Nom Prénom : **Cheikh Amine**

Promotion : **M2 IWOCS**

TP 2 - Régression linéaire

M2 IWOCS, Apprentissage Automatique

Exercice 1 - Régression linéaire univarié

Les données utilisées pour cet exercice décrivent les tailles d'enfants d'âge compris entre 2 et 8 ans : le fichier `ex1x.dat` correspond à leur âge et `ex1y.dat` correspond à leur taille (en mètres). On a dans ces 2 fichiers, les données de 50 enfants rangées dans le même ordre.

Ces données constituent des exemples d'apprentissage qui vont être utilisées afin de construire un modèle de régression linéaire qui a pour objectif de prédire la taille d'un enfant à partir de son âge.

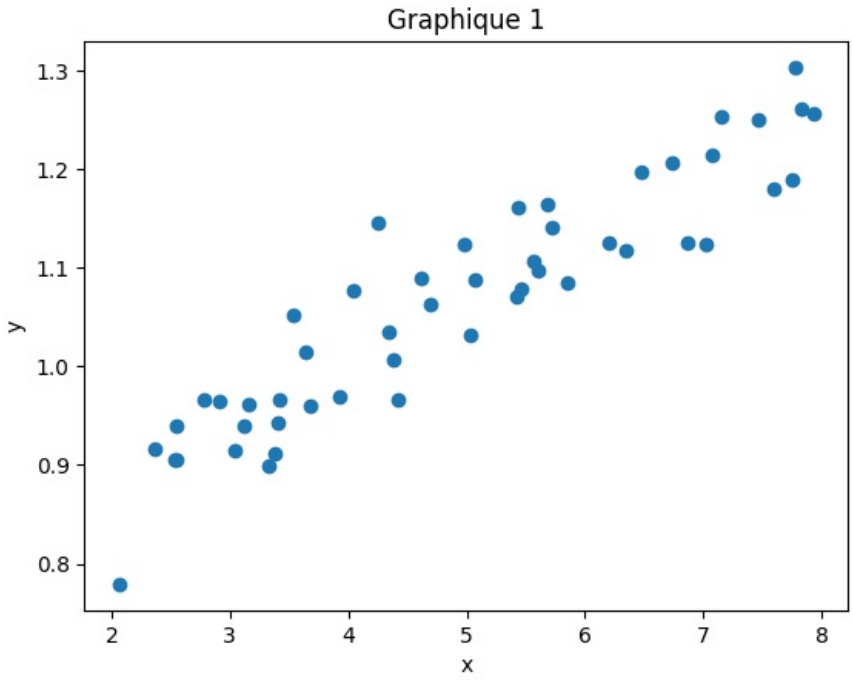
1. Tout d'abord, nous allons utiliser la fonction `loadtxt` du package `numpy` en Python (ici désigné par `np`). Cette fonction permet de lire les fichiers et de les concertir en vecteurs/matrices :

```
x=np.loadtxt('ex1x.dat');
y=np.loadtxt('ex1y.dat');
```

In [1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Question 1
x = np.loadtxt('ex1dat/ex1x.dat')
y = np.loadtxt('ex1dat/ex1y.dat')
```

2. Afficher le nuage de points (x_i,y_i).

In [2]:
```
# Question 2
plt.scatter(x,y)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Graphique 1')
plt.show()
```



3. Définir en Python, la fonction hypothèse correspondant à un modèle de régression linéaire. Soit le vecteur $\theta = (\theta_0, \theta_1)$, cette fonction hypothèse s'écrit $$ h(\theta_0, \theta_1, x) = \theta_0 + \theta_1 x $$

In [3]:
```
theta = [0,1]
def h(x,theta):
```

