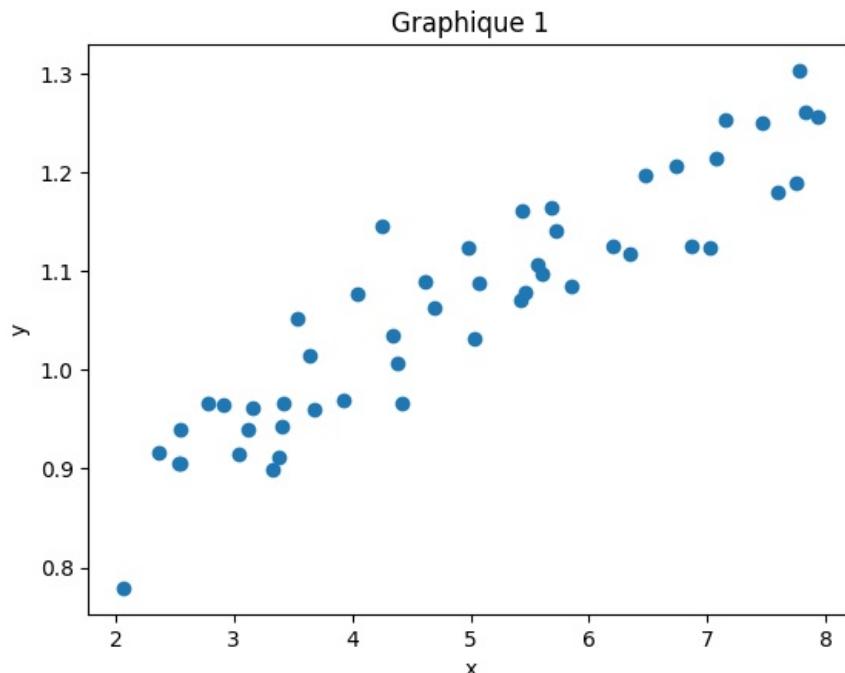


Exercice 1

Chargement des données + affichage du nuage de points (x,y):

```
In [1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Question 1
x = np.loadtxt('ex1dat/ex1x.dat')
y = np.loadtxt('ex1dat/ex1y.dat')
# Question 2
plt.scatter(x,y)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Graphique 1')
plt.show()
```



3. Définition de la fonction hypothèse :

```
In [2]: theta = [0,1]
def h(x,theta):
    return theta[0] + theta[1] * x
```

4. Définition de la fonction coût :

```
In [3]: from numpy import square

m = len(x)
print('Nombre de valeurs m =',m)

def J(theta):
    result = 0
    # on définit l'écart entre 2 valeurs et en faire la somme
    for i in range(m):
        result += (h(x[i],theta)-y[i])**2
    result = (1/(2*m))*result

    return result
```

Nombre de valeurs m = 50

5. On définit une fonction qui effectue une itération et qui va renvoyer θ_0^{*} et θ_1^{*} à partir de θ_0 et θ_1 en utilisant la descente de gradient :

```
In [4]: def gradient_descent(alpha=0.07):
    # On commence avec pour valeurs initiales de theta_1 et theta_0 = 0
    theta = np.array([0.0, 0.0])

    # On calcule la nouvelle valeur de gradient
    somme_ecart_1 = np.sum((h(x, theta) - y))
    somme_ecart_2 = np.sum((h(x, theta) - y) * x)

    theta_new = np.array([
        theta[0] - alpha * (1/m) * somme_ecart_1,
        theta[1] - alpha * (1/m) * somme_ecart_2
    ])

    return theta_new

# Utilisation
theta_optimal = gradient_descent(alpha=0.07)
print("Paramètres optimaux : ", theta_optimal)
```

Paramètres optimaux : [0.07452802 0.38002167]

