Zadanie 1

$a) \implies b)$

Mamy, że istnieje baza unitarna B, że f ma tam postać diagonalną i $M(f) = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$. Oczywiście f^* ma w tej bazie postać $M(f^*) = M(f)^* = \operatorname{diag}(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$.

Niech P będzie wielomianem, który w punkcie a_i ma wartość $\overline{a_i}$ (oczywiście jeśli $a_i = a_j$, to $\overline{a_i} = \overline{a_j}$, zatem usuwając nadmiarowe warunki uzyskamy zbiór różnych a_i, i wtedy stosujemy wielomian interpolacyjny).

Wtedy na bazie $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ widzimy, że $f^*(\mathbf{b}_i) = \overline{a_i}\mathbf{b}_i = P(a_i)\mathbf{b}_i = P(f)(a_i\mathbf{b}_i)$. Zatem w ogólności $f^* = P(f)$.

$b) \implies a)$

Dowolne dwa wielomiany od f komutują, więc w szczególności f oraz $w(f) = f^*$.

$a) \implies c)$

Mamy $|f(v)|^2 = \langle f(v), f(v)\rangle = \langle v, f^*(f(v))\rangle = \langle v, f(f^*(v))\rangle = \langle f^*(v), f^*(v)\rangle = |f^*(v)|^2$.

$c) \implies a)$

Mamy $\langle v, f^*(f(v))\rangle = \langle f(v), f(v)\rangle = |f(v)|^2 = |f^*(v)|^2 = \langle f^*(v), f^*(v)\rangle = \langle v, f(f^*(v))\rangle$. Zatem oznaczając $\phi = f^* \circ f - f \circ f^*$ mamy $\forall_v \langle v, \phi(v)\rangle = 0$. Niech w będzie wektorem własnym przekształcenia ϕ z wartością własną λ. Wtedy $0 = \langle w, \phi(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \overline{\lambda}\langle w, w\rangle$. Zatem $\overline{\lambda} = 0$, czyli ϕ ma wszystkie wartości własne równe 0. Zatem ϕ jest nilpotentny. Ale $\phi^* = (f^* \circ f - f \circ f^*)^* = f^* \circ f - f \circ f^* = \phi$, zatem ϕ jest unitarny. Zatem posiada on bazę złożoną z wektorów własnych, a jak stwierdziliśmy, ma wszystkie wartości własne zerowe. Zatem $\phi = 0$, czyli $f \circ f^* = f^* \circ f$

$b) \implies d)$

Niech $v \in W$. Wtedy $f^*(v) = w(f)(v) = \sum_i a_i f^i(v)$, lecz $f^i(v) \in W$, bo W jest f-niezmiennicze, zatem $f^*(v) \in W$.

$d) \implies a)$

Na mocy faktu z ćwiczeń istnieje baza unitarna $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, że w niej f ma postać górnotrójkątną. Oznaczmy macierz f w tej bazie przez $T = (t_{ij})_{ij}$. Wtedy macierz f^* w tej bazie to $T^* = (\overline{t_{ji}})_{ij}$.

Jedyny być może niezerowy wyraz w pierwszej kolumnie to ten w pierwszym wierszu, zatem $\operatorname{lin}(\mathbf{e}_1)$ jest przestrzenią f-niezmienniczą. Zatem $\operatorname{lin}(\mathbf{e}_1)$ jest przestrzenią f^*-niezmienniczą. Stąd pierwsza kolumna macierzy T^* ma jedyny być może niezerowy element w pierwszej kolumnie w pierwszym wierszu. Ale ta kolumna to dokładnie pierwszy wiersz macierzy T.

Zatem pierwszy wiersz macierzy T jest zerowy za wyjątkiem wyrazu na przekątnej. Analogicznie patrzymy teraz na drugą kolumnę macierzy T: jedyny być może niezerowy wyraz to t_{22} (bo wiemy, że $t_{12} = 0$). Stąd $\operatorname{lin}(\mathbf{e}_2)$ jest f-niezmiennicza i rozumując analogicznie jak poprzednio uzyskujemy, że $t_{2k} = 0$ dla $k \neq 2$.

Kontynuując to rozumowanie uzyskujemy, że T jest macierzą diagonalną. Co na mocy faktu z ćwiczeń jest równoważne normalności f.

Zadanie 2

Na mocy faktu z ćwiczeń, istnieje taka baza unitarna $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, że endomorfizm, który w bazie standardowej ma macierz A, w tej bazie ma macierz górnotrójkątną T (tj. $A = UTU^{-1}$ dla pewnego $U \in U(n)$).

Wtedy wiemy, że wyrazy na przekątnej macierzy T to jej wartości własne, czyli wartości własne macierzy A, zatem wszystkie mają moduł 1.

Przypuśćmy, że pewien wyraz macierzy T poza jej przekątną jest niezerowy. Niech i będzie numerem wiersza, w której występuje ten wyraz.