```
    return theta[0] + theta[1] * x
```

4. Définir en Python, la fonction de coût $J(\theta_0, \theta_1)$ telle que vue en cours.

In [4]:
```
from numpy import square


m = len(x)
print('Nombre de valeurs m =',m)

def J(theta):
    result = 0
    # on définit l'écart entre 2 valeurs  et en faire la somme
    for i in range(m):
        result += (h(x[i],theta)-y[i])**2
    result = (1/(2*m))*result

    return result
```

```
Nombre de valeurs m = 50
```

5. Définir en Python, une fonction qui réalise une itération et qui va renvoyer θ_0^* et θ_1^*, en fonction de θ_0 et θ_1, selon les formules de descente de gradient vue en cours.
   Pour faire fonctionner cette méthode de gradient, il faut définir la valeur du coefficient d'apprentissage noté α dans le cours ; il régle la profondeur de descente. On propose ici que ce coefficient prenne une valeur constante égale à 0,07. On partira aussi des valeurs initiales $\theta_0=\theta_1=0$.

In [5]:
```
def gradient_descent(alpha=0.07):
# On commence avec pour valeurs initiales de theta 1 et 0 = 0
    theta = np.array([0.0, 0.0])

# On calcule la nouvelle valeur de gradiant
    somme_ecart_1 = np.sum((h(x, theta) - y))
    somme_ecart_2 = np.sum((h(x, theta) - y) * x)

    theta_new = np.array([
        theta[0] - alpha * (1/m) * somme_ecart_1,
        theta[1] - alpha * (1/m) * somme_ecart_2
    ])

    return theta_new

# Utilisation
theta_optimal = gradient_descent(alpha=0.07)
print("Paramètres optimaux :", theta_optimal)
```

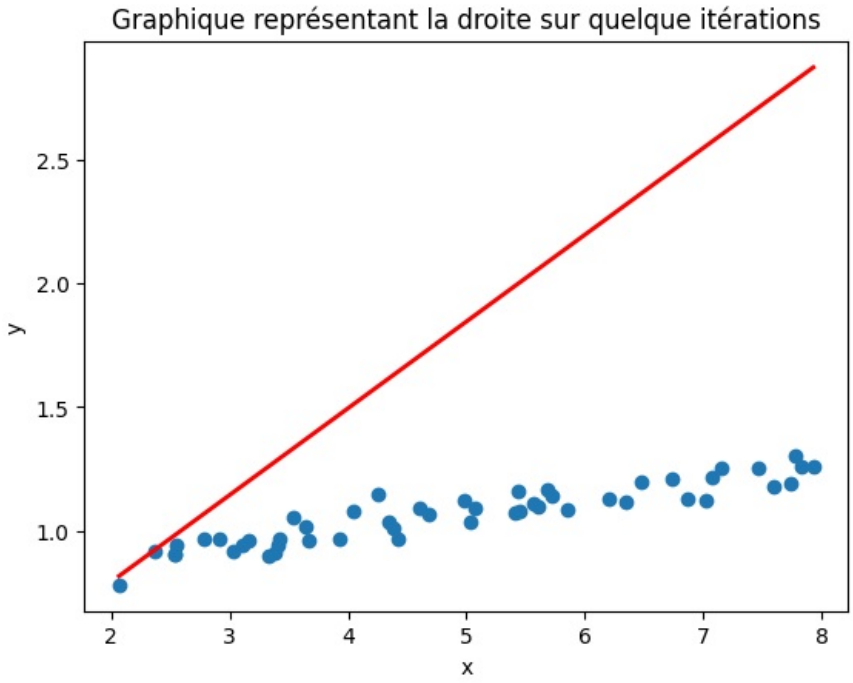
```
Paramètres optimaux : [0.07452802 0.38002167]
```

6. Faire tourner la méthode de descente de gradient sur quelques itérations puis représenter la droite $$ y= \theta_0 + \theta_1 x $$ sur le nuage de points.

In [6]:
```
def gradient_descent(num_iterations=5):
    alpha = 0.07 # Coefficient d'apprentissage qui nous permet de régler la profondeur de la descente
# Initialisation
    theta = np.array([0.0, 0.0])

    for i in range(num_iterations):
        somme_ecart_1 = np.sum((h(x, theta) - y))
        somme_ecart_2 = np.sum((h(x, theta) - y) * x)

