به نام خدا

بهینه‌سازی محدّب ۱ (۱-۲۵۷۵۶)

تمرین سری دوم

ترم بهار ۰۲-۱۴۰۱

دانشکده‌ی مهندسی برق

دانشگاه صنعتی شریف

استاد: دکتر محمّدحسین یاسائی میبدی

مهلت تحویل: جمعه ۱۸ فروردین ۱۴۰۲، ساعت ۲۳:۵۹

($*$) مسائلی که با ستاره مشخّص شده‌اند امتیازی هستند و حل‌کردن آن‌ها نمره‌ی امتیازی خواهد داشت!

۱ مجموعه‌های محدّب!

محدّب بودن یا نبودن مجموعه های زیر را نشان دهید.

۱. مستطیل n بُعدی:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = ۱, ..., n\}$$

۲. گوِه n بُعدی:

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_۱^\top \mathbf{x} \leq b_۱, \mathbf{a}_۲^\top \mathbf{x} \leq b_۲\right\}$$

۳. مجموعه نقاطی که به یک مجموعه نزدیک‌تر از مجموعه دیگر هستند. به عبارت دیگر:

$$\{\mathbf{x} \mid \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{S}) \leq \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{T})\}$$

به طوری که $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^n$ و داریم:

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{S}) = \inf_z \{\|x - z\|_۲ \mid \mathbf{z} \in \mathcal{S}\}$$

۴. مجموعه‌ی $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} + \mathcal{S}_۲ \subseteq \mathcal{S}_۱\}$ که در آن $\mathcal{S}_۱, \mathcal{S}_۲ \subseteq \mathbb{R}^n$ و $\mathcal{S}_۱$ محدّب است.

۵. مجموعه نقاطی که فاصله‌ی آنها تا نقطه‌ی $\mathbf{a}$ بیشتر از یک ضریب ثابت θ از فاصله‌ی آنها تا نقطه‌ی $\mathbf{b}$ نیست. به عبارت دیگر:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_۲ \leq \theta \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_۲\}$$

می‌توانید فرض کنید $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ و $۰ \leq \theta \leq ۱$.

۲ مجموعه‌ی قطبی

مجموعه‌ی قطبی یک مجموعه مانند $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{C}^\circ = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y}^\top \mathbf{x} \leq ۱,\ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}\right\}.$$

با توجه به این تعریف به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

۱. نشان دهید $\mathbf{C}^\circ$ مجموعه‌ای محدّب است (حتی اگر $\mathcal{C}$ محدّب نباشد).

۲. نشان دهید اگر $\mathcal{C}$ بسته و محدّب باشد، با فرض $\circ \in \textbf{int}\{\mathcal{C}\}$ داریم: $(\mathcal{C}^\circ)^\circ = \mathcal{C}$.

راهنمایی: نشان دهید $\mathcal{C} \subseteq (\mathcal{C}^\circ)^\circ$ و سپس نشان دهید $(\mathcal{C}^\circ)^\circ - \mathcal{C}$ مجموعه‌ی تهی است. برای اثبات بخش دوم از قضیه‌ی ابرصفحه‌ی جداکننده استفاده کنید.

۳ دوگان اشتراک مخروط‌ها

فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو مخروط محدّب بسته در $\mathbb{R}^n$ باشند. در این سوال می‌خواهیم نشان دهیم که:

$$(\mathcal{C} \cap \mathcal{D})^* = \mathcal{C}^* + \mathcal{D}^*$$

که در این رابطه منظور از نماد $+$ جمع دو مجموعه به شکل زیر است:

$$\mathcal{C}^* + \mathcal{D}^* = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{C}^*, \mathbf{v} \in \mathcal{D}^*\}$$

به زبان دیگر، می‌خواهیم نشان دهیم دوگان اشتراک دو مخروط محدّب بسته برابر مجموع دوگان‌های آن‌ها است.

۱. نشان دهید $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ و $\mathcal{C}^* + \mathcal{D}^*$ مخروط‌های محدّب هستند. (این مجموعه‌ها بسته نیز هستند ولی نیازی به اثبات این موضوع نیست.)

