به نام خدا

بهینه‌سازی محدّب ۱ (۲۵۷۵۶-۱)

تمرین سری چهارم

ترم بهار ۱۴۰۱-۰۲

دانشکده‌ی مهندسی برق

دانشگاه صنعتی شریف

استاد: دکتر محمّدحسین یاسائی میبدی

مهلت تحویل: چهارشنبه ۲۰ اردیبهشت ۱۴۰۲، ساعت ۲۳:۵۹

$(*)$ مسائلی که با ستاره مشخّص شده‌اند امتیازی هستند و حل‌کردن آن‌ها نمره‌ی امتیازی خواهد داشت!

۱ برنامه ریزی خطّی به صورت استاندارد!

نشان دهید چگونه مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطّی مطرح شده در کلاس یعنی:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{G}\mathbf{x} \preceq \mathbf{h} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{cases}$$

را می‌توان به فرم استاندارد زیر درآورد: (نشان دهید دو مسئله معادل هستند)

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \succeq 0 \end{cases}$$

۲ سیگنال گرافی!

گراف بدون جهت $\mathcal{G}$ با مجموعه رئوس $\mathcal{V}$، تعداد رئوس $n = |\mathcal{V}|$ و ماتریس وزن $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را در نظر بگیرید که در آن $W_{ij} = W_{ji} \geq 0$ وزن یال متّصل‌کننده‌ی رأس i به رأس j است. یک سیگنال گرافی، یک تابع به شکل $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ است که به هر رأس گراف یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد. فرض کنید مقدار این تابع را روی مجموعه رئوس $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ می‌دانیم. هدف، درون‌یابی سیگنال روی بقیه‌ی رئوس است، با معیاری که در ادامه معرفی می‌کنیم.

آ) ماتریس لاپلاسین گراف به صورت $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$ تعریف می‌شود که در آن $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس قطری است، به طوری که $D_{ii} = \sum_{j=1}^{n} W_{ij}$ درجه‌ی رأس i است.
نشان دهید برای هر $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ با درایه‌های $y_i = f(i)$ داریم:

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{L}\mathbf{y} = \sum_{i,j:i<j} W_{ij}\big(y_i - y_j\big)^2 = \sum_{i,j:i<j} W_{ij}\big(f(i) - f(j)\big)^2.$$

ب) با توجّه به قسمت قبل آیا می‌توان گفت $\mathbf{y}^\top \mathbf{L}$ معیاری از همواری سیگنال روی گراف است؟

ج) فرض کنید بخواهیم سیگنال g را طوری پیدا کنیم که $g(\mathcal{B}) = f(\mathcal{B})$ و g بیشترین همواری را با معیار معرفی شده در قسمت (آ) داشته باشد. این مسئله را به شکل یک مسئله‌ی بهینه‌سازی بنویسید.

د) نشان دهید مسئله‌ی بهینه‌سازی به دست آمده محدّب و از نوع QP است و سپس آن را حل کنید.

راهنمایی: به‌راحتی می‌توان مسئله‌ی بدست آمده را به یک مسئله‌ی بدون قید تبدیل کرد. در این صورت نوشتن ماتریس لاپلاسین به شکل زیر کمک‌کننده خواهد بود:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{\mathcal{B}} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^\top & \mathbf{L}_{\mathcal{U}} \end{bmatrix}$$

که در آن بدون کم شدن از کلّیت مسئله فرض شده است که $\mathcal{B} = \{۱, ۲, \ldots, |\mathcal{B}|\}$ و $\mathcal{U} = \mathcal{V}\backslash\mathcal{B}$.

۳ تبدیل مسئله به LP

مسائل زیر را به فرم LP تبدیل کنید. در هر مورد رابطه‌ی بین جواب بهینه‌ی مسئله‌ی اصلی و مسئله‌ی معادل LP را توضیح دهید.

آ) $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_۱$

ب) $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_۱ + \|\mathbf{x}\|_\infty$

۴ سادک!

شرایط لازم و کافی ساده شده‌ای برای $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ پیدا کنید که تابع محدب و مشتق پذیر f را روی سادک احتمال

$$\{\mathbf{x} | \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = ۱, \mathbf{x} \succeq ۰\}$$

کمینه کند.

