-1

الف)

$$\text{minimize} \quad x_1^T P_{11} x_1 + 2 x_1^T P_{12} x_2 + x_2^T P_{22} x_2$$

subject to

$$f_i(x_1) \leq 0$$

حال ابتدا نسبت به x_2 کمینه می‌کنیم:

$$\underset{x_2}{\text{minimize}} \quad x_1^T P_{11} x_1 + 2 x_1^T P_{12} x_2 + x_2^T P_{22} x_2$$

گرادیان $\Longrightarrow \quad 2 P_{12} x_1 = -2 P_{22} x_2 \Longrightarrow x_2 = -P_{22}^{-1} P_{12} x_1$

جایگذاری $\Longrightarrow$

$$\underset{x_1}{\text{minimize}} \quad x_1^T P_{11} x_1 + 2 x_1^T P_{12} (-P_{22}^{-1} P_{12}) x_1 + (-P_{22}^{-1} P_{12} x_1)^T P_{22} (-P_{22}^{-1} P_{12} x_1)$$

$$f_i(x_i) \leq 0$$

$$\Longrightarrow \underset{x_1}{\text{minimize}} \quad x_1^T (P_{11} - 2 P_{12} P_{22}^{-1} P_{12} + P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}) x_1$$

$$f_i(x_i) \leq 0$$

$$\longrightarrow \underset{x_1}{\text{minimize}} \quad x_1^T (P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}) x_1$$

$$f_i(x_i) \leq 0$$

الف) فرض کنید بردار $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ را تشکیل دهیم. حال ماتریس $[A \ \ -I]$ را در نظر بگیرید. مسئله را می‌توان اینگونه بازنویسی کرد:

$$\text{minimiz } f_0(y)$$
$$[A \ \ -I]\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = b$$

حال تابع لاگرانژ را حساب می‌کنیم:

$$L\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, \lambda, \nu\right) = f(y) + \begin{bmatrix}A^T\\-I\end{bmatrix}\nu$$

$$\Longrightarrow \max_{\nu} \min_{(x,y)} f(y) + \begin{bmatrix}A^T\\-I\end{bmatrix}\nu$$

پس تابع لاگرانژ برابر است: $L\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, \nu\right) = f(y) + \begin{bmatrix}A^T\\-I\end{bmatrix}\nu$

پس مسئله دوگان به صورت روبرو است:

$$\max_{\nu} \min_{(x,y)} f(y) + \begin{bmatrix}A^T\\-I\end{bmatrix}\nu$$

تابع دوگان نیز به صورت زیر است:

$$\sup_{(x,y)} \left\langle \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, z \right\rangle - f(y) = f^*(z)$$

ب)

داریم:

$$\begin{aligned} &\underset{(x, y_0)}{\text{minimize}} \quad f_0(y_0) \\ &\text{subject to} \\ &y_i = A_i x + b_i \\ &f_i(y_i) \le 0 \end{aligned} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & -I & & \\ A_2 & 0 & -I & \\ \vdots & & & \\ A_m & & & -I \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}}_{(x,y)} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{b}$$

حال تابع لاگرانژ را محاسبه می‌کنیم:

$$L((x,y), \lambda, v) = f_0(y) + \sum_i \lambda_i f_i(y_i) + v^T\left(A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - b\right)$$

مسئله دوگان نیز به صورت زیر است:

$$\max_{\substack{\lambda \ge 0 \\ v}} \ \min_{(x,y)} \ f_0(y) + \sum_i \lambda_i f_i(y_i) + v^T(Ax - b)$$

تابع مزدوج نیز به صورت زیر است:

$$f_0^*(z) = \sup_{(x,y)} \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, z \right\rangle - f_0(y)$$

ج)

minimize $f_0(x) = \sum_i f_i(x_i)$

تابع لاگرانژ به صورت زیر است:

$$L(x, v) = \sum_i f_i(x_i) + v^T(a^T x - b)$$

مسئله دوگان:

$$\max_{v} \min_{x} \sum_i f_i(x_i) + v^T(ax - b)$$

تابع دوگان:

$$f^*(y) = \sup_x \langle y, x \rangle - \sum_i f_i(x_i)$$

د)

minimze $c^T x$

$Ax = b$

$x - u \le 0$

$-x + l \le 0$

ابتدا تابع لاگرانژ را حساب می‌کنیم:

$$\Rightarrow L(x, \lambda, v) = c^T x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - u_i) + \sum_{j=n+1}^{2n} \lambda_j (-x_{j-n} + l_{j-n})$$

$$+ v^T(Ax - b)$$

پس مسئله دوگان به صورت زیر است:

$$\max_{\substack{v \\ \lambda \ge 0}} \min_{x} c^T x + \sum_i \lambda_i (x_i - u_i) + \sum_{j=n+1}^{2n} \lambda_j (-x_{j-n} + l_{j-n})$$

maximize xy

$x+y^2-2\leq 0$

$-x\leq 0$

$-y\leq 0$

$\Longrightarrow L\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix}\right)=xy+\lambda_1 x+\lambda_2 y-\lambda_3(x+y^2-2)$

$\Longrightarrow \nabla_x L=0 \Longrightarrow y+\lambda_1-\lambda_3=0$

$\nabla_y L=0 \Longrightarrow x+\lambda_2-2\lambda_3 y=0$

$\lambda_1 x=0 \quad \lambda_3(x+y^2-2)=0$

$\lambda_2 y=0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y=\lambda_3 \\ x=2\lambda_3^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{\frac{2}{3}} \\ x=\frac{4}{3} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ maximize $xy=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$y^2+x^2-2\leq 0$

$-x\leq 0 \quad -y\leq 0$