Zadanie 1

Oznaczmy $b_0 = 1$. Zauważmy, że mamy

$$x = (e^x - 1)\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^l}{l!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} b_k x^k\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{(n-k)!}\right)$$

Porównując współczynniki przy $x^1, x^2, \ldots, x^n$ po obu stronach uzyskujemy następujące równości:

$$\frac{b_0}{1!} = 1$$
$$\frac{b_0}{2!} + \frac{b_1}{1!} = 0$$
$$\frac{b_0}{3!} + \frac{b_1}{2!} + \frac{b_2}{1!} = 0$$
$$\ldots\ldots$$
$$\frac{b_0}{n!} + \frac{b_1}{(n-1)!} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{1!} = 0$$

co daje układ równań o macierzy układu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

co ma wyznacznik równy 1. Na mocy wzorów Cramera, rozwiązaniem układu jest

$$b_{n-1} = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \ldots & \frac{1}{2!} & 0 \end{pmatrix}$$

co na mocy rozwinięcia Laplace'a względem ostatniej kolumny jest równe

$$b_{n-1} = (-1)^{n+1} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \ldots & \frac{1}{2!} \end{pmatrix}$$

Ponadto zauważmy, że stąd wynika $b_1 = -\frac{1}{2}$. Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1}$. Mamy $f(-x) = \frac{-x}{2}\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} = -\frac{x}{2}\frac{1+e^x}{1-e^x} = f(x)$, zatem f jest funkcją parzystą, zatem jej rozwinięcie w szereg Taylora ma zerowe współczynniki przy nieparzystych potęgach (odejmując od niej bowiem funkcję powstałą z wzięcia jedynie parzystych potęg szeregu Taylora, uzyskujemy funkcję parzystą, której szereg potęgowy ma jedynie wyrazy o wykładnikach nieparzystych, czyli jest ona nieparzysta, a więc musi być ona zerowa), stąd jednak $b_{2n-1} = 0$ dla $n > 1$.

Zadanie 3

W zadaniu 1 udowodniłem, że dla $n > 1$ mamy $\frac{b_0}{n!} + \frac{b_1}{(n-1)!} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{1!} = 0$. Wynika stąd łatwo, że dla $n > 0$ mamy $\frac{B_0}{0!(n+1)!} + \frac{B_1}{1!n!} + \ldots + \frac{B_n}{n!1!} = 0$, czyli $B_n = n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n+1-k)!}$, czyli $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{B_k}{n+1-k}$.

Zadanie 4

Mamy:

$$
\begin{aligned}
0^n + \sum_{r=0}^{n-1} S_r(k)\binom{n}{r} &= 0^n + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{k-1} j^r \binom{n}{r}\right) = \\
&= 0^n + \sum_{j=0}^{k-1}\left(\sum_{r=0}^{n-1} j^r \binom{n}{r}\right) = \\
&= 0^n + \sum_{j=0}^{k-1}\left(\left(\sum_{r=0}^{n} j^r \binom{n}{r}\right) - j^n\binom{n}{n}\right) = \\
&= 0^n + \sum_{j=0}^{k-1}\left((j+1)^n - j^n\right) = k^n
\end{aligned}
$$

Gdzie wykorzystaliśmy zmianę kolejności sumowania, dołączyliśmy składnik dla $r = n$, a następnie skorzystaliśmy z wzoru dwumianowego Newtona oraz zwinęliśmy sumę teleskopową.

Teraz zauważmy, że gdy potraktujemy $S_n(k)$ jako niewiadome oraz dopiszemy sztuczną niewiadomą t, uzyskujemy układ równań liniowych:

$$
\begin{aligned}
0^n &= t \\
k^n &= \binom{n}{n-1}S_{n-1}(k) + \binom{n}{n-2}S_{n-2}(k) + \binom{n}{n-3}S_{n-3}(k) + \ldots + \binom{n}{1}S_1(k) + \binom{n}{0}S_0(k) + t \\
k^{n-1} &= 0\cdot S_{n-1}(k) + \binom{n-1}{n-2}S_{n-2}(k) + \binom{n-1}{n-3}S_{n-3}(k) + \ldots + \binom{n-1}{1}S_1(k) + \binom{n-1}{0}S_0(k) + t \\
&\ldots\ldots \\
k^2 &= 0\cdot S_{n-1}(k) + 0\cdot S_{n-2}(k) + 0\cdot S_{n-3}(k) + \ldots + \binom{2}{1}S_1(k) + \binom{2}{0}S_0(k) + t \\
k^1 &= 0\cdot S_{n-1}(k) + 0\cdot S_{n-2}(k) + 0\cdot S_{n-3}(k) + \ldots + 0\cdot S_1(k) + \binom{1}{0}S_0(k) + t
\end{aligned}
$$

o macierzy układu:

$$
A = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\
\binom{n}{n-1} & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-3} & \ldots & \binom{n}{1} & \binom{n}{0} & 1 \\
0 & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-3} & \ldots & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{0} & 1 \\
0 & 0 & \binom{n-2}{n-3} & \ldots & \binom{n-2}{1} & \binom{n-2}{0} & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \binom{2}{1} & \binom{2}{0} & 1 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \binom{1}{0} & 1
\end{pmatrix}
$$

