Assignment NO.1 Solutions

NLP | Fall 1401 | Dr.Minayi

Teacher Assistant:

Farbod Davoodi

Student name : **Amin Fathi**

Student id : **400722102**

Problem 1

به ترتیب مرتب می کنیم.

400722102

0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 4, 7

بنابر این **میانه** که داده وسط است همان 2 است.

میانگین:

(0 + 0 + 0 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 7) / 9

= 18/9 = 2

واریانس:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (xi - \bar{x})^2}{N}$$

$$\frac{(4-2)^2 + (0-2)^2 + (0-2)^2 + (7-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2 + (0-2)^2 + (2-2)^2}{9}$$

$$= \frac{4+4+4+25+0+0+1+4+0}{9} = 4.6$$

کوواریانس

کوواریانس، یکی از شاخص‌های مهم وابستگی است که ارتباط بین دو متغیر را به وسیله‌ی پراکندگی‌هایشان نسبت به میانگین نشان می‌دهد. برای محاسبه‌ی کواریانس نیاز به دو مجموعه داده داریم تا بتوانیم ارتباط بین آن‌ها را بیابیم و چون فقط یک مجموعه داده داریم نمیتوانیم کواریانس حساب کنیم.

Problem2

بر اساس قانون زیر، ۶۸٪ در محدوده‌ی یک انحراف معیار، ۹۵٪ در محدوده‌ی دوبرابر انحراف معیار و ۹۹.۷٪ از مقادیر در محدوده‌ی سه برابر انحراف معیار قرار دارند.

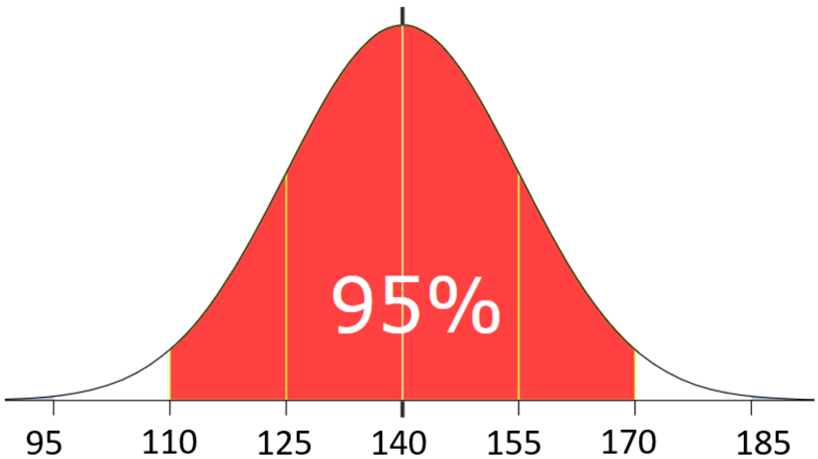
Empirical Rule or 68-95-99.7% Rule

In any normal distribution with mean μ and standard deviation σ :

- Approximately 68% of the data fall within one standard deviation of the mean.
- Approximately 95% of the data fall within two standard deviations of the mean.
- Approximately 99.7% of the data fall within three standard deviations of the mean.

(110 + 170)/2 = 140

(170 – 110)/4 = 15



Problem3

میانگین برای x :

(1 + 2) /2 = 1.5

میانگین برای y :

(1 + 2 + 3) /3 = 2

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\sigma_{XY}=\sum_{(x,y)\in S} f(x,y)(x-\mu_X)(y-\mu_Y)$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{3}{2}\right)(1-2)+\left(\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{3}{2}\right)(2-2)+(0)\left(1-\frac{3}{2}\right)(3-2)+(0)\left(2-\frac{3}{2}\right)(1-2)+\left(\frac{1}{4}\right)\left(2-\frac{3}{2}\right)(2-2)+\left(\frac{1}{4}\right)\left(2-\frac{3}{2}\right)(3-2)=\frac{1}{4}$$

Problem4

الف

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B|A)$$

$$P(A) * P(B|A) = P(A) * \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(A \cap B)$$

ب

اگر دو مجموعه مستقل باشند، رابطه درست است.