        # Mise à jour simultanée des paramètres
        theta_new = np.array([
            theta[0] - alpha * (1/m) * somme_ecart_1,
            theta[1] - alpha * (1/m) * somme_ecart_2
        ])

        theta = theta_new

    return theta


# Utilisation
theta_optimal = gradient_descent()
print("Paramètres optimaux :", theta_optimal)

y_pred = h(x,theta_optimal)


plt.scatter(x,y)
```

```
plt.plot(x,y_pred,color='red',linewidth=2)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Graphique représentant la droite sur quelque itérations')
plt.show()
```

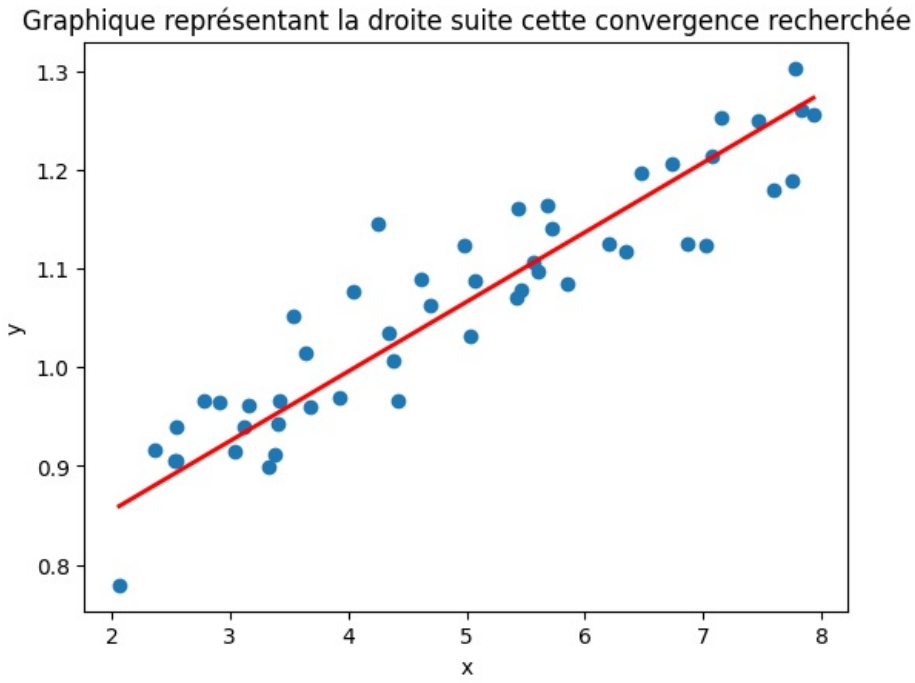
```
Paramètres optimaux : [0.09040987 0.35100519]
```



7. Faire tourner la méthode de descente de gradient pendant toutes les itérations nécessaires à faire converger la solution θ recherchée. Pour cela on définit le critère d'arrêt du processus itératif par $$ \left\vert \dfrac{J(\theta^*)-J(\theta)}{J(\theta)}\right\vert < 10^{-3} $$ Afficher la droite obtenue suite à cette convergence sur le nuage de points.

In [7]:
```
def gradient_descent(num_iterations=1000):
    alpha = 0.07 # Coefficient d'apprentissage qui nous permet de régler la profondeur de la descente
    # Initialisation
    theta = np.array([0.0, 0.0])

    for i in range(num_iterations):
        somme_ecart_1 = np.sum((h(x, theta) - y))
        somme_ecart_2 = np.sum((h(x, theta) - y) * x)

        # Mise à jour simultanée des paramètres
        theta_new = np.array([
            theta[0] - alpha * (1/m) * somme_ecart_1,
            theta[1] - alpha * (1/m) * somme_ecart_2
        ])

