بسم الله

جلسه ۲

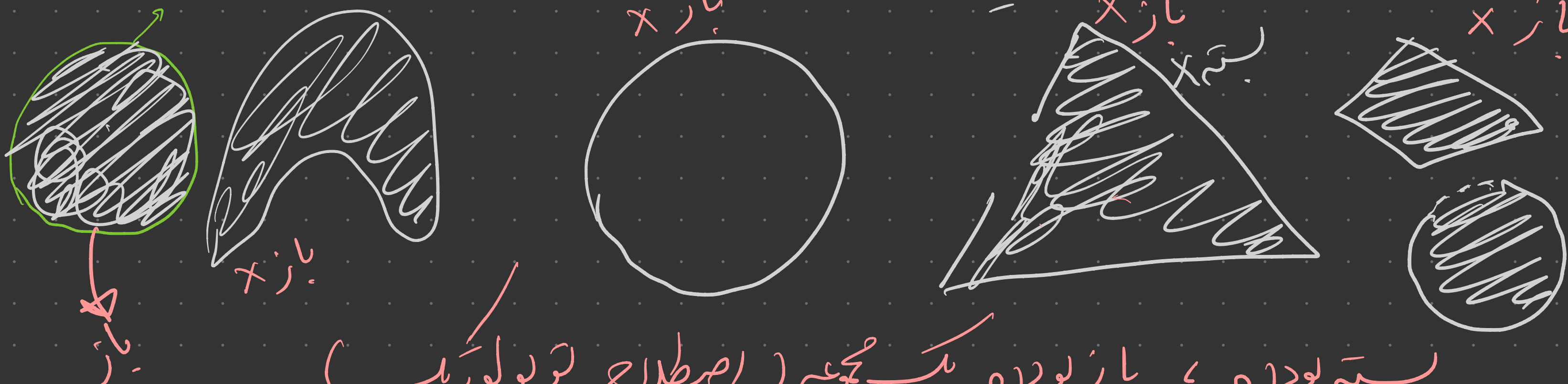
تعاریف مجموعه‌ی آفین، محدب و مخروط محدب به همراه مثال

* مخروط دوگان

* عملیات حفظ کننده تحدب

چهارشنبه ۲۱ اردیبهشت : زمان ساعت ۴ بعدازظهر

* تفاوت بین شکل‌ها *



- بسته بودن ، باز بودن یک مجموعه (اصطلاح توپولوژیک)

- محدب بودن یا نبودن !

باز بودن : هر نقطه در داخل مجموعه S، یک همسایگی از آن هم کاملاً داخل S باشد.

بسته بودن : متمم بسته $\longleftrightarrow$ متمم باز

بسته : هر نقطه‌ای روی مرز S هم جزء S باشد.

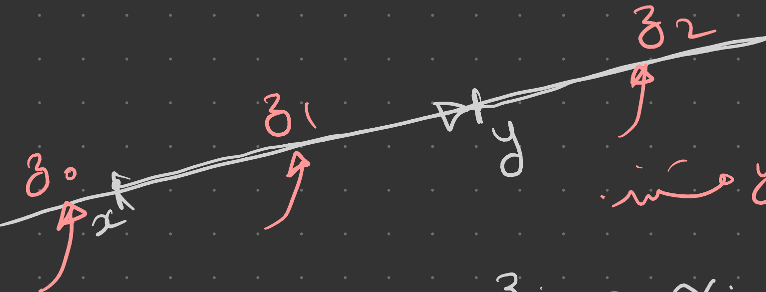
نقطه مرزی : نقطه x مرزی است اگر هر همسایگی x ، حداقل شامل یک نقطه از مجموعه S شود. (x لزوماً داخل S نیست) و اینکه x نقطه درونی S نباشد.

نقطه درونی : x درونی است اگر اولاً $x \in S$ ، ثانیاً یک همسایگی از آن کاملاً داخل S باشد.

$\text{int}(S) = \{$ مجموعه همه نقاط درونی S $\}$

نقاط مرزی $= cl(S) \setminus \text{int}(S)$

$cl(S)$: مجموعه همه نقاط درونی و مرزی S است.



• ترکیب خطی :

z_0 و z_1 و z_2 همگی ترکیب خطی x و y هستند.

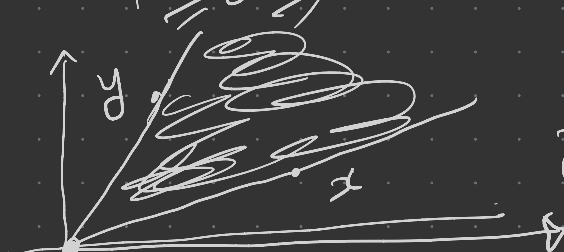
$$z_i = \alpha_i x + \beta_i y \;;\; \alpha_i + \beta_i = 1 \;;\; \alpha_i \in \mathbb{R}$$

نقاط خط : $x + t(y - x) = ty + (1-t)x$

• ترکیبِ محدب : همه نقاطِ شکل

$$t\vec{x} + (1-t)\vec{y}$$

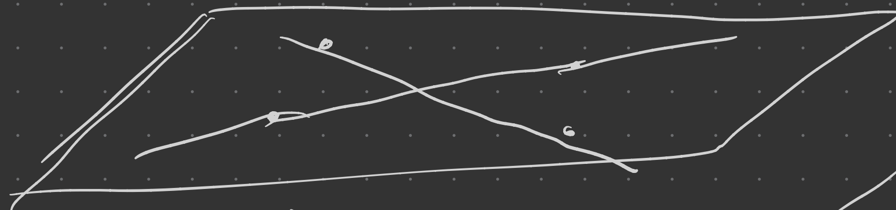
$$1 \geq t \geq 0$$



• ترکیبِ مخروطی (محدب) : $z_i = \alpha_i x + \beta_i y$

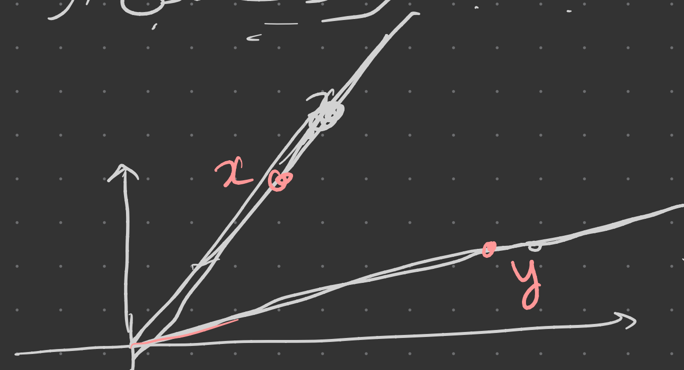
$$\alpha_i , \beta_i \geq 0$$

• مجموعه خطی (آفین) اگر برای هر دو نقطه x و y، خط واصل داخل S باشد.
[S آفین است]



• مجموعه محدب: هر ترکیب محدب از x و y داخل S باشد.