Wiemy, że $|Te_i| \leqslant |e_i|$, gdyż warunek $|Ax| \leqslant |x|$ jest warunkiem niezależnym od wyboru bazy. Jednak $|e_i| = 1$, gdyż wzięliśmy bazę unitarną, zaś $Te_i = \sum_{j \geqslant i} a_{ij} e_j$, gdzie a_{ij} to wyrazy macierzy T. Znów, z unitarności bazy mamy $1 = |e_i| \geqslant |Te_i|^2 = \sum_{j \geqslant i} |a_{ij}|^2$, lecz założyliśmy, że a_{ii} ma moduł 1, a ponadto istnieje jakiś niezerowy wyraz w rozpatrywanym wierszu. Zatem $\sum_{j \geqslant i} |a_{ij}|^2 > 1$.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że macierz T jest diagonalna, skąd mamy jednak $AA^* = (UTU^*)(UTU^*)^* = UTU^*UT^*U^* = UTT^*U^*$, lecz $T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $T^* = \operatorname{diag}(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n})$, skąd $TT^* = I$ (bo $|\lambda_i| = 1$), czyli $AA^* = UU^* = I$.

Zadanie 3

Na mocy faktu z wykładu mamy $S_1 = N^2$, $S_2 = M^2$ dla pewnych N, M – symetrycznych, dodatnio określonych.

Wtedy macierz NM^2N jest symetryczna, gdyż $(NM^2N)^T = N^T (M^2)^T N^T = NM^2N$, a także dodatnio określona, gdyż $v^T NM^2Nv = (MNv)^T (MNv) = |MNv|^2$, co dla $v \neq 0$, skąd $MNv \neq 0$ (bo M, N są dodatnio określone, więc w szczególności nieosobliwe), daje $v^T NM^2Nv > 0$.

Zatem NM^2N ma dodatnie wartości własne. Jednakże $\chi_{NM^2N}(t) = \det(tI - NM^2N) = \det(tN^{-1} - NM^2) \det N = \det N \det(tN^{-1} - NM^2) = \det(tI - N^2M^2) = \chi_{N^2M^2}(t)$, skąd wartości własne macierzy NM^2N są takie jak macierzy $N^2M^2 = A$.

Zadanie 5

Część a

Wiemy z wykładu, że macierze skośniesymetryczne mają czysto urojone wartości własne. To od razu daje odwracalność macierzy $\lambda I - B$ oraz $\lambda I + B$ dla $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Przemienność jest oczywista, gdyż są to wielomiany od macierzy B, więc jako takie są przemienne.

Część b

Mamy $RR^T = (\lambda I - B)(\lambda I + B)^{-1}(\lambda I + B^T)^{-1}(\lambda I - B^T) = (\lambda I - B)(\lambda I + B)^{-1}(\lambda I - B)^{-1}(\lambda I + B)$, co na mocy przemienności jest równe $(\lambda I - B)(\lambda I - B)^{-1}(\lambda I + B)^{-1}(\lambda I + B) = I$.

Gdyby R miała wartość własną -1, to by było $(\lambda I - B)(\lambda I + B)^{-1} v = -v$, skąd $(\lambda I + B)^{-1} v = (\lambda I - B)^{-1}(-v)$, czyli $\left((\lambda I + B)^{-1} + (\lambda I - B)^{-1}\right) v = 0$, czyli $\left((\lambda I - B)(\lambda I - B)^{-1}(\lambda I + B)^{-1} + (\lambda I + B)(\lambda I + B)^{-1}(\lambda I - B)^{-1}\right) v = 0$.

Używając przemienności $(\lambda I + B)^{-1}$ z $(\lambda I - B)^{-1}$ mamy $((\lambda I - B) + (\lambda I + B)) \left((\lambda I + B)^{-1}(\lambda I - B)^{-1}\right) v = 0$, co jest sprzecznością, bo zarówno $\lambda I - B + \lambda I + B = 2\lambda I$, jak i $(\lambda I + B)^{-1}$ i $(\lambda I - B)^{-1}$ są izomorfizmami.

Część c

Zapiszmy $A := (I + R)^{-1}(I - R)$. Ponieważ R nie ma wartości własnej -1, to oczywiście $I + R$ jest nieosobliwa. Mamy wtedy $(I + R)A = I - R$, czyli $R(I + A) = I - A$, skąd $R = (I - A)(I + A)^{-1}$.

Wystarczy tylko sprawdzić, że $A^T = -A$. Ale mamy $A^T = (I - R^T)(I + R^T)^{-1} = (I - R^T)RR^T(I + R^T)^{-1} = (R - I)(R + I)^{-1} = -(I - R)(R + I)^{-1} = -(I + R)^{-1}(I - R) = -A$, gdzie wykorzystaliśmy to, że $I + R$ i $I - R$ to wielomiany macierzy R, zatem są przemienne, skąd $I - R$ i $(I + R)^{-1}$ są przemienne.

Stąd mamy, że A spełnia warunki zadania.

Zadanie 6

Niech A będzie macierzą z zadania. Wtedy A ma rzeczywiste wartości własne, zatem istnieje macierz diagonalna $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, 0, \dots, 0)$ (dla $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$) oraz macierz ortogonalna U, że $A = UDU^T$.

Jednakże łatwo widzimy, że kładąc $D_i = \mathrm{diag}(0, 0, \ldots, 0, \lambda_i, 0, 0, \ldots, 0)$, gdzie λ_i stoi na i-tym miejscu mamy, że macierze UD_iU^T są symetryczne (bo $D_i^T = D_i$) i są rzędu jeden (bo macierze D_i są takiego rzędu, a mnożenie przez macierz ortogonalną nie zmienia rzędu, gdyż są to macierze nieosobliwe). Ponadto $A = UDU^T = U(D_1 + \ldots + D_k)U^T = UD_1U^T + \ldots + UD_kU^T$, skąd teza.