Zadanie 1

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $p_T(x) = q(x)^d$, gdzie q jest wielomianem nierozkładalnym. Jeśli $d = 0$, to znaczy, że V jest zabijana przez identyczność, zatem jest to przestrzeń trywialna, zatem możemy wziąć $\alpha = 0$.

Jeśli zaś $d > 0$, to oczywiście dla każdego wektora α musi zachodzić $p_\alpha | p_T$, gdyż $p_T(T)(\alpha) = 0$. Przypuśćmy jednak, że dla żadnego α nie zachodzi równość w tej podzielności. To jednak oznacza, że dla każdego α zachodzi $p_\alpha(x)|q(x)^{d-1}$, skąd $q(T)^{d-1}(\alpha) = 0$, co stanowi sprzeczność z definicją wielomianu minimalnego.

Rozpatrzmy teraz przypadek ogólny $p_T(x) = q_1(x)^{d_1} q_2(x)^{d_2} \ldots q_k(x)^{d_k}$ dla $q_1, \ldots, q_k$ parami różnych i nierozkładalnych. Wtedy oczywiście muszą one być parami względnie pierwsze, gdyż inaczej licząc największy wspólny dzielnik jakiejś pary wielomianów uzyskalibyśmy, że są równe lub że nie są nierozkładalne.

Na mocy twierdzenia z ćwiczeń, $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$, gdzie V_i jest przestrzenią niezmienniczą taką, że wielomian minimalny obcięcia T do przestrzeni V_i jest równy $q_i(x)^{d_i}$. Zauważmy ponadto, że na V_i przekształcenia $q_j(T)$ dla $i \neq j$ są izomorfizmami. Istotnie, na mocy skończeniewymiarowości wystarczy zauważyć, że są monomorfizmami, zaś to jest oczywiste, bo gdyby $q_j(T)(\gamma) = 0$ dla pewnego $\gamma \in V_i$, to ponieważ z definicji $q_i(T)^{d_i}(\gamma) = 0$, a $q_j \perp q_i$, to moglibyśmy wziąć wielomiany a, b takie, że $a(x)q_j(x) + b(x)q_i(x)^{d_i} = 1$, zatem $0 + 0 = a(T)q_j(T)(\gamma) + b(T)q_i(T)^{d_i}(\gamma) = \gamma$.

Teraz zatem wystarczy wziąć wektory $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ z przestrzeni $V_1, \ldots, V_k$ na mocy przypadku szczególnego i położyć $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$. Oczywiście $p_T(T)(\alpha) = 0$.

Na mocy faktu, że $p_\alpha(x)|p_T(x)$ (z minimalności) oraz jednoznaczności rozkładu wielomianu (którą dowodzi się analogicznie jak dla liczb całkowitych, co uczyniłem w poprzedniej pracy domowej), mamy $p_\alpha(x) = q_1(x)^{e_1} \ldots q_k(x)^{e_k}$ dla pewnych $e_i \leqslant d_i$.

Przypuśćmy, że pewne $e_i < d_i$. Jednak wtedy mamy, że ograniczając się do przestrzeni V_i (ponieważ mamy sumę prostą przestrzeni niezmienniczych, to takie ograniczenie jest uprawnione) widzimy, że na mocy przemienności wielomianów od endomorfizmu:

$$q_1(T)^{e_1} \ldots q_{i-1}(T)^{e_{i-1}} q_{i-1}(T)^{e_{i+1}} \ldots q_k(T)^{e_k}(\alpha) q_i(T)^{e_i}(\alpha_i) = 0$$

Jednak z założenia $q_i(T)^{e_i}(\alpha_i) \neq 0$, a wszystkie poprzednie operatory są izomorfizmami, zatem nie wyzerują tego wektora, sprzeczność.

Zadanie 2

Jeśli przestrzeń V jest cykliczna, tj. $V = \mathrm{lin}(\alpha, T\alpha, T^2\alpha, \ldots, T^{n-1}\alpha)$, gdzie wektory te są liniowo niezależne, to gdyby $\mu_T(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ dla pewnych stałych $a_0, \ldots, a_{n-1}$ (nie zakładam niezerowości a_{n-1}), to mielibyśmy, że $0 = \mu_T(T)(\alpha) = a_{n-1}T^{n-1}\alpha + \ldots + a_0\alpha$, która to kombinacja jest zerem jedynie dla $a_{n-1} = \ldots = a_0 = 0$, zatem μ_T musi być stopnia n, tj. stopnia takiego jak wielomian charakterystyczny.

