第一章 极限、函数与连续

刘春光

信息科学技术学院 数学系

目录

目录

目录

知识点

求极限的常用基本性质：

- 初等函数的连续性
- 四则运算法则，无穷小量、无穷大量的性质
- 常用恒等变形：根式差的有理化、三角变换
- 强迫收敛性（夹逼准则）
- 单调有界定理
- 归结原则

Definition (无穷小量)

设函数f在x_0的某空心邻域内有定义。如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$，则称f 为当$x \to x_0$时的无穷小量。

Definition (等价无穷小量)

设当$x \to x_0$时，f与g 均为无穷小量。若

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

则称f 与g为当$x \to x_0$时的等价无穷小量，记做

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0).$$

Theorem (等价无穷小量的替换)

设函数f, g, h 在x_0 的某空心邻域内有定义，且有

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0).$$

1. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)h(x) = A$;
2. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)}{f(x)} = B$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)}{g(x)} = B$。

注：等价无穷小量的代换只能用于乘除运算。

知识点：常用的等价无穷小量

- 三角函数

$$\sin x \sim x \quad (x \to 0) \qquad \tan x \sim x \quad (x \to 0)$$

$$\arcsin x \sim x \quad (x \to 0) \qquad \arctan x \sim x \quad (x \to 0)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad (x \to 0)$$

- 对数、指数

$$\ln(1+x) \sim x \quad (x \to 0) \qquad e^x - 1 \sim x \quad (x \to 0)$$

- 根式、次方（常数$\alpha \neq 0$）

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n} \quad (x \to 0) \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (x \to 0)$$

知识点：等价无穷小量的变形

Theorem (复合函数求极限、变量替换)

若 $\lim\limits_{u\to u_0} g(u)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=u_0$，且在$x_0$的某空心邻域内有$u(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} g[u(x)] \xlongequal{u=u(x)} \lim_{u\to u_0} g(u)=A.$$

知识点：等价无穷小量的变形

Theorem (复合函数求极限、变量替换)

若 $\lim\limits_{u\to u_0} g(u)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=u_0$，且在$x_0$的某空心邻域内有$u(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} g[u(x)] \xlongequal{u=u(x)} \lim_{u\to u_0} g(u)=A.$$

利用变量替换技巧，我们可以得到，如果

$$f(u)\sim g(u)\quad (u\to u_0),$$

$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=u_0$，且在$x_0$的某空心邻域内有$u(x)\neq u_0$，则

$$f[u(x)]\sim g[u(x)]\quad (x\to x_0).$$

知识点：等价无穷小量的变形

由常用等价无穷小量及极限的变量替换技巧，我们可以得到更多的等价无穷小量，例如

$$1-\cos 2x \sim 2x^2 \quad (x \to 0) \qquad \sin x^2 \sim x^2 \quad (x \to 0)$$

$$\ln x \sim x-1 \quad (x \to 1) \qquad \tan \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \quad (x \to \infty)$$

习题

1. （竞赛教程例1.1）求极限$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x^3+\tan^2 x}$.

2 （2016 年全国研招考试数二(1)）

设$a_1 = x(\cos\sqrt{x}-1)$，$a_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$，$a_3 = \sqrt[3]{x+1}-1$。当$x \to 0^+$ 时，以上3个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是

(A) a_1, a_2, a_3; (B) a_2, a_3, a_1; (C) a_2, a_1, a_3; (D) a_3, a_2, a_1.

3. 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[m]{x^m+x^{m-1}}-\sqrt[m]{x^m-x^{m-1}}\right)$。

4. （2015 年全国研招考试数一、数三(9)）

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \underline{\qquad\qquad}.$$

习题（1^∞ 型未定式）

❺（2019 年全国研招考试数二(9)）

$\lim_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}} =$____________。

❻（2022 年全国研招考试数二、数三(11)）

极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x} =$ ____________。

习题（1^∞ 型未定式）

❼ （2018 年全国研招考试数一(9)）

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e，则 k = \underline{\qquad\qquad}.$$

习题（1^∞ 型未定式）

❽ （2015 年全国研招考试数二(2)） 函数

$$f(x) = \lim_{t\to 0}(1 + \frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}$$

在$(-\infty, +\infty)$ 内

(A) 连续;

(B) 有可去间断点;

(C) 有跳跃间断点;

(D) 有无穷间断点.