6. On fait maintenant tourner la méthode sur quelques itérations (ici on choisit 5 itérations par défaut) ensuite on représente la droite de l'expression : $y = \theta_0 + \theta_1 \cdot x$ sur le nuage de points

```
In [5]: def gradient_descent(num_iterations=5):
    alpha = 0.07 # Coefficient d'apprentissage qui nous permet de régler la profondeur de la descente
    # Initialisation
    theta = np.array([0.0, 0.0])

    for i in range(num_iterations):
        somme_ecart_1 = np.sum((h(x, theta) - y))
        somme_ecart_2 = np.sum((h(x, theta) - y) * x)

        # Mise à jour simultanée des paramètres
        theta_new = np.array([
            theta[0] - alpha * (1/m) * somme_ecart_1,
            theta[1] - alpha * (1/m) * somme_ecart_2
        ])

        theta = theta_new

    return theta

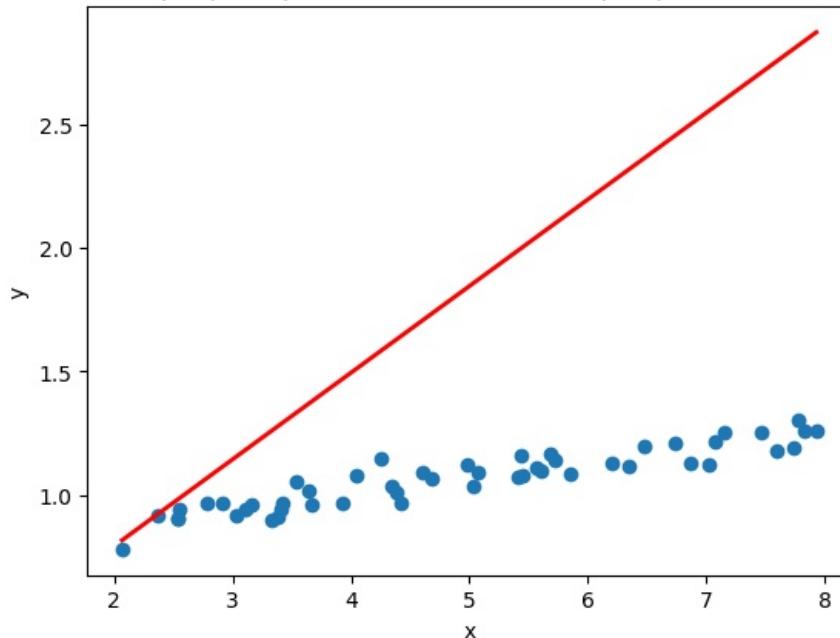
# Utilisation
theta_optimal = gradient_descent()
print("Paramètres optimaux : ", theta_optimal)
```

Paramètres optimaux : [0.09040987 0.35100519]

```
In [6]: y_pred = h(x, theta_optimal)

plt.scatter(x,y)
plt.plot(x,y_pred,color='red', linewidth=2)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Graphique représentant la droite sur quelque itérations')
plt.show()
```

Graphique représentant la droite sur quelque itérations



7. Faire tourner la méthode en définissant un **critère d'arrêt du processus itératif** pour convergé vers la solution recherchée.

Voici comment s'exprime le critère de d'arrêt :

$$\left| \frac{J(\theta^*) - J(\theta)}{J(\theta)} \right| < 10^{-3}$$

```
In [7]: def gradient_descent(num_iterations=1000):
    alpha = 0.07 # Coefficient d'apprentissage qui nous permet de régler la profondeur de la descente
    # Initialisation
    theta = np.array([0.0, 0.0])

    for i in range(num_iterations):
        somme_ecart_1 = np.sum((h(x, theta) - y))
        somme_ecart_2 = np.sum((h(x, theta) - y) * x)

        # Mise à jour simultanée des paramètres
        theta_new = np.array([
            theta[0] - alpha * (1/m) * somme_ecart_1,
            theta[1] - alpha * (1/m) * somme_ecart_2
        ])

        # Condition pour éviter la division par 0 dès la première itération
        if J(theta) > 0 :
            # Critère d'arrêt
            op = (J(theta_new)-J(theta))/J(theta)
            norm_op = abs(op)
            if norm_op < 10**-3 :
                print("Critère d'arrêt vérifié !")
                print("Valeur optimal des paramètres : ",theta_new)
                break

        theta = theta_new

    return theta

# Utilisation
theta_optimal = gradient_descent()
```

Critère d'arrêt vérifié !
 Valeur optimal des paramètres : [0.71385319 0.07048728]

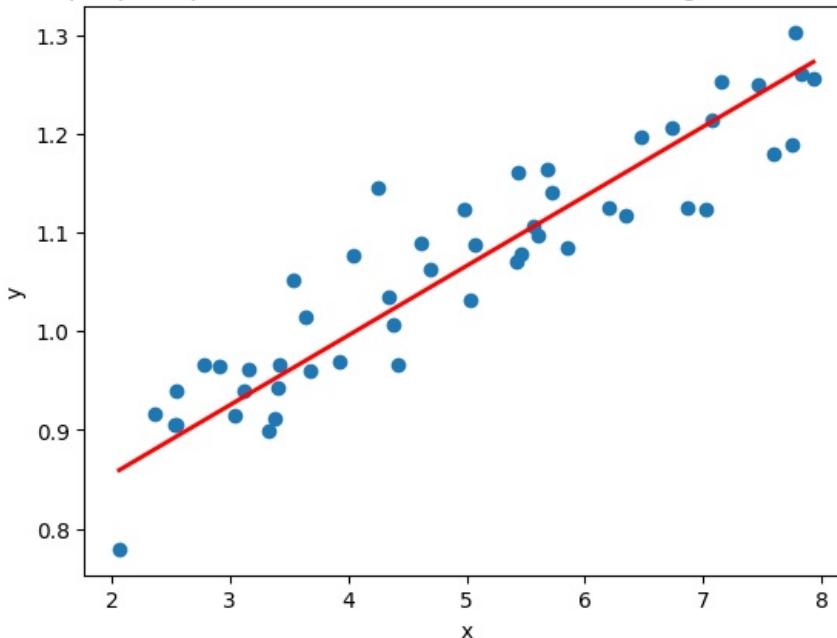
Affichage de la droite obtenu suite a cette convergence sur le nuages de points :

```
In [8]: y_pred = h(x,theta_optimal)

plt.scatter(x,y)
plt.plot(x,y_pred,color='red',linewidth=2)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Graphique représentant la droite suite cette convergence recherchée')
```

```
plt.show()
```

