RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I JEGO ZASTOSOWANIA

Definicja

Załóżmy, że dana jest funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ oraz że $x_0 \in (a,b)$ jest ustaloną liczbą w tym przedziale. Jeżeli istnieje skończona granica

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

to nazywamy ją **pochodną funkcji** f w punkcie x i oznaczamy symbolem $f'(x_0)$.

Zatem $\underline{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$, o ile ta granica istnieje i jest skończona.

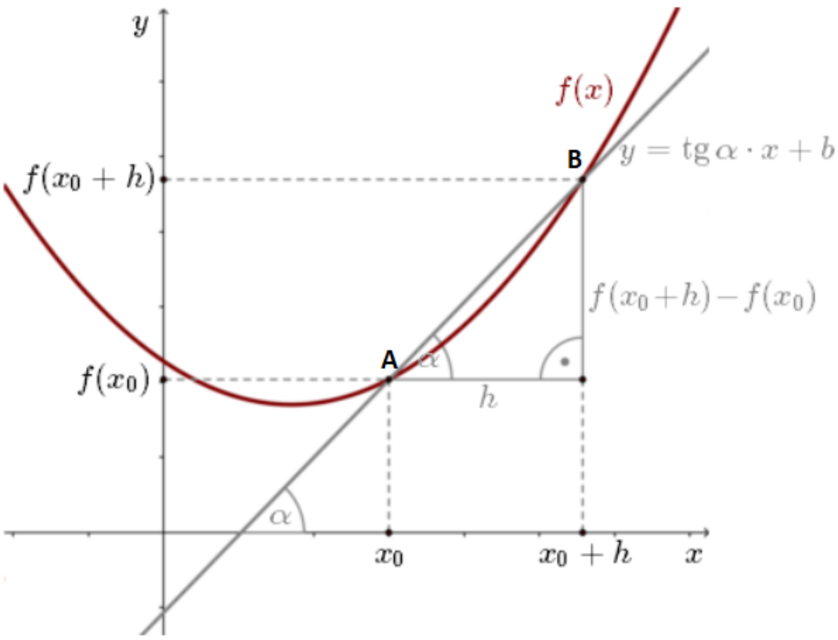
Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to mówimy, że funkcja f jest **różniczkowalna** w punkcie x_0.

Uwaga

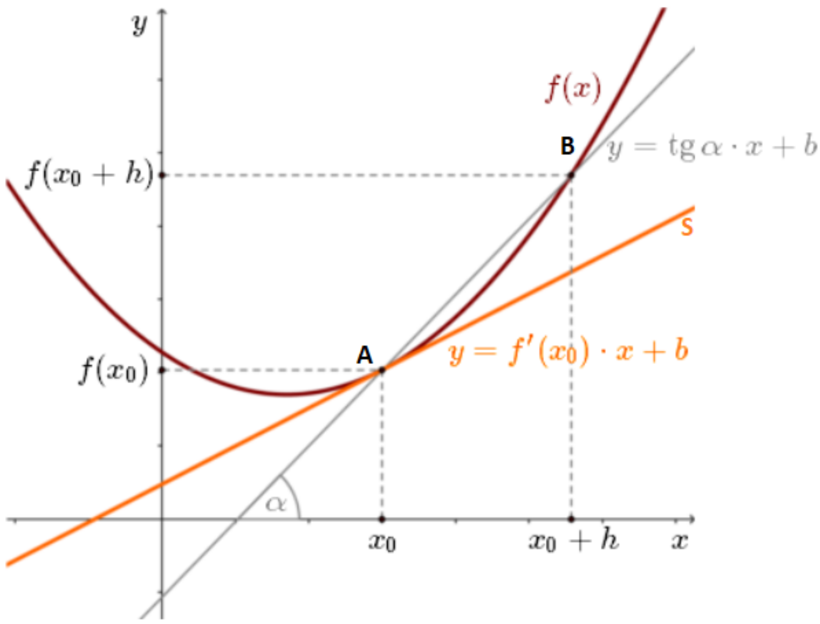
Wyrażenie $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ nazywamy **ilorazem różnicowym** funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu h.

Interpretacja geometryczna pochodnej

Iloraz różnicowy to tangens kąta nachylenia siecznej AB do osi OX, czyli współczynnik kierunkowy siecznej AB.