۲. نشان دهید $\mathcal{C}^* + \mathcal{D}^* \subseteq (\mathcal{C} \cap \mathcal{D})^*$

۳. حال کافیست نشان دهیم $(\mathcal{C} \cap \mathcal{D})^* \subseteq \mathcal{C}^* + \mathcal{D}^*$:برای این کار ابتدا ثابت کنید

$$(\mathcal{C} \cap \mathcal{D})^* \subseteq \mathcal{C}^* + \mathcal{D}^* \Leftrightarrow (\mathcal{C}^* + \mathcal{D}^*)^* \subseteq \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$$

می‌توانید از این نکته استفاده کنید که اگر $\mathcal{K}$ یک مخروط محدّب بسته باشد آن‌گاه $(\mathcal{K}^*)^* = \mathcal{K}$. سپس نشان دهید:

$$(\mathcal{C}^* + \mathcal{D}^*)^* \subseteq \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$$

و از آن نتیجه بگیرید

$$(\mathcal{C} \cap \mathcal{D})^* = \mathcal{C}^* + \mathcal{D}^*$$

۴. نشان دهید دوگان مجموعه‌ی $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \succeq \circ\}$ برابر با مجموعه $\mathcal{V}^* = \left\{\mathbf{A}^\top \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \succeq \circ\right\}$ است.

۴ اثبات کنید!

احکام زیر را ثابت کنید.

۱. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک مجموعه‌ی محدّب باشد و $\mathcal{K} = \{\lambda \mathbf{x} \mid \lambda > \circ, \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}$. آن‌گاه $\mathcal{K}$ کوچک‌ترین مخروط محدّبی است که شامل $\mathcal{C}$ است.

۲. نشان دهید اگر $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ آن‌گاه $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{A}^*$

۵ پاسخ نامنفی معادله‌ی خطی

ماتریس $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ یک ماتریس حقیقی و $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m\times ۱}$ یک بردار حقیقی است. نشان دهید همواره دقیقاً یکی از گزاره‌های زیر درست است، نه هر دو:

۱. $\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \succeq \circ$

۲. $\exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{y}^\top \mathbf{A} \preceq \circ, \mathbf{y}^\top \mathbf{b} > \circ$

راهنمایی : می‌توانید نشان دهید اگر ۱ برقرار باشد حتما ۲ برقرار نیست و اگر ۱ برقرار نباشد حتما ۲ برقرار است. برای اثبات قسمت دوم پوش مخروطی بردارهای ستون‌های $\mathbf{A}$ را تعریف کنید و در ادامه از قضیه‌ی ابرصفحه‌ی جداکننده برای این مجموعه و یک بردار مناسب (که خودتان باید پیدا کنید) استفاده کنید.

۶ انبساط مجموعه‌ها!

مجموعه‌ی $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ و نرم $\|.\|$ تعریف شده روی $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید.

۱. برای $a \geq 0$ تعریف می‌کنیم $\mathcal{S}_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{S}) \leq a\}$ که تعریف فاصله را در سوال یک داشتیم. $\mathcal{S}_a$ را نسخه‌ی منبسط و گسترده‌شده‌ی $\mathcal{S}$ با a می‌نامیم. نشان دهید اگر $\mathcal{S}$ محدّب باشد، $\mathcal{S}_a$ نیز محدّب است.

۲. برای $a \geq 0$ تعریف می‌کنیم $\mathcal{S}_{-a} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{B}(\mathbf{x}, a) \subseteq \mathcal{S}\}$ که در آن $\mathcal{B}(\mathbf{x}, a)$ گوی (در نرم داده شده) به مرکز $\mathbf{x}$ و شعاع a است. $\mathcal{S}_{-a}$ را نسخه‌ی منقبض و محدودشده‌ی $\mathcal{S}$ با a می‌نامیم. نشان دهید اگر $\mathcal{S}$ محدب باشد، $\mathcal{S}_{-a}$ نیز محدب است.

۷ $(*)$ بستارهای برابر!

نشان دهید اگر $\mathcal{K}$ و $\mathcal{M}$ دو مجموعه‌ی محدّب و $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه‌ی ناتهی محدود باشد که به ازای آن داشته باشیم $\mathcal{K} + \mathcal{A} = \mathcal{M} + \mathcal{A}$، خواهیم داشت: $\mathbf{cl}\{\mathcal{K}\} = \mathbf{cl}\{\mathcal{M}\}$

.

۸ $(*)$ مرز نامحدّب!

فرض کنید $\mathcal{S}$ یک مجموعه‌ی محدّب، بسته و محدود باشد و همچنین بدانیم که $\mathbf{int}\{\mathcal{S}\} \neq \varnothing$. نشان دهید که مرز مجموعه‌ی $\mathcal{S}$ محدب نیست.