Mohammad Amin Rami HW1 98101588

-1

1. فرض کنیم مجموعه ذکر شده را s بنامیم. داریم:

$$x \in S,\quad y \in S,\quad z = \lambda x + (1-\lambda) y,\quad 0 \le \lambda \le 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda a_i \le \lambda x_i \le \lambda \beta_i \\ (1-\lambda) a_i \le (1-\lambda) y_i \le (1-\lambda)\beta_i \end{cases} \Rightarrow a_i \le \lambda x_i + (1-\lambda) y_i \le \beta_i$$

$$\Rightarrow a_i \le z_i \le \beta_i \Rightarrow z \in S \Rightarrow S \text{ is convex}$$

2. فرض کنیم مجموعه ذکر شده را s بنامیم. داریم:

$$x \in S,\quad y \in S,\quad 0 \le \lambda \le 1 \longrightarrow z = \lambda x + (1-\lambda) y \Rightarrow \begin{cases} \lambda a_1^T x \le \lambda b_1 \\ (1-\lambda) a_1^T y \le (1-\lambda) b_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1^T(\lambda x + (1-\lambda) y) \le b_1 \Rightarrow a_1^T z \le b_1 \quad \text{I}$$

$$\begin{cases} \lambda a_2^T x \le \lambda b_2 \\ (1-\lambda) a_2^T y \le (1-\lambda) b_2 \end{cases} \Rightarrow a_2^T(\lambda x + (1-\lambda) y) \le b_2 \Rightarrow a_2^T z \le b_2 \quad \text{II}$$

$$\text{I}, \text{II} \Rightarrow z \in S \Rightarrow S \text{ is convex}$$

3. ثابت می کنیم که مجموعه داده شده محدب نیست. فرض کنیم آن را A بنامیم. حال فرض کنیم $S, T \subseteq R$ باشند. حال فرض کنیم s فقط شامل دو نقطه 1 و -1 باشد. یعنی $S = \{1, -1\}$ و T شامل مبدا باشد یعنی تک عضوی باشد. $T = \{0\}$ حال واضح است که داریم:

$$\text{Dist}(2, S) = 1 \quad \text{Dist}(2, T) = 2 \Rightarrow 2 \in A$$

$$\text{Dist}(-1, S) = 1 \quad \text{Dist}(-2, T) = 2 \Rightarrow -2 \in A$$

حال نقطه x_3 که ترکیب محدب 2 و -2 است را در نظر بگیرید:

$$x_3 = 0.5 \times 2 + 0.5(-2) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Dist}(x_3, S) = 1 \quad \text{Dist}(x_3, T) = 0 \Rightarrow x_3 \notin A \Rightarrow$$

مثال نقض پیدا کردیم پس محدب نیست

.4

ثابت می کنیم مجموعه داده شده محدب نیست. فرض کنیم مجموعه داده شده را S بنامیم. همچنین فرض کنیم داشته باشیم: $S_1=\{x \mid -1\le x\le 1\}$ و $S_2=\{-2,2\}$ آنگاه برای اینکه x عضو S باشد باید شروط زیر برقرار باشد:

$$-1\le x-2\le 1 \implies 1\le x\le 3$$
$$-1\le x+2\le 1 \implies -3\le x\le -1$$
$$\implies S=[-3,-1]\cup[1,3]$$

واضح است که S محدب نیست. پس مثال نقض پیدا کردیم و مجموعه داده شده محدب نیست.

.5 نشان می دهیم که مکان هندسی مجموعه داده شده، یک کره است وقتی که $0\le\theta<1$ و یک نیمفضا است وقتی که $\theta=1$. هر دو این اشکال محدب هستند، پس مجموعه محدب است. اگر $\theta=1$ باشد داریم:

$$\|x-a\|^2\le\|x-b\|^2 \implies (a-b)^T x \ge \frac{1}{2}\left(\|a\|^2-\|b\|^2\right) \implies$$

مکان هندسی نقاط یک طرف صفحه است. پس محدب است.

