

Problemas 3

1. É usual que um país tenha uma meta em termos de PIB per-cápita (y , de aqui para frente). Por exemplo, no Brasil sempre é mencionado o objetivo de, em x anos, ter um y similar a Portugal ou Espanha. Vamos a imaginar um problema para representar essa situação.

Assumamos que temos dois países A e B. O país A tem uma y de 100 e o país B de 50. A taxa de crescimento média estimada para o país A é de 2% nos próximos 40 anos. Pergunta: qual deve ser a taxa média de crescimento do país B para que no final desse intervalo (40 anos) atingir o y de A ?

(Trabalhe com tempo contínuo)

$$Y_A = 100 \times \sqrt[40]{1.02} = 220,8$$

$$Y_B = Y_A$$

$$50 \times \sqrt[40]{x} = 220,8$$

$$x = \sqrt[40]{\frac{220,8}{50}} = \sqrt[40]{4,416x} = 1,03782$$

B deve ter uma taxa média de crescimento de 3,8%

2. Temos dois países, A e B. No país A $y=100$ e no país B $y=10$. A taxa de crescimento média de A é de 1% e de B 10%.

Pergunta: em quantos anos a renda per capita do país B vai atingir o mesmo valor que A.

$$100 e^{1,01t} = 10 e^{1,1t}$$

$$2\ln(10) + 1,01t = \ln(10) + 1,1t$$

$$t = \frac{\ln(10)}{0,9} = 25,584$$

O país B vai atingir o mesmo valor que o país B em 25,6 anos (25 anos e 7 meses)

3. Qual é a taxa de crescimento, no período 8, de um PIB que apresenta a seguinte trajetória temporal:

$$PIB(t) = 250 e^{1,2 t^{\frac{1}{3}}}$$

Qual será a taxa de crescimento do PIB no período 8 (t=8) ?

$$PIB(8) = 250 e^{1,2 * 8^{\frac{1}{3}}} = 250 e^{1,2 * 2}$$

$$PIB(8) = 250 e^{2,4}$$

$$PIB(8) = 2755,79$$

$$PIB(7) = 250 e^{1,2 * 7^{\frac{1}{3}}} = 250 e^{1,2 * 1,9}$$

$$PIB(7) = 250 e^{2,28}$$

$$PIB(7) = 2444,17$$

$$\frac{PIB(8)}{PIB(7)} = \frac{2755,79}{2444,17} = 1,12749$$

A taxa de crescimento no período 8 será de 12,75%

4. Um país exporta dois tipos de bens, industriais (I) e agropecuários (A). O montante de exportações de I é 4 (I=4) e de A é 1 (A=1). A taxa de crescimento das exportações industriais é de 10% e de bens agropecuários de 20%.

Pergunta: qual é a taxa de crescimento das exportações totais ?

$$4 * 1,1 + 1 * 1,2 = 5,6$$

$$\frac{5,6}{5} = 1,12$$

A taxa de crescimento das exportações é de 12%

5. Qual é a taxa de crescimento da seguinte função: $y(x) = 5 \cdot 3^x$

$$y' = 5 \ln(3) 3^x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{5 \ln(3) * 3^x}{5 * 3^x}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln(3) = 1,09861$$

A taxa de crescimento é de 1,1%

6. Se o capital (K) de um país se deprecia a uma taxa de 15% ao ano e o valor estimado de K hoje é de 2000, qual será o valor de aqui a 3,5 anos ?

$$K = 2000 * (1 - 0,15)^{3,5} = 2000 * 0,5662 = 1132,39$$

Em 3,5 anos o capital do país deve ter um valor de 1132,39

7. O PIB de um país se duplica a cada década. Em quantas décadas esse país verá triplicar seu PIB ?

$$PIB * 2^t = 3 PIB$$

$$2^t = 3$$

$$t = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} = 1,585$$

O país triplicará seu PIB em 1,6 décadas, ou 16 anos.

8. A infraestrutura de um país se deteriora a uma taxa de 10% cada 7 anos. Sem nenhum investimento que reponha esse deterioro, em quantos anos o país contará com uma infraestrutura 50% menor que a atual ?

$$K(1 - 0,1)^t = 0,5K$$

$$0,9^t = 0,5$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{9}{10}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 6,57881$$

Se um período t tem duração de 7 anos, em 46 anos o país contará com 50% de sua estrutura atual.

9. Uma pesquisa demográfica estima que a população de um país cresce segundo a função logística:

$$\text{Pop}(t) = \frac{10.000}{1 + k e^{-0,2t}}$$

Sabendo que hoje a população desse país tem 1.250 habitantes, qual será a população daqui a 10 anos ?

$$\text{pop}(0) = \frac{10000}{1 + k e^{-0,2 \cdot 0}} = 1250$$

$$\frac{10000}{1 + k \cdot 1} = 1250$$

$$10000 = 1250 + 1250k$$

$$k = \frac{10000 - 1250}{1250}$$

$$k = 7$$

$$\text{pop}(10) = 10000 / (1 + 7e^{(-0,2 \cdot 10)})$$

$$\text{pop}(10) = 10000 / (1 + 7e^{(-2)})$$

$$\text{pop}(10) = 10000 / (1 + 7 \cdot 0,135) = 10000 / 1,9473$$

$$\text{pop}(10) = 5135,31$$

Em 10 anos, a população será de aproximadamente 5135 pessoas.