W drugą stronę, jeśli wielomian minimalny i charakterystyczny są tego samego stopnia, to na mocy poprzedniego zadania weźmy α takie, że jego wielomian minimalny jest równy μ_T. Wtedy łatwo mamy, że wektory $\alpha, T\alpha, T^2\alpha, \ldots T^{n-1}\alpha$ są liniowo niezależne: gdyby $a_0\alpha + \ldots + a_{n-1}T^{n-1}\alpha = 0$, to przeczyłoby to minimalności wielomianu minimalnego, zatem ze skończeniewymiarowości muszą one stanowić bazę, zatem V jest cykliczna.

Zadanie 3

Cykliczna $\implies$ skończenie wiele niezmienniczych

Dowód przeprowadzimy przez indukcję po wymiarze V. Załóżmy, że $V = \mathrm{lin}(\alpha, f(\alpha), \ldots, f^{n-1}(\alpha))$ (gdzie wektory te są liniowo niezależne) jest cykliczna ze względu na endomorfizm f mający wielomian minimalny μ_V (stopnia n), oraz dla wszystkich przestrzeni cyklicznych wymiaru mniejszego niż n zachodzi, że mają one tylko skończenie wiele podprzestrzeni niezmienniczych.

Niech $W \subseteq V$ będzie podprzestrzenią f-niezmienniczą. W związku z tym $f_{|W}$ jest endomorfizmem i ma wielomian minimalny μ_W. Oczywiście $\mu_V(f)(W) = \{0\}$, zatem $\mu_W | \mu_V$. Wystarczy zatem pokazać, że dla każdego $P | \mu_V$ istnieje tylko skończenie wiele przestrzeni $W \subseteq V$ takich, że P jest wielomianem minimalnym f obciętego do W.

Dla $P = \mu_V$ mamy, że W musi być wymiaru n (gdyż inaczej wielomian charakterystyczny byłby stopnia mniejszego niż n, a na mocy tw. Cayleya-Hamiltona zabija całą przestrzeń, co przeczyłoby minimalności P), zatem $W = V$.

Niech więc $P|\mu_V$ i $P \neq \mu_V$. Pokażę, że $\ker P(f)$ ma jedynie skończenie wiele podprzestrzeni niezmienniczych. Istotnie każda podprzestrzeń f-niezmiennicza przestrzeni V, dla której wielomianem minimalnym f będzie P musi być podprzestrzenią $\ker P(f)$.

Niech wielomian $Q(x) = \frac{\mu_V(x)}{P(x)}$ będzie stopnia d. Oczywiście $d \geqslant 1$. Wtedy popatrzmy na wektory $Q(f)(\alpha), fQ(f)(\alpha), \dots, f$ Są one liniowo niezależne, gdyż są w postaci schodkowej (współczynniki przy $f^d(\alpha), \dots, f^{n-1}(\alpha)$ w zapisie w bazie z początku zadania). Ponadto wszystkie one należą do $\ker P(f)$. Istotnie $P(f)f^iQ(f)(\alpha) = f^iP(f)Q(f)(\alpha) = f^i\mu_V(f)(\alpha) = 0$.

Gdyby jednak $\dim \ker P(f) > n - d$, to $\dim \operatorname{im} P(f) < d$. Zauważmy zaś, że $\operatorname{im} P(f)$ jest przestrzenią niezmienniczą: istotnie, jeśli $v \in \operatorname{im} P(f)$, to $v = P(f)(w)$ i wtedy $f(v) = P(f)(f(w)) \in \operatorname{im} P(f)$. Zatem $f_{|\operatorname{im} P(f)}$ jest endomorfizmem przestrzeni mniej niż d-wymiarowej. Oznaczmy $W(x)$ jego wielomian charakterystyczny (stopnia mniejszego niż d). Wtedy jednak na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona łatwo widzimy, że $V \overset{P(f)}{\mapsto} \operatorname{im} P(f) \overset{W(f)}{\mapsto} 0$, zatem $W(f)P(f)$ jest przekształceniem zerowym na V, zaś jest mniejszego stopnia niż n, co jest sprzeczne z definicją μ_V.

Stąd więc wiemy że $\dim \ker P(f) \leqslant n - d$, i ponieważ mamy w nim $n - d$ liniowo niezależnych wektorów, to jest dokładnie tego wymiaru. Jednak zauważmy, że nasze wektory są postaci $\beta, f(\beta), \dots, f^{n-d-1}(\beta)$ dla $b = Q(f)(\alpha)$, co dowodzi, że $\ker P(f)$ jest cykliczna. Zatem z założenia indukcyjnego (bo $n - d < n$) mamy, że posiada skończenie wiele podprzestrzeni niezmienniczych.

Stąd mamy, że dla każdego $P|\mu_V$ mamy jedynie skończenie wiele podprzestrzeni niezmienniczych, których wielomianem minimalnym jest P. Ale unormowanych dzielników μ_V jest skończenie wiele. Zatem V ma skończenie wiele przestrzeni niezmienniczych.