Gdy $h \to 0$, to punkt $B \to A$. Wtedy sieczna staje się styczną S do wykresu funkcji f w punkcie x_0. Zatem pochodną $f'(x_0)$ interpretujemy jako tangens kąta jaki styczna S tworzy z dodatnim kierunkiem osi OX, tzn. $f'(x_0) = \text{tg}\alpha$. Inaczej mówiąc, pochodna $f'(x_0)$ to współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_0.



Dla ustalonego $x_0 \in \mathbb{R}$ można łatwo wyprowadzić wzór na styczną do wykresu funkcji, jeżeli funkcja ma pochodną w punkcie x_0. Na podstawie wcześniejszych obserwacji równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_0 ma postać $y = f'(x_0) \cdot x + b$. Ponadto punkt styczności $(x_0, f(x_0))$ należy do stycznej, więc $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$, stąd $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$. Zatem równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_0 ma postać: $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Na podstawie tego wyprowadzenia sformułujmy twierdzenie:

Twierdzenie

Załóżmy, że dana jest funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, która jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$. Wtedy równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_0 ma postać $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Przykład

Korzystając z definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{x+4}$ w dowolnym punkcie $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

Rozwiązanie

Niech $x_0 \neq -4$. Wtedy mamy

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h+4} - \frac{1}{x_0+4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x_0+4-x_0-h-4}{(x_0+h+4)(x_0+4)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{(x_0 + h + 4)(x_0 + 4)} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \to 0} \left(-\frac{1}{(x_0 + h + 4)(x_0 + 4)} \right) = -\frac{1}{(x_0 + 4)^2}.$$

Zatem dla $x \neq -4$ mamy $f'(x) = -\frac{1}{(x+4)^2}$.

Przykład

Korzystając z definicji obliczyć pochodną funkcji $g(x) = |x - 3|$ w punkcie $x_0 = 3$.

Rozwiązanie

$$g'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|3+h-3| - |3-3|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

Powyższa granica nie istnieje, ponieważ mamy

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

oraz

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

Skoro granica $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(3+h)-g(3)}{h}$ nie istnieje, to również pochodna funkcji h w punkcie $x_0 = 3$ nie istnieje.

Pochodna funkcji w punkcie jest granicą (obustronną). Oprócz granicy (obustronnej) funkcji rozważamy również granice jednostronne funkcji. W związku z tym, definiujemy również pochodne jednostronne funkcji w punkcie x_0.

Definicja
Załóżmy, że $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz funkcja f jest określona przynajmniej na lewostronnym otoczeniu punktu x_0. **Pochodną lewostronną** funkcji f w punkcie x_0, którą oznaczamy przez $f'_-(x_0)$, nazywamy granicę właściwą

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Definicja
Załóżmy, że $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz funkcja f jest określona przynajmniej na prawostronnym otoczeniu punktu x_0. **Pochodną prawostronną** funkcji f w punkcie x_0, którą oznaczamy przez $f'_+(x_0)$, nazywamy granicę właściwą

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Przykład
Pokazaliśmy w poprzednim przykładzie, że pochodna funkcji $g(x) = |x-3|$ w punkcie $x_0 = 3$ nie istnieje. Obliczmy pochodne jednostronne funkcji g w punkcie $x_0 = 3$:

$$g'_-(3) = \lim_{h\to 0^-} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|3+h-3| - |3-3|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$g'_+(3) = \lim_{h\to 0^+} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|3+h-3| - |3-3|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

Zatem funkcja h nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 3$, ale ma pochodne jednostronne w tym punkcie, które są różne.

Twierdzenie
Funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Wzory na pochodne ważniejszych funkcji elementarnych

$(c)' = 0$, gdzie $c \in \mathbb{R}$

$(x^p)' = px^{p-1}$, gdzie $p \in \mathbb{R}$

$(\sin x)' = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$

$(\cos x)' = -\sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ dla $x \neq k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$

$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$

$(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$

$(a^x)' = a^x \ln a$ dla $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, $x \in \mathbb{R}$

$(e^x)' = e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, $x \in (0, \infty)$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ dla $x \in (0, \infty)$

Przykład
Wykazać słuszność wzoru $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ dla $x \in (0, \infty)$.