Graphique représentant la droite suite cette convergence recherchée



8. On peut maintenant à partir de ce modèle prédire la taille de 3 enfants de 3,5 et 7 ans :

D'après la lecture du graphique on un enfant :

- de 3 ans mesure environ 86 cm
- de 5 ans mesure environ 105 cm
- de 7 ans mesure environ 120 cm

9. Visualisation de la fonction coût sur une grille de taille 100 x 100

```
In [9]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# On crée une liste de valeurs répartie sur l'intervalle [-30,30] de theta0
theta_0_values = np.linspace(-30,30,100)
# On créer une liste de valeurs répartie sur l'intervalle [-3,3] de theta1
theta_1_values = np.linspace(-3,3,100)

# On initialise la matrice qui va contenir toute les valeurs possible de la fonction coût en fonction de (theta0,theta1)
Jvalues = np.zeros((len(theta_0_values),len(theta_1_values)))

# On calcule toutes les valeurs sur les 10 000 paires de valeurs (theta0,theta1)
for i, t0 in enumerate(theta_0_values):
    for j, t1 in enumerate(theta_1_values):
        Jvalues[i][j] = J(np.array([theta_0_values[i],theta_1_values[j]]))
```

On affiche le rendu 3D :

```
In [10]: from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

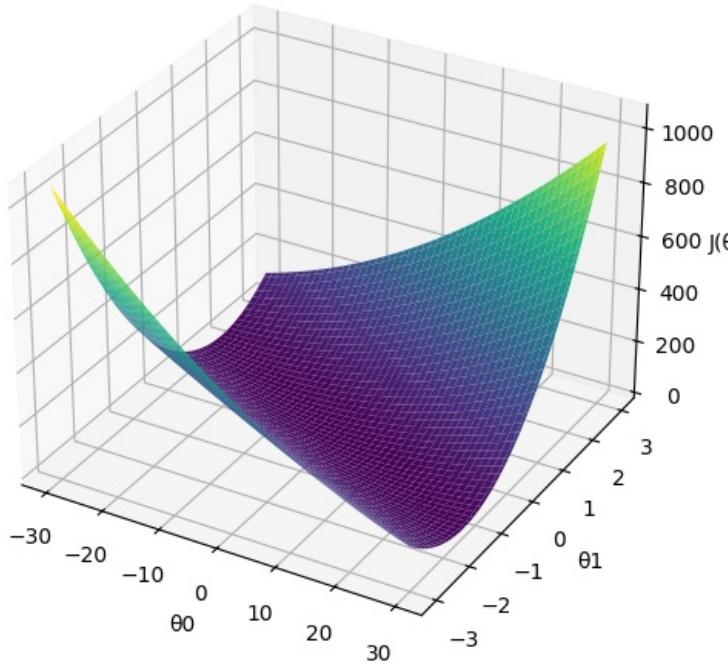
T0, T1 = np.meshgrid(theta_0_values, theta_1_values)

fig = plt.figure(figsize=(10, 6))

ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(T0,T1,Jvalues,cmap='viridis')

ax.set_xlabel('θ0')
ax.set_ylabel('θ1')
ax.set_zlabel('J(θ)')
plt.title("Visualisation 3D de la fonction de coût")
plt.show()
```

Visualisation 3D de la fonction de coût



Exercice 2

1. Utiliser la fonction loadtxt du package numpy en Python (ici désigné par np). Cette fonction permet de lire les fichiers et de les convertir en vecteurs/matrices :

```
In [11]: import numpy as np

x = np.loadtxt('ex2dat/ex2x.dat')
y = np.loadtxt('ex2dat/ex2y.dat')

# On affiche les 5 premières valeurs pour vérifier
print("x : \n",x[:5])
print("y : \n",y[:5])
```

x :
[[2.104e+03 3.000e+00]
[1.600e+03 3.000e+00]
[2.400e+03 3.000e+00]
[1.416e+03 2.000e+00]
[3.000e+03 4.000e+00]]
y :
[399900. 329900. 369000. 232000. 539900.]