Skończenie wiele niezmienniczych $\implies$ cykliczna

W drugą stronę przeprowadźmy dowód przez kontrapozycję. Załóżmy, że V nie jest cykliczna. Niech $W = \operatorname{lin}(\alpha, f(\alpha), \dots, f^k(\alpha))$ (gdzie wektory te są liniowo niezależne) będzie jej podprzestrzenią cykliczną maksymalnego wymiaru. Ponieważ V nie jest cykliczna, to $W \subsetneq V$. Niech $\beta + W$ będzie niezerowym wektorem V/W, dla pewnego $\beta \in V$. Dla r z ciała, rozpatrzmy przestrzeń $U_r = \operatorname{lin}(\alpha + r\beta, f(\alpha) + rf(\beta), \dots, f^k(\alpha) + rf^k(\beta))$. Wtedy oczywiście U_r jest przestrzenią niezmienniczą, jako przestrzeń cykliczna, bo $f^{k+1}(\beta) \in \operatorname{lin}(\beta, f(\beta), \dots, f^k(\beta))$ z maksymalności wymiaru W.

Gdyby $U_r = U_p$ dla pewnych różnych r, p, to ponieważ wtedy $\alpha + r\beta, \alpha + p\beta \in U_r = U_p$, to $(r-p)\beta \in U_r = U_p$, zatem $\beta \in U_r = U_p$, zatem i $\alpha \in U_r = U_p$. Z niezmienniczości $f(\alpha), f^2(\alpha), \dots, f^k(\alpha) \in U_r$, zatem $W = U_r$ przez porównanie wymiarów, zatem ponieważ $\beta \in U_r$, to $\beta \in W$, ale założyliśmy, że $\beta + W$ jest niezerowym wektorem V/W – sprzeczność.

Zatem funkcja $K \ni r \mapsto U_r$ jest różnowartościowa. Stąd przestrzeni niezmienniczych jest przynajmniej tyle, co elementów ciała, zatem nieskończenie wiele.

Zadanie 4

Widzimy, że $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Policzmy $(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ponadto $(A-2I)^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Teraz możemy zauważyć, że

$$(A-2I)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, (A-2I)^2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (A-3I)^2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zatem oznaczając $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ możemy łatwo policzyć odwrotność $J^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ oraz mamy $A = JDJ^{-1}$.

Zatem $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = J\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}\right) J^{-1}$.

Jednak jak łatwo zobaczyć, $D^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} & \binom{k}{2}2^{k-2} \\ 0 & 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$ (wynika to chociażby z rozpatrywania osobno każdej klatki Jordana, a na niej zapisania D jako sumy krotności identyczności oraz macierzy nilpotentnej, które są przemienne, zatem można zastosować wzór dwumienny Newtona).

Zatem

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k2^{k-1}}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{k}{2}2^{k-2}}{k!} \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k2^{k-1}}{k!} \\ 0 & 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \end{pmatrix}$$

Mamy jednak $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w!\binom{k}{w}x^{k-w}}{k!} = \frac{d^w}{dx^w}\exp(x) = \exp(x)$, zatem ostatecznie mamy

$$\exp(A) = J\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}\right) J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 & \frac{e^2}{2!} \\ 0 & 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zatem wymnażając:

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^3 & -e^2 & -3e^2 & -\frac{5e^2}{2} \\ 0 & -2e^2 & -5e^2 & -4e^2 \\ e^3 & 0 & -e^2 & -2e^2 \\ 0 & 0 & 0 & -e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^3-3e^2 & 2e^2-e^3 & 3e^2-e^3 & e^3-\frac{e^2}{2} \\ -4e^2 & 3e^2 & 4e^2 & 0 \\ 2e^3-2e^2 & e^2-e^3 & 2e^2-e^3 & e^3 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

Zadanie 5

Oznaczmy $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Wtedy mamy $\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, zatem na mocy podanego na ćwiczeniach bez dowodu faktu, mamy, że $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \exp(At)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Mamy jednak dla $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, że $JDtJ^{-1} = At$.

Zatem $\exp(At) = J\exp(Dt)J^{-1}$, lecz $(Dt)^k = \begin{pmatrix} (2t)^k & tk(2t)^{k-1} \\ 0 & (2t)^k \end{pmatrix}$ (rozumowanie jak w poprzednim zadaniu). Zatem łatwo $\exp(Dt) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$. Zatem

$$\exp(At) = J\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}J^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t} & (t-1)e^{2t} \\ e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}J^{-1} = \begin{pmatrix} (1-t)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

Stąd $x_1(t) = c_1(1-t)e^{2t} + c_2te^{2t}$, $x_2(t) = -c_1te^{2t} + c_2(t+1)e^{2t}$ dla pewnych stałych c_1, c_2.