Rozwiązanie
Korzystając z definicji pochodnej, dla $x_0 \in (0, \infty)$ mamy

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln \frac{x_0+h}{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x_0} \cdot \frac{x_0}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x_0} \ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}} = \frac{1}{x_0} \ln e = \frac{1}{x_0}.$$

Twierdzenie
Załóżmy, że funkcje $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $x \in (a, b)$. Wtedy funkcje $f + g$, $f - g$, $c \cdot f$ $(c = \text{const})$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (o ile $g(x) \neq 0$) są różniczkowalne w punkcie x oraz zachodzą równości:

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x),\ c \in \mathbb{R},$$

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Przykład
Obliczyć pochodne funkcji

a) $f(x)=\frac{4}{5}x^{10}+\frac{1}{2}x^6+3x^3-4$
b) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{5}{x^7}-\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{\sqrt[4]{x}}$
c) $f(x)=2^x+\arcsin x-e^4$
d) $f(x)=\sqrt{x}\sin x$
e) $f(x)=\frac{x^2-3x}{2x^3+1}$

Twierdzenie (o pochodnej funkcji złożonej)
Jeżeli funkcja g ma pochodną w punkcie x_0 i funkcja h ma pochodną w punkcie $g(x_0)$, to

$$(h\circ g)'(x_0)=\Big(h(g(x_0))\Big)'=h'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

Prawdziwy jest analogiczny wzór dla dowolnej liczby składanych funkcji.

Przykład
Obliczyć pochodne funkcji
a) $f(x)=\sin 4x$
b) $f(x)=\sqrt{3x^2+5x}$
c) $f(x)=\sin^3 x+(2x^2+1)^5$
d) $f(x)=\sqrt[3]{\sin x^3}+4^{\operatorname{arctg}(\frac{1}{x})}$
e) $f(x)=e^{\cos\sqrt{x}}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4$

Uwaga Przy obliczaniu pochodnej funkcji postaci $(f(x))^{g(x)}$ stosujemy wzór

$$(f(x))^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)},\quad \text{gdzie } f(x)>0.$$

Przykład
Obliczyć pochodną funkcji $f(x)=x^{\sin x}$, $x>0$.

Rozwiązanie
Dla $x>0$ mamy

$$f'(x)=\left(x^{\sin x}\right)'=\left(e^{\sin x\ln x}\right)'=e^{\sin x\ln x}(\sin x\ln x)'=e^{\sin x\ln x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

Twierdzenie
Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jest ciągła w tym punkcie.

Uwaga
Funkcja ciągła w punkcie x_0 nie musi być różniczkowalna w punkcie x_0.

Przykład
Funkcja $f(x)=|x-3|$ jest ciągła w każdym punkcie $x\in\mathbb{R}$, w szczególności jest ciągła w punkcie $x_0=-3$. Wykazaliśmy wcześniej, że w punkcie $x_0=3$ pochodna funkcji f nie istnieje.

Definicja
Niech $n\in\mathbb{N}$. **Pochodną rzędu** n **funkcji** f **w punkcie** x_0 (lub **pochodną** n**-tego rzędu funkcji** f **w punkcie** x_0) oznaczamy przez $f^{(n)}(x_0)$ i definiujemy jako $f^{(n)}(x_0)=\left[f^{(n-1)}\right]'(x_0)$ dla $n\geqslant 2$, o ile funkcja $f^{(n-1)}$ jest określona w otoczeniu punktu x_0 i istnieje pochodna funkcji $f^{(n-1)}$ w punkcie x_0. Przyjmujemy, że $f^{(1)}(x_0)=f'(x_0)$.

Uwaga
Pochodne wyższych rzędów oznaczamy również w następujący sposób: $f^{(2)}(x_0)=f''(x_0)$, $f^{(3)}(x_0)=f'''(x_0)$.

Ponadto przyjmuje się oznaczenie: $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Przykład
Wyznaczyć pochodną trzeciego rzędu funkcji $f(x) = \sin^3 x$.

Definicja
Sąsiedztwem punktu x_0 o promieniu $\varepsilon > 0$ nazywamy zbiór $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ i oznaczamy przez $S(x_0, \varepsilon)$. Gdy promień sąsiedztwa nie jest istotny (czyli może być dowolną liczbą dodatnią), sąsiedztwo punktu x_0 oznaczamy przez $S(x_0)$.

OBLICZANIE GRANIC FUNKCJI Z WYRAŻENIAMI NIEOZNACZONYMI

Twierdzenie (de L'Hospitala)
Załóżmy, że funkcje f i g są określone i różniczkowalne w $S(x_0)$ oraz spełniają warunki:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ i $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, przy czym dla każdego $x \in S(x_0)$ $g(x) \neq 0$,

2) istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa).