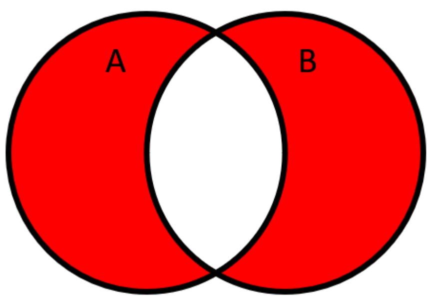
$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

ج

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

رابطه بدست آوردن تعداد عناصر اجتماع دو مجموعه



د

$$P(A \cap B) = \frac{P(A|B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = P(A \cap B) * P(B) \neq \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

بنابراین رابطه نادرست است.

ه

$$\frac{P(A|B)}{P(B|A)} = \frac{P(B)}{P(A)}$$

$$\frac{P(A|B)}{P(B|A)} = \frac{\frac{P(A \cap B)}{P(B)}}{\frac{P(B \cap A)}{P(A)}} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

بنابراین رابطه نادرست است.

Problem5

E = دیر رسیدن به دانشگاه

A = مسیر اول

B = مسیر دوم

C = مسیر سوم

طبق صورت سوال، باید p(B|E) را به دست آوریم.

$$p(B|E) = \frac{p(B \cap E)}{p(E)} = \frac{p(E|B)p(B)}{p(E|B)p(B) + p(E|A)p(A) + p(E|C)p(C)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} * \frac{3}{10}}{\frac{1}{3} * \frac{3}{10} + \frac{1}{2} * \frac{2}{10} + \frac{1}{6} * \frac{5}{10}} = 0.35$$

Problem6

A = احتمال انتخاب سکه سالم

B = احتمال انتخاب سکه تقلبی

C = احتمال شیر بودن پرتاب دوم

$\frac{1}{2}$ = احتمال انتخاب سکه

$$p(C|A) = \frac{1}{2}$$

$$p(C|{\sim}A) = 1$$

$$P(A|C) = \frac{p(C|A)p(A)}{p(C|A)p(A) + p(C|{\sim}A)p({\sim}A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Problem7

- اسکالر: عنصر نرده‌ای که از طریق آن فضای برداری تعریف می‌شود. اسکالرها مقادیری هستند که توسط یک اندازه قابل توصیف بوده و در جبرخطی، اعداد حقیقی را اسکالر می‌نامند.
- بردار: کمیت‌های که با استفاده از اندازه و جهت بیان می‌شوند را بردار می‌نامیم. بردار توسط چند اسکالر تعریف می‌شود.
- ماتریس: به آرایش مستطیلی شکل از اعداد یا عبارات ریاضی به‌صورت سطر و ستون شکل یافته، بردار گفته می‌شود. هر سطر یا ستون ماتریس یک بردار است.
- تنسور: یک شئ جبری است که رابطه چندخطی بین مجموعه‌ها و اشیای جبری یک فضای برداری را توصیف می‌کند. تنسور توسط یک یا چند شاخص که بیانگر مرتبه‌ی آن است، توصیف می‌شود. تنسور به مرتبه‌ی n در فضای m بعدی، n شاخص و m^n مولفه دارد و از قواعد تبدیل معینی تبعیت می‌کند.

اسکالرها پایه‌ی عملیات یادگیری ماشین و یادگیری عمیق هستند. این اسکالرها با قرار گرفتن در کنارهم، بردارها را می‌سازند و بردارها در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند و ماتریس‌ها را تشکیل می‌دهند. تنسور نیز به عنوان یک ماتریس تعمیم یافته استفاده می‌شود. به عبارتی تنسور می‌تواند یک ماتریس یک بعدی، سه بعدی و ... باشد.

