq f$. Rozpatrzmy dowolne $a \in \mathbb{Z}$. Na mocy założenia, że $f \preceq g$ mamy, że $f^{-1}(a) \leqslant g^{-1}(a)$. Na mocy założenia, że $g \preceq f$ mamy, że $g^{-1}(a) \leqslant f^{-1}(a)$. Na mocy antysymetryczności relacji $\leqslant$ mamy, że $f^{-1}(a) = g^{-1}(a)$.

Zatem z dowolności a mamy, że $f^{-1} = g^{-1}$, zatem $f = g$. ☐

2.2 Część b

Lemat 1. *Dla każdej funkcji* $f \in \mathcal{F}$ *istnieje taka funkcja* $g \in \mathcal{F}$*, że* $f \preceq g$*, ale* $f \neq g$.

Dowód. Zauważmy, że funkcja $h = \lambda a.f^{-1}(a) + 1$ jest bijekcją z $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$. Istotnie, jest ona iniekcją, gdyż gdyby $h(x) = h(y)$, to $f^{-1}(x) + 1 = f^{-1}(y) + 1$, skąd byłoby $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$, lecz f^{-1} jest iniekcją. Jest też ona suriekcją. Biorąc bowiem dowolne $x \in \mathbb{Z}$ widzimy, że ponieważ f^{-1} jest suriekcją, to istnieje $y \in \mathbb{Z}$, że $f^{-1}(y) = x - 1$, zatem $f^{-1}(y) + 1 = x$, skąd $h(y) = x$.

Istnieje więc funkcja odwrotna do h i ona także jest bijekcją. Oznaczmy ją g. Widzimy, że dla każdego $a \in \mathbb{Z}$ zachodzi, że $g^{-1}(a) = 1 + f^{-1}(a)$, zatem $f^{-1}(a) \leqslant g^{-1}(a)$.

Ponadto mamy, że $g^{-1}(0) = f^{-1}(0) + 1$, co nie jest równe $f^{-1}(0)$, zatem $g^{-1} \neq f^{-1}$, zatem i $g \neq f$. ☐

Lemat 2. *Dla każdej funkcji* $f \in \mathcal{F}$ *istnieje taka funkcja* $g \in \mathcal{F}$*, że* $g \preceq f$*, ale* $f \neq g$.

Dowód. Zauważmy, że funkcja $h = \lambda a.f^{-1}(a) - 1$ jest bijekcją z $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$. Istotnie, jest ona iniekcją, gdyż gdyby $h(x) = h(y)$, to $f^{-1}(x) - 1 = f^{-1}(y) - 1$, skąd byłoby $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$, lecz f^{-1} jest iniekcją. Jest też ona suriekcją. Biorąc bowiem dowolne $x \in \mathbb{Z}$ widzimy, że ponieważ f^{-1} jest suriekcją, to istnieje $y \in \mathbb{Z}$, że $f^{-1}(y) = x + 1$, zatem $f^{-1}(y) - 1 = x$, skąd $h(y) = x$.

Istnieje więc funkcja odwrotna do h i ona także jest bijekcją. Oznaczmy ją g. Widzimy, że dla każdego $a \in \mathbb{Z}$ zachodzi, że $g^{-1}(a) = -1 + f^{-1}(a)$, zatem $g^{-1}(a) \leqslant f^{-1}(a)$.

Ponadto mamy, że $g^{-1}(0) = f^{-1}(0) - 1$, co nie jest równe $f^{-1}(0)$, zatem $g^{-1} \neq f^{-1}$, zatem i $g \neq f$. □

Lematy te dowodzą, że nie istnieje element maksymalny, minimalny, największy ani najmniejszy: istotnie, biorąc dowolną funkcję f możemy skonstruować funkcję od niej ściśle większą (mniejszą).

Ponadto niech $B(f) = \{g \in \mathcal{F} \mid (f \preceq g) \wedge (f \neq g)\}$. Wiemy, że $B(f)$ jest niepusty dla każdej funkcji f. Niech $B = \{B(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$. Istnieje funkcja wyboru $\varphi : B \to \mathcal{F}$ taka, że $\varphi(x) \in x$. Określmy funkcję $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ taką, że $\psi(f) = \varphi(B(f))$. Mamy wtedy, że $\varphi(B(f)) \in B(f)$, a zatem $\psi(f)$ jest ściśle większa niż f.

Teraz utwórzmy indukcyjnie ciąg funkcji: $f_0 = \mathrm{id}$, zaś dla $n > 0$: $f_n = \psi(f_{n-1})$. Oczywiście taki ciąg tworzy łańcuch nieskończony, gdyż f_{n-1} jest ściśle mniejsze niż f_n, co na mocy przechodniości daje, że f_k jest ściśle mniejsza niż f_l dla $k < l$, zatem są one porównywalne.

Teraz wskażemy nieskończony antyłańcuch. Określmy funkcję $F : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ daną jako:

$$F(n)(k) = \begin{cases} 2n+1 & \text{gdy } k = 2n \\ 2n & \text{gdy } k = 2n+1 \\ k & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Łatwo widać, że dla każdego n mamy, że $F(n)$ jest iniektywna i suriektywna, zatem $\mathrm{Rg}(F) \subseteq \mathcal{F}$.

Rozpatrzmy teraz $F(n_1)$ oraz $F(n_2)$ dla pewnych n_1, n_2 – różnych liczb naturalnych. Zauważmy, że $(F(n_1))^{-1}(2n_1) = 2n_1+1$, ale $(F(n_2))^{-1}(2n_1) = 2n_1$, zatem nie może być, żeby $F(n_1) \preceq F(n_2)$. Jednak analogicznie, $(F(n_2))^{-1}(2n_2) = 2n_2 + 1$, ale $(F(n_1))^{-1}(2n_2) = 2n_2$, zatem nie może być, żeby $F(n_2) \preceq F(n_1)$. Stąd dla $n_1 \neq n_2$ funkcje $F(n_1)$ oraz $F(n_2)$ są nieporównywalne, a zatem i różne.

Stąd zbiór $\{F(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ jest nieskończonym antyłańcuchem.