اگر $0\le\theta<1$ باشد، مکان هندسی نقاط، یک کره توپر n بعدی است. زیرا:

$$\|x-a\|^2\le\theta^2\|x-b\|^2 \iff \|x\|^2-2a^Tx+\|a\|^2\le\theta^2\|x\|^2-2\theta^2b^Tx+\theta^2\|b\|^2$$

$$\iff (1-\theta^2)\|x\|^2-2(a-\theta^2b)^Tx\le\theta^2\|b\|^2-\|a\|^2$$

$$\iff \|x\|^2-2\left(\frac{a-\theta^2b}{1-\theta^2}\right)^Tx\le\frac{\theta^2}{1-\theta^2}\|b\|^2-\frac{1}{1-\theta^2}\|a\|^2$$

$$\iff \boxed{\left\|x-\left(\frac{a-\theta^2b}{1-\theta^2}\right)\right\|^2\le\frac{\theta}{1-\theta^2}\|a-b\|^2}$$

مکان هندسی مجموعه فوق، کره توپر n بعدی به مرکز $\dfrac{a-\theta^2b}{1-\theta^2}$ و شعاع $\dfrac{\theta}{1-\theta^2}\|a-b\|$ است. کره توپر نیز محدب است. پس مجموعه داده شده محدب است.

CS CamScanner

-2

1. فرض کنید y_1 و y_2 دو عضو مجموعه C° باشند. آنگاه به ازای هر عضو مانند x از مجموعه C رابطه زیر برقرار است:

$$y_1^T x \le 1 , \quad y_2^T x \le 1$$

حال ثابت می کنیم هر ترکیب محدب y_1 و y_2 مانند y_3 نیز عضوی از C° است:

$$y_3 = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda y_1^T x \le \lambda \\ (1-\lambda) y_2^T x \le 1-\lambda \end{cases} \Rightarrow (\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2)^T x \le 1 \Rightarrow y_3^T x \le 1$$

پس $y_3 \in C^\circ$ است، پس C° محدب است.

2.

مجموعه $(C^\circ)^\circ$ شامل نقاطی است که ضرب داخلی آن ها با هر عضو از C° کوچکتر از 1 است. از طرفی طبق تعریف داریم: $\forall x \in C, \forall y \in C^\circ : x^T y \le 1$ یعنی به دلیل متقارن بودن ضرب داخلی، ضرب داخلی تمام اعضای C با هر عضو C° از 1 کمتر است. پس هر عضو C عضو $(C^\circ)^\circ$ نیز هست. پس $C \subseteq (C^\circ)^\circ$

حال ثابت می کنیم $(C^\circ)^\circ - C$ تهی است. حال فرض کنید v نقطه ای باشد که $v \notin C$ ، $v \in (C^\circ)^\circ$

چون v خارج از C قرار دارد، طبق قضیه جداسازی، برداری مانند y وجود دارد که:

$$\forall x \in C, \exists y \in R: y^T v > b > y^T x$$

از آنجایی که مبدأ در C قرار دارد با قرار دادن $x=0$ حاصل می شود: $b>0$ حال تعریف کنید: $\tilde{y} = \frac{y}{b}$

آنگاه داریم:

$$\tilde{y}^T v > 1 > \tilde{y}^T x \Rightarrow \tilde{y} \in C^\circ$$

پس $\tilde{y}$ عضوی از C° است. اما طبق نامساوی داریم: $v^T \tilde{y} > 1$ پس $v \notin (C^\circ)^\circ$ که با فرض اولیه در تناقض است. پس همچنین نقطه v نمی تواند وجود داشته باشد. یعنی: $(C^\circ)^\circ - C = \emptyset$ پس $(C^\circ)^\circ = C$

CS CamScanner

1. ابتدا نشان می دهیم $C \cap D$ یک مخروط محدب است. چون C و D محدب هستند پس $C \cap D$ هم محدب است. کافی است نشان دهیم مخروط هم هست. فرض کنید $x \in C \cap D$ باشد، داریم:

$$x \in C \cap D \Rightarrow \begin{matrix} x \in D \\ x \in C \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} ax \in C \\ ax \in D \end{matrix} \Rightarrow ax \in C \cap D \Rightarrow$$ $C \cap D$ مخروط است

پس $C \cap D$ مخروط محدب است.

حال ثابت می کنیم که $C^* + D^*$ نیز مخروط محدب است. اولا C^* و D^* هر دو مخروط محدب هستند.