习题（带未知函数的极限）

9 （2016 年全国研招考试数三(9)） 已知函数 $f(x)$ 满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2,$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ ____________。

习题（带未知函数的极限）

10 （2011 年第一届广东省大学生数学竞赛试卷（经济管理类）填空题第1 小题） 已知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{5^x-1}=3,$$

则极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$ ________.

习题（带未知函数的极限）

11 （2005 年第十六届北京市大学生数学竞赛本科丙组（经济管理类）试题一6） 已知

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2^x-1}\ln\left[1+\frac{f(x)}{1-\cos x}\right]=4,$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=$ __________.

12 （2000 年第十二届北京市大学生数学竞赛本科甲、乙组试题一8） 设$f(x)$ 在点$x=0$ 可导，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{e^{f(x)}-1}=1,$$

则 $f'(0)=$ __________.

Theorem ($\frac{0}{0}$ 型未定式极限的洛必达法则)

若函数f和g 满足:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$;
2. 在点x_0 的某空心邻域$U^\circ(x_0)$ 内两者都可导，且$g'(x) \neq 0$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ （A 可为实数，也可以为$\pm\infty$ 或∞），

则

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

注：若将定理中x的变化过程改为其它趋向方式，只要相应修正条件(2)中的邻域，也可得到同样的结论。

注：洛必达法则中的三个条件缺一不可，否则不能用洛必达法则。但这并不意味着原极限不存在，这时应换用其它方法去求。 如函数

$$\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

在$x \to 0$时的极限等于零，但由于

$$\frac{(x^2 \sin \frac{1}{x})'}{(\sin x)'} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

在$x \to 0$时无极限，故不能适用洛必达法则。

Theorem ($\frac{\bullet}{\infty}$ 型未定式极限的洛必达法则)

若函数f和g 满足:

1. $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x) = \infty$;
2. 在点x_0 的某右邻域$U_+^\circ(x_0)$ 内两者都可导，且$g'(x) \neq 0$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ （A 可为实数，也可以为$\pm\infty$ 或∞），

则

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

注：该定理对x 的其它趋向方式也有同样的结论。

知识点

在应用洛必达法则求不定式极限时，应遵循

先化简，再求导

的原则。常用的化简方法有

1. 等价无穷小量替换；
2. 换元；
3. 四则运算法则。

常用极限：对任意的$a>1,\beta\in(0,+\infty)$，都有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\beta}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\beta}{a^x}=0,\qquad \lim_{x\to0^+}x^\beta\ln x=0.$$

知识点

常用函数的麦克劳林公式

(1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

(2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m})$

(3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1})$

(4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

(5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

(6) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

Example (直接应用洛必达法则或者泰勒公式)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x(\frac{\pi}{2}-\arctan x)$$

1. （2019 年全国研招考试数一、数二、数三(1)）
当$x \to 0$时，若$x - \tan x$与x^k 是同阶无穷小，则$k =$

(A) 1 (B)2 (C) 3 (D) 4

Example (等价无穷小量的倒数相减)

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) \qquad \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$$

习题

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\dfrac{1}{\sqrt[n]{e}-1}\right)$；

3. （2020 年全国研招考试数一(9)）
$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=$ __________。

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{2\ln x}\right)$。

5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right]\dfrac{1}{\sin x}$。

Example (常见结论的各种变形)

（竞赛教程例1.11）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\arctan x-\tan x}$.

Example (常见结论的各种变形)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

6 （2024 年第十六届全国大学生数学竞赛初赛- 非数学B 类-第一题1） 极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2) - x^2}{\sin^4 x} =$ ________.