Problem8

شماره دانشجویی : 400722102

نرم 0:

نرم صفر = تعداد عناصر غیر صفر = 6

نرم 1:

$$||x||_1 = \sum_i |x_i|$$

|4+0+0+7+2+2+1+0+2| = 18

نرم 2:

$$||x||_2 = (\sum_i x_i^2)^{1/2} \Leftrightarrow \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

$$\sqrt[2]{((4^2) + (0^2) + (0^2) + (7^2) + (2^2) + (2^2) + (1^2) + (0^2) + (2^2))} = \sqrt[2]{78}$$

ب

فاصله همینگ

400722102 = 0100 0000 0000 0111 0010 0010 0001 0000 0010

400722221 = 0100 0000 0000 0111 0010 0010 0010 0010 0001

فاصله همینگ = 5

فاصله اقلیدسی

$$D_{euc} = (\sum_{i=1}^{p} (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[2]{\sum((4-4)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2 + (7-7)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2 + (0-2)^2 + (2-1)^2)} = \sqrt[2]{6}$$

فاصله منهتن

$$\sum|(4-4)| + |(0-0)| + |(0-0)| + |(7-7)| + |2-2| + |2-2| + |1-2| + |0-2| + |2-1| = 4$$

فاصله مینکوفسکی

$$D_{mink}(A, B; d) = (\sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i|^d)^{\frac{1}{d}}$$

اگر مقدار d برابر با ۲ باشد، فاصله مینکوفسکی به فاصله اقلیدسی تبدیل می‌شود. همینطور با انتخاب d = 1 این فاصله همان فاصله منهتن خواهد بود.

$$\sqrt[3]{\sum((4-4)^3 + (0-0)^3 + (0-0)^3 + (7-7)^3 + (2-2)^3 + (2-2)^3 + (1-2)^3 + (0-2)^3 + (2-1)^3)} = \sqrt[3]{10}$$

Problem9

الف. نادرست

این رابطه تنها درصورت برابری دو ماتریس A و B برقرار است و ضرب ماتریس می‌تواند خاصیت جابجایی داشته باشد.

ب. درست

خاصیت توزیع‌پذیری

ج.درست

خاصیت توزیع‌پذیری

د.نادرست

حالت درست: $B^TA^T = (AB)^T$

Proposition. Suppose A and B are matrices which are compatible for multiplication. Then

$$(AB)^T = B^TA^T.$$

Proof. I'll derive this using the matrix multiplication formula.

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}.$$

Let $(A^T)_{ij}$ denote the $(i,j)^{\text{th}}$ entry of A^T , and likewise for B and AB . Then

$$[(AB)^T]_{ji} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(A^T)_{ki}(B^T)_{jk} = \sum_{k=1}^{n}(B^T)_{jk}(A^T)_{ki}.$$

The product on the right is the $(j,i)^{\text{th}}$ entry of B^TA^T , while $[(AB)^T]_{ji}$ is the $(j,i)^{\text{th}}$ entry of $(AB)^T$. Therefore, $(AB)^T = B^TA^T$, since their corresponding entries are equal.

ه.درست

ترانهاده‌ی ترانهاده یک ماتریس همواره با خودش برابر است.

(i,j)-entry of A^T is the (j,i)-entry of A, so the (i,j)-entry of $(A^T)^T$ is the (j,i)-entry of A^T, which is the (i,j)-entry of A. Thus all entries of $(A^T)^T$ coincide with the corresponding entries of A,

و. درست

این رابطه در صورتی که ماتریس A و B مربع و معکوس‌پذیر باشند، درست است.

ز. درست

همواره این یک رابطه درست است.

ح. نادرست

حالت درست این رابطه برابر است با: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Theorem 1.7 (Reversal Law for Inverses)

If A and B are non-singular matrices of the same order, then the product AB is also non-singular and $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Proof

Assume that A and B are non-singular matrices of same order n. Then,$|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$, both A^{-1} and B^{-1} exist and they are of order n. The products AB and $B^{-1}A^{-1}$ can be found and they are also of order n. Using the product rule for determinants, we get $|AB| = |A||B| \neq 0$. So, AB is non-singular and

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$;

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = (B^{-1}(A^{-1}A))B = (B^{-1}I_n)B = B^{-1}B = I_n$.

Hence $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

ط. درست

$$\mathrm{Det}((AB)^T) = \det(AB) = \det(B^TA^T) = \det(B^T)\det(A^T) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$$

اثبات در لینک زیر

https://www.proofwiki.org/wiki/Determinant_of_Matrix_Product