98101588 HW4 محمدامین راضی

-1

ایده حل این است که بردار x را به صورت اختلاف دو بردار مثبت بنویسیم، یعنی داریم: $x = x^{+} - x^{-}$

حال متغیر slack s را به شکلی تعریف می‌کنیم که $Gx + s = h$ و همچنین $s \geq 0$ است.

حال مسئله به صورت زیر شده است:

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad c^T(x^{+} - x^{-}) \\
&\text{subject to} \\
&A(x^{+} - x^{-}) = b \\
&G(x^{+} - x^{-}) + s = h \\
&x^{+} \geq 0,\ x^{-} \geq 0,\ s \geq 0
\end{aligned}
$$

فرم بالا همان فرم دلخواهی است که دنبال آن بودیم.

-2

الف) داریم:

$$y^T L y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i y_j D_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i y_j W_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i^2 W_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i y_j W_{ij}$$

حال اگر برای یک $i = i'$ خاص و یک $j = j'$ خاص به معادله بالا نگاه کنیم، داریم:

$$y_{i'}^2 + y_{j'}^2 - W_{i'j'} y_{i'} y_{j'} - W_{j'i'} y_{i'} y_{j'} = (y_{i'} - y_{j'})^2$$

پس داریم:

$$y^T L y = \sum_{ij:\, i<j}^{n} W_{ij} (y_i - y_j)^2 = \sum_{ij:\, i<j} W_{ij} (f(i) - f(j))^2$$

ب)

چون هر چه اختلاف مقدار f در رأس ها بیشتر باشد یا به عبارتی تغییرات بیشتر باشد مقدار عبارت $y^T L y$ بیشتر می شود

ج)

فرض کنید y یک بردار است که در آن $y_i = g(i)$ همچنین بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می کنیم: $B = \{1, 2, \dots, |B|\}$ آنگاه داریم $y = \begin{bmatrix} y_B \\ y_u \end{bmatrix}$

حال مسئله بهینه سازی ما به صورت زیر در می آید:

$$\underset{y}{\text{minimize}} \quad y^T L y$$
$$\text{subject to} \quad y_B = f(B)$$

در بخش الف نشان دادیم که به ازای هر y رابطه $y^T L y \geq 0$ برقرار است پس L مثبت معین است. همچنین قیدها خطی است و تابعی که بهینه می کنیم به صورت $y^T L y$ است که محدب است و به صورت quadratic است. پس مسئله QP است.

فرض می کنیم: $B = \{1, 2, \dots, |B|\}$ و $u = V / B$ حال داریم: $L = \begin{bmatrix} L_B & R \\ R^T & L_u \end{bmatrix}$

پس مسئله ما برابر است با:

$$\underset{y}{\text{minimiz}} \quad y^T L y = \underset{y_u}{\text{minimiz}} \quad y_B^T L_B y + 2 y_B^T R y_u + y_u^T L_u y_u$$
$$\text{subject to} \quad y_B = f(B)$$

در مسئله بالا y_B ثابت است تا قید مسئله را ارضا کند. حال با گرادیان گیری داریم:

$$2R^T y_B + 2 L_u y_u = 0 \Rightarrow L_u y_u = -R^T y_B$$

$$\Rightarrow \boxed{y_u = -L_u^{-1} R^T y_B} \Rightarrow y^* = \begin{bmatrix} y_B \\ -L_u^{-1} R^T y_B \end{bmatrix}$$

الف) کافی است تغیر slack s را به این صورت در مسئله وارد کنیم:

$$\min_{(x,s)} \; 1^T s$$

subject to

$$Ax-b \leq s$$

$$Ax-b \geq -s$$

مسئله فوق، یک مسئله LP بر حسب x ای است. ادعا می‌کنیم جواب مسئله فوق با مسئله اولیه یکسان است. ابتدا توجه کنید که می‌خواهیم $1^T s$ را بهینه کنیم. برهر s_i داریم:

$$-s_i \leq a_i^T x - b \leq s_i \implies |a_i^T x - b| \leq s_i$$

پس برای بهینه شدن $1^T s$، مقدار s_i باید برابر $s_i = |a_i^T x - b|$ باشد. پس داریم:

$$\min_{(x,s)\ s.t} 1^T s = \min_x \|Ax-b\|_1$$

$$Ax-b \leq s$$

$$Ax-b \geq -s$$

ب) کافی است مسئله را به صورت زیر بنویسیم:

$$\underset{(x,s,t)}{\text{minimize}} \; 1^T s + t$$

subject to

$$-s \leq Ax-b \leq s$$

$$-t1 \leq x \leq t1$$

فرض کنید x نقطه بهینه باشد و y یک نقطه Feasible باشد. داریم:

$$\nabla f^T(x)(y-x) \geq 0 \Rightarrow \nabla f^T(x)\cdot(e_i - x) \geq 0 \Rightarrow \nabla f_i(x) \geq \nabla f_i^T(x)x.$$