        # Condition pour éviter la division par 0 dès la première itération
        if J(theta) > 0 :
            # Critère d'arret
            op = (J(theta_new)-J(theta))/J(theta)
            norm_op = abs(op)
            if norm_op < 10**-3 :
                print("Critère d'arrêt vérifié !")
                print("Valeur optimal des paramètres : ",theta_new)
                break

        theta = theta_new

    return theta


# Utilisation
theta_optimal = gradient_descent()

y_pred = h(x,theta_optimal)


plt.scatter(x,y)
plt.plot(x,y_pred,color='red',linewidth=2)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Graphique représentant la droite suite cette convergence recherchée')
plt.show()
```

```
Critère d'arrêt vérifié !
Valeur optimal des paramètres :  [0.71385319 0.07048728]
```



8. On peut désormais utiliser le modèle pour faire des prédictions : quelle est la taille de 3 enfants d'âges respectifs 3, 5 et 7 ans ?

Réponse :

On peut maintenant à partir de ce modèle prédire la taille de 3 enfants de 3,5 et 7 ans :

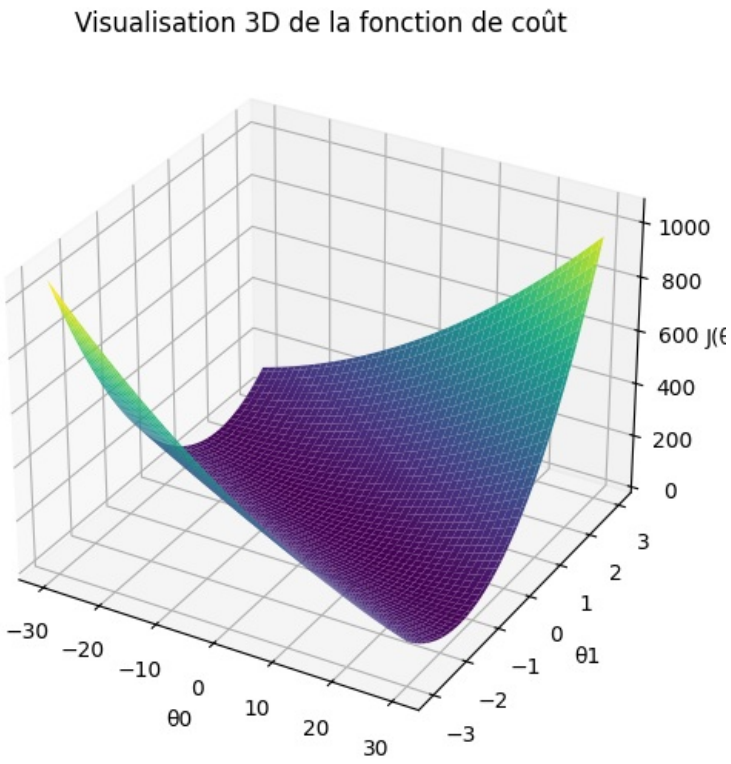
D'après la lecture du graphique on un enfant :

- de 3 ans mesure environ 86 cm
- de 5 ans mesure environ 105 cm
- de 7 ans mesure environ 120 cm

9. Nous allons maintenant visualiser la fonction de coût $J(\theta)$ en 3D sur une grille de base 100 x 100 et des valeurs pour θ dans les intervalles suivants (il faudra donc prendre 100 valeurs réparties dans ces intervalles) : $\theta_0 \in [-30;30]$ et $\theta_1 \in [-3;3]$.

In [8]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# On crée une liste de valeurs répartie sur l'intervalle [-30,30] de theta0
theta_0_values = np.linspace(-30,30,100)
# On créer une liste de valeurs répartie sur l'intervalle [-3,3] de theta1
theta_1_values = np.linspace(-3,3,100)

#  On initialise la matrice qui va contenir toute les valeurs possible de la fonction coût en fonction de (theta
Jvalues = np.zeros((len(theta_0_values),len(theta_1_values)))

# On calcule toutes les valeurs sur les 10 000 paires de valeurs (theta0,theta1)
for i, t0 in enumerate(theta_0_values):
    for j, t1 in enumerate(theta_1_values):
        Jvalues[i][j] = J(np.array([theta_0_values[i],theta_1_values[j]]))



# Affichage 3D

from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

T0, T1 = np.meshgrid(theta_0_values, theta_1_values)

fig = plt.figure(figsize=(10, 6))

ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
```

```
ax.plot_surface(T0,T1,Jvalues,cmap='viridis')

ax.set_xlabel('θ0')
ax.set_ylabel('θ1')
ax.set_zlabel('J(θ)')
plt.title("Visualisation 3D de la fonction de coût")
plt.show()
```



