Zadanie 1

Na mocy faktu z wykładu, $\mathbb{R}^n$ można rozłożyć na $\prod V_k$ tak, że odpowiada temu rozkładowi rozkład przestrzeni stycznej na ortogonalną sumę prostą, a także $\dim V_k \leqslant 2$ i $h_{|V_k}$ jest izometrią afiniczną, przy czym dla $\dim V_k = 1$ mamy, że h_{V_k} jest symetrią lub przesunięciem, a na $\dim V_k = 2$ mamy, że h_{V_k} jest obrotem.

Zdefiniujmy t zgodnie z tym rozkładem, kładąc $t_{|V_k} = h_{|V_k}$ jeśli $h_{|V_k}$ jest przesunięciem, zaś $t_{|V_k} = \mathrm{id}$ w przeciwnym wypadku. Wtedy $h \circ t^{-1}$ jest izometrią afiniczną, która na każdej ze składowych V_k jest identycznością, symetrią bądź obrotem, zatem posiada punkt stały, gdyż na każdej ze składowych posiada takowy.

Łatwo też widać, że $h \circ t^{-1} = t^{-1} \circ h$, gdyż na składowych V_k, na których h jest symetrią bądź obrotem przesunięcie t^{-1} jest o wektor zerowy, zaś na składowych, gdzie V_k jest przesunięciem, obie strony napisu $h \circ t^{-1} = t^{-1} \circ h$ są identycznościami. Zatem szukany rozkład istnieje.

Co do jednoznaczności: Zauważmy, że jeśli $t = \mathrm{Tr}_\alpha$, to wstawiając dowolny punkt p widzimy $h(p) = g(p) + \alpha = g(p + \alpha)$, zatem $\alpha = g(p + \alpha) - \alpha$, czyli α jest wektorem stałym dla Dg. Ponadto $Dh = D(t \circ g) = Dt \circ Dg = Dg$. Skoro α jest wektorem stałym dla Dh, to jest wektorem stałym dla $Dh_{|V_k}$. Jeśli jednak $h_{|V_k}$ jest symetrią bądź obrotem różnym od identyczności, to $Dh_{|V_k}$ nie ma niezerowych wektorów stałych. Jeśli $h_{|V_k}$ jest przesunięciem (o jakiś wektor ξ), to widać, że aby $g_{|V_k}$ miało punkt stały, to składowa α w TV_k musi być równa ξ. Zatem α jest wyznaczone jednoznacznie, skąd g też.

Zadanie 2

Niech f będzie izometrią $\mathbb{R}^n$ mającą punkt stały. Zaczepiając początek układu współrzędnych w tym punkcie sprowadzamy się do przypadku liniowego.

Niech więc g będzie izometrią liniową $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ będzie bazą standardową, i załóżmy, że $g(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i$ dla $i \leqslant k$. Pokażę przez indukcję wsteczną po k, że g jest złożeniem $n - k$ symetrii.

Dla $k = n$ mamy $g = \mathrm{id}$, zatem nie ma co dowodzić. Dla $k < n$ postępujmy tak: jeśli $g(\mathbf{e}_{k+1}) = \mathbf{e}_{k+1}$, to nie ma co dowodzić. W przeciwnym wypadku niech σ będzie symetrią względem $(\mathbf{e}_{k+1} - g(\mathbf{e}_{k+1}))^\perp$, tj. symetrią przeprowadzającą $\mathbf{e}_{k+1}$ na $g(\mathbf{e}_{k+1})$. Ponieważ $0 = \langle \mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_i \rangle = \langle g(\mathbf{e}_{k+1}), g(\mathbf{e}_i) \rangle = \langle g(\mathbf{e}_{k+1}), \mathbf{e}_i \rangle$ dla $i \leqslant k$, to $\mathbf{e}_i$ jest punktem stałym symetrii σ, gdyż $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_{k+1} - g(\mathbf{e}_{k+1})$. Zatem $\sigma \circ g$ jest przekształceniem zachowującym $\mathbf{e}_i$ dla $i \leqslant k + 1$. Na mocy założenia indukcyjnego jest ono złożeniem $n - k - 1$ symetrii, zatem g jest złożeniem $n - k$ symetrii.

