به نام خدا

بهینه‌سازی محدّب ۱ (۱-۲۵۷۵۶)

تمرین سری سوم

ترم بهار ۰۲-۱۴۰۱

دانشکده‌ی مهندسی برق

دانشگاه صنعتی شریف

استاد: دکتر محمّدحسین یاسائی میبدی

مهلت تحویل: یکشنبه ۳ اردیبهشت ۱۴۰۲، ساعت ۲۳:۵۹

(*) مسائلی که با ستاره مشخّص شده‌اند امتیازی هستند و حل‌کردن آن‌ها نمره‌ی امتیازی خواهد داشت!

۱ بررسی چند تابع

در این سوال می‌خواهیم به بررسی محدّب یا مقعّر بودن بعضی از توابع بپردازیم.

۱. نشان دهید تابع میانگین هندسی $f(\mathbf{x}) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$ با $\textbf{dom}\ f = \mathbb{R}^n_{++}$ یک تابع محدّب است.

۲. فرض کنید $p < 1$ و $p \neq 0$ باشد. نشان دهید تابع $f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}$ با $\textbf{dom}\ f = \mathbb{R}^n_{++}$ مقعّر است.

۳. نشان دهید تابع $f(\mathbf{X}) = (\det\{\mathbf{X}\})^{1/n}$ با $\textbf{dom}\ f = \mathbb{S}^n_{++}$ مقعّر است.

۴. نشان دهید تابع:

$$f(\mathbf{x}) = -\log\left(-\log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} + b_i}\right)\right)$$

که برای آن داریم:

$$\textbf{dom}\ f = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} e^{\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} + b_i} < 1\right\},$$

محدّب است. می‌توانید از محدّب بودن تابع $\log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{y_i}\right)$ استفاده کنید.

۵. نشان دهید تابع $f(\mathbf{x}, t) = \frac{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}{t^{p-1}} = \frac{\|\mathbf{x}\|_p^p}{t^{p-1}}$ با دامنه‌ی $\{(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ و برای $p > 1$ محدّب است.

۲ توابع محدب کراندار

فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع محدّب و کراندار با $\textbf{dom}\ f = \mathbb{R}^n$ باشد. ثابت کنید این تابع، تابع ثابت است.

۳ تابع دوگان

نشان دهید دوگان تابع $f(\mathbf{X}) = \mathrm{tr}\left\{\mathbf{X}^{-۱}\right\}$ با $\mathbf{dom}\ f = \mathbb{S}^n_{++}$ به شکل زیر است:

$$f^*(\mathbf{Y}) = -۲\mathrm{tr}\left\{-\mathbf{Y}\right\}^{۱/۲}, \qquad \mathbf{dom}\ f^* = -\mathbb{S}^n_{+}$$

راهنمایی: گرادیان این تابع به شکل $\nabla f(\mathbf{X}) = -\mathbf{X}^{-۲}$ است.

۴ مربع بر خط

فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی نامنفی و محدّب، و $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی مثبت و مقعّر باشد. نشان دهید تابع $f^۲/g$ با دامنه $\mathbf{dom} f \cap \mathbf{dom} g$ محدّب است.

۵ دامنه‌ی تحدب

در درس دیدیم که تابع $f(\mathbf{X}) = -\log\left(\det\left\{\mathbf{X}\right\}\right)$ تابعی محدّب روی فضای ماتریس‌های مثبت معین S^n_{++} است. تابع دوگان (مزدوج) f را بیابید. دامنه‌ی تابع دوگان چیست؟

راهنمایی: تابع f روی S^n_{++} مشتق‌پذیر است و $\nabla f(\mathbf{X}) = -\mathbf{X}^{-۱}$.

۶ چند قضیه‌ی کاربردی

تابع مشتق‌پذیر $h : I \to (۰, \infty)$ را که در آن I یک بازه از $\mathbb{R}$ است را در نظر بگیرید. احکام زیر را اثبات کنید.

۱. $\frac{۱}{h(x)}$ یک تابع مقعّر است، اگر و تنها اگر:

$$\forall x, y \in I : h(y) + h'(y)(y - x) \geq \frac{\left(h(y)\right)^۲}{h(x)}.$$

۲. $\frac{۱}{h(x)}$ یک تابع آفاین است اگر و تنها اگر:

$$\forall x, y \in I : h(y) + h'(y)(y - x) = \frac{\left(h(y)\right)^۲}{h(x)}.$$

۳. اگر تابع $h(x)$ دو بار مشتق‌پذیر باشد؛ در این‌صورت تابع $\frac{۱}{h(x)}$ مقعّر است، اگر و تنها اگر:

$$h(x)h''(x) \geq ۲\left(h'(x)\right)^۲$$

۴. اگر تابع $\frac{۱}{h(x)}$ مقعّر باشد، نشان دهید که تابع $h(x)$ محدّب است. برای حالت عکس این قضیه یک مثال نقض بیاورید.

۷ تابع زتای ریمان

نشان دهید که تابع زتای ریمان ، $\zeta(s) := \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^s}$ بر روی دامنه‌ی $(۱, \infty)$ لگاریتم-محدّب است. یعنی نشان دهید تابع $\ln\left(\zeta(s)\right)$ محدّب است.

۸ $(*)$ مشتق‌پذیری توابع محدّب

تابع محدّب $f : U \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که در آن ، U زیر مجموعه‌ای ناتهی، باز و محدب از $\mathbb{R}^n$ است. نشان دهید نقاطی که در آن‌ها این تابع مشتق‌پذیر است، تشکیل یک زیرمجموعه‌ی G_δ از $\mathbb{R}^n$ می‌دهند. منظور از G_δ بودن یک مجموعه آن است که این مجموعه حاصل اشتراک تعدادی قابل شمارش از مجموعه‌های باز است.
راهنمایی: تابع محدّب $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر است، اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \to ۰} \frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) + f(\mathbf{x}-\mathbf{h}) - ۲f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{h}\|} = ۰.$$