2. Normalisation des données :

```
In [12]: import sklearn as sk

scaler = sk.preprocessing.StandardScaler()

dataX_norm = scaler.fit_transform(x)

print("Données normaliser : ",dataX_norm[:5])
```

Données normaliser : [[0.13141542 -0.22609337]
[-0.5096407 -0.22609337]
[0.5079087 -0.22609337]
[-0.74367706 -1.5543919]
[1.27107075 1.10220517]]

3. Définir les fonctions en Python sous forme matricielle pour représenter la fonction d'hypothèse, le vecteur tel défini dans le cours : [...] , la fonction décrivant une itération et la fonction de coût $J(\theta)$

```
In [13]: # On construit la matrice X augmentée et le vecteur Y
X = np.c_[np.ones(dataX_norm.shape[0]), dataX_norm]
Y = y

print("\n Matrice X : \n",X[:5])
print("\n Vecteur Y : \n",Y[:5])
```

```

# Fonction hypothèse
def h(theta,X):
    return X @ theta

theta_test1 = np.array([1.0, 2.0, -0.5]) # [θ₀, θ₁, θ₂]
test = h(theta_test1,X)
print("\nTest fonction d'hyothèse : \n", test)

Matrice X :
[[ 1.          0.13141542 -0.22609337]
 [ 1.         -0.5096407  -0.22609337]
 [ 1.          0.5079087  -0.22609337]
 [ 1.         -0.74367706 -1.5543919 ]
 [ 1.          1.27107075  1.10220517]]

Vecteur Y :
[399900. 329900. 369000. 232000. 539900.]
```

Test fonction d'hyothèse :

```
[ 1.37587753  0.09376529  2.12886408  0.28984183  2.99103891  0.40900732
 -0.07413036 -0.34632483 -0.46588688 -0.1758853   0.29453301  1.11131468
  0.8314886   6.08673466 -0.75080071  1.21032746  0.04562998 -0.83220466
  1.99638437  3.06989899  0.51859216  1.49055012  0.10394078  0.35049822
  5.91923558 -1.17817146 -0.26746475  2.44939214  1.62008938  2.7317621
  1.36590032 -0.10426027  0.54892036  4.00369884 -0.03362667 -0.32088609
 -0.82457304  0.78295672  6.0818452   0.85927292  0.92072246  1.71675658
  1.88954169 -0.92378411 -1.14490282  0.07067214 -0.91615249]
```

Calcule du vecteur définit dans le cours ($E = h(\theta)(X) - Y$) :

```
In [14]: def E(theta,X,Y):
    return h(theta,X) - Y

# Test
theta = np.array([1.0, 2.0, -0.5])
err = E(theta, X, Y)
print(err[:5])

[-399898.62412247 -329899.90623471 -368997.87113592 -231999.71015817
 -539897.00896109]
```

Définition de la fonction coût $J(\theta)$:

```
In [15]: def J(theta,X,Y):
    # Variable du résultat de la fonction cout
    res = None
    m = X.shape[0]
    # Somme critère des moindre carré
    somme_crit = np.sum(E(theta,X,Y)**2)

    res = (1.0/(2*m))*(somme_crit)
    return res

result_test = J(theta_test1,X,Y)
print("Test fonction coût :\n", result_test)
```

Test fonction coût :

fonction décrivant une itération pour calculer une nouvelle valeur de theta :

```
In [16]: def iteration(theta, X, Y, alpha=0.07):
    theta = np.asarray(theta, dtype=float)
    m = X.shape[0]
    e = E(theta, X, Y)
    assert e.shape[0] == m
    grad = (1.0 / m) * (X.T @ e)
    theta_next = theta - alpha * grad
    return theta_next
```

- Pour la valeur du taux d'apprentissage $\alpha = 0.07$, effectuez le calcul de régression permettant d'obtenir le vecteur $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ optimal, afin de calculer la meilleure régression linéaire multivariée sur le jeu de données d'apprentissage :

```
In [17]: def gradient(X,Y, alpha = 0.07, nb_iterations_max = 2500, e = 1e-6):
    # Initialisation
    theta = np.zeros(X.shape[1])

    for i in range(nb_iterations_max):
```

```

theta_old = theta.copy()      # on copie la valeur de theta

theta = iteration(theta,X,Y,alpha) # calcule de la nouvelle valeur optimal du vecteur theta

# Afficher le progrès
if i % 100 == 0:
    print(f"Itération {i:4d}: Theta = {theta}")

# Critère d'arrets (différence relative)
if i > 0: # condition pour eviter les division par zéro à la première itération

    # Calcule |θ^(n+1) - θ^(n)|
    diff_theta = np.linalg.norm(theta-theta_old)

    #Calcule de theta |θ^(n)|
    norm_theta_old = np.linalg.norm(theta_old)

    # Éviter la division par zéro
    if norm_theta_old > 1e-10:
        # Calcule du critère d'arrêt
        diff_rel = diff_theta / norm_theta_old

    # Vérifier le critère d'arrêt
    if diff_rel < e :
        print(f"Critère d'arrêt déclencher ! Fin de la boucle")
        break

    else :
        print("Nombre d'itération maximum atteint ! ")

    print(f"Theta optimal :{theta}")

return theta

# Utilisation
theta_optimal = gradient(X,Y,alpha = 0.07, e=1e-6)