Wtedy istnieje $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Twierdzenie de l'Hospitala dla symbolu nieoznaczonego $\left[\frac{0}{0}\right]$ jest również prawdziwa dla granic jednostronnych w x_0 oraz granic przy x zmierzającym do $-\infty$ lub $+\infty$.

Uwaga
Przy obliczaniu granic symboli nieoznaczonych typu $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ i przy stosowaniu twierdzenia de L'Hospitala stosujemy zapis:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Przykład
Korzystając z twierdzenia de L'Hospitala, obliczyć granice
a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$
b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x+1)\ln(x+1) - x}{x^2}$
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(6e^{-4x}+1)}{x}$

Pozostałe symbole nieoznaczone tzn. $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 można sprowadzić do symbolu $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$ według poniższej tabeli:

Symbol nieoznaczony	Zastosowana tożsamość	Uzyskany symbol nieoznaczony
$0 \cdot \infty$	$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ lub $f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$	$\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$
$\infty - \infty$	$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{g \cdot f}}$	$\frac{0}{0}$
0^0, 1^∞, ∞^0	$f^g = e^{g \ln f}$, $f > 0$	$0 \cdot \infty$

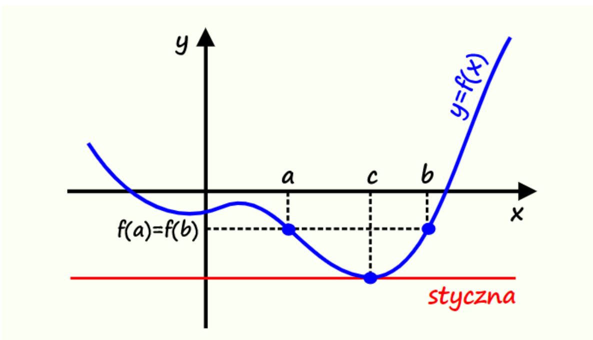
Przykład
Obliczyć granice

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3^x+4^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$
b) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\mathrm{tg}x)^{4x}$
c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\mathrm{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{4}x\right)$

MONOTONICZNOŚĆ I EKSTREMA LOKALNE FUNKCJI

Twierdzenie (Rolle)
Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna na przedziale (a,b) oraz $f(a)=f(b)=0$, to istnieje punkt $c\in(a,b)$ taki, że $f'(c)=0$.

Przyjrzyjmy się interpretacji geometrycznej tego twierdzenia. Zerowanie się pochodnej funkcji w punkcie oznacza, że styczna do wykresu funkcji w tym punkcie jest pozioma. Jeżeli są spełnione założenia twierdzenia Rolle'a, to istnieje punkt $c\in(a,b)$, w którym styczna do wykresu funkcji f jest równoległa do osi Ox.



Rysunek 1: Styczna do wykresu funkcji w $c\in(a,b)$ równoległa do osi Ox.

Twierdzenie (Lagrange)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna na przedziale (a,b), to istnieje punkt $c\in(a,b)$ taki, że
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

W interpretacji geometrycznej z twierdzenia Lagrange'a wynika, że na wykresie funkcji f istnieje przynajmniej jeden taki punkt, w którym styczna do wykresu funkcji w tym punkcie jest równoległa do siecznej AB, przechodzącej przez punkty $A=(a,f(a))$, $B=(b,f(b))$.

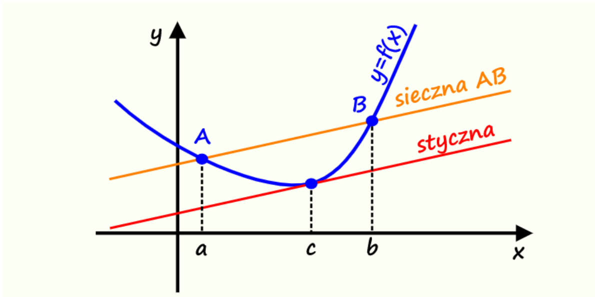
Z twierdzenia Lagrange'a wynika następujący wniosek.

Wniosek
Niech I oznacza dowolny przedział. Jeżeli dla każdego $x\in I$ funkcja f spełnia warunek:

1) Jeżeli $f'(x)=0$ dla każdego $x\in I$, to funkcja f jest stała w przedziale I.

