Zadanie 1

Oznaczmy

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{jeśli } n = k^2 \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

Zauważmy, że $s_n := a_0 + \ldots + a_n \in \{0,1\}$ w zależności od parzystości liczby kwadratów pośród liczb $0, 1, \ldots, n$. Dokładniej: $s_{k^2+j} = \frac{1+(-1)^k}{2}$ dla $0 \leqslant j < 2k+1$.

Określmy $\sigma_n = s_0 + \ldots + s_n$. Łatwo widać, że σ_n tworzy ciąg rosnący.

Zauważmy, że $\sigma_{(2k+1)^2-1} = 1+0+0+0+\underbrace{1+1+1+1+1}_{5}+\underbrace{0+0+0+0+0+0+0}_{7}+\ldots+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{4k+1}$.

Stąd $\sigma_{(2k+1)^2-1} - \sigma_{(2k-1)^2-1} = 4k+1 = \frac{1}{2}(8k)+1 = \frac{\left((2k+1)^2-1\right)-\left((2k-1)^2-1\right)}{2} + 1$. Stąd dodając teleskopowo mamy $\sigma_{(2k+1)^2-1} = \frac{\left((2k+1)^2-1\right)-\left((2\cdot 0+1)^2-1\right)}{2} + k + \sigma_0$. Zatem $\frac{\sigma_{(2k+1)^2-1}}{(2k+1)^2-1} = \frac{1}{2} + \frac{k+1}{(2k+1)^2-1}$, co przy $k \to \infty$ dąży do $\frac{1}{2}$. Ponadto $\sigma_{(2k)^2-1} = \sigma_{(2k-1)^2-1}$ (zostały dodane same zera), skąd łatwo mamy znowu, że $\frac{\sigma_{(2k)^2-1}}{2k^2-1} \to \frac{1}{2}$.

Gdy popatrzymy na $\frac{\sigma_n}{n}$, to zauważymy łatwo, że dla $k^2 \leqslant n \leqslant (k+1)^2$ mamy, że wartość $\frac{\sigma_n}{n}$ leży między $\frac{\sigma_{k^2-1}}{k^2-1}$ a $\frac{\sigma_{(k+1)^2-1}}{(k+1)^2-1}$.

Stąd z twierdzenia o trzech ciagach łatwo mamy $\frac{\sigma_n}{n} \to \frac{1}{2}$. Na mocy twierdzenia Frobeniusa (o tym, że sumowalnośc w sensie Cesaro implikuje sumowalność w sensie Abela), szereg z zadania ma zatem sumę dążącą przy $x \to 1^-$ do $\frac{1}{2}$

Zadanie 2

Wystarczy udowodnić tezę dla liczb wymiernych z przedziału $[0,1]$ na mocy tego, że obie strony są wielomianami, zatem gdy zgadzają się w nieskończenie wielu miejscach, to są tożsamościowo równe.

Zatem przyjmijmy $x = \frac{p}{q}$ dla $1 \leqslant p \leqslant q$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}$. Mamy wtedy $x^k(1-x)^{n-k} = \frac{p^k(q-p)^{n-k}}{q^n}$ Najpierw zauważmy, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (q-p)^{n-k} = q^n$ na mocy wzoru dwumianowego Newtona.

Ponadto $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k p^k (q-p)^{n-k} = npq^{n-1}$, gdyż obie strony odpowiadają zliczaniu następujących obiektów kombinatorycznych: mamy n ponumerowanych kulek, chcemy pomalowanać każdą z nich na jeden z q kolorów, przy czym p z tych kolorów jest jasnych. Chcemy ponadto, żeby dokładnie jedna kulka była pokolorowana błyszczącą farbą, ale ograniczenia technologiczne sprawiają, że błyszczące farby są tylko jasne.

Lewa strona równości odpowiada następującemu procesowi: decydujemy, że dokładnie k kulek będzie jasnych, wybieramy które ($\binom{n}{k}$), jedną z nich ustalamy jako błyszczącą (k), a następnie dla każdej jasnej kulki wybieramy jeden z jasnych kolorów (p^k), a dla każdej ciemnej kulki – jeden z ciemnych ($(q-p)^{n-k}$).

Prawa strona równości odpowiada wyborowi najpierw jednej błyszczącej kulki (n), pomalowaniu jej jasną farbą p, a następnie pomalowaniu reszty kulek na dowolny kolor q^{n-1}.

Analogicznie $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) p^k (q-p)^{n-k} = n(n-1)p^2 q^{n-2}$, odpowiada takiej samej sytuacji, tyle, że teraz mamy dwie wyróżnione kulki: błyszczącą i bardzo błyszczącą, przy czym obie muszą być pomalowane jasną farbą.

Mamy jednak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (nx-k)^2 x^k (1-x)^{n-k} &= \frac{1}{q^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{n^2p^2}{q^2} - \left(\frac{2np}{q} - 1\right) k + k(k-1) \right) p^k (q-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{q^n} \left(\frac{n^2p^2}{q^2} q^n - \left(\frac{2np}{q} - 1\right) npq^{n-1} + n(n-1)p^2q^{n-2} \right) \\
&= \frac{1}{q^n} \left(n^2p^2q^{n-2} - 2n^2p^2q^{n-2} + npq^{n-1} + n^2p^2q^{n-2} - np^2q^{n-2} \right) \\
&= \frac{np}{q} - \frac{np^2}{q^2} = nx(1-x)
\end{aligned}$$

Zadanie 3

Twierdzę, że ten ciąg jest zbieżny jednostajnie do funkcji $\exp(x)$. Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Pokażę, że istnieje takie N, że dla $n > N$ zachodzi $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - \exp(x)| < \varepsilon$.