حال فرض کنید $\begin{cases} x \in C^* + D^*,\ x = u_1 + v_1,\ u_1 \in C^*,\ v_1 \in D^* \\ y \in C^* + D^*,\ y = u_2 + v_2,\ u_2 \in C^*,\ v_2 \in D^* \end{cases}$ باشد، ثابت می کنیم $ax + \beta y$ هم عضو $C^* + D^*$ است $a \geq 0, \beta \geq 0$

$$ax + \beta y = \underbrace{a u_1 + \beta u_1}_{u_3 \in C^*} + \underbrace{a v_1 + \beta v_2}_{v_3 \in D^*} = u_3 + v_3 \in C^* + D^* \Rightarrow$$ $C^* + D^*$ مخروط محدب است

2. فرض کنید u یک عضو دلخواه C^* و v یک عضو دلخواه D^* باشد، همچنین x یک عضو دلخواه C و y یک عضو دلخواه D باشد. داریم:

$$\begin{matrix} u \in C^* \Rightarrow \forall x \in C:\ u^T x \geq 0 \\ v \in D^* \Rightarrow \forall y \in D:\ v^T y \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{if } \begin{matrix} z \in C \\ z \in D \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} u^T z \geq 0 \\ v^T z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (u+v)^T z \geq 0$$

$$\Rightarrow u + v \in (C \cap D)^*$$

از طرفی $u+v$ یک عضو دلخواه از $C^* + D^*$ است. پس هر عضو $C^* + D^*$ عضوی از $(C \cap D)^*$ است.
پس داریم: $C^* + D^* \subseteq (C \cap D)^*$

3. ابتدا گزاره روبه‌رو را ثابت می کنیم: اگر K_1 و K_2 دو مخروط محدب باشند، داریم:

$$\text{if } K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow K_2^* \subseteq K_1^*$$

اثبات در صفحه بعد

CS CamScanner

می خواهیم ثابت کنیم برای هر مخروط محدب اگر $K_1 \subseteq K_2$ آنگاه $K_2^* \subseteq K_1^*$ داریم:

$$\text{if } y \in K_2^* \Rightarrow \forall x \in K_2 : y^T x \geq 0 \xRightarrow{K_1 \subseteq K_2} \forall x \in K_1 : y^T x \geq 0 \Rightarrow y \in K_1^*$$

پس هر عضوی در K_2^* باشد در K_1^* نیز هست. پس $K_2^* \subseteq K_1^*$

طبق این لم داریم:

$$\text{if } (C \cap D)^* \subseteq C^* + D^* \Rightarrow (C^* + D^*)^* \subseteq ((C \cap D)^*)^* = C \cap D$$

$$\Rightarrow \text{if } (C \cap D)^* \subseteq C^* + D^* \Rightarrow (C^* + D^*)^* \subseteq C \cap D \longrightarrow \text{طرف اول } \text{(I)}$$

$$\text{if } (C^* + D^*)^* \subseteq C \cap D \Rightarrow (C \cap D)^* \subseteq ((C^* + D^*)^*)^* = C^* + D^*$$

$$\Rightarrow \text{if } (C^* + D^*)^* \subseteq C \cap D \Rightarrow (C \cap D)^* \subseteq C^* + D^* \longrightarrow \text{طرف دوم } \text{(II)}$$

پس هر دو طرف را ثابت کردیم پس رابطه برقرار است.

حال رابطه $(C^* + D^*)^* \subseteq C \cap D$ را ثابت می کنیم. استفاده کنید چون C^* و D^* مخروط هستند هر دو شامل مبدا هستند، پس داریم $C^* \subseteq C^* + D^*$، $D^* \subseteq C^* + D^*$ حال فرض کنید: $x \in (C^* + D^*)^*$

$$\Rightarrow \forall y \in C^* + D^* : x^T y \geq 0 \xRightarrow[D^* \subseteq C^* + D^*]{C^* \subseteq C^* + D^*} \forall y \in C^* : x^T y \geq 0 \Rightarrow x \in (C^*)^* = C$$

$$\forall y \in D^* : x^T y \geq 0 \Rightarrow x \in (D^*)^* = D \Rightarrow x \in C \text{ and } x \in D$$

$$\Rightarrow x \in C \cap D \Rightarrow (C^* + D^*)^* \subseteq C \cap D$$

حال طبق رابطه دو طرفه‌ای که ثابت کردیم داریم: $(C \cap D)^* \subseteq C^* + D^*$ پس از این رابطه و رابطه‌ای که در بخش 2 ثابت کردیم نتیجه می‌شود: $(C \cap D)^* = C^* + D^*$ ← حکم خواسته شده

4.