```

Itération 0: Theta = [23828.88617021 7403.4893445 3829.61752291]
 Itération 100: Theta = [340189.41366678 106985.99621642 -4117.42596665]
 Itération 200: Theta = [340412.50214778 109340.04737273 -6470.60576553]
 Critère d'arrêt déclencher ! Fin de la boucle
 Theta optimal :[340412.65921994 109440.01514972 -6570.57353424]

5. Nous allons maintenant automatiser la recherche du meilleur taux d'apprentissage
6. Pour ce faire, on devra calculer pour chaque itération la valeur de la fonction de coût et on stockera toutes ces valeurs dans un vecteur. Comme on veut sélectionner un taux d'apprentissage efficace, on va comparer les résultats de calcul de sur 50 itérations en changeant de taux d'apprentissage à chaque $\alpha \in [0, 0.001; 10]$. Pour ce faire on stockera toutes ces valeurs dans un vecteur. Comme on veut sélectionner un taux d'apprentissage efficace, on va comparer les résultats de calcul de $J(\theta)$ sur 50 itérations en changeant le taux d'apprentissage à chaque série d'itérations. Les valeurs de ce taux doivent rester entre [0.001; 10].

```

In [18]: def gradient_with_comparison(X, Y, nb_tests=20, iterations_par_test=50, e=1e-6):
    """
    Compare différents taux d'apprentissage sur 50 itérations chacun
    """
    best_alpha = None
    best_cost = float('inf')
    alpha_costs = []
    all_costs_evolution = [] # Pour tracer les courbes

    print("==== Comparaison de différents taux d'apprentissage ===")

    for test in range(nb_tests):
        # Générer un alpha aléatoire dans [0.001, 10]
        alpha = np.random.uniform(0.001, 10)

        # Initialiser theta pour ce test
        theta = np.zeros(X.shape[1])
        cout_evolution = []

        # Faire exactement 50 itérations avec cet alpha
        for i in range(iterations_par_test):
            theta = iteration(theta, X, Y, alpha)
            cout = J(theta, X, Y)
            cout_evolution.append(cout)

        # Stocker les résultats
        cout_final = cout_evolution[-1]
        alpha_costs.append((alpha, cout_final))
        all_costs_evolution.append((alpha, cout_evolution))

```

```

# Comparer avec le meilleur
if cout_final < best_cost:
    best_cost = cout_final
    best_alpha = alpha
    print(f"Test {test+1:2d}: Nouveau meilleur α = {alpha:.4f}, J(θ) = {cout_final:.4f} ☆")
else:
    print(f"Test {test+1:2d}: α = {alpha:.4f}, J(θ) = {cout_final:.4f}")

print(f"\n==== Résultats de la comparaison ===")
print(f"Meilleur taux d'apprentissage: α = {best_alpha:.4f}")
print(f"Meilleur coût après 50 itérations: J(θ) = {best_cost:.4f}")

return best_alpha, alpha_costs, all_costs_evolution

def convergence_complete_avec_meilleur_alpha(X, Y, best_alpha, e=1e-6, max_iter=2500):
    """
    Calcule θ optimal jusqu'à convergence avec le meilleur alpha trouvé
    """
    print(f"\n==== Convergence complète avec α = {best_alpha:.4f} ===")

    theta = np.zeros(X.shape[1])
    cout_vector = []

    for i in range(max_iter):
        theta_old = theta.copy()
        theta = iteration(theta, X, Y, best_alpha)
        cout = J(theta, X, Y)
        cout_vector.append(cout)

        # Afficher le progrès
        if i % 100 == 0:
            print(f"Itération {i:4d}: J(θ) = {cout:.6f}")

        # Critère d'arrêt
        if i > 0:
            diff_theta = np.linalg.norm(theta - theta_old)
            norm_theta_old = np.linalg.norm(theta_old)

            if norm_theta_old > 1e-10:
                diff_rel = diff_theta / norm_theta_old

            if diff_rel < e:
                print(f"Convergence atteinte à l'itération {i}")
                break
        else:
            print("Nombre d'itération maximum atteint")

    print(f"Theta optimal final: {theta}")
    return theta, cout_vector

best_alpha, alpha_costs, all_costs_evolution = gradient_with_comparison(X, Y, nb_tests=20, iterations_par_test=1)

# Afficher le top 5 des meilleurs taux d'apprentissage
print("\n==== Top 5 des meilleurs taux d'apprentissage ===")
alpha_costs_triees = sorted(alpha_costs, key=lambda x: x[1])[:5]
for i, (alpha_val, cost_val) in enumerate(alpha_costs_triees):
    print(f"{i+1}. α = {alpha_val:.4f}, J(θ) = {cost_val:.4f}")

# Convergence complète avec le meilleur alpha trouvé
theta_optimal, cout_vector = convergence_complete_avec_meilleur_alpha(X, Y, best_alpha)