2) Jeżeli $f'(x)>0$ dla każdego $x\in I$, to funkcja f jest rosnąca w przedziale I.

3) Jeżeli $f'(x)<0$ dla każdego $x\in I$, to funkcja f jest malejąca w przedziale I.



Rysunek 2: Styczna do wykresu funkcji równoległa do zadanej siecznej AB.

Powyższy wniosek wykorzystywany jest do znajdywania przedziałów monotoniczności funkcji.

Uwaga
Założenie, że I jest przedziałem, jest bardzo istotne. Twierdzenie o związku znaku pochodnej funkcji z monotonicznością funkcji jest prawdziwe, gdy stosujemy je w przedziale. Natomiast w zbiorze będącym sumą rozłącznych przedziałów, to twierdzenie już nie zawsze jest prawdziwe.

Przykład
Weźmy dla przykładu funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$, której pochodna $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ jest mniejsza od zera dla każdego $x \in D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$ i funkcja f jest malejąca w przedziale $(0, +\infty)$. Natomiast fałszywe jest stwierdzenie, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest malejąca w $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Przykład
Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 2x - 1}.$$

Definicja
Załóżmy, że funkcja f jest określona na pewnym otoczeniu punktu x_0. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **maksimum lokalne właściwe (maksimum lokalne)**, jeśli

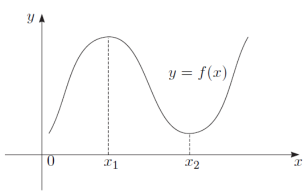
$$\exists_{\delta>0} \forall_{x \in S(x_0,\delta)} f(x) < f(x_0) \ \big(f(x) \leqslant f(x_0)\big).$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **minimum lokalne właściwe (minimum lokalne)**, jeśli

$$\exists_{\delta>0} \forall_{x \in S(x_0,\delta)} f(x) > f(x_0) \ \big(f(x) \geqslant f(x_0)\big).$$

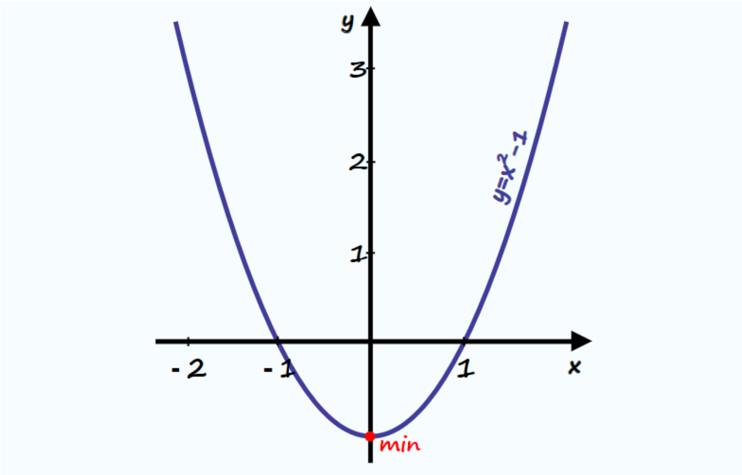
Minima i maksima lokalne funkcji (właściwe lub niewłaściwe) nazywamy **ekstremami lokalnymi**.

Na poniższym rysunku przedstawiono graficzną ilustrację ekstremów lokalnych właściwych.



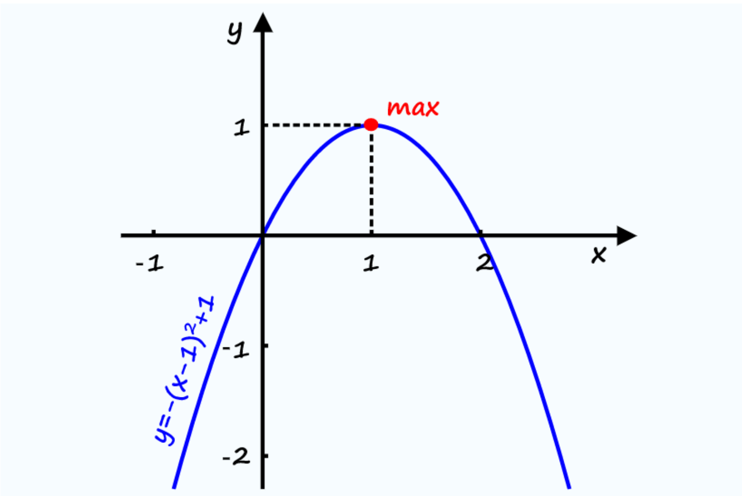
Rysunek 3: Funkcja f ma maksimum lokalne w punkcie x_1 oraz minimum lokalne w punkcie x_2.