Stąd dowolna izometria liniowa jest złożeniem n symetrii.

Rozpatrując dowolną f – izometrię afiniczną widać, że biorąc dowolne $x \in \mathbb{R}^n$ i składając ją z symetrią względem symetralnej odcinka łączącego x i $f(x)$ (tj. przestrzenią zaczepioną w $\frac{x+f(x)}{2}$ i mającą przestrzeń styczną $\omega(x, f(x))^\perp$) uzyskujemy przekształcenie afiniczne mające w x punkt stały. Zatem skoro ono jest złożeniem n symetrii, to f jest złożeniem $n + 1$ symetrii.

Zadanie 4

Homomorfizm z zadania nazwijmy $\pi : SL(2, \mathbb{C}) \to SO(1, 3)$.

Punkt (t, x, y, z) można reprezentować jako macierz samosprzężoną $M(t, x, y, z) = \begin{pmatrix} t + z & x + yi \\ x - yi & t - z \end{pmatrix}$ o wyznaczniku $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.

Obcięcie do $SU(2)$

Najpierw zbadajmy, jak zachowuje się $\pi_{|SU(2)}$, tj. badamy przekształcenia $\Gamma_A : V \to V$ dane jako $\Gamma_A(X) = AXA^*$ dla $A \in SU(2)$. Przekształcenie to jest liniowe, zatem wystarczy rozpatrzeć jego zachowanie na punktach całkowicie czasowych (tj. $x = y = z = 0$) i na punktach całkowicie przestrzennych ($t = 0$).

Dla punktu całkowicie czasowego widzimy, że jego macierz samosprzężona to tI, zatem $\Gamma_A(tI) = AtIA^* = tAA^* = t$, zatem Γ_A zachowuje składową czasową.

Dla punktu całkowicie rzeczywistego zauważmy, że $iM(0, x, y, z) = \begin{pmatrix} iz & ix - y \\ ix + y & -iz \end{pmatrix}$ jest dokładnie macierzą odpowiadającą kwaternionowi $z\mathbf{i} - y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. Przekształcenie $(x, y, z) \to (z, -y, x)$ jest jak łatwo widać obrotem.

Jak wynika z ćwiczeń + zadania piątego, działanie $SU(2)$ na $\operatorname{im}\mathbb{H}$ zadane jako $\operatorname{im}\mathbb{H} \ni \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}A^{-1} = A\mathbf{v}A^*$ zadaje epimorfizm $SU(2) \to SO(3)$. Składając to z obrotem zmieniającym współrzędne z (x, y, z) na $(z, -y, x)$ widzimy, że pozostaje jeszcze kwestia konwersji kwaternionów na macierze samosprzężone: ale to jest tylko mnożenie/dzielenie przez i, co jest przemienne ze wszystkimi działaniami, tzn. $\frac{Ai\mathbf{v}A^{-1}}{i} = A\mathbf{v}A^{-1}$.

Z tych rozważań łatwo wynika, że $\pi_{|SU(2)}$ jest epimorfizmem na $SO(3)$ traktowane jako podgrupę $SO(1,3)$ powstałą przez zachowywanie części czasowej.

Składowa identyczności w $SO(1,3)$

Zbadajmy teraz, jak wygląda składowa identyczności w $SO(1,3)$. Niech A należy do tej składowej i niech $A(1,0,0,0) = (t,x,y,z)$. Przypuśćmy, że $t < 0$. Ponieważ dla $A = \mathrm{Id}$ mamy $t > 0$, to ze spójności istnieje takie $B \in SO(1,3)$, że $B(1,0,0,0) = (0,x',y',z')$. Oznaczając $f(t,x,y,z) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ mamy: $f(1,0,0,0) = 1$, zaś $f(0,x',y',z') = -(x')^2 - (y')^2 - (z')^2 \leqslant 0$, zatem sprzeczność, gdyż B powinno zachowywać f.