7 （2023 年全国研招考试数三11）
$\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \left(2 - x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} \right) =$ ________。

8 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^2 \sin x}$.

9 （2016 年全国研招考试数二、数三(15)） 求极限

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x + 2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}.$$

习题

10 （2008年全国硕士研究生入学统一考试（数学三）(15)）

求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}.$$

11 （2011 年第二届全国大学生数学竞赛决赛（非数学类）试题一1）（竞赛教程例1.6）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

目录

1. （2012年第四届全国大学生数学竞赛预赛（非数学类）试题四）

   设函数$y=f(x)$二阶可导，且$f''(x)>0$，$f(0)=0$，$f'(0)=0$，求

   $$\lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$$

   其中u是曲线$y=f(x)$上点$P(x,f(x))$处的切线在x轴上的截距。

2 （1999年第十一届北京市大学生（非数学专业）数学竞赛本科甲、乙组试题四）

设$f(x)$具有连续的二阶导数，且

$$\lim_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3,$$

求 $f(0), f'(0), f''(0)$及$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

习题：估计无穷小量的阶

1. （2015 年全国研招考试数一、数二、数三(15)）
   设函数 $f(x) = x + a\ln(1+x) + bx \cdot \sin x$，$g(x) = kx^3$，
   若$f(x)$ 与$g(x)$ 在$x \to 0$ 时是等价无穷小，求a, b, k 的值。

习题：估计无穷小量的阶

2. （2018 年全国研招考试数二(1)）

若$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则

$(A)\ a=\dfrac{1}{2}, b=-1;$ $(B)\ a=-\dfrac{1}{2}, b=-1;$

$(C)\ a=\dfrac{1}{2}, b=1;$ $(D)\ a=-\dfrac{1}{2}, b=1.$

3. （2010 年全国硕士研究生入学统一考试（数学三）(1)）

若$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$，则$a$ 等于

$(A)\ 0;$ $(B)\ 1;$ $(C)\ 2;$ $(D)\ 3.$

习题：估计无穷小量的阶

❹ （2023 年全国研招考试数一11、 数二11） 当$x \to 0$时，函数$f(x) = ax + bx^2 + \ln(1+x)$ 与$g(x) = e^{x^2} - \cos x$是等价无穷小，则$ab =$ ___________。

习题：估计无穷小量的阶

5. 求常数a, b 使得$(\ln(1+ax))^2 - \sin^2(bx) + x^3$在$x \to 0$ 时为x的4阶无穷小。

习题：估计无穷小量的阶

6 （2013 年全国硕士研究生入学统一考试（数学三）(15)）
当$x \to 0$时，$1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$与$ax^n$ 为等价无穷小，求n与a的值。

习题：估计无穷小量的阶

❼ （2018 年第十届中国大学生数学竞赛预赛- 非数学类- 第一题4）（竞赛教程例1.14）

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\underline{\qquad\qquad}。$$

❽ （竞赛教程例1.13）

求极限$I=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$ （n 为正整数）。

习题：估计无穷小量的阶

含$u(x)^{v(x)}$ 类表达式之差

1. 求出常数c, α, β 使得$x^{\sin x} - (\sin x)^{x}$ 与$cx^{\alpha}(\ln x)^{\beta}$ 在$x \to 0^{+}$ 时为等价无穷小。

习题：估计无穷小量的阶
含$u(x)^{v(x)}$ 类表达式之差

❷ （2020 年第十二届中国大学生数学竞赛初赛- 非数学类- 第一题5）

设$f(x), g(x)$ 在$x=0$ 的某一邻域U内有定义，对任意$x\in U$，

$f(x)\neq g(x)$，且$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=a>0$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=\underline{\qquad\qquad}.$$