Exercice 2 - Régression linéaire multivariée et écriture matriciellle de la méthode de descente du gradient

Dans ce problème, on utilise des données correspondant à 47 exemples d'apprentissage sur des données immobilières à Portland, Oregon (USA). Les données d'entrée x (stockées dans le ficheir `ex2x.dat`) correspondent aux surfaces et au nombre de pièces de ces 47 appartements et la donnée cible y (stockée dans le fichier `ex2y.dat`) correspond au prix de ces mêmes appartements.

1. Utiliser la fonction `loadtxt` du package `numpy` en Python (ici désigné par `np`). Cette fonction permet de lire les fichiers et de les concertir en vecteurs/matrices :

```
x=np.loadtxt('ex2x.dat');
y=np.loadtxt('ex2y.dat');
```

In [9]:
```
import numpy as np

x = np.loadtxt('ex2dat/ex2x.dat')
y = np.loadtxt('ex2dat/ex2y.dat')

# On affiche les 5 premières valeurs pour vérifié
print("x : \n",x[:5])
print("y : \n",y[:5])
```

```
x :
 [[2.104e+03 3.000e+00]
 [1.600e+03 3.000e+00]
 [2.400e+03 3.000e+00]
 [1.416e+03 2.000e+00]
 [3.000e+03 4.000e+00]]
y :
 [399900. 329900. 369000. 232000. 539900.]
```

2. Prétraitement des données : utiliser la fonction `sklearn.preprocessing.StandardScaler` pour normaliser les données.

In [10]:
```
import sklearn as sk

scaler = sk.preprocessing.StandardScaler()
```

```
dataX_norm = scaler.fit_transform(x)

print("Données normaliser :",dataX_norm[:5])
```

```
Données normaliser : [[ 0.13141542 -0.22609337]
 [-0.5096407  -0.22609337]
 [ 0.5079087  -0.22609337]
 [-0.74367706 -1.5543919 ]
 [ 1.27107075  1.10220517]]
```

3. Définir les fonctions en Python sous forme matricielle pour représenter la fonction hypothèse $h_\theta (X)$, le vecteur tel que défini dans le cours :$E = h_\theta (X) - Y$, la fonction décrivant une itération et la fonction de coût $J(\theta)$.

