Zadanie 1

Niech $f_n(x) = x^n \ln x$ dla $x \in (0,1]$. Wtedy $f_n'(x) = nx^{n-1}\ln x + x^n \cdot x^{-1} = x^{n-1}(n \ln x + 1)$. Zatem (poza zerem) pochodna zeruje się w punkcie $e^{-\frac{1}{n}}$. Łatwo widać, że f_n osiąga tam minimum lokalne. Ponadto $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = 0$ (zatem przyjmiemy $f_n(0) = 0$), $f_n(1) = 0$, zatem łatwo mamy, że na przedziale $[0,1]$ osiąga minimum lokalne w $x_n = e^{-\frac{1}{n}}$. Maksima globalne to wartość w 1 i granica w 0, gdyż $f_n(x) \leqslant 0$.

Jednakże $x_n \to 1$ gdy $n \to \infty$. Zatem gdy ograniczymy się do $[0,r]$ dla pewnego $0 < r < 1$, to widzimy, że dla dostatecznie dużych n mamy $x_n \notin [0,r]$. Stąd łatwo mamy, że maksimum $|f_n|$ będzie wtedy osiągane w $x = r$, jako końcu przedziału. Jednak szereg $\sum r^n \ln r$ jest zbieżny, jako szereg geometryczny. Zatem na mocy kryterium Weierstraßa mamy zbieżność jednostajną szeregu $\sum f_n(x)$ dla $x \in [0,r]$.

Zatem mamy $\int\limits_0^r \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^r f_n(x)dx$. Czyli wystarczy pokazać, że

$$\lim_{r \to 1^-} \int_r^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \lim_{r \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \int_r^1 f_n(x)dx = 0 \tag{1}$$

Istotnie, jeśli to jest prawdą, zaś $d = \left| \int\limits_0^1 \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx \right|$, to zauważmy, że dla r dostatecznie bliskich jedności mamy $\left| \int\limits_r^1 \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx \right|, \left| \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_r^1 f_n(x)dx \right| \leqslant \frac{d}{3}$, zatem

$$\begin{aligned} d &= \left| \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \right| = \\ &= \left| \int_0^r \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^r f_n(x)dx + \int_r^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_r^1 f_n(x)dx \right| = \\ &= \left| \int_r^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_r^1 f_n(x)dx \right| \leqslant \frac{2d}{3} \end{aligned}$$

Zatem musi być wtedy $d = 0$.

Możemy zatem przejść do dowodu równości 1. Oczywiście $\lim\limits_{r \to 1^-} \int\limits_r^1 \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \int\limits_1^1 \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = 0$, gdyż funkcja $r \to \int\limits_r^1 (\ldots)dx$ jest ciągła.

Zatem wystarczy pokazać, że $\lim\limits_{r \to 1^-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_r^1 f_n(x)dx = 0$. Jednak $0 \leqslant -f_n(x) = -x^n \ln x \leqslant -x^n \frac{x-1}{x} = x^{n-1} - x^n$. Zatem obkładając całkami mamy $0 \leqslant -\int\limits_r^1 f_n(x) \leqslant \int\limits_r^1 x^{n-1}dx - \int\limits_r^1 x^n dx$. Sumując od $n = 1$ do N uzyskujemy: $0 \leqslant -\sum_{n=1}^{N} \int\limits_r^1 f_n(x) \leqslant \int\limits_r^1 1dx - \int\limits_r^1 x^N dx = (1-r) - \left(\frac{1^{N+1}}{N+1} - \frac{r^{N+1}}{N+1} \right)$. Widzimy, że przechodząc z $N \to \infty$ uzyskujemy $0 \leqslant -\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_r^1 f_n(x) \leqslant (1-r)$. Przechodząc z $r \to 1^-$ mamy, że $\lim\limits_{r \to 1^-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_r^1 f_n(x)dx = 0$.

Zadanie 2

Połóżmy $p_r(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+(\tan x)^r} & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$, $q_r(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+(\cot x)^r} & x \in (0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

Mamy wtedy, że funkcje p_r, q_r są ciągłe, zatem $g(r) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\tan x)^r} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} p_r(x)dx$. Całkując przez podstawienie $y = \frac{\pi}{2} - x$ uzyskujemy więc: $g(r) = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 p_r\left(\frac{\pi}{2} - y\right)(-dy) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} q_r(y)dy$, gdyż $\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cot y$.