```

```

==== Comparaison de différents taux d'apprentissage ====
Test 1: Nouveau meilleur  $\alpha$  = 1.1131,  $J(\theta)$  = 2043280050.6030 *
Test 2:  $\alpha$  = 2.2192,  $J(\theta)$  = 5541800313366899381978497778679118491092449755136.0000
Test 3:  $\alpha$  = 9.4871,  $J(\theta)$  = 400093867876189726332696256581294822704380921441032867827046205405884030143279600613
3171920669909816065163097686525784096768.0000
Test 4:  $\alpha$  = 5.0413,  $J(\theta)$  = 188195298558976280370679360906470692173313011245078987104951391491752656730670840284
9865269248.0000
Test 5:  $\alpha$  = 4.0412,  $J(\theta)$  = 11949138942742891588724083037454627855397866371188140977789294584064624306404982784.
0000
Test 6:  $\alpha$  = 4.5066,  $J(\theta)$  = 445391378801889454365063245030155458833323021682571054811723238879031220508831965092
2496.0000
Test 7:  $\alpha$  = 4.3768,  $J(\theta)$  = 146152791914402046500877227417012089667076053179081534881581145719529502183939503030
272.0000
Test 8:  $\alpha$  = 3.5138,  $J(\theta)$  = 570897105420427295382750598201126549399576467982569647238716200799761858560.0000
Test 9:  $\alpha$  = 2.4825,  $J(\theta)$  = 27747549026957856376240756857348814768707094069968371712.0000
Test 10:  $\alpha$  = 3.2858,  $J(\theta)$  = 146405483558272318363866528129085371086162789785037507239297642332684288.0000
Test 11:  $\alpha$  = 9.0907,  $J(\theta)$  = 408468295345345260162787959192728421813108648401990684487245902429154600584840966732
27746478160488430328290838633271787520.0000
Test 12:  $\alpha$  = 5.0869,  $J(\theta)$  = 527987118771666453927703671858413502081385555103984534019730477377336861758554919567
1582539776.0000
Test 13:  $\alpha$  = 8.8203,  $J(\theta)$  = 158056437698655287919551492426906298073432628291501354501627915694916474240548086568
2593597462696727333461314235529166848.0000
Test 14:  $\alpha$  = 3.3325,  $J(\theta)$  = 842667464308596117041092453371579171286987231218925764004002298953990144.0000
Test 15:  $\alpha$  = 9.9694,  $J(\theta)$  = 808207933152851390798412906402267517269557859849878794369204368750957850499040903850
235696147916289632112473658902322901680128.0000
Test 16:  $\alpha$  = 0.3391,  $J(\theta)$  = 2043280192.6848
Test 17:  $\alpha$  = 3.0132,  $J(\theta)$  = 2759081792966018198939370195566375802472592103322188101392636313600.0000
Test 18:  $\alpha$  = 7.4723,  $J(\theta)$  = 238205934483712936007831104695832264815667909706171508887047098144700887535077258224
35761801867239564776914812928.0000
Test 19:  $\alpha$  = 7.7448,  $J(\theta)$  = 119101080098570801717002768798644812828610313900489955236306258346496339017600047465
1801149880528406182908898836480.0000
Test 20:  $\alpha$  = 0.1330,  $J(\theta)$  = 2046880437.0432

```

==== Résultats de la comparaison ===

Meilleur taux d'apprentissage: α = 1.1131

Meilleur coût après 50 itérations: $J(\theta)$ = 2043280050.6030

==== Top 5 des meilleurs taux d'apprentissage ===

1. α = 1.1131, $J(\theta)$ = 2043280050.6030
2. α = 0.3391, $J(\theta)$ = 2043280192.6848
3. α = 0.1330, $J(\theta)$ = 2046880437.0432
4. α = 2.2192, $J(\theta)$ = 5541800313366899381978497778679118491092449755136.0000
5. α = 2.4825, $J(\theta)$ = 27747549026957856376240756857348814768707094069968371712.0000

==== Convergence complète avec α = 1.1131 ===

Itération 0: $J(\theta)$ = 5407479438.235907

Convergence atteinte à l'itération 42

Theta optimal final: [340412.65957447 109447.89563927 -6578.25568451]