Zatem każde przekształcenie ze składowej identyczności $SO(1,3)$ zachowuje zwrot czasu.

Rozkład QR macierzy

Rozpatrzmy dowolne $A \in SL(2,\mathbb{C})$. Możemy zapisać $A = QR$ dla $Q \in U(2)$, zaś R – górnotrójkątnej z dodatnimi wyrazami na przekątnej (fakt z wykładu).

Zapiszmy $R = \begin{pmatrix} a & b+ci \\ 0 & d \end{pmatrix}$ dla $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, przy czym $a,d > 0$. Mamy wtedy $\det A = \det Q \det R$, ale $\det A = |\det Q| = 1$, zatem $|ad| = |\det R| = 1$, skąd z $a,d > 0$ mamy $ad = 1$. Stąd jednak $\det Q = 1$, czyli $Q \in SU(2)$.

Zauważmy, jak sprzęganie przez R działa na wektor $(1,0,0,0)$: mamy $(t,x,y,z) := \Gamma_R((1,0,0,0)) = R\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}R^* = RR^* = \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & \frac{b+ci}{a} \\ \frac{b-ci}{a} & \frac{1}{a^2} \end{pmatrix}$.

Na mocy poprzedniego podpunktu widzimy, że jeśli chcemy trafić do składowej identyczności, to musimy mieć $t > 0$. Ponadto $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$, gdyż Γ_R zachowuje formę det typu $(1,3)$.

Odzyskując współrzędne (t,x,y,z) z tej macierzy samosprzężonej widzimy, że $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{a}$, $t = \frac{a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a}^2}{2}$, $z = a^2+b^2+c^2 - t = \frac{a^2+b^2+c^2-\frac{1}{a^2}}{2}$.

Mamy więc $b = ax$, $c = ay$, zatem $t = \frac{a^2(1+x^2+y^2)+\frac{1}{a^2}}{2}$, $z = \frac{a^2(1+x^2+y^2)-\frac{1}{a^2}}{2}$.

Rozwiązując ze względu na a mamy $2ta^2 = a^4(1+x^2+y^2)+1$. Traktując $r := a^2$ mamy $r^2(1+x^2+y^2) - 2tr + 1 = 0$. Wyróżnik trójmianu wynosi $4t^2 - 4(1+x^2+y^2) = 4(t^2 - x^2 - y^2 - 1) = 4z^2 \geqslant 0$, zatem istnieją ze względu na r rozwiązania: $r = \frac{t \pm |z|}{1+x^2+y^2}$. Oba są dodatnie, gdyż $t > |z|$, bo $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$, zatem $t^2 - z^2 > 0$. Stąd mamy istotnie dwa wybory na a (pamiętając, że musi być $a > 0$): $\sqrt{\frac{t+|z|}{1+x^2+y^2}}$ oraz $\sqrt{\frac{t-|z|}{1+x^2+y^2}}$. Przyglądając się wzorowi na z można zauważyć, że wybór któregoś z nich decyduje o znaku z. Istotnie, mamy $2t = (t \pm |z|) + \frac{1}{a^2}$, zatem $\frac{1}{a^2} = t \mp |z|$. Stąd $z = \frac{t \pm |z| - (t \mp |z|)}{2} = \pm |z|$.

Stąd uzyskaliśmy, że sprzęganiem przez macierz górnotrójkątną z dodatnimi wyrazami na przekątnej jesteśmy w stanie przesłać wektor $(1,0,0,0)$ na dowolny wektor o „kwadracie normy” jeden i dodatnim zwrocie czasu.

