Zadanie 1

Policzmy $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \frac{1}{2}$. Przyjmujemy zatem $f(0) = \frac{1}{2}$.
Policzmy pochodną w punkcie $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x-x-1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{2}}{x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2e^x-2x-2-x(e^x-1)}{2x^2(e^x-1)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^x-2-e^x+1-xe^x}{4x(e^x-1)+2x^2e^x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-xe^x}{2x^2e^x+4xe^x-4x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^x-xe^x}{4xe^x+2x^2e^x+4e^x+4xe^x-4} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-xe^x}{8xe^x+2x^2e^x+4e^x-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-e^x-xe^x}{8e^x+8xe^x+4xe^x+2x^2e^x+4e^x} = -\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Policzmy zaś pochodną poza zerem: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x x^2-(e^x-1)^2}{x^2(e^x-1)^2}$. Ponieważ mianownik jest stale dodatni (poza $x = 0$), zaś $f'(0) < 0$, to aby pokazać, że pochodna jest stale ujemna wystarczy pokazać $e^x x^2 < (e^x-1)^2$, czyli równoważnie $e^x x^2 < e^{2x} - 2e^x + 1$, czyli równoważnie $x^2 < e^x - 2 + e^{-x}$. Widać teraz, że funkcja $q(x) = e^x + e^{-x} - 2 - x^2$ rozwija się w szereg potęgowy jako $q(x) = -2 - x^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k+(-x)^k}{k!} = -2 - x^2 + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2x^{2l}}{(2l)!} = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2x^{2l}}{(2l)!}$, co ma same wyrazy szeregu dodatnie, zatem $q(x) > 0$ dla $x \neq 0$. Stąd mamy, że $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, zatem f jest malejąca.

Zadanie 2

Przypuśćmy, że f i g spełniają warunki zadania, zaś f nie jest monotoniczna. Łatwo widać, że jeśli funkcja nie jest monotoniczna, to istnieją liczby $x_1 < x_2 < x_3$, że $f(x_2) > f(x_1), f(x_3)$ lub $f(x_2) < f(x_1), f(x_3)$. Rozpatrzmy ten pierwszy przypadek, drugi jest analogiczny.

Niech $d \in (f(x_1), f(x_2)) \cap (f(x_3), f(x_2))$. Na mocy twierdzenia Bolzano-Cauchy'ego o własności Darboux, funkcja f (ciągła, bo różniczkowalna) na przedziale $[x_1, x_2]$ osiąga wartość d w pewnym punkcie x_1'. Analogicznie na przedziale $[x_2, x_3]$ osiąga wartość d w punkcie x_3'.

Niech teraz $S = \sup_{x\in[x_1',x_3']} f$. Zbiór $T = \{x \in [x_1', x_3'] : f(x) = S\}$ jest domknięty na mocy ciągłości funkcji f. Zatem istnieje w nim minimum, oznaczmy je x_2'. Oczywiście $f(x_2') \geqslant f(x_2) > f(x_1'), f(x_3')$.

Teraz zauważmy, że funkcja f na przedziale $[x_1', x_2']$ nie jest stała, zatem jej pochodna jest niezerowa, zatem istnieje punkt $x_1'' \in (x_1', x_2')$, że pochodna $f'(x_1'') \neq 0$. Na mocy własności Darboux istnieje punkt $x_3'' \in (x_2', x_3')$, że $f(x_3'') = f(x_1'')$, co z założenia daje $f'(x_3'') = f(x_1'')$.

Teraz zauważmy, że zbiór $T' = \{x \in [x_1'', x_3''] : f(x) = f(x_1'')\}$ jest domknięty na mocy ciagłości funkcji f. Zatem jego dopełnienie jest zbiorem otwartym, czyli składa się z sumy przedziałów. Ponieważ $x_2'' \notin T'$, to istnieje maksymalny przedział (x_1''', x_3'''), że $x_2'' \in (x_1''', x_3''')$ zaś $(x_1''', x_3''') \cap T' = \varnothing$.

Z maksymalności $f(x_1''') = f(x_3''') = f(x_1'')$, skąd $f'(x_1''') = f'(x_3''') \neq 0$, funkcja f na przedziale (x_1''', x_3''') jest niestała i nigdy nie osiąga wartości $f(x_1'')$. Jeśli jednak $f'(x_1''') = f'(x_3''') > 0$, to w każdym lewostronnym otoczeniu punktu x_3''' istnieje punkt y, że $f(y) < f(x_3''')$, co biorąc tak małe otoczenie, żeby leżało w całości na prawo od punktu x_2'', uzyskujemy z ciągłości, że między x_2'' a y funkcja f musi osiągać wartośc $f(x_3''')$, lecz jest to niemożliwe.