• مخروط:



• $x \in S$;
$\forall t \geq 0 \rightarrow tx \in S$

مخروط محدب:

مخروط محدب: مجموعه ای است که هم مخروط باشد، هم محدب

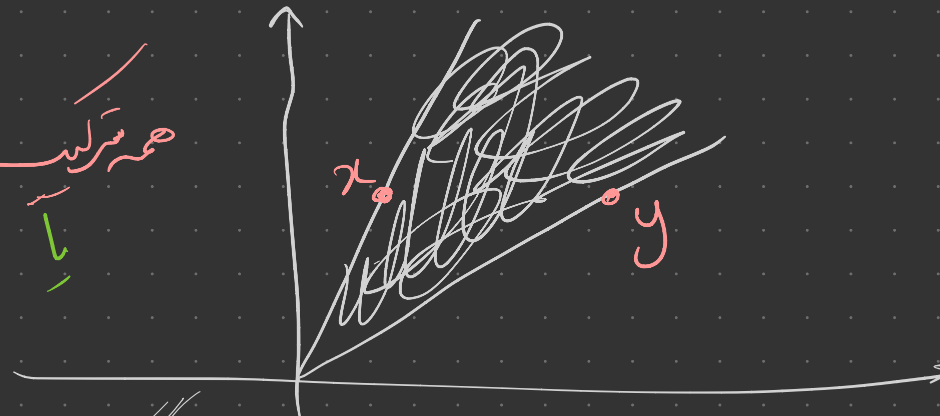
$\forall x, y \in S$

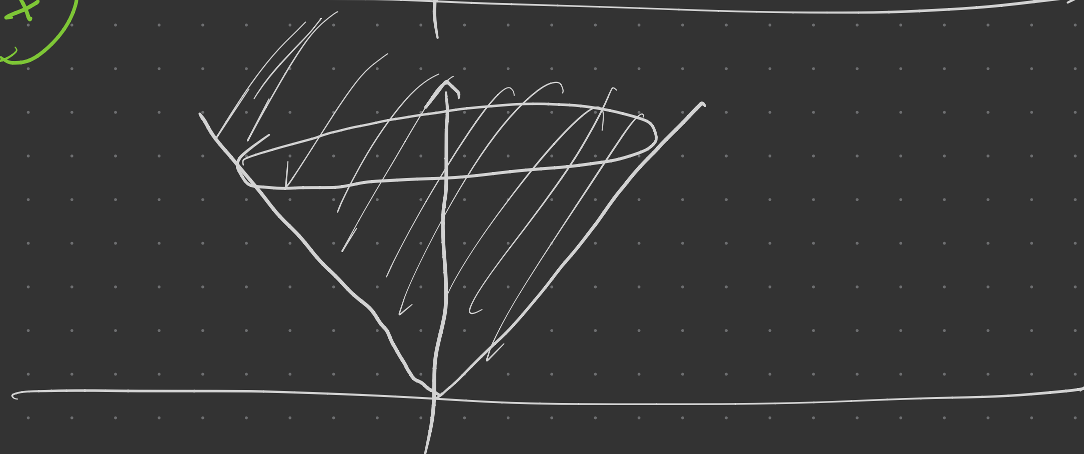
همه ترکیب مخروطی محدب داخل S باشد

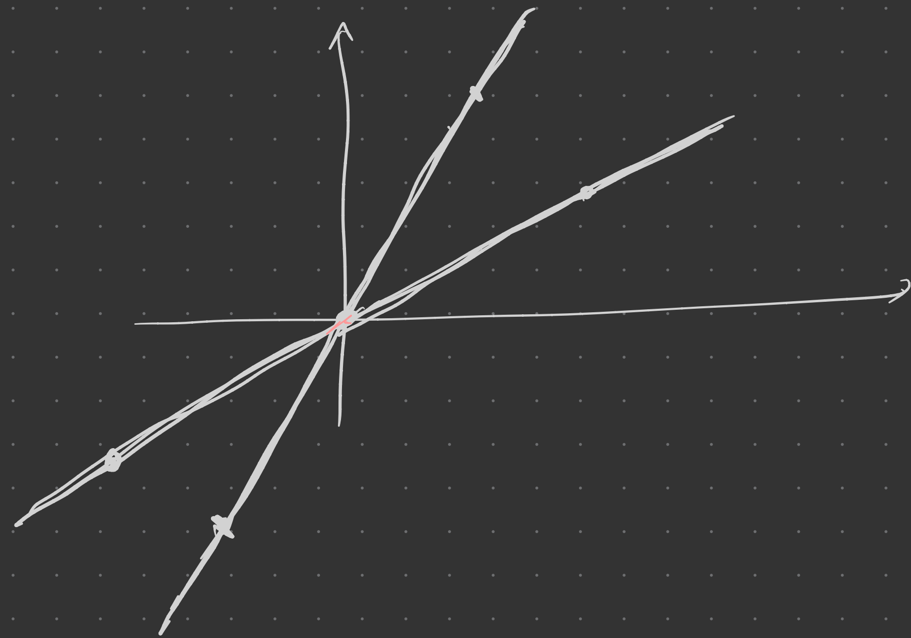
یا

$\alpha x + \beta y \in S$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$



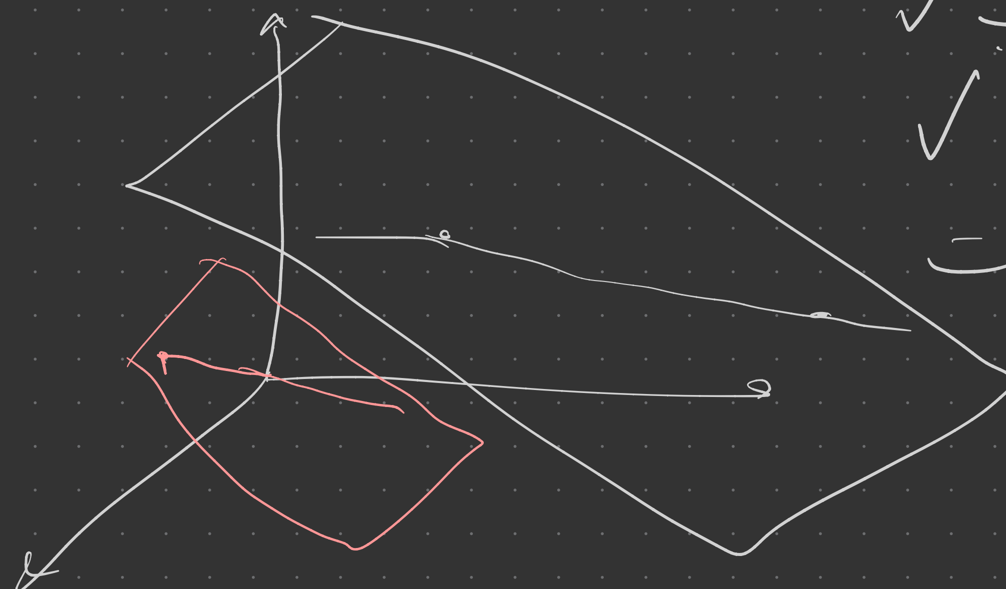




• **مثال ۱ :**

$$S = \{ x : Ax = b \}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$; $x \in \mathbb{R}^{n}$; $b \in \mathbb{R}^{n}$