Ale R są odwracalne i ich odwrotności też są górnotrójkątne, zatem możemy też powiedzieć, że za pomocą sprzęgania przez macierze górnotrójkątne możemy przeprowadzić dowolny wektor o „kwadracie normy” jeden i dodatnim zwrocie czasu na wektor $(1,0,0,0)$.

Konkluzja

Niech $h \in SO(1,3)$. Wektor $h(1,0,0,0)$ ma „kwadrat normy” jeden i dodatni zwrot czasu, zatem istnieje macierz R taka, że Γ_R przeprowadza $(1,0,0,0)$ na $h(1,0,0,0)$.

Oznaczmy $g = \Gamma_R^{-1} \circ h$. Wtedy $g \in SO(1,3)$, a ponadto $g(1,0,0,0) = (1,0,0,0)$. Zatem zauważmy, że jeśli $g(0,1,0,0) = (t,x,y,z)$, to licząc wartość formy dwuliniowej na wektorze $(1,0,0,0)$ oraz $(0,1,0,0)$ uzyskujemy zero, zatem także licząc wartość formy dwuliniowej na $(1,0,0,0)$ oraz (t,x,y,z) musimy dostać zero, skąd $t = 0$.

Analogicznie pokazujemy, że $g(0,0,1,0)$ i $g(0,0,0,1)$ mają zerową część czasową, zatem tak naprawdę $g \in SO(3)$ (traktowanego jako podgrupa $SO(1,3)$, gdzie wymagamy od przekształceń zachowywania czasu).

Ale takie przekształcenie jest postaci $g = \Gamma_A$ dla pewnego $A \in SU(2)$. Zatem $h = \Gamma_R \Gamma_A = \Gamma_{RA}$, czyli istotnie $h \in \operatorname{im} \pi$, zatem π jest epimorfizmem na składową identyczności.

Zadanie 5

Zauważmy, że jeśli za y wstawimy wektor należący do osi obrotu (przy utożsamieniu $\mathbb{R}^3 \cong \operatorname{im} \mathbb{H}$, które będę stosował do końca zadania), to musi być $qyq^{-1} = y$, zatem $qy = yq$.

Mamy wzór z ćwiczeń na iloczyn dwóch kwaternionów: $(x_0 + \mathbf{x})(y_0 + \mathbf{y}) = x_0 y_0 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + x_0 \mathbf{y} + y_0 \mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{y}$, gdzie $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \operatorname{im} \mathbb{H}$.

Można zauważyć z niego, że dwa kwaterniony komutują wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn wektorowy ich części urojonych jest zerowy (jest to jedyny składnik niesymetryczny w tym wzorze), czyli gdy ich części urojone są proporcjonalne.

Zatem ponieważ $qy = yq$, to musi być, że oś obrotu (czyli $\operatorname{lin} y$) jest równa $\operatorname{im} q$. (Za wyjątkiem przypadku, gdy oś ta nie istnieje, tj. obrót jest identycznością, ale pokazaliśmy na ćwiczeniach, że ten przypadek zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $q = \pm 1$).

Mamy $q^{-1} = p - \mathbf{v}$. Niech teraz $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Wtedy $\mathbf{vu} = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \mathbf{v} \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ z prostopadłości. Mamy wtedy $\rho_q(\mathbf{u}) = (p + \mathbf{v})\mathbf{u}(p - \mathbf{v}) = (p\mathbf{u} + \mathbf{v} \times \mathbf{u})(p - \mathbf{v}) = p^2 \mathbf{u} + p\mathbf{u} \times \mathbf{v} - p\mathbf{v} \times \mathbf{u} - (-\underbrace{\langle \mathbf{v} \times \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}_{=0} + (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}) =$

$p^2 \mathbf{u} - 2p\mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.

Zapisując $\mathbf{v} = r\mathbf{n}$ dla $r \in \mathbb{R}$, $|\mathbf{n}| = 1$ mamy $p^2 + r^2 = 1$, a także $\rho_q(\mathbf{u}) = p^2 \mathbf{u} - 2pr\mathbf{n} \times \mathbf{u} + r^2 \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u})$.