Gdy zaś $f'(x_1''') = f'(x_3''') < 0$, to w każdym prawostronnym otoczeniu punktu x_1''' istnieje punkt y, że $f(y) < f(x_1''')$ i znów biorąc dostatecznie małe otoczenie, widzimy, że na przedziale (y, x_2'') funkcja f osiąga wartość $f(x_1''')$, co nie jest możliwe.

Otrzymane sprzeczności dowodzą tezy zadania.

Zadanie 3

Przypuśćmy, że f i g spełniają warunki zadania, zaś f' nie jest monotoniczna. Zauważmy, że warunki zadania implikują, że jeśli w punkcie x funkcja f ma ekstremum lokalne, to ponieważ pochodna się tam zeruje, to $f(x) = M$ i jest to wartość niezależna od x (tj. wszystkie ekstrema są na tej samej wartości funkcji f).

Niech $T = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = M\}$. Zauważmy że na mocy ciągłości funkcji f, jest to zbiór domknięty, zatem jego dopełnienie jest otwarte, czyli jest sumą przedziałów. Twierdzę, że T jest przedziałem (być może zdegenerowanym lub wręcz pustym). Gdyby tak bowiem nie było, to na mocy powyższego w $\mathbb{R} \setminus T$ istniałby pewien maksymalny przedział (t, u) dla pewnych $t, u \in \mathbb{R}$. Wtedy jednak $f(t) = f(u) = M$, zatem na mocy twierdzenia Rolle'a, istniałoby $\xi \in (t, u)$ takie, że $f'(\xi) = 0$, ale wtedy byłoby $f(\xi) = M$, wbrew założeniu. Zatem istotnie T jest przedziałem.

Niech $L = \{x \in \mathbb{R} : x < T\}$ zaś $R = \{x \in \mathbb{R} : x > T\}$. Oczywiście $f_{|L}$ i $f_{|R}$ są stale mniejsze bądź większe niż M, na mocy ciągłości f. Zauważmy, że $f_{|L}$ oraz $f_{|R}$ są różnowartościowe. Istotnie, przypuśćmy, że dla pewnych $l_1 < l_2$ ($l_1, l_2 \in L$) mamy $f(l_1) = f(l_2)$. Wtedy na mocy twierdzenia Rolle'a, istniałoby $\xi \in (l_1, l_2)$, że $f'(\xi) = 0$, zatem $f(\xi)) = M$, lecz wtedy $\xi \in T$ – sprzeczność. Analogicznie dla $r_1, r_2 \in R$.

Zatem i $f'_{|L}$ oraz $f'_{|R}$ są róznowartościowe, gdy bowiem dla pewnych $l_1, l_2 \in L$ zachodzi $f'(l_1) = f'(l_2)$, to $g(f'(l_1)) = g(f'(l_2))$, zatem $f(l_1) = f(l_2)$, zatem $l_1 = l_2$. (Analogicznie dla $r_1, r_2 \in R$).

Jednak obie te funkcje spełniają własność Darboux, a poprzez prostą modyfikację dowodu faktu, że funkcja różnowartościowa i ciągła jest monotoniczna widzimy, że $f'_{|L}$ oraz $f'_{|R}$ są monotoniczne. Ponieważ $f'(T) = \{0\}$, to z własności Darboux widać także, że $f'_{|(L \cup T)}$ oraz $f'_{|(R \cup T)}$ są monotoniczne (istotnie, mamy, że $f'_{|L}$ oraz $f'_{|R}$ muszą być stałego znaku¸ gdyż inaczej osiągałyby zero). Łatwo też widać, że $f'_{|L}$ nie może być jednocześnie dodatnie i niemalejące lub też ujemne i nierosnące. Analogiczne własności można wypowiedzieć dla $f'_{|R}$. Wynikają one znów z własności Darboux pochodnej.

Jeśli któryś ze zbiorów L, R jest pusty, to dowód jest zakończony. Załóżmy, że oba są niepuste. Pozostaje do wykluczenia przypadek, że $\forall_{x \in L \cup R}\ f'(x) > 0$ lub $\forall_{x \in L \cup R}\ f'(x) < 0$. Zajmiemy się tym pierwszym, drugi jest analogiczny. Gdyby zachodził on, to $\forall_{x \in \mathbb{R}} f'(x) \geqslant 0$, zatem f byłoby niemalejące, zaś na L ściśle rosnące, oraz na R ściśle rosnące. Jednak biorąc $l \in L$ oraz $r \in R$ takie, że $f'(l) = f'(r)$ (istnienie takiej wartości łatwo wynika z własności Darboux pochodnej), uzyskujemy, że z założenia zadania $f(l) = f(r)$, jednak mamy, że $f(l) < f(\inf T) = f(\sup T) < f(r)$ na mocy odpowiednich znaków pochodnej. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że jednak musi być, że znaki f' na zbiorach L i R muszą być przeciwne, skąd wynika monotoniczność f.