محدب ✓

آفین ✓

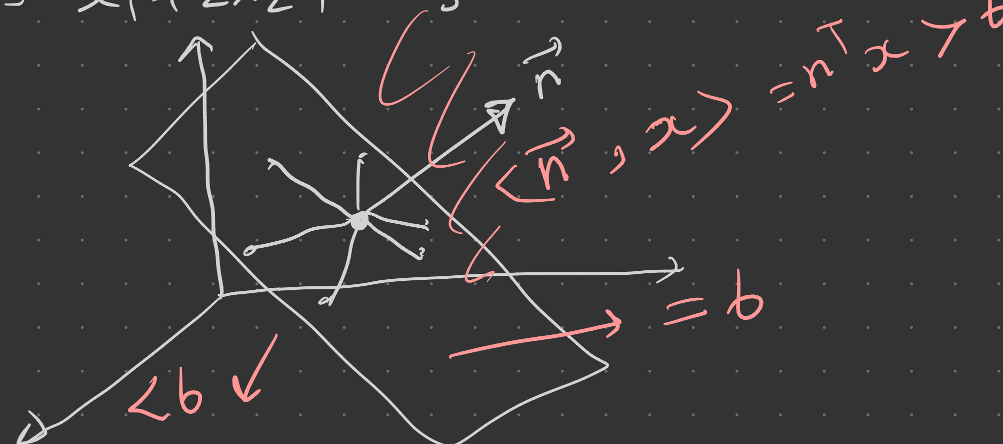
مخروط هست

اگر $b=0$

$$\{ x : \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = n^T x \geq b \}$$

$$\vec{n} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$

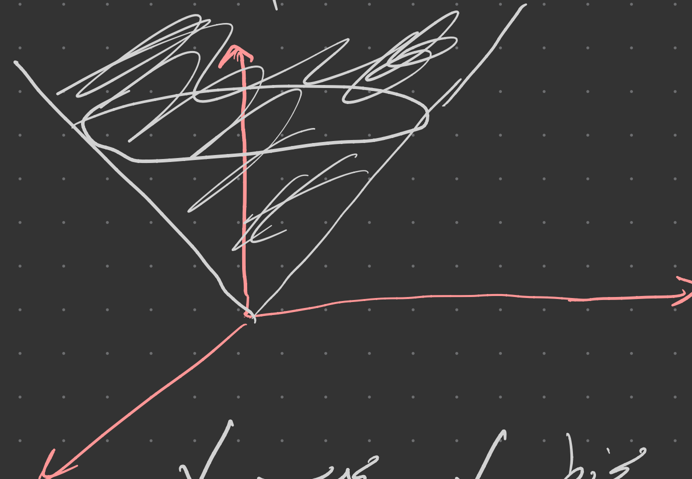


$$\vec{n} \cdot \vec{x} = b$$

ابرصفحه:

که $\vec{n}$ درحقیقت بردار عمود بر ابرصفحه است.

• یک مجموعه $\left\{ (x, t) : \begin{matrix} x \in \mathbb{R}^2 \\ t \in \mathbb{R}_+ \end{matrix} \; ; \; \|x\| \le t \right\}$



• ابرصفحه X   مخروط ✓   محدب ✓

$$\left\{ (x, t) : \; x \in \mathbb{R}^m ; \; t \in \mathbb{R}_+ \; , \; \|x\| \le t \right\}$$

(x_0, t_0)

(x_1, t_1) : $\alpha \begin{bmatrix} x_0 \\ t_0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \overset{?}{\in} S$

$\forall \alpha, \beta \geq 0$

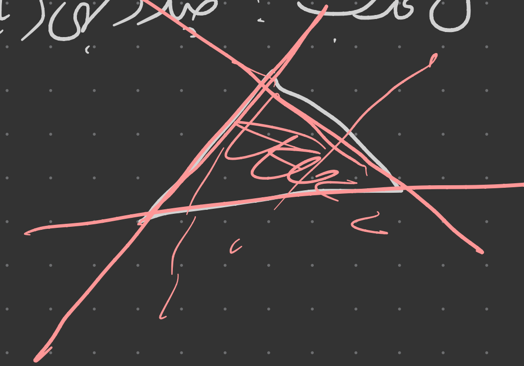
$$\|\alpha x_0 + \beta x_1\| \le \alpha t_0 + \beta t_1$$

$$\le \alpha \|x_0\| + \beta \|x_1\| \le \alpha t_0 + \beta t_1 \checkmark$$

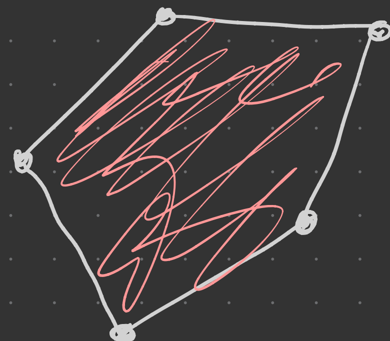
تعریف نرم : $\|\ \|$ نرم است (هر بردار (

- $\|\vec{x}\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
- $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلث)
- $\|cx\| = |c|\,\|x\|$;

• شکل محدب : چندوجهی (یا چندضلعی)



(یک مجموعه محدب)



$$S = \left\{ x : \begin{array}{l} n_1^T x \geq b_1 \\ n_2^T x \geq b_2 \\ n_3^T x \geq b_3 \\ \vdots \\ n_m^T x \geq b_m \\ n_6^T x = d_6 \\ n_7^T x = d_7 \end{array} \right\}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \overline{\quad n_1^T \quad} \\ \overline{\quad n_2^T \quad} \\ \vdots \\ \overline{\quad n_m^T \quad} \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad C\vec{x} \geq \vec{b}$$

$$D x = d$$

• هر اشتراکی از مجموعه های محدب ، یک مجموعه محدب است !

$S_1, S_2, \ldots, S_m$

$T = \bigcap S_i \quad ; \qquad x, y \in T$

x, y داخل همه S_i ها است .

• هر اشتراکی از مجموعه های سطح آفین ( ) ، یک مجموعه سطح است :

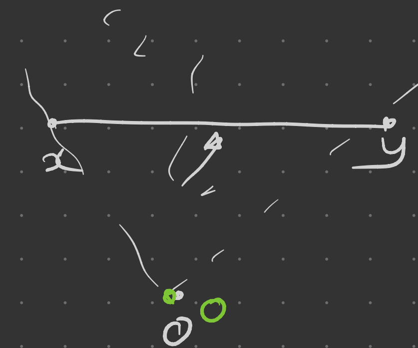
• ـــــــ مخروط محدب ، یک مخروط محدب است .

بسم الله

- عملیات حفظ کننده تحدب

- صفحه پشتیبان

• ترکیبِ محدب ، سطح ، مخروطیِ چندنقطه .



• ترکیبِ سطح ~~[illegible]~~ : $(x_1, \dots, x_n)$

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

تعریف:

$$y = \sum \alpha_i x_i$$

سطح: $\sum \alpha_i = 1 \quad ; \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$

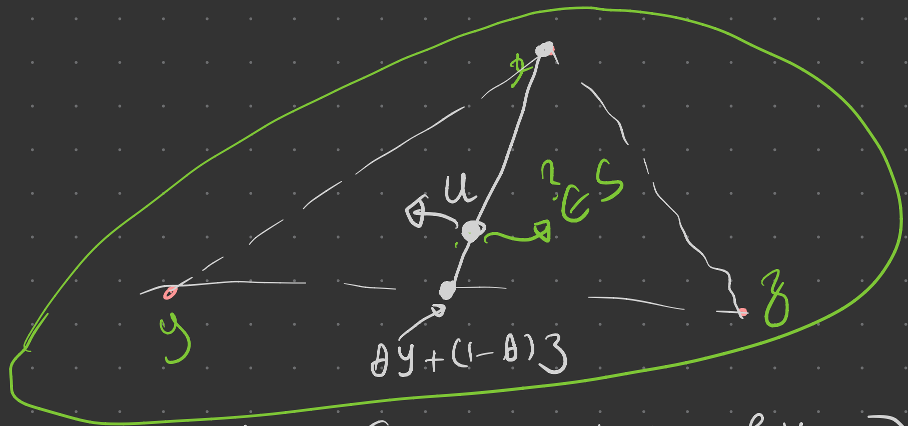
محدب: $\sum \alpha_i = 1 \quad ; \quad \alpha_i \geq 0$

مخروطی محدب (مخروطی): $\alpha_i \geq 0$

خطی: هیچ شرطی روی α_i ها نداریم.