Mamy $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) = \langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} - \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{u} = -\mathbf{u}$ na mocy wzoru z ćwiczeń. Zatem $\rho_q(\mathbf{u}) = (p^2 - r^2)\mathbf{u} - 2pr\mathbf{n} \times \mathbf{u}$.

Jednak na ćwiczeniach pokazywaliśmy kiedyś wzór na obrót r o kąt α wokół osi $\operatorname{lin} \mathbf{n}$ dla $\mathbf{n}$ unormowanego, taki, że układ $\mathbf{n}, \mathbf{u}, r(\mathbf{u})$ jest pozytywnie zorientowany dla $\sin \alpha > 0$: $r(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \sin \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{u} + (1 - \cos \alpha) \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u})$. W naszej sytuacji wzór ten upraszcza się do $\cos \alpha \mathbf{u} + \sin \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{u}$. Porównując to ze wzorem na $\rho_q(\mathbf{u})$ widzimy, że przyjmując $p = \cos \frac{\alpha}{2}$, $q = -\sin \frac{\alpha}{2}$ uzyskujemy identyczność tych wzorów.

Zatem ρ_q obraca wektor $\mathbf{u}$ o kąt $-\frac{\alpha}{2}$ wokół osi $\mathbf{v}$, tak, że układ $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \rho_q(\mathbf{u})$ jest dodatnio zorientowany dla $\sin \alpha > 0$.

Zatem ρ_q obraca tak każdy wektor, gdyż $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, zatem należy do płaszczyzny obrotu.

Stąd mamy jednak, że π jest epimorfizmem: biorąc dowolny unormowany wektor $\mathbf{u}$ stanowiący oś obrotu i dowolny kąt α widzimy, że sprzęganie przez kwaternion $\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{u}$ jest dokładnie szukanym obrotem.

Zadanie 6

Załóżmy, że $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$. Tezę udowodnię przez indukcję wsteczną po k. Dla $k = n$ macierz H jest macierzą identycznościową, zatem biorąc $\mathbf{T} = \mathbf{I}$ uzyskujemy $\mathbf{T}^* \mathbf{T} = \mathbf{H}$.

Teraz załóżmy, że $k < n$ (i wtedy właściwie można dopiero mówić o $a, \mathbf{b}, \mathbf{C}$). Z hermitowskości mamy $a \in \mathbb{R}$ oraz $\mathbf{c} = \mathbf{b}^*$. Dodatnia określoności daje $a > 0$.

Połóżmy teraz $\mathbf{T}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{a} & \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{a}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-k-1} \end{pmatrix}$. Możemy teraz zauważyć, że dla $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} - \frac{\mathbf{b}^* \mathbf{b}}{a} \end{pmatrix}$ zachodzi:

$$\mathbf{T}_k^* \mathbf{V} \mathbf{T}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{b}^*}{\sqrt{a}} & \mathbf{I}_{n-k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} - \frac{\mathbf{b}^* \mathbf{b}}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{a} & \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{a}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-k-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{b}^*}{\sqrt{a}} & C - \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}^*}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{a} & \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{a}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}* & \frac{\mathbf{b}^* \mathbf{b}}{a} + \mathbf{C} - \frac{\mathbf{b}^* \mathbf{b}}{a} \end{pmatrix} = \mathbf{H}$$

Na mocy założenia indukcyjnego $\mathbf{V} = \mathbf{T}^* \mathbf{T}$. Zatem $H = (\mathbf{T}\mathbf{T}_k)^* (\mathbf{T}\mathbf{T}_k)$, zaś iloczyn macierzy górnotrójkątnych o dodatnich wyrazach na przekątnej jest górnotrójkątny z dodatnimi wyrazami na przekątnej, zatem teza indukcyjna została udowodniona.