Zadanie 4

Zauważmy, że $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$. Teraz mamy, że $W := \frac{\operatorname{tg} x + 2\sin x - 3x\cos(x^2)}{x^3 + 2x\ln(\cos x)} = \frac{\sin x + 2\sin\cos x - 3x\cos(x^2)\cos x}{x^3\cos x + 2x\cos x\ln(\cos x)} = \frac{\sin x + \sin(2x) - 3x\cos(x^2)\cos x}{x^3\cos x + 2x\cos x\ln(\cos x)}$.
Mamy, że

$$
\begin{aligned}
L &:= \sin x + \sin(2x) - 3x\cos(x^2)\cos x = \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) + 2x - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} + o(x^5) \\
&- 3x\left(1 - \frac{x^4}{2!} + o(x^4)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) = \\
&= 3x - \frac{3x^3}{2} + \frac{11x^5}{40} + o(x^5) - \left(3x - \frac{3x^5}{2!} + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) = \\
&= 3x - \frac{3x^3}{2} + \frac{11x^5}{40} + o(x^5) - 3x + \frac{3x^5}{2} + o(x^5) + \frac{3x \cdot x^2}{2!} + o(x^5) - \frac{3x \cdot x^4}{4!} + o(x^5) = \\
&= \frac{33}{20}x^5 + o(x^5)
\end{aligned}
$$

Z drugiej strony

$$
\begin{aligned}
M &:= x^3\cos x + 2x\ln(1+(\cos x - 1))\cos x = \\
&= x^3 - \frac{x^5}{2!} + o(x^5) + \\
&+ 2x\left(\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right)^3 + o((\cos x - 1)^3)\right)\cdot \\
&\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right) = \\
&= x^3 - \frac{x^5}{2!} + o(x^5) + 2x\left(\frac{-x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5) - \frac{1}{2}\frac{x^4}{2!^2} + o(x^5)+o(x^5)+o(x^5)\right)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right) = \\
&= x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5) + \left(-x^3 - \frac{x^5}{6} + o(x^5)\right)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right) = \\
&= x^3 - \frac{x^5}{2} - x^3 - \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{2} + o(x^5) = \\
&= -\frac{x^5}{6} + o(x^5)
\end{aligned}
$$

Zatem $\lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0}\frac{L}{M} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{33}{20}x^5+o(x^5)}{\frac{-x^5}{6}+o(x^5)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{33}{20}+\frac{o(x^5)}{x^5}}{\frac{-1}{6}+\frac{o(x^5)}{x^5}} = \frac{33}{20}\cdot(-6) = -\frac{99}{10}$.

Zadanie 5

Przypuśćmy, że f spełniająca warunki zadania ma asymptotę $ax+b$. Biorąc wtedy $\widehat{f}(x) = f(x) - ax - b$ widzimy, że $\frac{d^2\widehat{f}}{dx^2} = \frac{d^2 f}{dx^2}$, zaś asymptotą funkcji $\widehat{f}$ jest oś zmiennej x, zatem $\lim_{x\to\infty}\widehat{f}(x) = 0$. Zatem od tej pory będę zakładał to o funkcji f.

Zauważmy, że dla dostatecznie dużych x zachodzi $\frac{d^2 f}{dx^2} > \frac{1}{1+x^2} > \frac{1}{2x^2}$. Zatem funkcja $g(x) = f(x) + \frac{\ln x}{2}$, mająca drugą pochodną $\frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{2x^2} > 0$ jest wypukła.

Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Dla dostatecznie dużych x mamy, że $|f(x)| < \varepsilon$, zatem $\frac{\ln x}{2} - \varepsilon < g(x) < \frac{\ln x}{2} + \varepsilon$.

Popatrzmy teraz na wyrażenie $R(x,X) = \frac{g(x)+g(X)}{2}$, gdzie x oraz X są wystarczająco duże, aby powyższe nierówności zachodziły. Z wypukłości mamy $R(x,X) \geqslant g\left(\frac{x+X}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+X}{2}\right) - \varepsilon$. Jednak z drugiej strony $R(x,X) \leqslant \frac{\ln(x)+\ln(X)}{4} + \varepsilon$.

Zatem $\ln(x)+\ln(X)+4\varepsilon \geqslant 2\ln\left(\frac{x+X}{2}\right) - 4\varepsilon$, skąd $8\varepsilon \geqslant \ln\left(\frac{\left(\frac{x+X}{2}\right)^2}{xX}\right)$.

Jednak przy x ustalonym, zaś X dążącym do nieskończoności uzyskujemy, że wyrażenie pod logarytmem po prawej stronie nierówności dąży do nieskończoności, zatem logarytm także, skąd $8\varepsilon \geqslant \infty$ – sprzeczność.

Zatem funkcja f nie może mieć asymptoty.