Przykład
Funkcja $f(x) = x^2 - 1$ ma minimum lokalne właściwe w $x_0 = 0$ równe -1.



Rysunek 4: Wykres funkcji $f(x) = x^2 - 1$ mającej minimum lokalne w $x_0 = 0$.

Przykład
Funkcja $f(x) = -(x-1)^2 + 1$ ma maksimum lokalne właściwe w $x_0 = 1$ równe 1.



Rysunek 5: Wykres funkcji $f(x) = -(x-1)^2 + 1$ mającej maksimum lokalne w $x_0 = 1$.

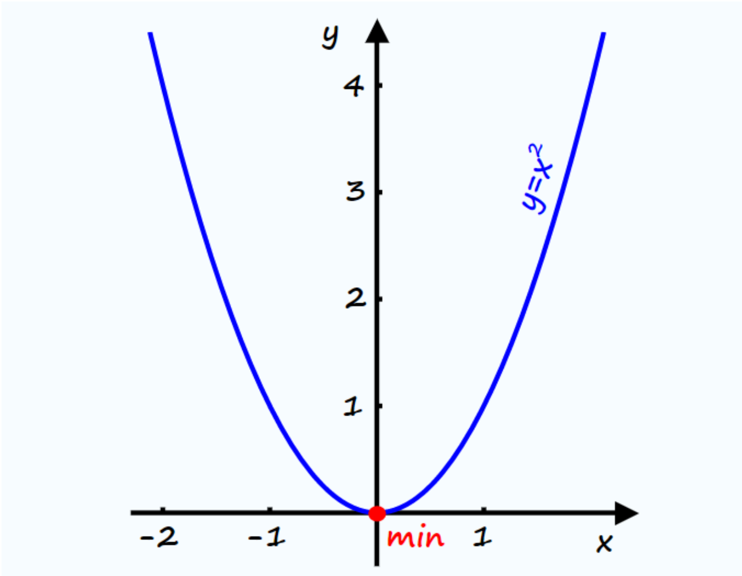
Poniższe twierdzenie przedstawia warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji.

Twierdzenie (Fermat)
Jeżeli funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 oraz istnieje pochodna $f'(x_0)$, to $f'(x_0) = 0$.

Definicja
Punktem stacjonarnym (krytycznym) funkcji f nazywamy taki punkt $x_0 \in D_f$, że $f'(x_0) = 0$ albo $f'(x_0)$ nie istnieje.

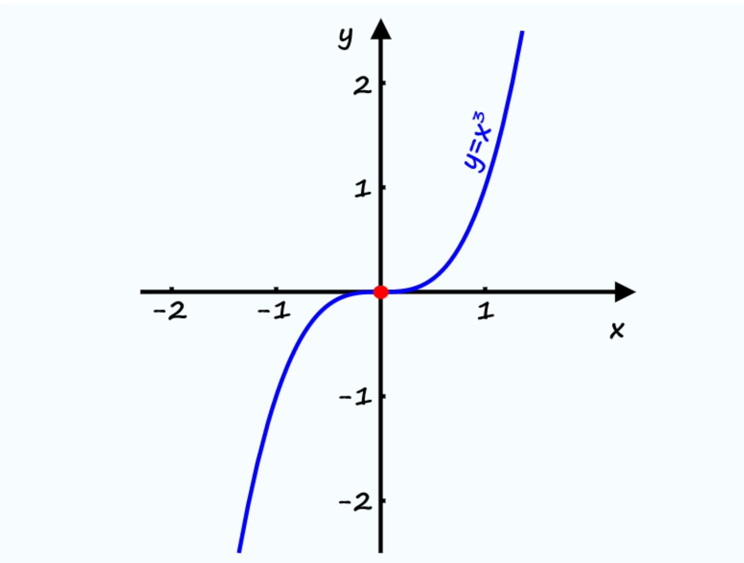
Uwaga
Z warunku koniecznego wnioskujemy, że funkcja może mieć ekstrema lokalne tylko w punktach stacjonarnych.

Przykład
Pochodna funkcji $f(x) = x^2$ wynosi $f'(x) = 2x$ i zeruje się w punkcie $x_0 = 0$. W tym punkcie funkcja ma minimum lokalne.