$$\Rightarrow \min_{i=1,\dots,n} \nabla f_i(x) \geq \nabla f^T(x)x$$

برعکس این نیز برقرار است. یعنی اگر $\min\limits_{i=1,\dots,n} \nabla f_i(x) \geq \nabla f^T(x)x$ باشد x بهینه است. زیرا:

$$\min_{i=1,2,\dots,n} \nabla f_i(x) \geq \nabla f^T(x)x \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i \nabla f_i(x) \geq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}_{1} \nabla f^T(x)x$$

$$\Rightarrow \nabla f^T(x)y \geq \nabla f^T(x)x \Rightarrow \nabla f^T(x)(y-x) \geq 0 \Rightarrow x \text{ بهینه است}$$

همچنین داریم:

$$\min_{i=1,\dots,n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \geq \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

از طرفی چون $1^T x = 1$ است، داریم:

$$\min_{i=1,\dots,n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

پس داریم
$$\min_{i=1,\dots,n} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که اگر $\frac{\partial f}{\partial x_k} > \min\limits_{i=1,2,\dots,n} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ باشد، آنگاه $x_k = 0$ است.

پس شرط لازم و کافی برای بهینه بودن به صورت زیر است:

$$x_k > 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k} = \min_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

الف) این مسئله را می‌توان به صورت یک QCQP در آورد. داریم:

$$\underset{(x,t)}{\text{minimize}} \quad t$$

$$\frac{1}{2}x^T P_k x + q^T x + r \leq t \qquad k = 1, 2, \dots, K$$

$$Ax \leq b$$

ب) مسئله را می‌توان به سادگی به یک مسئله QP تبدیل کرد. زیرا:

$$-\gamma I \leq P - P_0 \leq \gamma I \implies P_0 - \gamma I \leq P \leq P_0 + \gamma I$$

$$\implies \frac{1}{2}x^T P_0 x - \frac{1}{2}\gamma \|x\|^2 \leq \frac{1}{2}x^T P x \leq \frac{1}{2}x^T P_0 x + \frac{1}{2}\gamma \|x\|^2$$

$$\implies \sup_{P \in \mathcal{E}} \left\{ \frac{1}{2}x^T P x + q^T x + r \right\} = \frac{1}{2}x^T P_0 x + \frac{1}{2}\gamma \|x\|^2 + q^T x + r$$

$\implies$ مسئله بهینه‌سازی: $\text{minimize} \ \frac{1}{2}x^T P_0 x + \frac{1}{2}\|x\|^2 + q^T x + r$

subject to

$$Ax \leq b$$

که یک مسئله QP است.

-6

اگر تعداد کامیون‌ها را k فرض کنیم، مسئله به دو حالت $k > n$ و $k \le n$ تقسیم می‌شود.

ابتدا توجه کنید که بدیهتاً رابطهٔ $\max_i \{w_i\} \le p^*$ برقرار است.

اگر $k > n$ باشد، جواب الگوریتم حریصانه و جواب بهینه برابر هم و مساوی $\max_i \{w_i\}$ می‌شود.

اگر $k \le n$ باشد به این صورت استدلال می‌کنیم. فرض کنید w_t آخرین باری باشد که روی سنگین‌ترین کامیون توسط الگوریتم حریصانه گذاشته می‌شود و p' وزن آن قبل از گذاشتن w_t باشد.

ادعا می‌کنیم که $p' \le p^*$ زیرا اگر این طور نباشد، داریم $p' > p^*$ همچنین بار بقیه کامیون‌ها نیز در مرحله t از p' بیشتر است. از طرفی داریم: $p^* \ge w_{max} \ge \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{k}$

پس اگر $p' > p^*$ باشد، آنگاه مجموع بار کامیون‌ها بیشتر شده است که تناقض است. پس داریم:

$$\begin{cases} p' \le p^* \\ w_t \le p^* \end{cases} \Longrightarrow p' + w_t \le 2p^* \Longrightarrow \text{خروجی الگوریتم} \le 2p^*$$

-7

برای اثبات حکم از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید یکی از کامیون‌ها وزنش از $\frac{3p^*}{2}$ بیشتر شده باشد. فرض کنید وزن کامیون قبل از قرار دادن w_t برابر k_1 و دیگری k_2 باشد. در این صورت داریم

$$\begin{cases} k_1 \le k_2 \\ k_1 + w_t \ge \frac{3p^*}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}}{2} \le p^* \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i \le 2p^*$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} k_1 + w_t + k_2 \le 2p^* \\ k_1 + w_t > \frac{3p^*}{2} \end{cases} \Longrightarrow k_2 < \frac{p^*}{2} \Longrightarrow k_1 < \frac{p^*}{2} \Longrightarrow k_1 + w_t \le \frac{3p^*}{2}$$

تناقض $\Longleftarrow$