Na mocy rozwinięcia Laplace'a względem pierwszego wiersza mamy, że

$$
\det A = 1\cdot(-1)^{1+n+1}\det\begin{pmatrix}
\binom{n}{n-1} & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-3} & \ldots & \binom{n}{1} & \binom{n}{0} \\
0 & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-3} & \ldots & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{0} \\
0 & 0 & \binom{n-2}{n-3} & \ldots & \binom{n-2}{1} & \binom{n-2}{0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \binom{2}{1} & \binom{2}{0} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \binom{1}{0}
\end{pmatrix} =
$$

$$
= (-1)^n\binom{n}{n-1}\binom{n-1}{n-2}\cdots\binom{2}{1}\binom{1}{0} = (-1)^n n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = (-1)^n n!
$$

Na mocy wzorów Cramera mamy

$$S_{n-1}(k) = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ k^n & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-3} & \dots & \binom{n}{1} & \binom{n}{0} & 1 \\ k^{n-1} & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-3} & \dots & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{0} & 1 \\ k^{n-2} & 0 & \binom{n-2}{n-3} & \dots & \binom{n-2}{1} & \binom{n-2}{0} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k^2 & 0 & 0 & \dots & \binom{2}{1} & \binom{2}{0} & 1 \\ k & 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{1}{0} & 1 \end{pmatrix}$$

Rozwijając rozwinięciem Laplace'a względem pierwszego wiersza mamy

$$S_{n-1}(k) = \frac{1}{(-1)^n n!} \left(0^n \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-3} & \dots & \binom{n}{1} & \binom{n}{0} & 1 \\ \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-3} & \dots & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{0} & 1 \\ 0 & \binom{n-2}{n-3} & \dots & \binom{n-2}{1} & \binom{n-2}{0} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{2}{1} & \binom{2}{0} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{1}{0} & 1 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + 1(-1)^{1+n+1} \det \begin{pmatrix} k^n & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-3} & \dots & \binom{n}{1} & \binom{n}{0} \\ k^{n-1} & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-3} & \dots & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{0} \\ k^{n-2} & 0 & \binom{n-2}{n-3} & \dots & \binom{n-2}{1} & \binom{n-2}{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k^2 & 0 & 0 & \dots & \binom{2}{1} & \binom{2}{0} \\ k & 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{1}{0} \end{pmatrix} \right)$$

Jednak ten pierwszy wyznacznik jest zerowy, gdyż ostatnia i przedostatnia kolumna są równe. Zatem

$$S_{n-1}(k) = \frac{1}{n!} \det \begin{pmatrix} k^n & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-3} & \dots & \binom{n}{1} & \binom{n}{0} \\ k^{n-1} & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-3} & \dots & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{0} \\ k^{n-2} & 0 & \binom{n-2}{n-3} & \dots & \binom{n-2}{1} & \binom{n-2}{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k^2 & 0 & 0 & \dots & \binom{2}{1} & \binom{2}{0} \\ k & 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{1}{0} \end{pmatrix}$$

Zadanie 5

Oznaczmy, dla macierzy X o n wierszach i m kolumnach oraz dla I – k-elementowego podzbioru zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ i J – k-elementowego podzbioru zbioru $\{1, 2, \dots, m\}$ przez $[X]_{I,J}$ minor powstały z pozostawienia wierszy ze zbioru I i kolumn ze zbioru J.

Twierdzę, że jeśli A jest macierzą o m wierszach i n kolumnach, B jest macierzą o n wierszach i p kolumnach, zaś I jest k-elementowym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \dots, m\}$, zaś J jest k-elementowym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \dots, p\}$, to $[AB]_{I,J} = \sum_K [A]_{I,K}[B]_{K,J}$, gdzie suma przebiega po wszystkich k-elementowych podzbiorach zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$.