<u>نکته دوم</u>: اگر یک شکل سطح، محدب یا مخروطی محدب باشد آنگاه برای هر ها $x_1, \ldots, x_n$ همه ترکیب‌های سطح یا محدب یا مخروطی داخل آن شکل قرار می‌گیرد.

مثال : ۳ نقطه محدب بودن



$x, y, z \in S$ → محدب

$\alpha x + \beta y + \gamma z \in S$

$\alpha + \beta + \gamma = 1$

$u = \theta' x + (1-\theta')\left(\theta y + (1-\theta) z\right)$

$= \theta' x + \theta(1-\theta') y + (1-\theta')(1-\theta) z$

عملیات حفظ کننده تحدب

- اشتراک تحدب را حفظ می کند.
- انتقال: S یک شکل محدب:

$$S + \vec{v} = \{ \vec{x} + \vec{v} : \vec{x} \in S \}$$

S محدب باشد، $S+\vec{v}$ یک شکل محدب است.

- دوران یک شکل محدب، تحدب حفظ می کند.

ضرب در ماتریس یکانی (U

$$US = \{ Ux : x \in S \}$$

• تصویر تحت نگاشت خطی تحدب را حفظ می‌کند

$$\underset{\mathbb{R}^n \ni}{x} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^{m\times n}}{A}\,x + \underset{\mathbb{R}^m}{b} \quad ; \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f(x) = Ax + b$$

$$f(S) = \{ Ax + b : x \in S \}$$

S محدب

$\Downarrow$

f(S) محدب

$u, v \in f(S)$: $\quad u = Ax + b \quad x \in S$

$v = Ay + b \quad y \in S$

$\lambda x + \bar{\lambda} y \in S$; $\quad f(\lambda x + \bar{\lambda} y) \in f(S)$

$$= A(\lambda x + \bar{\lambda} y) + b$$

$$= \underline{\lambda Ax} + \bar{\lambda} Ay + \underline{\lambda b} + \bar{\lambda} b$$

$$= \lambda u + \bar{\lambda} v \in f(S) \checkmark$$

• معکوس نگاشت خطی تحدب را حفظ می‌کند

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$f^{-1}(S) = \{ u : f(u) \in S \} \quad , \quad \underbrace{S \subseteq \mathbb{R}^m}_{\text{فضای ثانویه}}$$

به زبان محاوره: نقاطی از فضای اولیه که به S در فضای ثانویه نگاشته می‌شوند

$f(x) = x^2 \quad ; \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$f([-1,1]) \overset{?}{=} [0,1]$

محدب ⟵ محدب

$f^{-1}([4,9]) = [-3,-2] \cup [2,3]$

غیرمحدب ⟵(معکوس)⟵ محدب

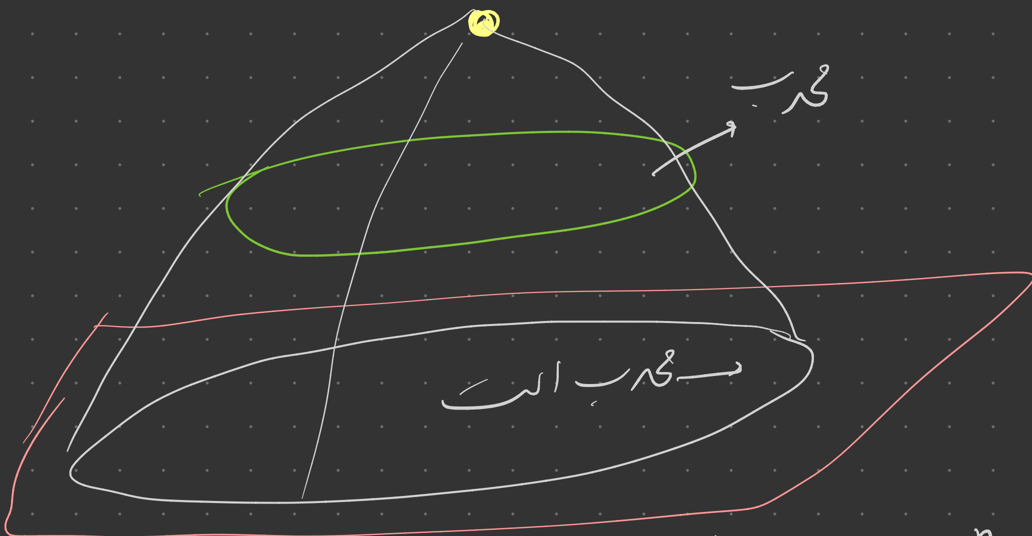
معکوس نگاشت خطی : $f(x) = Ax + b$

$$f^{-1}(S) = \{ x : Ax + b \in S \}$$

• گزاره : اگر S محدب باشد $\Leftarrow$ $f^{-1}(S)$ محدب است.

? وجود ندارد

نگاشت پرسپکتیو ، تحدب حفظ می‌کند



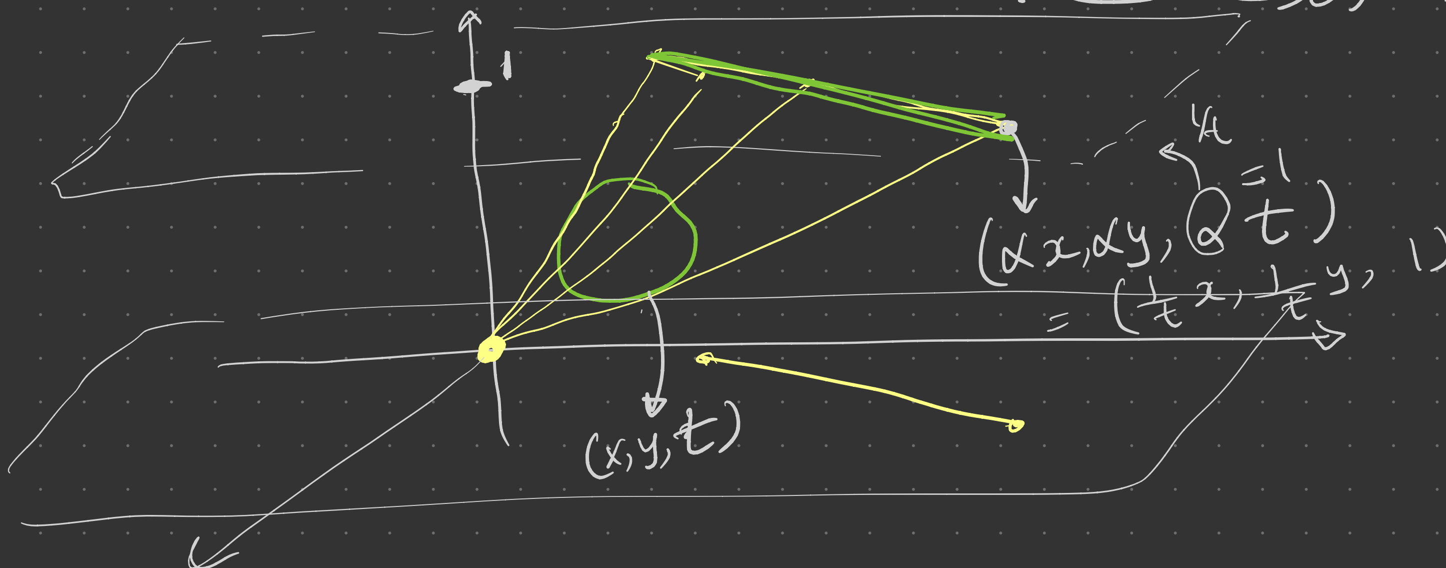
$$P : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n}$$