می‌خواهیم نشان دهیم $V^* = \{A^T v \mid v \ge 0\}$ فرض کنید $S = \{A^T v \mid v \ge 0\}$ می‌خواهیم نشان دهیم که $S = V^*$

ابتدا نشان می‌دهیم که $S \subseteq V^*$ است. فرض کنید x عضوی از S باشد. حال فرض کنید y عضوی دلخواه از V باشد، داریم:

$$x \in S \Rightarrow x = A^T v \mid v \ge 0 \Rightarrow x^T y = v^T \underbrace{Ay}_{u} = v^T u$$

حال طبق تعریف مجموعه‌ها داریم: $u \ge 0$ و $v \ge 0$ پس $v^T u \ge 0$ است. پس داریم:

$$\text{if } x \in S \Rightarrow \forall y \in V: x^T y \ge 0 \Rightarrow x \in V^* \Rightarrow S \subseteq V^* \quad \mathrm{I}$$

حال ثابت می‌کنیم $V^* \subseteq S$. این حکم درست است اگر و تنها اگر $S^* \subseteq V$ پس این حکم را ثابت می‌کنیم.

x عضوی از S^* باشد. آنگاه داریم:

$$x \in S^* \Rightarrow \forall y \in S: x^T y \ge 0 \quad y \in S \Rightarrow y = A^T v \mid v \ge 0$$

پس داریم:

$$x^T y = x^T A^T v = (Ax)^T v \ge 0$$

نامساوی بالا به ازای هر $v \ge 0$ برقرار است. حال اگر v را برابر e_i قرار دهیم، نتیجه می‌شود که عنصر iام Ax نامنفی است. چون رابطه بالا به ازای هر e_i صحیح است داریم:

$$Ax \ge 0 \Rightarrow x \in V \Rightarrow S^* \subseteq V \Rightarrow V^* \subseteq S \quad \mathrm{II}$$

پس از I و II حکم داده شده ثابت می‌شود:

$$V^* = \{A^T v \mid v \ge 0\}$$

CamScanner

-4

.1 ثابت می‌کنیم که مخروط محدب داده شده زیر مجموعه هر مخروط محدب دیگری است که شامل c است.
فرض کنید K' یک مخروط محدب است که شامل c است.

حال ثابت می‌کنیم هر نقطه‌ای که در K است در K' نیز هست. می‌دانیم که c در K' هست. پس داریم: $\forall x \in c: x \in K'$ همچنین چون K' مخروط محدب است، تمام ضرایب مثبت اعضای آن نیز در K' هست. یعنی $\forall x \in c: \lambda x \in K', \lambda > 0$ می‌دانیم این نقاط تمام نقاط K هستند.
پس داریم $\forall x \in K: x \in K'$ پس داریم $K \subseteq K'$ پس K زیر مجموعه هر مخروط محدب شامل c است. پس کوچکترین مخروط محدب است.

.2

فرض کنید عضوی از B^* باشد. داریم:

$$x \in B^* \Rightarrow Ay \in B: x^T y \geq 0 \xrightarrow{A \subseteq B} \forall y \in A: x^T y \geq 0 \Rightarrow x \in A^*$$

$$\Rightarrow \text{if } x \in B^* \Rightarrow x \in A^* \Rightarrow B^* \subseteq A^*$$

-5

ابتدا نشان می‌دهیم که اگر 1 برقرار باشد، 2 برقرار نیست. فرض کنید 2 برقرار باشد، یعنی یک بردار y به صورت ذکر شده وجود داشته باشد. آنگاه داریم:

$$y^T A \leq 0 \xrightarrow{\text{چون } x \geq 0 \text{ است داریم:}} y^T \underbrace{Ax}_{b} \leq 0 \Rightarrow y^T b \leq 0 \longrightarrow \text{تضاد با فرض}$$

پس به تناقض رسیدیم. حال ثابت می‌کنیم اگر 2 برقرار باشد 1 برقرار نیست.
فرض کنید گزاره شماره 2 درست باشد، ثابت می‌کنیم گزاره شماره 1 نمی‌تواند درست باشد. فرض کنید درست باشد، آنگاه مجموعه S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S = \{ Ax \mid x \geq 0 \}$$

