به نام خدا

گزارش تمرین کامپیوتری دوم بهینه سازی محدب

مهیار غضنفری 98102057

سوال اول:

بخش اول:

در اینجا باید تابع likelihood را مینیمم کنیم. پس داریم:

$$L(\lambda_t) = -\log e^{-\lambda_t} \frac{{\lambda_t}^k}{k!}$$

$$\frac{\partial L(\lambda_t)}{\partial \lambda_t} = 1 - \frac{N_t}{\lambda_t} = 0 \Rightarrow N_t = \lambda_t$$

که در حالت $N_t = 0$ هم به همین حالت می‌رسیم.

بخش دوم:

هنگام مینیمم کردن تابع MLE می‌توانیم تابع regularization را به آن اضافه کنیم:

$$Minimize \sum_{t=1}^{24} \mathrm{L}(\lambda_t) + \rho \sum_{t=1}^{24} (\lambda_{t+1} - \lambda_t)^2 + \rho((\lambda_{24} - \lambda_1)^2$$

با توجه به بخش قبل می‌توان نوشت :

$$Minimize \sum_{t=1}^{24} \lambda_t - \sum_{t=1}^{24} N_t \log \lambda_t + \rho \sum_{t=1}^{23} (\lambda_{t+1} - \lambda_t)^2 + \rho((\lambda_{24} - \lambda_1)^2$$

که در رابطه بالا تک تک مولفه ها محدب هستند.

بخش سوم:

اگر عبارت ρ به بینهایت میل کند، λ_i ها برابر خواهند بود و مسئله به هموار سازی لاندا ها تبدیل می‌شود و این یعنی دیگر به کمینه کردن تابع likelihood توجه نخواهد کرد.

سوال دوم:

مسئله را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} maximize \quad & \sum_{j=1}^{n} r_j(x_j) \\ subject\ to \quad & x \geq 0 \\ & Ax \leq c^{max} \end{aligned}$$

از آنجایی که تابع هدف concave و قیود مسئله مجموعه ای از نامساوی های خطی هستند، این یک مسئله بهینه سازی محدب است. برای تبدیل آن به فرم LP می‌توان توابع درآمد را به شکل زیر بنویسیم:

$$r_j(x_j) = \min\{p_j x_j, p_j q_j + p_j{}^{disc}(x_j - q_j)\}$$

حال $r_j(x_j) \geq u_j$ اگر و فقط اگر:

$$p_j x_j \geq u_j, \qquad p_j q_j + p_j{}^{disc}(x_j - q_j) \geq u_j$$

میتوانیم مسئله LP را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} maximize \quad & 1^T u \\ subject\ to \quad & x \geq 0 \\ & Ax \leq c^{max} \\ & p_j x_j \geq u_j,\ \ u_j, \qquad p_j q_j + p_j{}^{disc}(x_j - q_j) \geq u_j \end{aligned}$$

که می‌توان نشان داد این مسئله و مسئله اصلی معادل هستند.

سوال سوم:

بخش اول:

سوختی که در سگمنت i ام مصرف می‌شود برابر $\frac{d_i}{s_i}\varphi_{(s_i)}$ است. پس کل سوخت مصرفی برابر $\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{s_i}\varphi_{(s_i)}$ است. وسیله نقلیه در زمان $\tau_i = \sum_{j=1}^{i}\frac{d_j}{s_j}$ به مسیر i می‌رسد. پس مسئله ما به شکل :

$$\begin{aligned} &\textit{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{s_i}\varphi_{(s_i)} \\ &\textit{subject to} \quad s_i^{min} \le s_i \le s_i^{max} \quad i = 1, \dots, n, \\ &\qquad \tau_i^{min} \le \sum_{j=1}^{i}\frac{d_j}{s_j} \le \tau_i^{max} \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

با متغیر های $s_1, \dots, s_n$

که مسئله در این فرم محدب نیست. اگر در متغیر ها تغییر ایجاد کنیم، می‌توانیم مسئله را به یک مسئله محدب تبدیل کنیم. متغیر های مسئله را $t_1, \dots, t_n$ در نظر می‌گیریم. دقت داریم که t_i ها همان $\frac{d_i}{s_i}$ هستند. در نتیجه این موضوع $s_i = \frac{d_i}{t_i}$ خواهد بود. مسئله جدید را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} &\textit{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n} t_i\,\varphi\left(\frac{d_i}{t_i}\right) \\ &\textit{subject to} \quad \frac{d_i}{{s_i}^{max}} \le t_i \le \frac{d_i}{{s_i}^{min}} \quad i = 1, \dots, n, \\ &\qquad \tau_i^{min} \le \sum_{j=1}^{i} t_j \le \tau_i^{max} \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

که همان طور که ذکر شد متغیر های جدید همان $t_1, \dots, t_n$ خواهند بود. این مسئله یک مسئله محدب است. این مسئله از تغییر متغیر اصلی مسئله از سرعت هر سگمنت به زمان هر سگمنت به دست آمده است. همچنین از آنجایی که تابع هدف محدب است(چون جمع تعدادی تابع محدب است و می‌دانیم که مجموع تعدادی تابع محدب، یک تابع محدب است) و قیود مسئله هم محدب هستند، می‌توانیم نتیجه بگیریم که این مسئله یک مسئله بهینه سازی محدب است.