

7. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x > 0 \\ x(x+1)^2 & \text{dla } x \leq 0. \end{cases}$$

Sprawdzić, czy istnieje  $f'(0)$ .

8. Obliczyć (jeżeli istnieje)  $f'(3)$ , gdzie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 4 & \text{dla } x < 3 \\ 5x + 2 & \text{dla } x \geq 3. \end{cases}$$

Obliczyć pochodne następujących funkcji po skorzystaniu z odpowiednich twierdzeń.

9.  $f(x) = (\sqrt{x} + 1) \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right).$

10.  $f(t) = (\sqrt[3]{t} + 2t)(1 + \sqrt[3]{t^2} + 3t).$

11.  $f(u) = \frac{2}{u^3 - 1}.$

12.  $f(x) = \frac{2x^4}{9 - x^2}.$

13.  $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}.$

14.  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^4-t^8}}.$

15.  $f(u) = \frac{u}{1 - \cos u}.$

16.  $f(v) = \cos^2 v.$

17.  $f(x) = 3 \sin^2 x - \sin^3 x.$

18.  $f(x) = 3 \sin(3x + 5).$

19.  $g(u) = \cos^3 4u.$

20.  $h(x) = \sin \sqrt{1+x^2}.$

21.  $k(t) = t \arcsin t.$

22.  $k(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$

23.  $f(x) = \sin(\arcsin x).$

24.  $f(u) = \arcsin \frac{2}{u}.$

25.  $f(t) = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{t}.$

26.  $g(x) = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1+x^2}).$

27.  $f(x) = \sqrt{\ln x}.$

28.  $g(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$

29.  $h(x) = \ln \sin x.$

30.  $f(u) = \log_3 u.$

31.  $g(u) = \log_5(u^2 - 1).$

32.  $h(u) = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1+u^2}.$

33.  $f(x) = 10^x.$

34.  $g(x) = \frac{x}{4^x}.$

35.  $h(x) = x 8^{x^2}.$

36.  $f(u) = \frac{e^u}{1+u^2}.$

37.  $g(u) = e^{\sqrt{u^2+1}}$ .

38.  $h(u) = 3^{\sin u}$ .

39.  $f(x) = \sinh(5x^2 - 1)$ .

40.  $g(x) = \sqrt{\cosh x^2}$ .

41.  $h(x) = \sqrt[4]{\frac{1 + \operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh} x}}$ .

42. Obliczyć pochodne funkcji:

a)  $f(x) = x^x$ ,

b)  $g(x) = x^{\sin x}$ ,

c)  $h(x) = \sin x^{\cos x}$ ,

d)  $k(x) = x^{x^x}$ .

43. Obliczyć pochodne funkcji:

a)  $f(u) = \log_u 5$ ,

b)  $g(u) = \log_u(u^2 + 3)$ .

44. Niech  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ . Obliczyć  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} f'(x)$ .

45. Niech  $f(x) = \sqrt[4]{x}$ ,  $g(x) = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$ . Obliczyć  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

46. Niech  $f(x) = x|x-1|$ . Obliczyć  $f'(1+)$ ,  $f'(1-)$ . Czy funkcja  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $x_0 = 1$ ?47. Zbadać różniczkowalność funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określonej w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} (x-3)^2(x-4) & \text{dla } x \in (3, 4) \\ 0 & \text{dla } x \text{ pozostałych.} \end{cases}$$

48. Niech  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(0,0) = 0$  oraz  $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$  dla  $(x,y) \neq (0,0)$ .

Pokazać, że funkcja ta ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w każdym punkcie  $\mathbb{R}^2$ , lecz nie jest ciągła w punkcie  $(0,0)$ .

49. Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji:

a)  $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ ,

b)  $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ ,

c)  $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ ,

d)  $f(u,v) = \ln(u + \ln v)$ ,

e)  $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ,

f)  $g(x,y,z) = (\sin x)^{yz}$ ,

g)  $g(u,v,w) = \ln \frac{1 - \sqrt{u^2+v^2+w^2}}{1 + \sqrt{u^2+v^2+w^2}}$ ,

h)  $h(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ .

50. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji w podanych punktach:

a)  $f(x,y) = x + y - \sqrt{x^2+y^2}$  w punkcie  $(3,4)$ ,