Jednakże $2g(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p_r(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} q_r(x)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p_r(x) + q_r(x)dx$. Jednakże $p_r(x) + q_r(x) = 1$: dla $x \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$ sprawdzamy to ręcznie, zaś dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ mamy $p_r(x) + q_r(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^r} + \frac{1}{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^r} = \frac{(\cos x)^r}{(\sin x)^r+(\cos x)^r} + \frac{(\sin x)^r}{(\cos x)^r+(\sin x)^r} = 1$.

Zatem $2g(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. Stąd niezależnie od r mamy, że $g(r) = \frac{\pi}{4}$.

Zadanie 3

Zauważmy, że funkcja $x \ln x$ jest ograniczona na $x \in (0, 1]$. Istotnie, jest ona ciągła na dowolnym $[r, 1]$, więc jest tam ograniczona, więc wystarczy zbadać granicę w $x \to 0$. Udowodnię więc przez indukcję po m, że $x^n (\ln x)^m$ ma w $x \to 0^+$ granicę 0.

Dla $m = 0$ mamy: Mamy tam jednak $\lim_{x\to 0^+} x^n = 0$. Dla $m > 0$ możemy na mocy reguły de l'Hôptiala zapisać: $\lim_{x\to 0^+} x^n(\ln x)^m = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^m}{x^{-n}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{mx^{-1}(\ln x)^{m-1}}{(-n)x^{-n-1}} = -\frac{m}{n} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^{m-1}}{x^{-n}} = 0$, gdzie ostatnia równość to wykorzystanie założenia indukcyjnego.

Dla uproszczenia będę więc pisał $x^n(\ln x)^m$ na funkcję równą $x^n(\ln x)^m$ na $(0, 1]$, zaś 0 na $x = 0$.

Pokażę najpierw przez indukcję po m, że $\int_0^1 x^n(\ln x)^m dx = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}$. Dla $m = 0$ mamy bowiem $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Dla $m > 0$ mamy całkując przez części:

$$\int_0^1 x^n(\ln x)^m dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^m\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} \cdot m(\ln x)^{m-1} dx =$$

$$= -\frac{m}{n+1} \int_0^1 x^n(\ln x)^{m-1} dx = -\frac{m}{n+1} \cdot (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{(n+1)^m} = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}$$

Szereg funkcyjny $x^{-x} = \exp(-x \ln x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$ jest zbieżny jednostajnie na $x \in [0, 1]$ na mocy kryterium Weierstraßa. Stąd

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-x \ln x)^n}{n!} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-m}$$

Zadanie 4

Szereg ten jest jednostajnie zbieżny na $[-1, 1]$, na mocy twierdzenia Abela i zbieżności szeregu $\sum_k \frac{1}{k^2}$.

Funkcja g ma sens na przedziale $[0, 1]$, gdyż dla $x \in [-1, 0)$ wprawdzie wyrażenie $f(x)$ ma sens, ale wyrażenie $f(1 - x)$ już nie. Pokażę, że $g(x) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{6} - \ln x \cdot \ln(1-x) & x \notin \{0, 1\} \\ \frac{\pi^2}{6} & x \in \{0, 1\} \end{cases}$.

Zapiszmy $h(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$. (Jest to całka dobrze określona na przedziale $x \in (-1, 1)$, gdyż $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1-t)}{t} = -(\ln(-t))'_{|t=1} = 1$, zatem jest to tylko całka pozornie niewłaściwa). Mamy teraz $h'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k}$.

Ustalmy dowolne $x \in (0, 1)$ i niech r będzie takie, że $x < r < 1$. Wtedy na przedziale $[0, r]$ mamy jednostajną zbieżność szeregu potęgowego określającego $h'(x)$, zatem branie szeregu komutuje z braniem całki, skąd: $h(x) = \int_0^x h'(t)dt = \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{t^{k-1}}{k} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$.

Zatem $f(x) = h(x)$ dla $x \in [0, r]$. Stąd także $g(x) = h(x)+h(1-x)$. Policzmy pochodną: $g'(x) = -\frac{\ln 1-x}{x} + \frac{\ln x}{1-x}$.

Całkując przez zgadywanie widzimy, że $g'(x) = (-\ln x \cdot \ln(1-x))'$ dla $x \in (0, r]$. zatem biorąc coraz większe r widzimy, że na zbiorze $(0,1)$ mamy, że $g(x) + \ln x \cdot \ln(1-x)$ jest funkcją stałą.