习题：估计无穷小量的阶
含$u(x)^{v(x)}$ 类表达式之差

❸ （2020 年全国研招考试数三(15)） 设a, b 为常数，当$n \to \infty$ 时，$(1+\frac{1}{n})^n - e$ 与$\frac{b}{n^a}$ 为等价无穷小，求a, b 的值。

❹ （2010 年第一届全国大学生数学竞赛决赛（非数学类）试题二1）（竞赛教程例1.16）
求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right)$。

习题：估计无穷小量的阶

含$u(x)^{v(x)}$ 类表达式之差

5 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$。

6 （竞赛教程例1.10）求极限

$$I=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[e^{(1+\frac{1}{x})^x}-(1+\frac{1}{x})^{ex}\right]。$$

习题：洛必达法则+ 变限积分求导

1. （2021 年全国研招考试数一、二(17)） 求极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right).$$

习题：洛必达法则+ 变限积分求导

2. （2016 年全国研招考试数一(9)）

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}=\underline{\qquad\qquad}.$$

3. 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^x\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t-e\right)\mathrm{d}t}{\ln x}.$$

习题：洛必达法则+ 变限积分求导

❹ （2020 年全国研招考试数一、数二(1)） 当$x \to 0^+$ 时，下列无穷小量中最高阶是

(A) $\int_0^x (e^{t^2} - 1)\mathrm{d}t$;　　(B) $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3})\mathrm{d}t$;

(C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2 \mathrm{d}t$;　　(D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\mathrm{d}t$.

习题：洛必达法则+ 变限积分求导

❺ （2021 年全国研招考试数二、三(1)）

当$x \to 0$时，$\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1)\mathrm{d}t$ 是x^7 的

(A) 低阶无穷小.

(B) 等价无穷小.

(C) 高阶无穷小.

(D) 同阶但非等价无穷小.

习题：洛必达法则+ 变限积分求导

6 （2017 年全国研招考试数二、数三(15)）

求 $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}$.

习题：洛必达法则+ 变限积分求导

❼ （2020 年全国研招考试数二(16)） 设$f(x)$ 连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，求$g'(x)$ 且证明$g'(x)$ 在$x=0$ 处连续。

习题：$\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$型

❶ 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为n 个正数，且

$$f(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}},$$

证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$;

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$。

习题：$\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$型

❷ （1988年第一届北京市大学生（非理科）数学竞赛试题四）

求

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\quad (a_i>0, i=1,2,\cdots,n).$$

❸ （2009年首届全国大学生数学竞赛区赛试卷-非数学类-试题二）（竞赛教程例1.56）

求极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}},$$

其中n是给定的正整数。

目录

目录

知识点

若曲线$y=f(x)$ 有斜渐近线$y=kx+b$，则k,b 可由如下极限确定

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$$

（其中$x\to+\infty$ 也可根据情况换为$x\to-\infty$ 或$x\to\infty$）。

1. （2017 年全国研招考试数二(9)）
   曲线$y = x(1 + \arcsin \frac{2}{x})$ 的斜渐近线方程为__________。

2. （2016 年全国研招考试数二(9)）
   曲线$y = \frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2)$ 的渐近线方程为________。

3. （2023 年全国研招考试数一1、 数二1）
   曲线$y = x \ln\left(e + \frac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为

   $(A)\ y = x + e \quad (B)\ y = x + \frac{1}{e} \quad (C)\ y = x \quad (D)\ y = x - \frac{1}{e}$

❹ （2018 年全国研招考试数三(15)） 已知实数a,b 满足$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=2$，求$a,b$。

5. （2020 年全国研招考试数二(15)）
求曲线$y = \dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}\ (x > 0)$ 的渐近线。

目录

Theorem (拉格朗日Lagrange 中值定理(The mean value theorem))

若函数f满足以下条件

1. f 在闭区间$[a, b]$ 上连续;
2. f 在开区间(a, b) 内可导;

则在(a, b) 内至少存在一点ξ，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

利用拉格朗日中值定理求极限

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}})$，其中$a > 0$。

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(3^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x+1}})$。

