מבוא לרשתות עצביות - תרגיל 1

שאלות תיאורטיות

שאלה 1

1.1

נראה שקונבולוציה היא translation-invariant. הגדרת הקונבולוציה:

$$\{f[k]*g[k]\}[n]=\sum_m f[n-m]\,g[m]$$

במקרה של הזזה של האות f:

$$\begin{aligned}\{f[k+t]*g[k]\}[n]&=\sum_m f[n-m+t]\,g[m]\\&=\sum_m f[(n+t)-m]\,g[m]\\&=\{f[k]*g[k]\}[n+t]\end{aligned}$$

וכך גם במקרה של הזזה של האות השני:

$$\begin{aligned}\{f[k]*g[k+t]\}[n]&=\sum_m f[n-m]\,g[m+t]\\&\overbrace{=}^{m'=m+t}\sum_{m'} f[(n+t)-m']\,g[m']\\&=\{f[k]*g[k]\}[n+t]\end{aligned}$$

1.2

עבור אות g באורך N (מקבל ערכים באינדקסים 0 עד $N-1$) ופילטר f באורך $K\le N$ נקבל את הקונבולוציה:

$$\{f*g\}[n]=\sum_{m=0}^{K-1} g[n-m]\,f[m]$$

הסכום מצטמצם ל־$K-1$ איברים של f השונים מ־0. כעת נתבונן בערכי n האפשריים. עבור $n<K-1$ נקבל בסכום איברים של g עם אינדקס קטן מ־0, ולכן $n\ge K-1$. עבור $n>N-1$ נקבל בסכום איברים של g עם אינדקס הגדול מ־$N-1$, ולכן $n\le N-1$. סה"כ:

$$K-1\le n\le N-1$$

$$\Rightarrow\qquad \text{length}\left(\{f*g\}[n]\right)=N-1-(K-1)+1=N-K+1$$

1.3

לפי התשובה של הסעיף הקודם כאשר $N = K$ נקבל פלט באורך 1. זה הגיוני שכן ישנה רק אפשרות אחת שבה האות והפילטר יחפפו לחלוטין.

שאלה 2

2.1

נסמן את ה־loss ב־L. כמו כן נסמן $z = f * I + b$. הנגזרת של L ביחס ל־f:

$$\frac{\partial L}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f}\left[F\left(\mathrm{ReLU}\left(z\right)\right)\right] = F'\left(\mathrm{ReLU}\left(z\right)\right) \cdot \mathrm{ReLU}'\left(z\right)\frac{\partial z}{\partial f}$$

וכן עבור b:

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left[F\left(\mathrm{ReLU}\left(z\right)\right)\right] = F'\left(\mathrm{ReLU}\left(z\right)\right) \cdot \mathrm{ReLU}'\left(z\right)\frac{\partial z}{\partial b}$$

ראינו את הנגזרת של ReLU:

$$\mathrm{ReLU}'\left(x\right) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

מכאן שאם $z < 0$ הנגזרות לפי f, b מתאפסות.

2.2

אם $f * I + b$ יוציא ערכים שליליים עבור כל הקלטים שנכנסים, אז הגרדיאנט תמיד יהיה שווה לאפס וערכי הפילטר וה־bias ישארו קבועים.

שאלה 3

3.1

נסמן ב־z את תוצאת הקונבולוציה של הפילטר f על הקלט I:

$$z = f * I$$

נניח אות חד־מימדי ותוצאת הקונבולוציה כוללת רק נקודות בהם הפילטר f מוכפל באופן מלא על אות הקלט. נניח ש־f באורך K ו־I באורך N. לפי סעיף 1.2 האורך של z הוא $N - K + 1$. מתקיים:

$$z_i = \sum_{j=1}^{K} W_j I_{i+j-1}$$

כאשר W_j הם המשקולות של f עבור $1 \leq j \leq K$ ו־z_i הם ערכי אות המוצא עבור $1 \leq i \leq N - K + 1$. לשם נוחות סימון האינדקסים כתבנו את הקונבולוציה כ־cross-correlation. ואז W_j הם המשקולות f לאחר שמבצעים לו היפוך (כלומר $W_j = f\left[K - j\right]$). כעת נגזור את z לפי משקולות f:

$$\frac{\partial z_i}{\partial W_j} = \frac{\partial}{\partial W_j}\left(\sum_{j=1}^{K} W_j I_{i+j-1}\right) = I_{i+j-1}$$

קיבלנו שנגזרת שכבת הקונבולוציה היא מטריצה מהצורה הבאה:

$$\boldsymbol{J}_{(N-K+1)\times(K)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial W_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial W_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_{N-K+1}}{\partial W_1} & \cdots & \frac{\partial z_{N-K+1}}{\partial W_K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & \cdots & I_K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{N-K+1} & \cdots & I_N \end{pmatrix}$$

3.2

נסמן את השכבות אחר כך ב־$L\left(z\right)$. כעת נגזור את L לפי המשקולות של f, כלומר לפי W_j:

$$\frac{\partial L}{\partial W_j} = \sum_{i=1}^{N-K+1} \frac{\partial L}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial W_j} = \left(\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{z}}\right)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{J}\right)_j \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial f} = \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{z}}\right)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{J}$$

ניתן לראות איך בקלות המטריצה מוכפלת בגרדיאנט של השכבה הקודמת בתהליך ה־propagation.

שאלה 4

4.1

כל פילטר הוא בגודל $5 \times 5 \times 3$ כאשר המימד השלישי נובע מ־3 הערוצים בקלט. מספר הפרמטרים הכולל עבור 96 פילטרים הוא:

$$\#\ \text{parameters} = 96 \times \left(5 \times 5 \times 3 + \overset{\text{bias}}{1}\right) = 7296$$

4.2

בשכבת fully connected כל איבר בפלט מחובר לכל איבר בקלט. הקלט והפלט במקרה שלנו הם באותו גודל ולכן מספר הפרמטרים הוא:

$$\#\ \text{parameters} = \left(4 \times 4 \times 256\right)\left(4 \times 4 \times 256 + \overset{\text{bias}}{1}\right) = 16781312$$

4.3