Istotnie, niech $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, $AB = (c_{i,j})$, $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, $J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$, przy czym

$i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ oraz $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$. Wtedy

$$\begin{aligned}
[AB]_{I,J} &= \sum_{\tau \in S_k} (-1)^\tau c_{i_1, j_{\tau(1)}} c_{i_2, j_{\tau(2)}} \cdots c_{i_k, j_{\tau(k)}} = \\
&= \sum_{\tau \in S_k} \left((-1)^\tau \left(\sum_{z_1=1}^{n} a_{i_1,z_1} b_{z_1, j_{\tau(1)}} \right) \left(\sum_{z_2=1}^{n} a_{i_2,z_2} b_{z_2, j_{\tau(2)}} \right) \cdots \left(\sum_{z_k=1}^{n} a_{i_k,z_k} b_{z_k, j_{\tau(k)}} \right) \right) = \\
&= \sum_{\tau \in S_k} (-1)^\tau \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_k = 1}^{n} \left(a_{i_1,z_1} b_{z_1, j_{\tau(1)}} a_{i_2,z_2} b_{z_2, j_{\tau(2)}} \cdots a_{i_k,z_k} b_{z_k, j_{\tau(k)}} \right) = \\
&= \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_k = 1}^{n} \sum_{\tau \in S_k} (-1)^\tau \left(a_{i_1,z_1} b_{z_1, j_{\tau(1)}} a_{i_2,z_2} b_{z_2, j_{\tau(2)}} \cdots a_{i_k,z_k} b_{z_k, j_{\tau(k)}} \right)
\end{aligned}$$

Oznaczmy teraz $f(z_1, \ldots, z_k) = \sum_{\tau \in S_k} (-1)^\tau \left(a_{i_1,z_1} b_{z_1, j_{\tau(1)}} a_{i_2,z_2} b_{z_2, j_{\tau(2)}} \cdots a_{i_k,z_k} b_{z_k, j_{\tau(k)}} \right)$.

Zauważmy, że jeśli $z_x = z_y$ dla pewnych różnych $x, y \in \{1, 2, \ldots, k\}$, to $f(z_1, \ldots, z_k) = 0$. Istotnie, wtedy możemy wszystkie permutacje $\tau \in S_k$ sparować z permutacjami $\varphi(\tau) = (xy)\tau$ (łatwo widać, że φ jest inwolutywną permutacją zbioru S_k), zaś zachodzi

$$a_{i_1,z_1} b_{z_1, j_{\tau(1)}} a_{i_2,z_2} b_{z_2, j_{\tau(2)}} \cdots a_{i_k,z_k} b_{z_k, j_{\tau(k)}} = a_{i_1,z_1} b_{z_1, j_{\varphi(\tau)(1)}} a_{i_2,z_2} b_{z_2, j_{\varphi(\tau)(2)}} \cdots a_{i_k,z_k} b_{z_k, j_{\varphi(\tau)(k)}}$$

bo $z_x = z_y$, zaś permutacje te różnią się właśnie transpozycją tych dwóch elementów. Jednak mamy $(-1)^\tau = -(-1)^{\varphi(\tau)}$, zatem istotnie widzimy, że dzięki temu parowaniu $f(z_1, \ldots, z_k) = 0$.

Łatwo teraz widać, że jeśli $z_1, \ldots, z_k$ są parami różne, zaś $\xi(z_1, \ldots, z_k) \in S_k$ jest permutacją porządkującą liczby $z_1, \ldots, z_k$ rosnąco, to, jak w podobnym przypadku stwierdziliśmy na ćwiczeniach,

$$\begin{aligned}
f(z_1, z_2, \ldots, z_k) &= a_{i_1,z_1} a_{i_2,z_2} \cdots a_{i_k,z_k} \sum_{\tau \in S_k} (-1)^\tau \left(b_{z_1, j_{\tau(1)}} b_{z_2, j_{\tau(2)}} \cdots b_{z_k, j_{\tau(k)}} \right) = \\
&= a_{i_1,z_1} a_{i_2,z_2} \cdots a_{i_k,z_k} (-1)^{\xi(z_1, \ldots, z_k)} [B]_{\{z_1, \ldots, z_k\}, J}
\end{aligned}$$