Visualisation :

```

In [19]: import matplotlib.pyplot as plt

# Visualisation des courbes de comparaison des alphas
print("\n==== Visualisation des courbes de comparaison ===")

plt.figure(figsize=(15, 10))

# Trier par coût final pour mettre en évidence les meilleurs
sorted_results = sorted(all_costs_evolution, key=lambda x: x[1][-1])

# Tracer toutes les courbes
for i, (alpha, cout_evolution) in enumerate(sorted_results):
    if i < 5: # Les 5 meilleurs en couleurs distinctes et traits pleins
        plt.plot(range(len(cout_evolution)), cout_evolution,
                  linewidth=2, marker='o', markersize=3,
                  label=f" $\alpha$  = {alpha:.4f} (J final = {cout_evolution[-1]:.4f})")
    else: # Les autres en gris transparent
        plt.plot(range(len(cout_evolution)), cout_evolution,
                  color='gray', alpha=0.3, linewidth=1)

plt.xlabel('Nombre d\'itérations')
plt.ylabel('Fonction de coût  $J(\theta)$ ')
plt.title('Évolution de  $J(\theta)$  sur 50 itérations pour différents taux d\'apprentissage  $\alpha \in [0.001, 10]$ ')
plt.legend(loc='upper right')
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.xlim(0, 50)
plt.tight_layout()
plt.show()

# Visualisation de la convergence finale
print("\n==== Visualisation de la convergence finale ===")