利用拉格朗日中值定理求极限

❸ （2018 年全国研招考试数二(9)）

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\arctan(x+1)-\arctan x] =$____________。

❹ 若$\alpha > 0$，求$\lim\limits_{x\to+\infty}((x+1)^\alpha - x^\alpha)$。

❺ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt[3]{x+1}-\cos\sqrt[3]{x}\right)\cdot x^{\frac{1}{3}}$。

利用拉格朗日中值定理求极限

❻ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+2x\right)-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\arctan\left(1+x\right)-\arctan\left(1-2x\right)}$。

利用拉格朗日中值定理求极限

❼ 已知$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$，求证：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}-(1+g(x))^{\frac{1}{g(x)}}}{f(x)-g(x)}=-\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

目录

Definition (定积分定义：一、分割)

在闭区间$[a,b]$ 内设置$n+1$个点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把$[a,b]$ 分成n 个小区间，这些分点或这些小区间构成对$[a,b]$ 的一个分割(partition)，记为

$$T = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\} \text{ 或 } T = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2] \ldots, [x_{n-1}, x_n]\}$$

分割的细度用

$$\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \quad （其中 \Delta x_i = x_i - x_{i-1}）$$

表示，称为分割T的模(mesh or norm)。

Definition (定积分定义：二、近似求和)

设$f(x)$ 是定义在区间$[a,b]$ 上的一个函数，对于$[a,b]$ 的一个分割T，任取点$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$，并作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

此和式称为$f(x)$ 在$[a,b]$ 上属于分割T的积分和，也称黎曼和(the Riemann sum of f)。

Definition (定积分定义：三、取极限)

设J是一个确定的实数，若对任意 $\varepsilon > 0$ 总存在某个$\delta > 0$，使得$[a,b]$ 上的任何分割T， 只要它的细度$\|T\| < \delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right| < \varepsilon$$

则称$f(x)$在$[a,b]$ 上可积，称J为函数$f(x)$ 在区间$[a,b]$ 上的定积分（或黎曼积分Riemann integral），记作

$$J = \int_a^b f(x)dx,$$

其中$f(x)$称为积分函数，x 称为积分变量，$[a,b]$ 称为积分区间， a,b分别称为积分的下限和上限。

习题：定积分定义与极限

1. （2021 年全国研招考试数一(4)、 数二(7)）

设函数$f(x)$ 在区间$[0,1]$ 上连续，则$\int_0^1 f(x)dx =$

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$;

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$;

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$;

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$.

习题：定积分定义与极限

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$。

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1+n}+\dfrac{1}{2+n}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$。

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$。

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$；

习题：定积分定义与极限

❻ （2016 年全国研招考试数二、数三(10)）

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n})=$ ________。

❼ 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\cos\dfrac{\pi}{3n}+\cos\dfrac{2\pi}{3n}+\cdots+\cos\dfrac{n\pi}{3n}\right)$.

❽ （2017 年全国研招考试数一(16)、 数二、数三(17)）

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

习题：定积分定义与极限

9 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}.$$

10 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+(\frac{1}{n})^2)(1+(\frac{2}{n})^2)\cdots(1+(\frac{n}{n})^2)}.$$

11 （2010 年第一届全国大学生数学竞赛决赛（非数学类）试题一1）（竞赛教程例1.68）

求极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}$.

12 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+i^2}\sin\frac{1}{n}$。

13. 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{\sqrt{n^2+k}}.$$

14 （2016 年第八届中国大学生数学竞赛预赛- 非数学类- 第四题）（竞赛教程例1.66）

设函数$f(x)$ 在闭区间$[0,1]$ 上具有连续导数，$f(0)=0$，$f(1)=1$。证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = -\frac{1}{2}.$$

习题：定积分定义与极限

15 （2021 年第十三届全国大学生数学竞赛初赛- 非数学类- 第五题）（竞赛教程例1.67）

设函数$f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，证明

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)\right] = \frac{(b-a)^2}{24}[f'(b)-f'(a)].$$