$$(\vec{x}, t) \longrightarrow \frac{\vec{x}}{t} \quad ; \quad \begin{array}{l} \vec{x} \in \mathbb{R}^{n} \\ t \in \mathbb{R}_{+} \end{array}$$

پرسپکتیو تحدب را حفظ می‌کند

S محدب ; $P(S) = \{ y : \exists (\vec{x}, t) : \frac{\vec{x}}{t} = y \}$

$P(S)$ محدب است.



$S \longrightarrow$ مخروط حاصل S $= \{ \lambda(\vec{x}, t) : \lambda \geq 0 \} = \mathrm{Cone}(S)$

$S = \{(\vec{x}, t)\}$

کار اول:

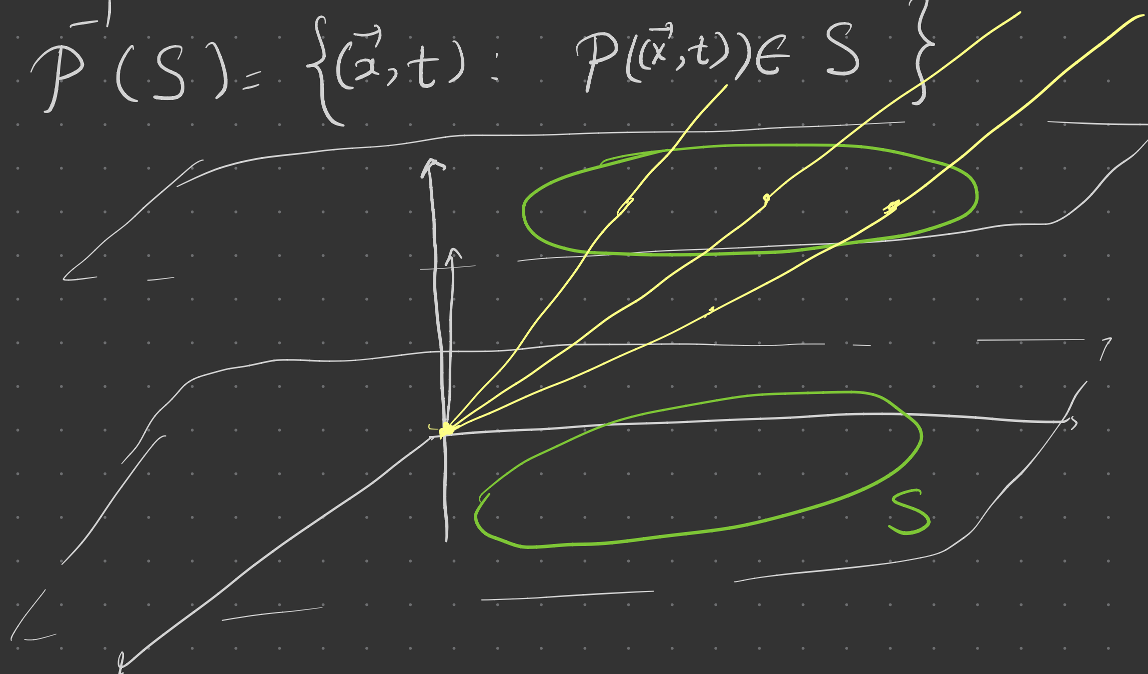
تمرین: اگر S محدب باشد، $\mathrm{Cone}(S)$ یک مخروط محدب است.

کار دوم: $\underbrace{\text{اشتراک}\ \mathrm{Cone}(S)}_{\text{محدب}}$ با $\underbrace{\text{صفحه}\ t=1}_{\text{محدب}}$ $\longrightarrow$ محدب

پرسپکتیو معکوس هم تحدب را حفظ می‌کند ($S \subseteq \mathbb{R}^n$)

$$P((\vec{x}, t)) = \frac{\vec{x}}{t} \quad ; \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$P^{-1}(S) = \{(\vec{x}, t) : P((\vec{x}, t)) \in S\}$$



بسم الله

- قضیه ابر صفحه پشتیبان.

- مخروط دوگان.

خواصی که مخروط دوگان دارد.

مثال : نگاشت کسری هم تحدب رو حفظ می‌کند

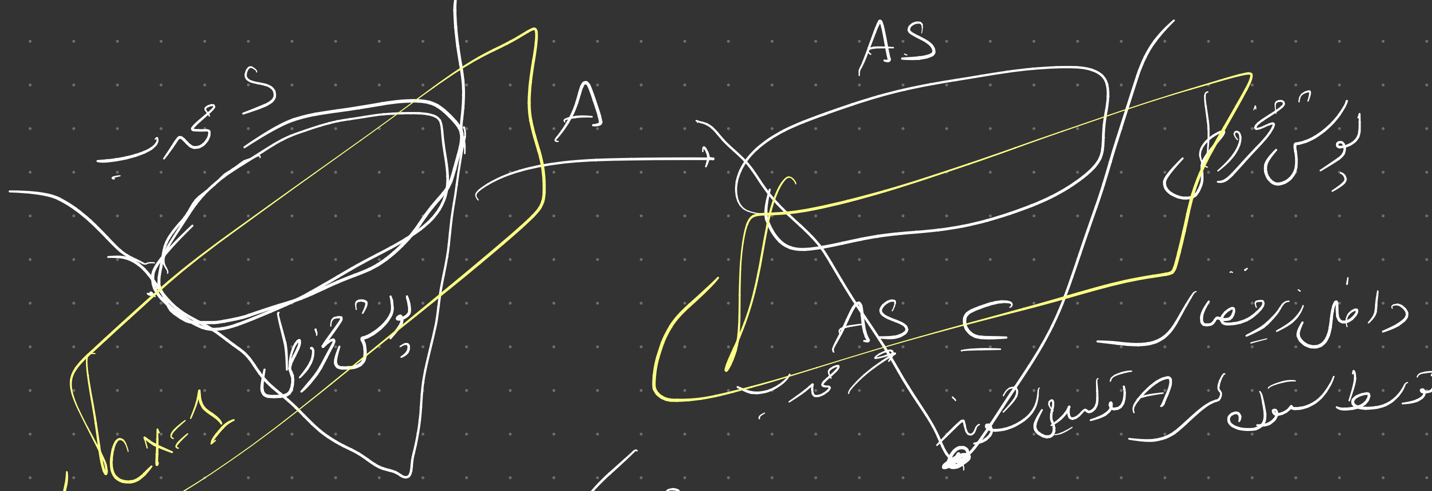
$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f(\vec{x}) = \frac{A\vec{x} + b}{c^T\vec{x} + d} \quad ; \quad \begin{array}{l} A \in \mathbb{R}^{m\times n} \\ b \in \mathbb{R}^m \\ d \in \mathbb{R} \\ c \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