```

```

plt.figure(figsize=(12, 6))

plt.plot(range(len(cout_vector)), cout_vector, 'b-', linewidth=2)
plt.xlabel('Nombre d\'itérations')
plt.ylabel('Fonction de coût J(θ)')
plt.title(f'Convergence finale avec le meilleur α = {best_alpha:.4f}')
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.xlim(0, len(cout_vector))

# Ajouter une annotation pour le coût final
plt.annotate(f'J(θ) final = {cout_vector[-1]:.6f}', xy=(len(cout_vector)-1, cout_vector[-1]),
            xytext=(len(cout_vector)*0.7, cout_vector[-1]*1.1),
            arrowprops=dict(arrowstyle='->', color='red'),
            fontsize=12, color='red')

plt.tight_layout()
plt.show()

# Prédiction pour un logement de 1650 m² et 3 pièces
print("\n==== Prédiction pour un logement de 1650 m² et 3 pièces ====")
nouveau_logement = np.array([[1650, 3]]) # Surface et nombre de pièces
nouveau_logement_norm = scaler.transform(nouveau_logement) # Normalisation

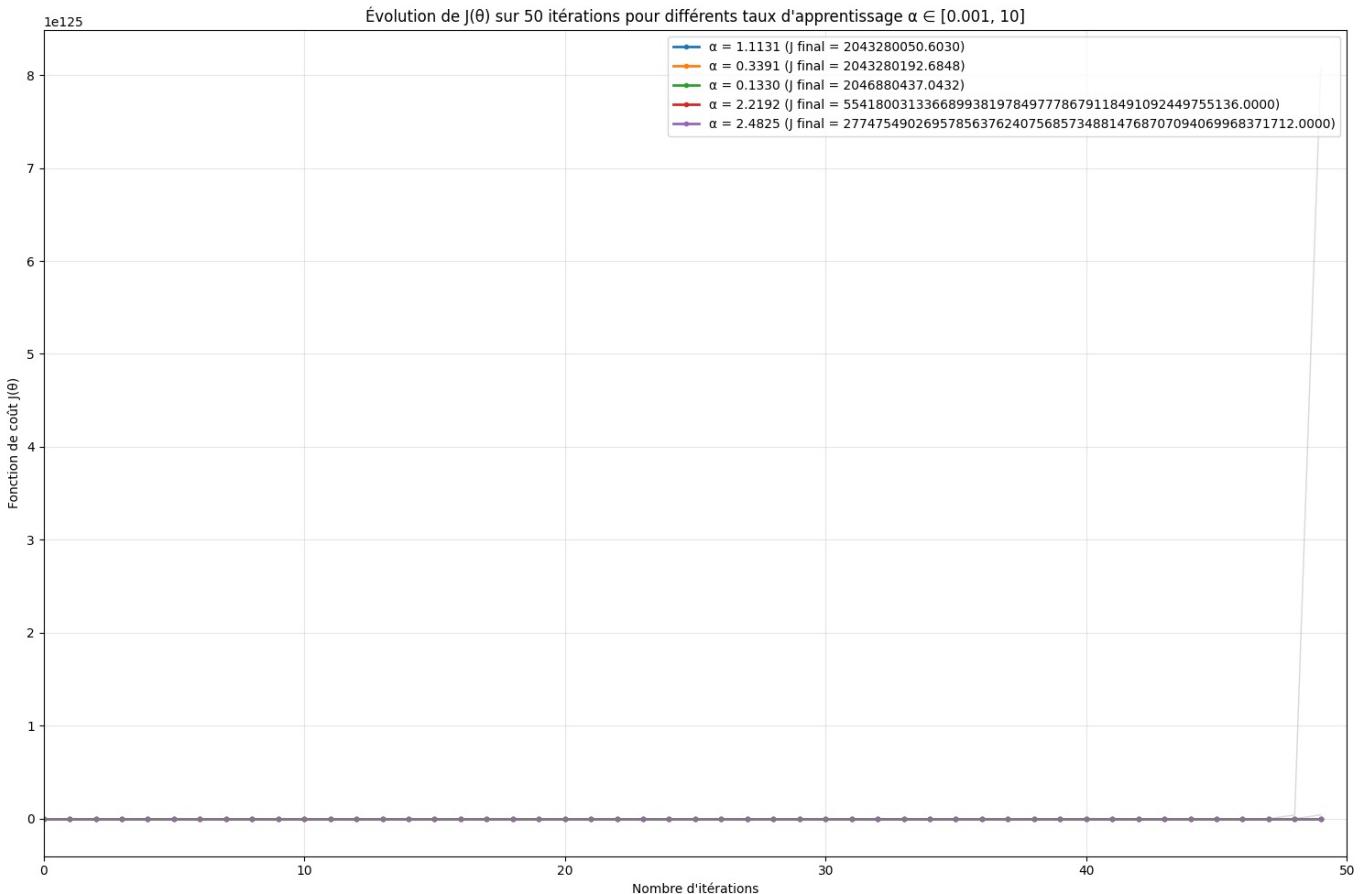
# Construire correctement X_prediction avec le biais
X_prediction = np.c_[np.ones(nouveau_logement_norm.shape[0]), nouveau_logement_norm]

prix_predit = h(theta_optimal, X_prediction)
print(f"Prix prédit: {prix_predit[0]:.2f}")

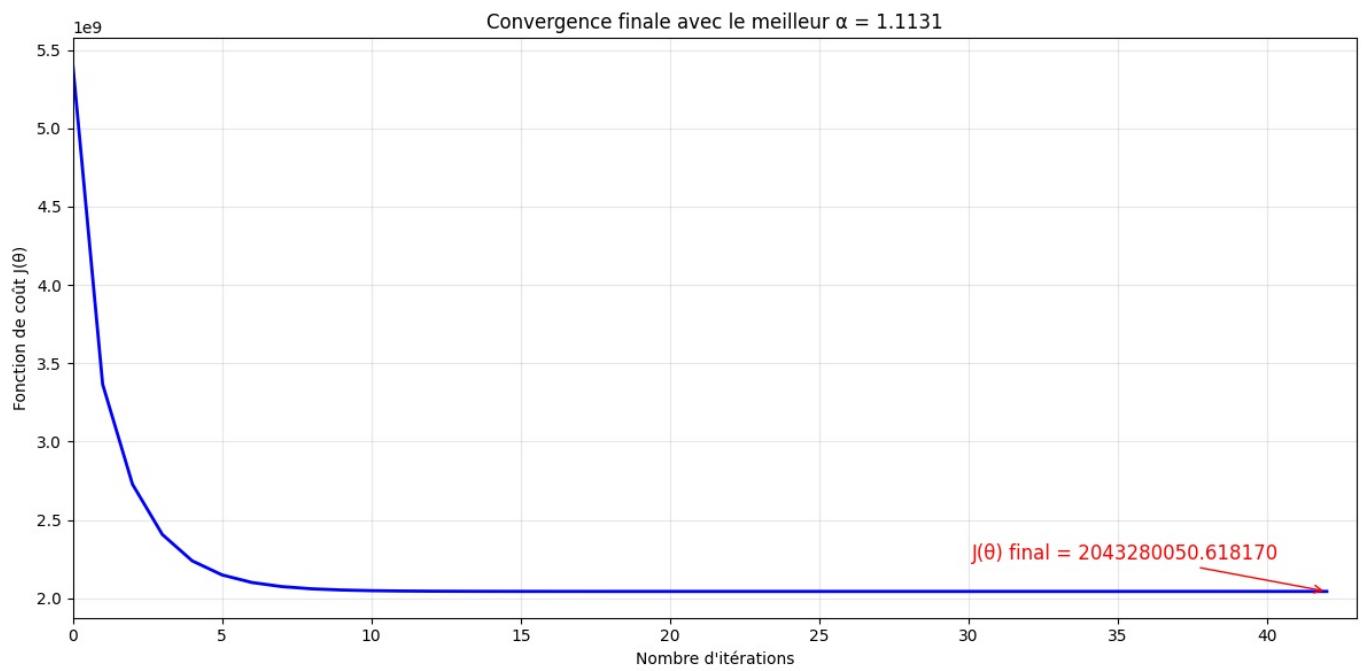
print(f"\n==== Résumé final ===")
print(f"- Meilleur α trouvé: {best_alpha:.4f}")
print(f"- Theta optimal: {theta_optimal}")
print(f"- Nombre d'itérations pour la convergence: {len(cout_vector)}")
print(f"- Coût final: J(θ) = {cout_vector[-1]:.6f}")

```

==== Visualisation des courbes de comparaison ===



==== Visualisation de la convergence finale ===



==== Prédiction pour un logement de 1650 m² et 3 pièces ====
 Prix prédit: 293081.40

==== Résumé final ====
 - Meilleur α trouvé: 1.1131
 - Theta optimal: [340412.65957447 109447.89563927 -6578.25568451]
 - Nombre d'itérations pour la convergence: 43
 - Coût final: $J(\theta) = 2043280050.618170$