Jednak $g(x)$ jest funkcją ciągłą na $[0,1]$, bo $f(x)$ jest (na mocy jednostajnej zbieżności). Zauważmy jednak, że $\lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot \ln(1-x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(1-x)}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{1-x}\frac{-1}{(\ln(1-x))^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-x)(\ln(1-x))^2}{x} = \left(\lim_{x\to 0^+} (1-x)\ln(1-x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0^+} -\frac{\ln(1-x)}{-x}\right) = 0 \cdot 1 = 0$.

Zatem szukana stała $g(x) + \ln x \cdot \ln(1-x)$ może być obliczona poprzez przejście graniczne do $x \to 0$, gdzie uzyskamy, że wynosi ona $g(0) = f(0) + f(1) = 0 + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}$.

Stąd istotnie $g(x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln x \cdot \ln(1-x)$ dla $x \in (0,1)$. Ponadto $g(0) = g(1) = \frac{\pi^2}{6}$

Zadanie 5

Zauważmy najpierw, że dla $p_n \to p$ $(p_n, p \geqslant 1)$ mamy $f(x)^{p_n} \rightrightarrows f(x)^p$. Mamy bowiem $|f(x)^{p_n} - f(x)^p| = f(x)^p \, |f(x)^{p_n - p} - 1|$, lecz f jest całkowalna, zatem jest ograniczona przez jakieś M (z góry, gdyż z dołu przez zero), więc $f(x)^p$ możemy oszacować przez M^p, zaś drugi czynnik przez $M^{p_n - p} - 1$, co dąży do zera.

Zatem ciąg funkcji $\ln \int_a^b f(x)^{p_n} dx$ zbiega do funkcji $\ln \int_a^b f(x)^p dx$, na mocy przemienności całki z granicą w przypadku zbieżności jednostajnej, czyli funkcja $g(p) := p \ln \|f\|_p = \ln \int_a^b f(x)^p dx$ jest ciągła.

Część a

Na mocy ciągłości do pokazania wypukłości wystarcza pokazać, że $g(p) + g(q) \geqslant 2g\left(\frac{p+q}{2}\right)$ dla dowolnych $p, q \geqslant 1$ (fakt z pierwszego semestru). Czyli obkładając obie strony równoważnie funkcją wykładniczą, należy pokazać $\left(\int_a^b f(x)^p dx\right)\left(\int_a^b f(x)^q dx\right) \geqslant \left(\int_a^b f(x)^{\frac{p+q}{2}} dx\right)^2$, co jest dokładnie nierównością Cauchy'ego-Schwartza dla półdodatnio określonej formy dwuliniowej $(f, g) \to \int_a^b f(x)g(x)dx$ dla $f, g \in \mathfrak{R}([a,b])$ zastosowanej dla funkcji $f(x)^{\frac{p}{2}}$ oraz $f(x)^{\frac{q}{2}}$.

Część b

Ustalmy $1 \leqslant p_1 < p_2$. Ustalając podział $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ taki, że $x_k = a + \frac{k}{n}$ widzimy, że suma górna funkcji $f(x)^{p_1}$ (oznaczmy ją $S(p_1, n)$) jest równa $\sum_{k=1}^n \frac{\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)^{p_1}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{\left(\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\right)^{p_1}}{n}$, analogiczny wzór możemy zapisać dla $f(x)^{p_2}$.

Jednak na mocy nierówności między średnimi z pierwszego semestru mamy

$$(S(p_1, n))^{\frac{1}{p_1}} \leqslant (S(p_2, n))^{\frac{1}{p_2}} \tag{2}$$

Przechodząc do granicy z $n \to \infty$ mamy $S(p_1, n) \to \int_a^b f(x)^{p_1} dx$, $S(p_2, n) \to \int_a^b f(x)^{p_2} dx$. Stąd uzyskujemy, że 2 przybiera w granicy postać $\|f\|_{p_1} \leqslant \|f\|_{p_2}$.

Nierówności ostrej nie uzyskamy, gdyż np. biorąc $f(x) \equiv c$ mamy $\|f\|_p = c$. Nawet unikając funkcji stałych nie osiągniemy tego, gdyż wystarczy położyć $f(x) \equiv c$ wszędzie za wyjątkiem zbioru miary zero.