آنگاه اگر گزاره 1 درست باشد، واضح است که $b \in S$. ادامه اثبات در صفحه بعد

CamScanner

حال بردار z را برابر با قرینه بردار y تعریف می کنیم، یعنی: $z=-y$

حال توجه کنید که طبق بخش 4 سوال 3، داریم: $S^*=\{x \mid A^Tx \geq 0\}$

از طرفی گفتیم که طبق تعریف $b\in S$ است. همچنین طبق فرض داریم: $z^Tb<0 \Rightarrow z\notin S^*$

همچنین از طرفی طبق فرض داریم: $A^Tz\geq 0$ پس طبق تعریف داریم: $z\in S$

اما پیش تر ثابت کردیم که $z\notin S$ پس به تناقض رسیدیم و گزاره 1 نمی توانسته درست باشه

-6

1. ثابت می کنیم S_a نیز محدب است. داریم:

$$\begin{matrix} x_1\in S_a \\ x_2\in S_a \end{matrix} \Rightarrow x_3=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$$

$$\Rightarrow \inf_z\{\|x_3-z\| \mid z\in S\}$$

حال فرض کنید z_1 و z_2 را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$z_1=\arg\min_z \|x_1-z\| \xrightarrow{x_1\in S_a} \|x_1-z_1\|\leq a$$

$$z_2=\arg\min_z \|x_2-z\| \xrightarrow{x_2\in S_a} \|x_2-z_2\|\leq a$$

حال z_3 را به این صورت تعریف می کنیم: $z_3=\lambda z_1+(1-\lambda)z_2$ چون S محدب است پس $z_3\in S$

حال داریم:

$$\|x_3-z_3\|=\|\lambda x_1-\lambda z_1+(1-\lambda)x_2-(1-\lambda)z_2\|\leq \lambda\underbrace{\|x_1-z_1\|}_{\leq a}+(1-\lambda)\underbrace{\|x_2-z_2\|}_{\leq a}$$

$$\Rightarrow \|x_3-z_3\|\leq \lambda a+(1-\lambda)a=a \Rightarrow \|x_3-z_3\|\leq a$$

$$\Rightarrow \inf_z\{\|x_3-z\| \mid z\in S\}\leq a \Rightarrow x_3\in S_a \Rightarrow S_a \text{ is convex}$$

CamScanner

2.

ثابت می کنیم اگر S محدب باشد، S_{-a} نیز محدب است. فرض کنید x_1 و x_2 دو عضو دلخواه از S_{-a} باشند.
ثابت می کنیم ترکیب محدب آن ها نیز عضوی از S_{-a} است. یعنی:

$x_1 \in S_{-a}$
$x_2 \in S_{-a}$

$$x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$$

حال فرض کنید y_3 عضو $B(x_3, a)$ باشد. ثابت می کنیم $y_3 \in S$ است. y_1 و y_2 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$y_1 = x_1 + y_3 - x_3$$

$$y_2 = x_2 + y_3 - x_3$$

ادعا می کنیم که $y_1 \in B(x_1, a)$ و $y_2 \in B(x_2, a)$ است. توجه کنید که $y_3 \in B(x_3, a)$ است یعنی داریم:

$$y_3 \in B(x_3, a) \Rightarrow \|y_3 - x_3\| \leq a$$

حال داریم:

$$\|y_1 - x_1\| = \|x_1 + y_3 - x_3 - x_1\| = \|y_3 - x_3\| \leq a \Rightarrow y_1 \in B(x_1, a) \Rightarrow y_1 \in S$$

$$\|y_2 - x_2\| = \|x_2 + y_3 - x_3 - x_2\| = \|y_3 - x_3\| \leq a \Rightarrow y_2 \in B(x_2, a) \Rightarrow y_2 \in S$$

از طرفی داریم:

$$\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 = \lambda x_1 + \lambda y_3 - \lambda x_3 + (1-\lambda) x_2 + (1-\lambda) y_3 - (1-\lambda) x_3$$

$$= x_3 + y_3 - x_3 = y_3 \Rightarrow y_3 = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \xrightarrow[\text{محدب } S]{y_1, y_2 \in S} y_3 \in S$$

پس هر عضو $B(x_3, a)$ نیز عضو S است. پس $B(x_3, a) \subseteq S$ است. پس $x_3 \in S_{-a}$ است. پس S_{-a} محدب است.

CS CamScanner