دامنه f : $\left(x : \underline{c^T x + d > 0} \right)$

$$x \xrightarrow[\psi]{\text{نگاشت خطی}} \left(\underbrace{A\vec{x} + b}_{\mathbb{R}^m} , \underbrace{c^T x + d} \right) \xrightarrow[\varphi]{\text{پرسپکتیو}} \text{نگاشت کسری}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A \\ c^T \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} x + \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}}_{\tilde{b}}$$



اشتراک $\longrightarrow \{\langle c, x\rangle = 1\}$

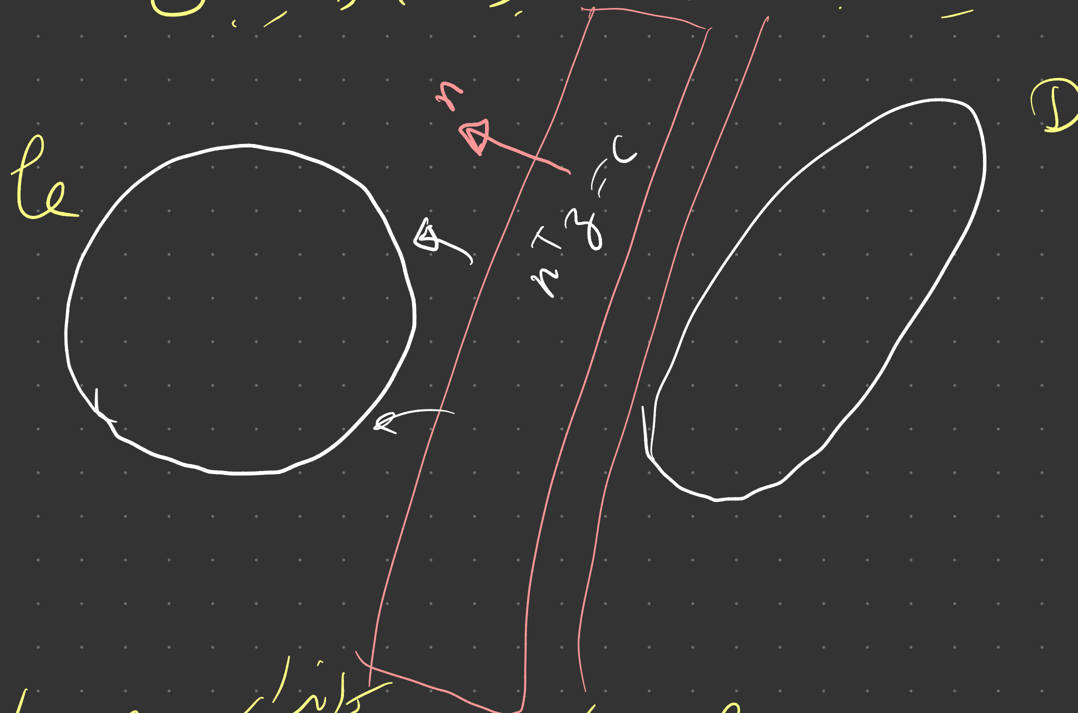
$$f = \varphi \circ \psi$$
$$f^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}$$

نکته:

محدب $\xrightarrow{\psi}$ محدب $\xrightarrow{\varphi}$ محدب

محدب $\xleftarrow{\psi^{-1}}$ محدب $\xleftarrow{\varphi^{-1}}$ محدب

قضیه جداسازی وابرصفحه پشتیبان



صورت غیررسمی: D و C دو شکل محدب و کرانه‌دار جدا از هم باشند ($C \cap D = \emptyset$)

یک ابرصفحه وجود دارد به طوری که D زیر ابرصفحه است و بالای ابرصفحه C

شکل ریاضی: یک بردار نرمال $\vec{n}$ و ابرصفحه متناظر با آن وجود دارد به طوری که

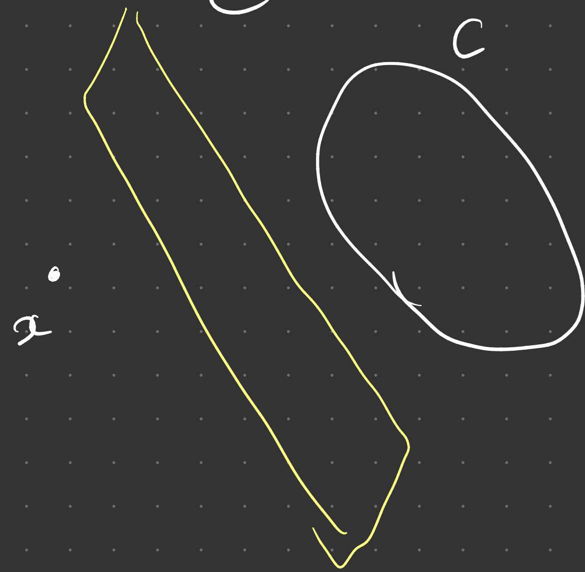
$$\forall \begin{array}{l} x \in C \\ y \in D \end{array} : \quad n^T x > c > n^T y$$

(ابرصفحه مورد نظر $\quad z \in \mathbb{R}^n \; ; \; n^T z = c$)

• فرض کنید ها یک شکل محدب در و x نقطه‌ای خارج از ها باشد

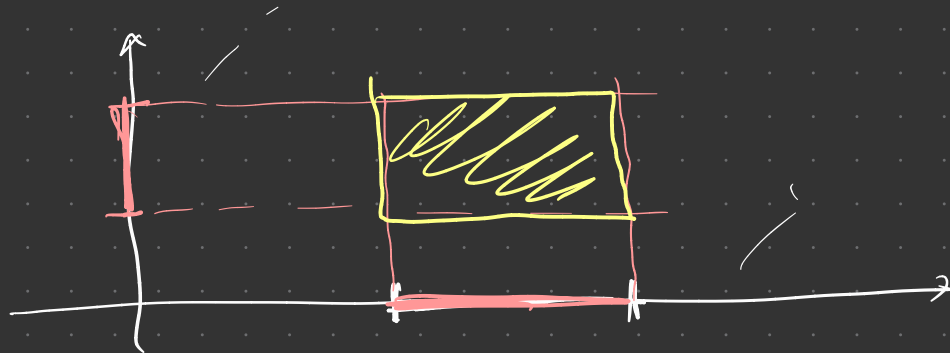
آن‌گاه یک ابرصفحه وجود دارد که

x از C جدا می‌کند



• قضیه جداسازی دو مجموعه از یک مجموعه‌ای :

$$E \pm F = \left\{ e \pm f : \begin{array}{l} e \in E \\ f \in F \end{array} \right\}$$



