1 Zadanie

Dowód wskazówki

Dowód. Oznaczmy $\mathcal{X} = \{\{x\} \mid x \in X\}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\bigcup \mathcal{X} &= \{x \mid \exists_X (X \in \mathcal{X} \wedge x \in X)\}\\ &= \{x \mid \exists_y (\{y\} \in \mathcal{X} \wedge x \in \{y\})\}\\ &= \{x \mid \exists_y (y \in X \wedge x = y)\}\\ &= \{x \mid x \in X\} = X\end{aligned}$$

□

1.1 Istnienie funkcji f

Zdefiniujmy $f = \lambda\,(u : \mathbb{N})\,.\iota\,(y : \mathbb{N})\,.\,(u \in F(\{y\}))$ (którą to równość oznaczmy przez †). Zauważmy, że jest to dobrze zdefiniowana wielkość. Ustalmy bowiem jakieś $u \in \mathbb{N}$.

1.1.1 Istnienie takiego y

Dowód. Oznaczmy $\mathcal{X} = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{N}\}$. Wtedy mamy, że $\bigcup \mathcal{X} = \mathbb{N}$, jednakże stąd $\mathbb{N} \overset{1}{=} F(\mathbb{N}) = F(\bigcup \mathcal{X}) \overset{3}{=} \bigcup\{F(X) \mid X \in \mathcal{X}\} = \bigcup\{F(\{x\}) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

Ponieważ $u \in \mathbb{N}$, to $u \in \bigcup\{F(\{x\}) \mid x \in \mathbb{N}\}$, a więc w szczególności istnieje $y \in \mathbb{N}$, że $u \in F(\{y\})$. □

1.1.2 Jedyność takiego y

Dowód. Załóżmy jednak, że istnieją takie różne $y_1, y_2 \in \mathbb{N}$, że $u \in F(\{y_1\})$ oraz $u \in F(\{y_2\})$. Wtedy mamy jednak, że $u \in (F(\{y_1\}) \cap F(\{y_2\})) \overset{4}{=} F(\{y_1\} \cap \{y_2\}) = F(\varnothing) \overset{2}{=} \varnothing$, *quod est absurdum.* □

1.1.3 Podsumowanie

Dowód. Stąd więc podana definicja funkcji f jest poprawna logicznie. Weźmy teraz dowolne $X \subseteq \mathbb{N}$, zdefiniujmy $\mathcal{X} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ i zauważmy, że

$$\begin{aligned}f^{-1}(X) &= \{y \mid f(y) \in X\}\\ &= \{y \mid \exists_{x \in X}\ f(y) = x\}\\ &\overset{\dagger}{=} \{y \mid \exists_{x \in X}\ y \in F(\{x\})\}\\ &= \bigcup\{F(\{x\}) \mid x \in X\}\\ &= \bigcup\{F(\mathfrak{X}) \mid \mathfrak{X} \in \mathcal{X}\}\\ &\overset{3}{=} F\left(\bigcup \mathcal{X}\right)\\ &= F(X)\end{aligned}$$

□

1.2 Jedyność funkcji f

Dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieją dwie różne funkcje: $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, takie, że dla dowolnego zbioru $X \subseteq \mathbb{N}$, zachodzi $F(X) = f_1^{-1}(X) = f_2^{-1}(X)$. Ponieważ funkcje te są różne, to istnieje takie $x \in \mathbb{N}$, że $f_1(x) \neq f_2(x)$. Oznaczmy $t = f_1(x)$. Wtedy $x \in f_1^{-1}(\{t\})$, ale $x \notin f_2^{-1}(\{t\})$, ale jednak obie te wielkości są równe $F(\{t\})$, *quod est absurdum.* □

2 Zadanie

Odpowiedź jest przecząca.

Dowód. Ustalmy bowiem $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, zaś dla $n \notin \{0, 1\}$ zachodzi $f(n) = n$.
Załóżmy, że istnieje $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $f = g \circ g$. Oznaczmy wtedy $a = g(0)$, $b = g(1)$.

2.1 Przypadek $a = 0$

Wtedy $1 = f(0) = g(g(0)) = g(0) = 0$, *quod est absurdum*

2.2 Przypadek $a = 1$

Wtedy $1 = f(0) = g(g(0)) = g(1) = b$, ale to daje, że $0 = f(1) = g(g(1)) = g(1) = 1$, *quod est absurdum.*

2.3 Przypadek $a > 1$

Mamy wtedy $1 = f(0) = g(g(0)) = g(a)$, $0 = f(1) = g(g(1)) = g(b)$. Jednakże $a = f(a) = g(g(a)) = g(1) = b$, ale przecież to daje $1 = g(a) = g(b) = 0$, *quod est absurdum.* □