Stąd wracając do poprzednich obliczeń:

$$\begin{aligned}
[AB]_{I,J} &= \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_k = 1}^{n} f(z_1, \ldots, z_k) = \\
&= \sum_{1 \leqslant z_1 < z_2 < \ldots < z_k \leqslant n} \sum_{\sigma \in S_k} f(z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(k)}) = \\
&= \sum_{1 \leqslant z_1 < z_2 < \ldots < z_k \leqslant n} \sum_{\sigma \in S_k} \left(a_{i_1, z_{\sigma(1)}} a_{i_2, z_{\sigma(1)}} \cdots a_{i_k, z_{\sigma(k)}} (-1)^{\xi(z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(k)})} [B]_{\{z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(k)}\}, J} \right) = \\
&= \sum_{1 \leqslant z_1 < z_2 < \ldots < z_k \leqslant n} \sum_{\sigma \in S_k} \left(a_{i_1, z_{\sigma(1)}} a_{i_2, z_{\sigma(1)}} \cdots a_{i_k, z_{\sigma(k)}} (-1)^{\sigma} [B]_{\{z_1, \ldots, z_k\}, J} \right) = \\
&= \sum_{1 \leqslant z_1 < z_2 < \ldots < z_k \leqslant n} \left([A]_{I, \{z_1, \ldots, z_k\}} [B]_{\{z_1, \ldots, z_k\}, J} \right)
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że ponieważ $z_1 < z_2 < \ldots < z_k$, to permutacja porządująca liczby $z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(k)}$ to po prostu permutacja odwrotna do permutacji σ, zatem $(-1)^{\xi(z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(k)})} = (-1)^\sigma$. Stąd mamy dowód uogólnionej tożsamości Cauchy'ego-Bineta.

Wracając do zadania: zauważmy, że gdy A jest macierzą o n-wierszach i m-kolumnach, zaś przez R oznaczymy zbiór k-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, zaś przez C – zbiór k-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, m\}$ to łatwo mamy:

$$\sum_{I \in C} [A^T A]_{I,I} = \sum_{I \in C} \left(\sum_{J \in R} \left([A^T]_{I,J} [A]_{J,I} \right) \right) = \sum_{I \in C} \sum_{J \in R} \left([A]_{J,I} [A]_{J,I} \right) = \sum_{I \in C} \sum_{J \in R} \left([A]_{J,I} \right)^2$$

czego należało dowieść.

Zadanie 6

Oznaczmy kolumny macierzy A przez $c_1, c_2, \ldots, c_n$, zaś przez $e_1, \ldots, e_n$ oznaczmy wektory bazy standardowej. Wtedy kolumnami macierzy $A + tI$ są wektory $c_1 + te_1, c_2 + te_2, \ldots, c_n + te_n$. Na potrzeby dowodu traktuję t jako zmienną formalną, w szczególności t nie należy do ciała, nad którym jest macierz A.

Korzystając z wieloliniowości wyznacznika możemy rozbić $\det(A + tI)$ na sumę 2^n wyznaczników, z których każdy ma kolumny ze zbioru $\{c_1, c_2, \ldots, c_n, te_1, te_2, \ldots, te_n\}$.

Rozpatrzmy pewien wyznacznik z powyższej sumy. Załóżmy, że ma on kolumny $q_1, \ldots, q_n$, zaś niech X będzie zbiorem tych indeksów z $\{1, \ldots, n\}$, że $i \in X \iff q_i = te_i$ (łatwo wtedy widać, że $i \notin X \iff q_i = c_i$.

Załóżmy, że X jest niepusty, a więc pewne $i \in X$. Rozwińmy teraz ten wyznacznik wzdłuż i-tej kolumny. Jedynym stojącym tam niezerowym wyrazem jest t, które stoi w i-tym wierszu. Wyznacznik ten będzie więc równy $\left((-1)^{i+i}t\right)$-krotności wyznacznika powstałego ze skreślenia i-tego wiersza i i-tej kolumny z rozważanego. Jednak to skreślenie zachowa własność, że jeśli j-ta kolumna powstałego wyznacznika zawiera wyraz t, to stoi on w j-tym wierszu. Stąd możemy dalej rozwijać rozwinięciem Laplace'a, aż uzyskamy $t^{|X|}$-krotność pewnego wyznacznika, który nie zawiera już wyrazów t, zatem jest to minor macierzy A powstały ze skreślenia wierszy i kolumn o indeksach ze zbioru X. Stąd wszystkie wyrazy badanej sumy są to wyrażenia postaci t^k-krotność minora głównego stopnia $n - k$ macierzy A. Jedynym wyjątkiem jest wyraz t^n, gdyż powstaje on ze składnika będącego wyznacznikiem macierzy diagonalnej z wyrazami t na przekątnej, a tam nasz algorytm sukcesywnego rozwijania wyznacznika zszedłby do (nieokreślonego) wyznacznika macierzy pustej.

Z drugiej strony, każdy minor główny stopnia $n - k$ wystąpi w tej sumie przemnożony przez t^k, co wynika z faktu, że można go rozszerzyć do pewnego składnika naszej sumy 2^n wyznaczników poprzez dopisanie t na głównej diagonali na skreślonych wierszach i kolumnach.

Zatem istotnie $\det(A + tI) = t^n + \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-k} t^k$.