目录

目录

Definition (不动点(fixed point))

对函数$f(x)$，如果有$\bar{x} = f(\bar{x})$ 成立，则称$\bar{x}$ 是函数f的不动点。

性质：设数列$\{x_n\}$ 由递推公式$x_{n+1} = f(x_n)$ 给出，且有极限$\bar{x}$。若f在$\bar{x}$ 处连续，则$\bar{x}$ 必为f 的不动点。

Theorem (单调有界定理)

实数系中，有界的单调数列必有极限。

习题：由递推关系求极限

1. 设$x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n = 1, 2, \cdots$，试讨论数列$\{x_n\}$的敛散性，若收敛，求其极限。

证法一：利用单调有界定理

习题：由递推关系求极限

1. 设$x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n = 1, 2, \cdots$，试讨论数列$\{x_n\}$ 的敛散性，若收敛，求其极限。

证法二：讨论x_n与极限的误差

2 设$0 < x_1 < 1$，$x_{n+1} = \sin x_n \ (n = 1, 2, \cdots)$，证明：数列极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求该极限值。

3 （2018 年全国研招考试数一、数三(19)、 数二(21)） 设数列$\{x_n\}$ 满足$x_1 > 0$，$x_n \mathrm{e}^{x_{n+1}} = \mathrm{e}^{x_n} - 1 \ (n = 1, 2, \cdots)$，证明$\{x_n\}$ 收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

4 （2023 年全国研招考试数二3） 已知$\{x_n\},\{y_n\}$ 满足：

$$x_1 = y_1 = \frac{1}{2},\ x_{n+1} = \sin x_n,\ y_{n+1} = y_n^2\ (n = 1, 2, \cdots),$$

则当$n \to \infty$ 时，

(A) x_n是y_n的高阶无穷小　(B) y_n是x_n的高阶无穷小

(C) x_n与y_n是等价无穷小　(D) x_n与y_n是同阶但不等价的无穷小

习题：单调有界定理

5. 设$a > 0$，

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}),\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}),\ n = 1, 2, \ldots,$$

证明$\{a_n\}$ 极限存在，并求极限。

6. 设$a_1 = 0,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{4} + a_n^2,\ n = 1, 2, \cdots$。证明数列$\{a_n\}$ 的极限存在，并求其值。

7 （1994年第六届北京市大学生（非数学专业）数学竞赛本科甲、乙组试卷第三题）

设$f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n$ $(n = 2, 3, \cdots)$。证明：

(1) 方程$f_n(x) = 1$在$[0, +\infty)$内有唯一的实根x_n；

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

习题：单调有界定理

8. (1) 证明对每个正整数$n>1$，方程

$$2=1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n$$

在(0,1) 内有且只有一个根，记此根为x_n。

(2) 证明 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求 $\lim_{n\to\infty} x_n$。

9 （竞赛教程例1.26）令

$$x_0 = 1,\ x_{n+1} = \frac{1}{2 + x_n},\ n = 0, 1, 2, \cdots$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其值。

10 设a_n 满足$a_{n+1} = \dfrac{2(a_n+1)}{a_n+2}$，$n = 1, 2, \cdots$，且$a_1 > 0$。证明：数列$\{a_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$。

11 给定三个实数a_1, b_1, c_1，对所有正整数n，定义

$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2},\ b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2},\ c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

证明由此生成的三个数列$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$收敛，并求它们的极限。

12 （2016 年全国研招考试数一(19)） 已知函数$f(x)$ 可导，且$f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$。 设数列$x_n$ 满足

$$x_{n+1}=f(x_n)\ (n=1,2,\ldots),$$

证明：

(I) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；

(II) $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，且$0<\lim_{n\to\infty} x_n<2$。

目录

Theorem ($\frac{\bullet}{\infty}$型的施笃兹(Stolz) 定理)