Dla każdego $t \in (0,1)$ wyrażenie $1 + a_n t - n a_n$ można oszacować (bo a_n oraz t są dodatnie) jako $1 - na_n \leqslant 1 + a_n t - na_n \leqslant 1 - (n-1)a_n$. Mamy $na_n = \frac{\exp(n^{-1})-1}{n^{-1}} \to 1$, stąd i $(n-1)a_n = \frac{n-1}{n} na_n \to 1$ (przy n dążącym do nieskończoności), zatem możemy dobrać takie N, że dla $n > N$ zachodzi $1 - na_n > -\frac{\varepsilon}{e}$ oraz $1 - (n-1)a_n < \frac{\varepsilon}{e}$,

Wtedy $-\frac{\varepsilon}{e} < 1 + a_n t - na_n < \frac{\varepsilon}{e}$, zatem $|1 + a_n t - na_n| < \frac{\varepsilon}{e}$.

Funkcja $f_n - \exp$ jest różniczkowalna na przedziale $(0,1)$ i ciągła na $[0,1]$, zatem supremum modułu osiągnie na krańcach przedziału lub w punkcie, w którym zeruje się pochodna.

Na kranach przedziału mamy $f_n(0) = 1, f_n(1) = e$, zatem tam $f_n(x) = \exp(x)$.

Załóżmy, że dla pewnego $t \in (0,1)$ pochodna funkcji $f_n(x) - \exp(x)$ się zeruje. Mamy tam, że $na_n(1 + a_n t)^{n-1} - \exp(t) = 0$. Jednak zauważmy, że $f_n(t) - \exp(t) = (1 + a_n t)^n - na_n(1 + a_n t)^{n-1} + \underbrace{na_n(1 + a_n t)^n - \exp(t)}_{=0} = (1 + a_n t)^{n-1}(1 + a_n t - na_n)$.

Zauważmy jednak, że funkcja $[0,1] \ni r \mapsto (1 + a_n r)^{n-1}$ jest ściśle rosnąca (co widać np. po zróżniczkowaniu, bo nie ma w $[0,1]$ takiego r, żeby $1 + a_n r = 0$). Stąd łatwo badając wartości na końcach przedziału mamy $1 \leqslant (1 + a_n t)^{n-1} \leqslant e$. Stąd $|f_n(t) - \exp(t)| \leqslant e|1 + a_n t - na_n| < \varepsilon$.

Stąd mamy, że ponieważ nierównosc ta zachodzi dla wszystkich t, w których pochodna funkcji $f_n - \exp$ się zeruje, czyli zachodzi w szczególności na wszystkich ekstremach, a ponadto nierówność ta jest trywialnie spełniona na krańcach przedziału, zatem mamy $\|f_n - \exp\| < \varepsilon$, zatem $f_n \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} \exp$.

Zadanie 4

Przypuśćmy, że taki ciąg funkcji f_n istnieje.

Dla każdego $k, j \in \mathbb{N}$ zbiór $\{x : |f_k(x) - f_j(x)| \leqslant \frac{1}{10}\}$ jest domknięty (bo funkcja $|f_k - f_j|$ jest ciągła). Zatem zbiór $A_n = \bigcap\limits_{k,j\geqslant n} \{x : |f_k(x) - f_j(x)| \leqslant \frac{1}{10}\} = \{x : \forall_{k,j\geqslant n}\ |f_k(x) - f_j(x)| \leqslant \frac{1}{10}\}$ jest domknięty, jako przecięcie zbiorów domkniętych.

Mamy łatwo $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$. Ponadto, gdy oznaczmy $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, to widzimy, że $A = \mathbb{R}$, gdyż dla każdego $x \in \mathbb{R}$ ciąg $f_n(x)$ jest zbieżny, zatem spełnia warunek Cauchy'ego.

Na mocy twierdzenia Baire'a, istnieje takie n, że A_n zawiera pewnien przedział długości dodatniej. Możemy tam wziąć jakiś podprzedział domknięty I.

Funkcja $(f_n)_{|I}$ jest ciągła na przedziale domkniętym, zatem jest jednostajnie ciągła, zatem istnieje takie $\delta > 0$, że $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{1}{10}$. W przedziale I weźmy dowolny podprzedział długości conajwyżej δ i nazwijmy go J.

Ustalmy dowolne $x_0 \in J \cap \mathbb{Q}, x_1 \in J \setminus \mathbb{Q}$. Mamy wtedy $f_k(x_0) \to 1$, $f_k(x_1) \to 0$ dla $k \to \infty$, jednakże $|f_k(x_0) - f_k(x_1)| = |f_k(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(y_0)| + |f_n(y_0) - f_k(y_0)| \leqslant \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$. Przechodząc z $k \to \infty$ uzyskujemy, że $1 \leqslant \frac{3}{10}$, co jest sprzecznością.

Zatem taki ciąg funkcji f_n nie istnieje.