ادعا : E و F محدب $\Longleftarrow$ $E+F$ محدب

اثبات حالت کلی از روی حالت خاص:

$\mathcal{C} - \mathcal{D}$ محدب

$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \phi \implies 0 \notin \mathcal{C} - \mathcal{D}$

یک ابرصفحه وجود دارد به طوری ($n^T x = a$)

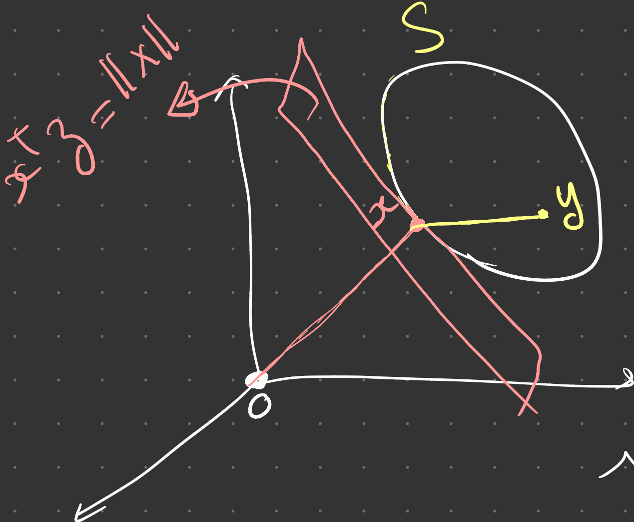
$0 < a = n^T x < \underset{(c-d)}{n^T y} \quad ; \quad \forall y \in \underline{\underline{\mathcal{C} - \mathcal{D}}}$

$n^T (c-d) > a > 0 \quad \forall \begin{matrix} c \in \mathcal{C} \\ d \in \mathcal{D} \end{matrix}$

$n^T c > n^T d + a$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\min \quad n^T c}_{= b_0} > \underbrace{\max \quad n^T d}_{b_1} + a$$

$$n^T x = \frac{b_0 + b_1 + a}{2}$$



قضیه فرعی (اثبات) :

(بدون کم شدن از کلیت $x = 0$)

فرض مسئله: $0 \notin bd(S)$

اثبات: فرض کنید x نزدیکترین نقطه به مبدأ باشد.

آنگاه: $\forall y \in S \quad x^T \cdot y \geq x^T x = \|x\|^2$

فرض کنید $y \in S$.

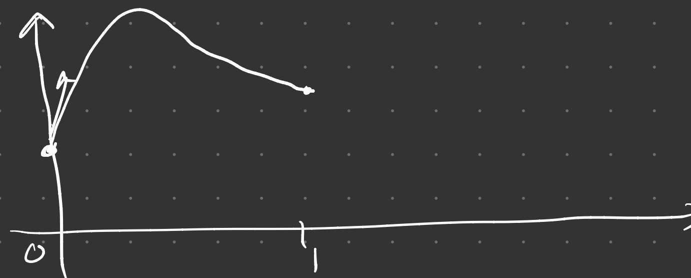
$$x_\lambda = (1-\lambda)x + \lambda y \in S \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

$$\|x_\lambda\|^2 \geq \|x\|^2$$

$$f(\lambda) = \|x_\lambda\|^2 = \|(1-\lambda)x + \lambda y\|^2 \qquad \lambda \in (0,1)$$

$$\|x\|^2 = f(0)$$

مسم آج



$$\longrightarrow \quad f'_+(0) \geqslant 0$$

$\longrightarrow$

$$\frac{d}{d\lambda} f(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \| (1-\lambda)x + \lambda y \|^2$$

$$= \frac{d}{d\lambda} \langle (1-\lambda)x + \lambda y , (1-\lambda)x + \lambda y \rangle$$

$$= \langle \frac{d}{d\lambda} (\qquad), (\qquad) \rangle$$

$$+ \langle (\qquad), \frac{d}{d\lambda} (\qquad) \rangle$$

$$= \langle y - x, \underline{(1-\lambda)}x + \lambda y \rangle + \langle \quad , y - x \rangle$$

$$= 2 \langle y - x , (1-\lambda)x + \lambda y \rangle \xrightarrow[\lambda=0]{} 2 \langle y-x, x \rangle$$

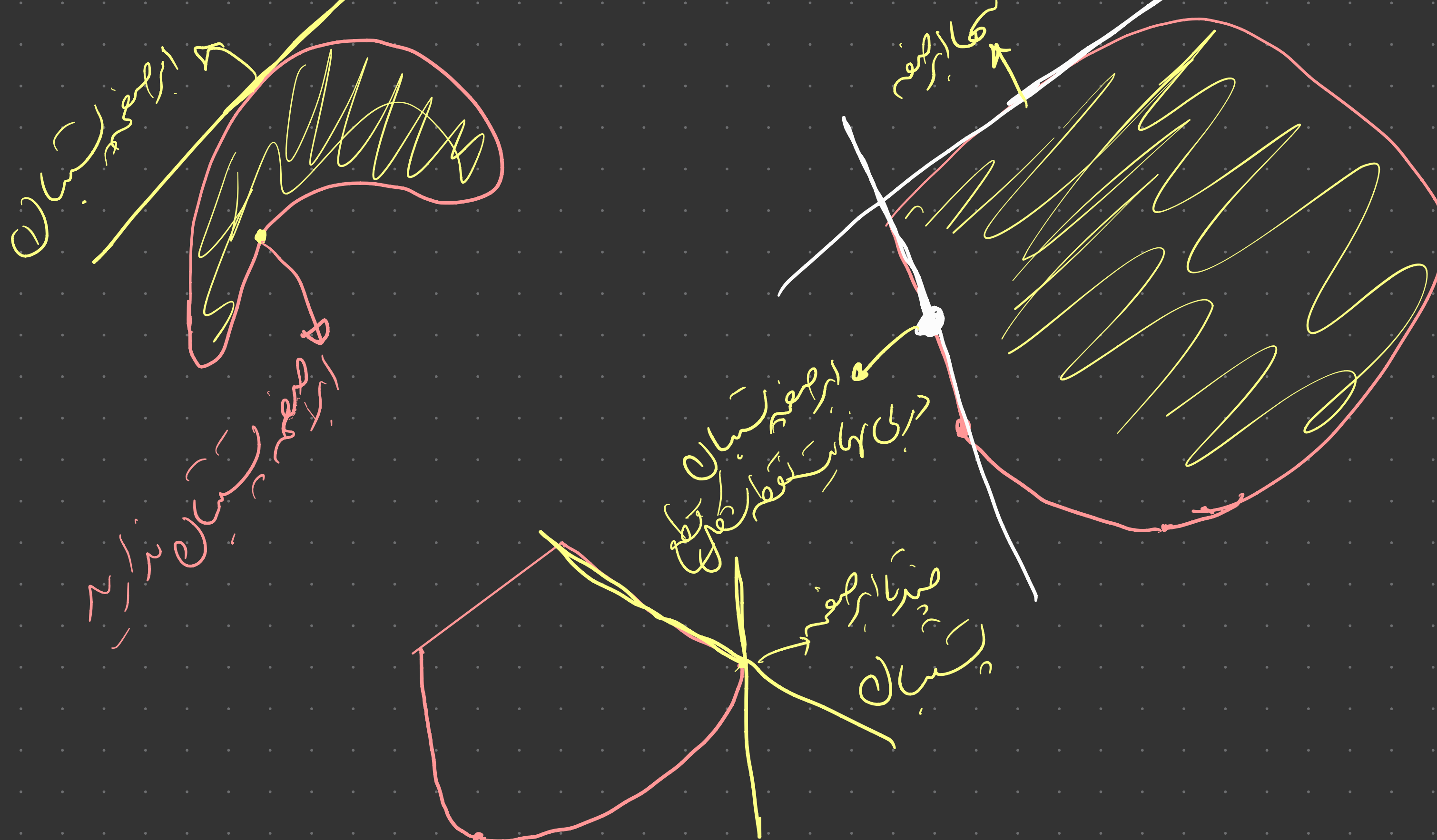
$$\geq 0$$

$$\langle y, x \rangle \geqslant \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