设$\{x_n\}$ 和$\{y_n\}$ 是两个数列，满足以下条件

1. 数列$\{y_n\}$ 严格递增且趋向$+\infty$;
2. 数列$\left\{\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right\}$ 收敛（或趋向于$\pm\infty$），

则数列$\{\dfrac{x_n}{y_n}\}$ 也收敛且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

注：施笃兹(Stolz) 定理被称为数列极限的洛必达法则。

细节辨析：定理条件(i) 如果换为“数列$\left\{\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right\}$趋向于$\infty$”，则定理结论未必成立。例如 对数列$\{x_n=(-1)^{n+1}n\}$和$\{y_n=n\}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{1}=\infty,$$

但

$$\frac{x_n}{y_n}=(-1)^{n+1}$$

不趋向于∞。

Theorem ($\frac{0}{0}$型的施笃兹(Stolz) 定理)

设$\{x_n\}$ 和$\{y_n\}$ 是两个数列，满足以下条件

1. 数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都是无穷小数列，且$\{y_n\}$严格单减；
2. 数列$\left\{\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right\}$收敛（或趋向于$\pm\infty$），

则数列$\{\dfrac{x_n}{y_n}\}$ 也收敛且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

1. （竞赛教程例1.31）设数列$\{x_n\}$满足

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2x_n}\ (n = 1, 2, \cdots),$$

证明：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - n}{\ln n} = \frac{1}{4}.$

❷ 设$x_0 = a$，$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$，且$x_n = \sin x_{n-1}\ (n = 1, 2, \cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n\sqrt{\dfrac{n}{3}} = 1$。

❸ 设$x_1 \in (0,1), x_{n+1} = x_n(1-x_n)\ (n=1,2,\cdots)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 1$。

❹ 设$x_1 > 0, x_{n+1} = \ln(1+x_n)\ (n=1,2,\cdots)$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 2$.

5. 设数列$\{x_n\}$满足：

$$\lim_{n\to\infty}(2x_{n+1}-x_n)=x.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。

6. （2011年第三届全国大学生数学竞赛预赛（非数学类）第二题）（竞赛教程例1.63）

设$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$为数列，a,λ为有限数，求证：

1. 如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$。
2. 如果存在正整数p，使得$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$。

习题：Stolz定理

7. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{1 + 2 + 3 + \cdots + n} = a$。

8. （2013年第五届全国大学生数学竞赛预赛（数学类）第三题）
设$f(x)$在区间$[0,a]$上有二阶连续导数，$f'(0)=1$，$f''(0)\neq 0$，且$0<f(x)<x, x\in(0,a)$。令

$$x_{n+1}=f(x_n), \quad x_1\in(0,a)$$

(1) 求证$\{x_n\}$收敛并求极限；(2) 试问$\{nx_n\}$是否收敛？若不收敛，则说明理由。若 收敛，则求其极限。

目录

知识点

Theorem (均值的极限)

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$;

(2) 若$a_n > 0 \ (n = 1, 2, \cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$。

Corollary

若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = a \ (b_n > 0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = a$。

习题：均值的极限

1. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}k^{\frac{1}{k}}$.

2. （2000年第十二届北京市大学生（非数学专业）数学竞赛本科甲、乙组试卷第一题7）
设数列$\{x_n\}$满足：$n\sin\frac{1}{n+1} < x_n < (n+2)\sin\frac{1}{n+1}$，
则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k =$ ________。

3 （2007年第十八届北京市大学生（非数学专业）数学竞赛本科甲、乙组试卷第六题）

设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，且和为S。试求

(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)}$.