۵ Robust LP

در درس (و همچنین بخش 4.4.2 کتاب بوید) در مورد robust LP به عنوان یک کاربرد از SOCP بحث شد. در این سوال یک تغییر robust مشابه از مسائل QP را در نظر می گیریم:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \frac{۱}{۲}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} \preceq \mathbf{b} \end{array}$$

برای سادگی فرض کنید فقط ماتریس $\mathbf{P}$ در معرض خطا است و پارامترهای دیگر $(\mathbf{q}, r, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ به طور دقیق مشخص هستند. مسئله‌ی robust QP به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sup_{\mathbf{P}\in\mathcal{E}} \left\{\frac{۱}{۲}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r\right\} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} \preceq \mathbf{b} \end{array}.$$

که در آن $\mathcal{E}$ مجموعه ماتریس‌های ممکن $\mathbf{P}$ است.

برای هر کدام از مجموعه‌های $\mathcal{E}$ زیر، robust QP را به صورت یک مسئله‌ی محدّب بنویسید. اگر می‌توان مسئله را به فرم استاندارد بیان کرد (مانند QP,QCQP,SOCP,SDP) آن را به این فرم هم بیان کنید.

آ) مجموعه متناهی از ماتریس‌ها:

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{P}_۱, \ldots, \mathbf{P}_K\}, \quad \mathbf{P}_i \in \mathbf{S}^n_+ \forall i = ۱, \ldots, K.$$

ب) مجموعه‌ی مشخص شده با مقدار اسمی $\mathbf{P}_۰$ بعلاوه یک کران روی مقادیر ویژه‌ی انحراف $\mathbf{P} - \mathbf{P}_۰$:

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{P} \in \mathbf{S}^n \mid -\gamma\mathbf{I} \preceq \mathbf{P} - \mathbf{P}_۰ \preceq \gamma\mathbf{I}\}.$$

که در آن $\gamma \in \mathbb{R}$ و $\mathbf{P}_۰ \in \mathbf{S}^n_+$.

ج) $(*)$ بیضی‌گون ماتریسی:

$$\mathcal{E} = \left\{\mathbf{p}_۰ + \sum_{i=۱}^{K} \mathbf{P}_i \mathbf{u}_i \mid \|\mathbf{u}\|_۲ \leq ۱\right\}.$$

می‌توانید فرض کنید به ازای هر $i = ۱, \ldots, K$ داریم: $\mathbf{P}_i \in \mathbf{S}^n_+$.

۶ لجستیک! (۱)

یک شرکت در نظر دارد که n قطعه کالا با نامهای $\{f_۱, ..., f_n\}$ را با $k > ۱$ کامیون باربری حرکت دهد. برای هر $i = ۱, \ldots, n$ می‌دانیم وزن کالای f_i برابر با w_i است. فرض کنید هر کامیون می‌تواند مقدار نامتناهی بار حمل کند. هدف این است که حدّاکثر مقدار باری که هر کامیون حمل می‌کند را کمینه کنیم. فرض کنید مقدار بهینه برای این کار p^* باشد.

الگوریتم حریصانه‌ی مقابل را در نظر بگیرید:

فرض کنید کالاها را به ترتیب تصادفی در کامیون‌ها قرار داده‌ایم. در مرحله‌ی iـام کالای iـام را در نظر می‌گیریم و آن را درون کامیونی می‌گذاریم که کمترین مقدار وزن روی آن باشد.

مستقل از ترتیب اولّیه‌ی کالاها ثابت کنید بعد از اجرای کامل این الگوریتم وزن روی کامیونی که بیشترین بار را حمل می‌کند حدّاکثر $۲p^*$ است.

۷ لجستیک! (۲)

سوال قبل را در حالت $k = ۲$ در نظر بگیرید و ثابت کنید با همان الگوریتم حریصانه‌ی پرسش قبل، بعد از اجرای کامل الگوریتم وزن روی کامیونی که بیشترین بار را حمل می‌کند حداکثر $\frac{۳p^*}{۲}$ است.