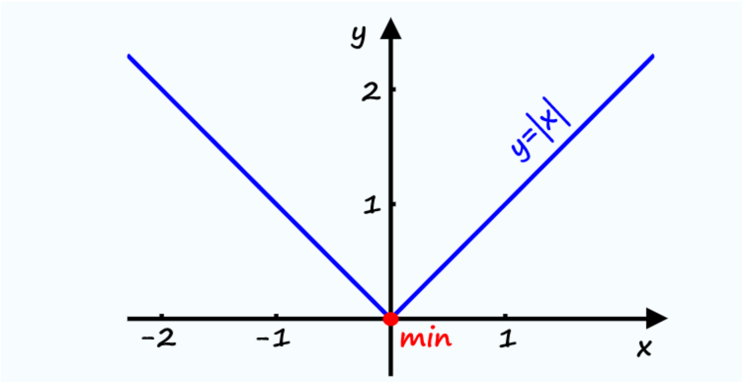
Rysunek 6: Wykres funkcji $f(x) = x^2$ mającej minimum lokalne w punkcie $x_0 = 0$.

Przykład
Natomiast pochodna funkcji $f(x) = x^3$ jest równa $f'(x) = 3x^2$ i zeruje się w punkcie $x_0 = 0$, ale pomimo to funkcja nie ma w tym punkcie ekstremum.



Rysunek 7: Wykres funkcji $f(x) = x^3$.

Przykład
Wprawdzie pochodna funkcji $f(x) = |x|$ w punkcie $x_0 = 0$ nie istnieje, ale funkcja osiąga w tym punkcie minimum lokalne równe 0.



Rysunek 8: Wykres funkcji $f(x) = |x|$ mającej minimum lokalne w punkcie $x_0 = 0$.

Twierdzenie (I warunek wystarczający istnienia ekstremum)
Załóżmy, że $x_0 \in (a, b)$, funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na przedziale (a, b). Jeżeli $f'(x_0) = 0$ oraz funkcja f spełnia warunki:

1) istnieje $\delta > 0$ takie, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to w punkcie x_0 funkcja f posiada maksimum lokalne,

2) istnieje $\delta > 0$ takie, że $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to w punkcie x_0 funkcja f posiada minimum lokalne.

Uwaga
Zamiast założenia $f'(x_0) = 0$ wystarczy przyjąć, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0. Dzięki temu możemy powyższe twierdzenie zastosować również w przypadku, gdy pochodna nie istnieje w danym punkcie.

Przykład
Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x) = (2x^2 + 4x - 1)e^{2x^2+4x}.$$

Rodzaj ekstremum lokalnego w punktach stacjonarnych można też ustalić wykorzystując drugą pochodną funkcji.

Twierdzenie (II warunek wystarczający istnienia ekstremum)
Załóżmy, że funkcja f posiada ciągłą drugą pochodną na pewnym otoczeniu punktu x_0. Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) \neq 0$, to funkcja ta posiada w punkcie x_0 ekstremum, przy czym jest to

1) maksimum właściwe, gdy $f''(x_0) < 0$,

2) minimum właściwe, gdy $f''(x_0) > 0$.

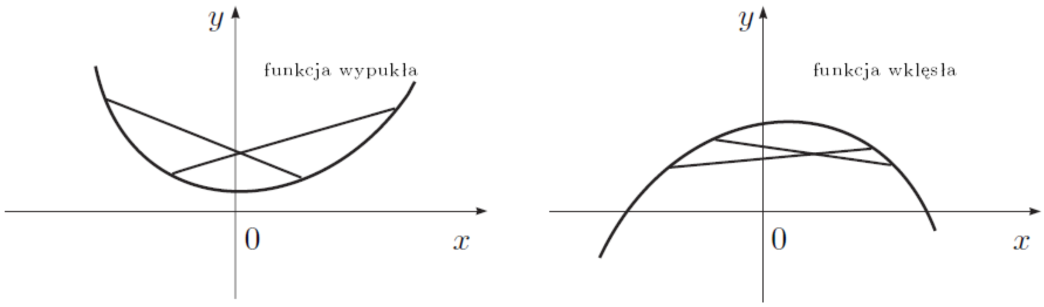
Przykład
Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x) = \ln^3 x + 6 \ln^2 x.$$

WYPUKŁOŚĆ, WKLĘSŁOŚĆ I PUNKTY PRZEGIĘCIA FUNKCJI

Definicja
Niech $f : I \to \mathbb{R}$, gdzie I jest dowolnym przedziałem. Mówimy, że funkcja f jest **wypukła** (odpowiednio **wklęsła**) na przedziale I, jeżeli odcinek łączący dwa dowolne punkty wykresu tej funkcji zawężonej do przedziału I leży nad (odpowiednio pod) tym wykresem z wyjątkiem końców tego odcinka.