بسم ا--

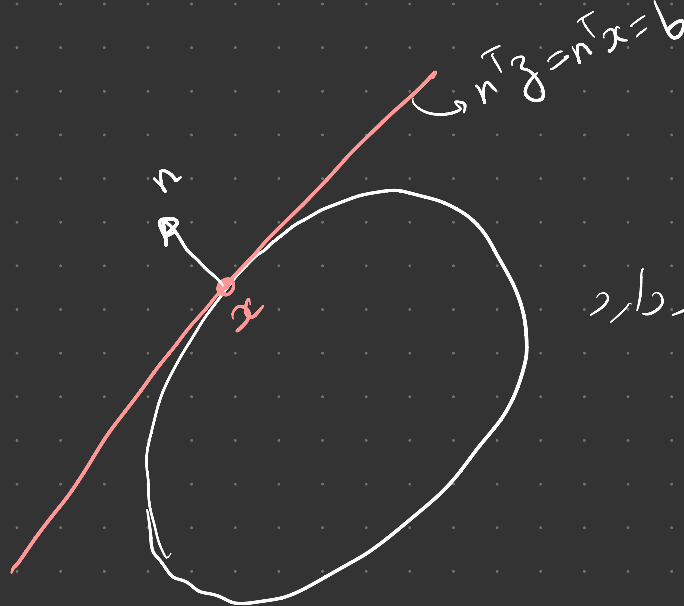
- قضیه ابرصفحه پشتیبان در محدب نرمال
- محدب دگان
- جبر خطی (مروری سریع بر مفاهیم مورد نیاز)

• ابرصفحه پشتیبان •



قضیه: برای هر شکل محدب $\mathcal{C}$ و هر نقطه روی مرز $x \in bd(\mathcal{C})$

حداقل یک ابرصفحه پشتیبان دارید.



معادل جبری: حداقل بردار n و اسکالر b وجود دارد

به طوری که

$$n^T x = b$$

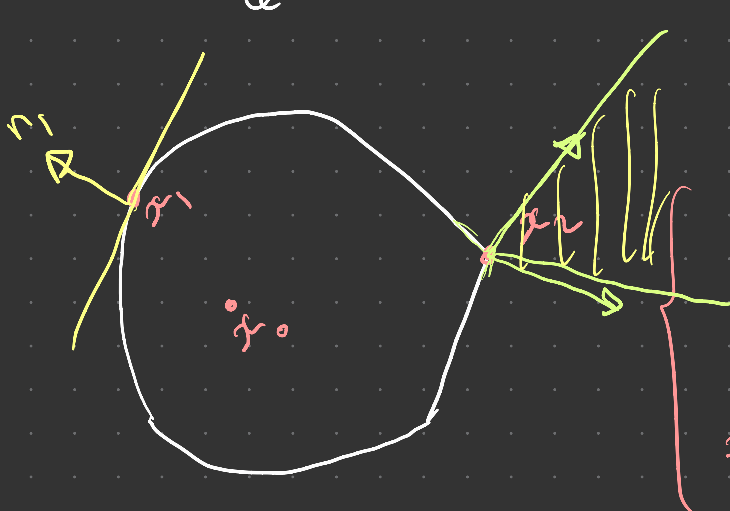
و $\forall y \in \mathcal{C} \quad n^T y < b \ (= n^T x)$

مخروط نرمال

. برای هر نقطه $x \in \mathcal{C}$ ( ) ؛ مخروط نرمال در نقطه x (برای x مرزی نیست)

$$N_{\mathcal{C}}(x) = \{ \vec{n} \; : \; n^T x \geq n^T y \; ; (\forall y \in \mathcal{C}) \}$$

✓ ضرب در ضریب مثبت



x_0 : تهی

x_1 : یک نیم خط

x_2 : مخروط

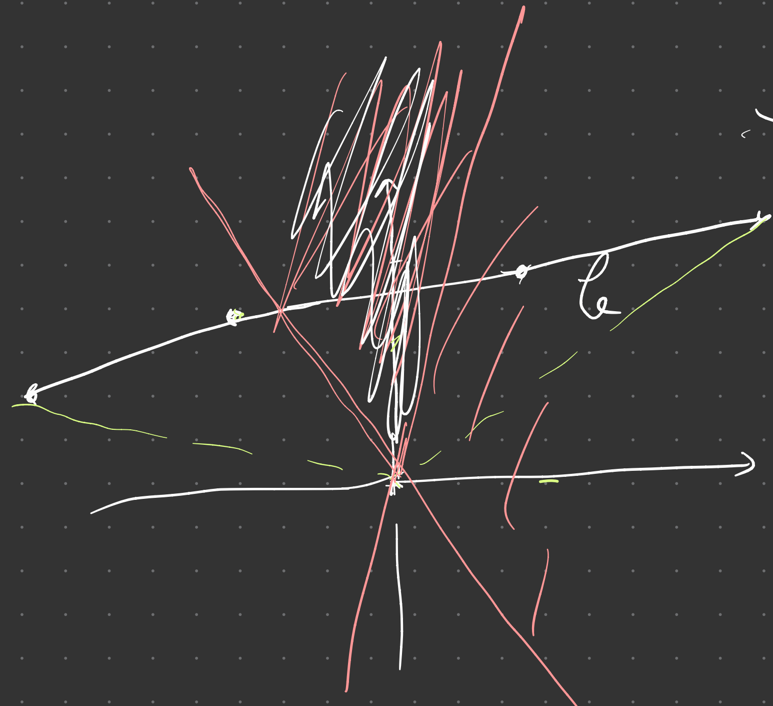
$n_1, n_2 \in N_C(X)$

$$n_1^T x \geq n_1^T y$$

$$n_2^T x \geq n_2^T y$$

$$\longrightarrow \quad \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2$$ درنامساوی تعریف مخروط نرمال صدق می کند

مخروط محدب $\longleftarrow$



مخروط دوگان

فرض کنید که یک مجموعه $\mathcal{C}$ به شما داده شده است

$$\mathcal{C}^* = \{ y : \underbrace{\langle y, x \rangle}_{x^T y} \geq 0 \ \ \forall x \in \mathcal{C} \}$$

$\mathcal{C}^*$ مخروط دوگان مجموعه $\mathcal{C}$ است.

(مخروط محدب ← تمرین ✓)

• قضیه: اگر $\mathcal{C}$ خود یک مخروط محدب و بسته باشد،

$$(\mathcal{C}^*)^* = \mathcal{C} \longrightarrow$$ کلمه دوگان

مخروط محدب