Zadanie 1

Mamy $\left(\frac{1}{e^x+1}\right)' = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$, $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$. Zatem całkując przez części mamy $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} = \left[\frac{\arctan x}{e^x+1}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{e^x \arctan x}{(e^x+1)^2} dx$.

Policzmy więc tę drugą całkę kładąc $y = -x$, otrzymując $\int_{-1}^{1} \frac{e^x \arctan x}{(e^x+1)^2} dx = \int_{1}^{-1} \frac{e^{-y} \arctan(-y)}{(e^{-y}+1)^2}(-dy) = \int_{1}^{-1} \frac{(e^y)^2 e^{-y}(-\arctan y)}{(e^y)^2(e^{-y}+1)^2}(-dy) = -\int_{-1}^{1} \frac{e^y \arctan y}{(e^y+1)^2} dy$ zatem całka ta jest równa zeru.

Zatem całka z zadania jest równa $\frac{\arctan 1}{e+1} - \frac{\arctan(-1)}{e^{-1}+1} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{e+1} + \frac{e}{e+1}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Zadanie 2

Oznaczmy $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ jako $f(x) = \sqrt{\frac{\cos x}{1-\sin x}}$, $g(x) = \sqrt{\frac{\cos x}{1+\sin x}}$. Na przedziale z zadania obie te funkcje są dobrze określone, gdyż $\cos x \in (0, 1)$, $\sin x \in (-1, 1)$.

Forma dwuliniowa $(p, q) \mapsto \int_{\alpha}^{\beta} p(x)q(x)dx$, gdzie $p, q \in C([\alpha, \beta])$ jest dodatnio określona, zatem spełniona jest nierówność Cauchy'ego-Schwartza. Stosując ją dla funkcji f, g mamy:

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)^2 dx\right)\left(\int_{\alpha}^{\beta} g(x)^2 dx\right) \geqslant \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx\right)^2$$

Jednakże $f(x)g(x) = \sqrt{\frac{\cos x \cdot \cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}} = 1$. Zatem mamy

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos x}{1-\sin x} dx\right)\left(\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx\right) \geqslant (\beta - \alpha)^2$$

Jednak $\int \frac{\cos x}{1-\sin x} dx = -\ln(1-\sin x) + C$, $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = \ln(1+\sin x) + C$. Zatem na mocy zasadniczego twierdzenia rachunku różniczkowego mamy:

$$(\ln(1-\sin\alpha) - \ln(1-\sin\beta))(\ln(1+\sin\beta) - \ln(1+\sin\alpha)) \geqslant (\beta-\alpha)^2$$

co przez proste własności logarytmu jest równoważne:

$$\ln\left(\frac{1-\sin\alpha}{1-\sin\beta}\right) \cdot \ln\left(\frac{1+\sin\beta}{1+\sin\alpha}\right) \geqslant (\beta-\alpha)^2$$

czyli tezie zadania.

Zadanie 3

Twierdzę, że $\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$ dla $n, m \in \mathbb{N}$.

Ustalmy bowiem wartość $s = n+m$, i udowodnijmy tezę przez indukcję po m, przy ustalonym s. Dla $m = 0$ mamy $n = s$ i do policzenia całkę $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$, zatem postulowana teza zachodzi.

Teraz weźmy $m > 0$ i policzmy całkując przez części: $\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot (1-x)^m\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}(-m)(1-x)^{m-1}dx$. Ta druga całka jest równa $\frac{-m}{n+1}\frac{(n+1)!(m-1)!}{(n+m+1)!} = -\frac{n!m!}{(n+m+1)!}$. Jednakże mamy $\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot (1-x)^m\right]_0^1 = \frac{1^{n+1} \cdot 0^m}{n+1} - \frac{0^{n+1} \cdot 1^m}{n+1} = 0$, gdyż $m, n+1 > 0$. Zatem istotnie $\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$.

Zatem całka z zadania jest równa $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Zadanie 5

Mamy $\frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$, zatem dla $x \in (1, \infty)$ mamy $\frac{x}{x-1} < \frac{1}{\ln x} < \frac{1}{x-1}$, zaś dla $x \in (0, 1)$ mamy $\frac{x}{x-1} > \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x-1}$.

W obu przypadkach mamy, że $\int\limits_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ znajduje się pomiędzy $\int\limits_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$ a $\int\limits_x^{x^2} \frac{t\,dt}{t-1}$. Ta pierwsza całka jest równa $\Big[\ln|t-1|\Big]_x^{x^2} = \ln\left|x^2-1\right| - \ln|x-1| = \ln\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| = \ln(x+1)$ (bo $x > 0$). Druga zaś: zauważmy, że $\int\limits_x^{x^2} \frac{t\,dt}{t-1} - \int\limits_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = \int\limits_x^{x^2} dt = x^2 - x$, zatem $\int\limits_x^{x^2} \frac{t\,dt}{t-1} = x^2 - x + \ln(x+1)$.

Jednakże stąd uzyskujemy, że $\lim\limits_{x\to 1} \int\limits_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = \ln 2$ jak i $\lim\limits_{x\to 1} \int\limits_x^{x^2} \frac{t\,dt}{t-1} = \ln 2$, skąd z twierdzenia o trzech ciągach $\lim\limits_{x\to 1} \int\limits_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \ln 2$.

Teraz kładąc $f(1) = \ln 2$ uzyskujemy, że f jest ciągła na $(0, +\infty)$. Ustalmy dowolne $c \in (0, 1)$. Wtedy dla $x \in (0, 1)$ mamy $f(x) = \int\limits_c^{x^2} \frac{dt}{\ln t} - \int\limits_c^{x} \frac{dt}{\ln t}$, co na mocy lematu z ćwiczeń jest różniczkowalne i ma pochodną $f'(x) = (x^2)' \frac{1}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$ Analogicznie możemy postąpić dla $x \in (1, +\infty)$, uzyskując ostatecznie, że f jest różniczkowalna na $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ i zachodzi tam $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$.

Pochodna ta jest funkcją dodatnią (na $(0, 1) \cup (1, +\infty)$), zatem f jest rosnąca na $(0, 1]$ oraz $[1, +\infty)$, więc f jest rosnąca na $(0, +\infty)$.

Policzmy $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1$. Niech $g(x) = \begin{cases} f'(x) & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$. Wtedy $g \in C((0, +\infty))$, zatem posiada na dowolnym podprzedziale domkniętym tego przedziału funkcję pierwotną. Zatem ustalając przedział $[\frac{1}{n}, n]$ dostajemy, że $G'(x) = g(x)$. Jednak na $(\frac{1}{n}, 1)$ mamy $f'(x) = g(x)$, zatem $G(x) - f(x) = C_1$, tak samo mamy na $(1, n)$, że $f'(x) = g(x)$, zatem $G(x) - f(x) = C_2$. Jednak zarówno G jak i f są ciągłe, stąd licząc granicę w $x \to 1$ mamy $C_1 = C_2 = G(1) - f(1)$. Wystarczy zatem pokazać, że G jest wypukła, do czego wystarcza, żeby g była rosnąca.

Jednak g ma pochodną na zbiorze $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ i wynosi ona $\frac{1 \cdot \ln x - (x-1) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$, lecz $\ln x > \frac{x-1}{x}$, zatem g jest rosnąca zarówno na $(0, 1]$ jak i na $[1, +\infty)$, zatem jest rosnąca na $(0, +\infty)$, zatem G jest wypukła na $(0, +\infty)$, co implikuje już tezę.