Przykład funkcji wypukłej oraz wklęsłej przedstawia poniższy rysunek:



Przy pomocy drugiej pochodnej można ustalić przedziały, na których funkcja jest wypukła albo wklęsła.

Twierdzenie
Załóżmy, że funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna na przedziale (a, b). Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzi nierówność $f''(x) > 0$, to funkcja f jest wypukła na przedziale (a, b), a jeżeli $f''(x) < 0$, to funkcja f jest wklęsła na tym przedziale.

Definicja
Punkt $P = (x_0, f(x_0))$ nazywamy **punktem przegięcia funkcji** f, jeżeli funkcja ta jest wklęsła na przedziale $(x_0 - \delta, x_0)$ i wypukła na przedziale $(x_0, x_0 + \delta)$ albo odwrotnie.

Twierdzenie (warunek konieczny istnienia punktu przegięcia)
Jeżeli funkcja f ma punkt przegięcia w punkcie x_0 oraz istnieje pochodna rzędu drugiego $f''(x_0)$, to $f''(x_0) = 0$.

Uwaga
Funkcja f może mieć punkt przegięcia w punkcie x_0, w którym $f''(x_0) = 0$ lub $f''(x_0)$ nie istnieje.

Twierdzenie (warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia)
Jeżeli funkcja f spełnia warunki: $f''(x_0) = 0$ i istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $f''(x_0) > 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ i $f''(x_0) < 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ lub $f''(x_0) < 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ i $f''(x_0) > 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to funkcja f ma punkt przegięcia w punkcie o odciętej x_0.

Przykład
Wyznaczyć przedziały wypukłości, wklęsłości oraz punkty przegięcia funkcji

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x}.$$

PRZEBIEG ZMIENNOŚCI FUNKCJI

Fundamentalne dla rachunku różniczkowego pojęcia, takie jak granica, ciągłość, pochodna, są niezwykle skutecznymi narzędziami do badania przebiegu zmienności funkcji. Przez badanie przebiegu zmienności funkcji rozumiemy wykrywanie zasadniczych cech jej wykresu, gdy znamy funkcję jedynie jako abstrakcyjny przepis. Dzięki granicom obliczamy jej asymptoty, pochodna wykrywa jej monotoniczność i ekstrema, zaś badanie drugiej pochodnej umożliwia nam znalezienie punktów przegięcia i określenie przedziałów wypukłości funkcji. Badanie przebiegu zmienności stanowi zatem syntezę i ukoronowanie całości metod rachunku różniczkowego i, jako takie, jest zarazem dużym wyzwaniem rachunkowym ze względu na swoją złożoność.

Badanie przebiegu zmienności funkcji przeprowadzamy według schematu:

1) Ustalenie dziedziny funkcji.
2) Zbadanie parzystości, nieparzystości i okresowości funkcji (tylko wtedy, gdy podejrzewamy, że taka własność zachodzi).
3) Wyznaczenie miejsc zerowych funkcji oraz punktów przecięcia z osią OY.
4) Obliczenie granic na końcach przedziałów określoności funkcji.
5) Wyznaczenie asymptot funkcji.
6) Badanie pierwszej pochodnej funkcji:
   - Wyznaczenie pierwszej pochodnej i jej dziedziny.
   - Wyznaczenie punktów stacjonarnych.
   - Wyznaczenie przedziałów monotoniczności i ekstremów lokalnych.
7) Badanie drugiej pochodnej funkcji:
   - Wyznaczenie drugiej pochodnej i jej dziedziny.
   - Wyznaczenie miejsc, w których mogą być punkty przegięcia.
   - Wyznaczenie przedziałów wypukłości i wklęsłości oraz punktów przegięcia funkcji.
8) Narysowanie wykresu funkcji.

Przykład
Zbadać przebieg zmienności i narysować wykres funkcji $f(x) = \frac{x^4}{x^3-x}$.