4. 已知 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$， $\lim_{n\to\infty} b_n = b$，试证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = 0.$$

5. （2022年第十四届全国大学生数学竞赛初赛-数学类A卷-第二题）设

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^2} = a, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n^2} = b.$$

证明极限

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

存在并求其值。

习题：均值的极限

6. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

目录

Definition (函数在一点的连续性)

若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$ 处连续($f(x)$ is continuous at x_0)。

依定义，函数$y = f(x)$ 在x_0 点连续当且仅当以下三个条件成立：

1. $f(x_0)$ 存在；
2. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 存在；
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$。

1. （1992年第四届北京市大学生（非数学专业）数学竞赛试卷第三题）（竞赛教程例1.48）
   设函数$f(x)$在$(0,1)$上有定义，且函数$e^x f(x)$与函数$e^{-f(x)}$在$(0,1)$上都是单调递增的，求证：$f(x)$在$(0,1)$上连续。

知识点

Theorem (最值定理 The Extreme Value Theorem)

如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则该函数在$[a,b]$上一定可以取到最大值和最小值。

Theorem (介值定理 The Intermediate Value Theorem)

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续且$f(a)\neq f(b)$，则对介于$f(a)$与$f(b)$之间的任意实数μ，都存在$x_0\in(a,b)$，使得

$$f(x_0)=\mu.$$

Corollary (等价命题：根的存在定理)

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$ 上连续，且$f(a)$ 与$f(b)$ 异号，则至少存在一点$x_0 \in (a,b)$，使得

$$f(x_0) = 0.$$

Corollary (闭区间上连续函数的值域)

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$ 上连续，m和M 是函数$f(x)$在$[a,b]$ 上的最小值和最大值，则$f(x)$的值域为$[m,M]$。

习题：介值定理

1. （2010年全国硕士研究生入学统一考试（数学三）(19)）
设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=0$，
且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$。证明：
(I) 存在$a>0$，使得$f(a)=1$；
(II) 对(I)中的a，存在$\xi\in(0,a)$，使得$f'(\xi)=\frac{1}{a}$。

2. 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，其值域$f([a,b]) \subset [a,b]$。证明该函数存在不动点，即存在$x_0 \in [a,b]$使得$f(x_0) = x_0$。

3. （2011年第一届广东省大学生数学竞赛（经管类）试卷第三题）
设$f(x)$在$[0,1]$上可导，当$0 \le x \le 1$时，$0 \le f(x) \le 2$；且对区间$(0,1)$内所有x有$f'(x) \neq 2$，证明：在$[0,1]$上有且仅有一点ξ，使得$f(\xi) = 2\xi$。

4. （1988年第一届北京市大学生（非理科）数学竞赛试卷第六题）（竞赛教程例1.54）

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$f[f(x)]=x$。证明在$(-\infty,+\infty)$内至少有一个x_0满足$f(x_0)=x_0$。

习题：介值定理

5 （2018年第九届全国大学生数学竞赛决赛-非数学类-第二题）（竞赛教程例1.70）

设函数$f(x)$在区间(0,1)内连续，且存在两两互异的点$x_1, x_2, x_3, x_4 \in (0,1)$，使得

$$\alpha = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < \frac{f(x_3) - f(x_4)}{x_3 - x_4} = \beta,$$

证明：对任意 $\lambda \in (\alpha, \beta)$，存在互异的点 $x_5, x_6 \in (0,1)$，使得 $\lambda = \dfrac{f(x_5) - f(x_6)}{x_5 - x_6}$.

6. （竞赛教程例1.52）设$f(x)$ 在(a,b) 区间连续，取$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$，试证存在$\xi \in [x_1, x_n]$，使得$f(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$。

7. （2008年第十九届北京市大学生（非数学专业）数学竞赛本科甲、乙组试卷第四题）（同竞赛教程例1.55）
设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(0)=f(1)$，求证：对于任意正整数n，必存在$x_n \in [0,1]$， 使$f(x_n) = f\left(x_n + \dfrac{1}{n}\right)$。

❽ 设$0 < a < b < +\infty$，函数$f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续非负，若记$M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

9. 设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，且对任意$x_1 \in [a,b]$，存在$x_2 \in [a,b]$，使得$|f(x_2)| \le \dfrac{1}{2}|f(x_1)|$， 证明：存在$\xi$使$f(\xi) = 0$。