In [11]:
```
# On construit la matrice X augmentée et le vecteur Y
X = np.c_[np.ones(dataX_norm.shape[0]), dataX_norm]
Y = y

print("\n Matrice X : \n",X[:5])
print("\n Vecteur Y : \n",Y[:5])

# Fonction hypothèse
def h(theta,X):
     return X @ theta


theta_test1 = np.array([1.0, 2.0, -0.5])  # [00, 01, 02]
test = h(theta_test1,X)
print("\nTest fonction d'hyothèse : \n",test)


# Calcule de E = h(X)-Y défini dans le cours
def E(theta,X,Y):
    return h(theta,X) - Y

# Test
theta = np.array([1.0, 2.0, -0.5])
err = E(theta, X, Y)
print("\nTest fonction E :\n")
print(err[:5])

# Définition de la fonction coût :

def J(theta,X,Y):
    # Variable du resultat de la fonction cout
    res = None
    m = X.shape[0]
    # Somme critère des moindre carré
    somme_crit = np.sum(E(theta,X,Y)**2)

    res = (1.0/(2*m))*(somme_crit)
    return res

result_test = J(theta_test1,X,Y)
print("\nTest fonction coût :\n",result_test)

# Fonction décrivant une itération

def iteration(theta, X, Y, alpha=0.07):
    theta = np.asarray(theta, dtype=float)
    m = X.shape[0]
    e = E(theta, X, Y)
    assert e.shape[0] == m
    grad = (1.0 / m) * (X.T @ e)
    theta_next = theta - alpha * grad
    return theta_next

# Exemple d'utilisation
theta_init = np.zeros(X.shape[1])
alpha = 0.07

theta_next = iteration(theta_init, X, Y, alpha)
print("Nouvelle valeur de theta après une itération :", theta_next)
```

```
 Matrice X :
 [[ 1.          0.13141542 -0.22609337]
 [ 1.         -0.5096407  -0.22609337]
 [ 1.          0.5079087  -0.22609337]
 [ 1.         -0.74367706 -1.5543919 ]
 [ 1.          1.27107075  1.10220517]]

 Vecteur Y :
 [399900. 329900. 369000. 232000. 539900.]

Test fonction d'hyothèse :
 [ 1.37587753  0.09376529  2.12886408  0.28984183  2.99103891  0.40900732
 -0.07413036 -0.34632483 -0.46588688 -0.1758853   0.29453301  1.11131468
  0.8314886   6.08673466 -0.75080071  1.21032746  0.04562998 -0.83220466
  1.99638437  3.06989899  0.51859216  1.49055012  0.10394078  0.35049822
  5.91923558 -1.17817146 -0.26746475  2.44939214  1.62008938  2.7317621
  1.36590032 -0.10426027  0.54892036  4.00369884 -0.03362667 -0.32088609
 -0.82457304  0.78295672  6.0818452   0.85927292  0.92072246  1.71675658
  1.88954169 -0.92378411 -1.14490282  0.07067214 -0.91615249]

Test fonction E :

[-399898.62412247 -329899.90623471 -368997.87113592 -231999.71015817
 -539897.00896109]

Test fonction coût :
 65591023522.006805
Nouvelle valeur de theta après une itération : [23828.88617021  7403.4893445   3829.61752291]
```

4. Pour la valeur du taux d'apprentissage $\alpha=0,07$, effectuer le calcul de régression permettant d'obtenir le vecteur $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ optimal permettant de calculer la meilleure régression linéaire multivariée sur le jeu de données d'apprentissage.

In [12]:
```python
def gradient(X,Y, alpha = 0.07, nb_iterations_max = 2500, e = 1e-6):
    # Initialisation
    theta = np.zeros(X.shape[1])

    for i in range(nb_iterations_max):
        theta_old = theta.copy()    # on copie la valeur de theta

        theta = iteration(theta,X,Y,alpha) # calcule de la nouvelle valeur optimal du vecteur theta

        # Afficher le progrès
        if i % 100 == 0:
            print(f"Itération {i:4d}: Theta = {theta}")

        # Critère d'arrets (différence relative)
        if i > 0: # condition pour eviter les division par zéro à la première itération

           # Calcule |θ^(n+1) - θ^(n)|
           diff_theta = np.linalg.norm(theta-theta_old)

           #Calcule de theta |θ^(n)|
           norm_theta_old = np.linalg.norm(theta_old)

            # Éviter la division par zéro
           if norm_theta_old > 1e-10:
            # Calcule du critère d'arrêt
              diff_rel = diff_theta / norm_theta_old

              # Vérifier le critère d'arrêt
              if diff_rel < e :
                  print(f"Critère d'arrêt déclencher ! Fin de la boucle")
                  break

    else :
        print("Nombre d'itération maximum atteint ! ")

    print(f"Theta optimal :{theta}")

    return theta

# Utilisation
theta_optimal = gradient(X,Y,alpha = 0.07, e=1e-6)
```

```
Itération    0: Theta = [23828.88617021  7403.4893445   3829.61752291]
Itération  100: Theta = [340189.41366678 106985.99621642  -4117.42596665]
Itération  200: Theta = [340412.50214778 109340.04737273  -6470.60576553]
Critère d'arrêt déclencher ! Fin de la boucle
Theta optimal :[340412.65921994 109440.01514972  -6570.57353424]
```

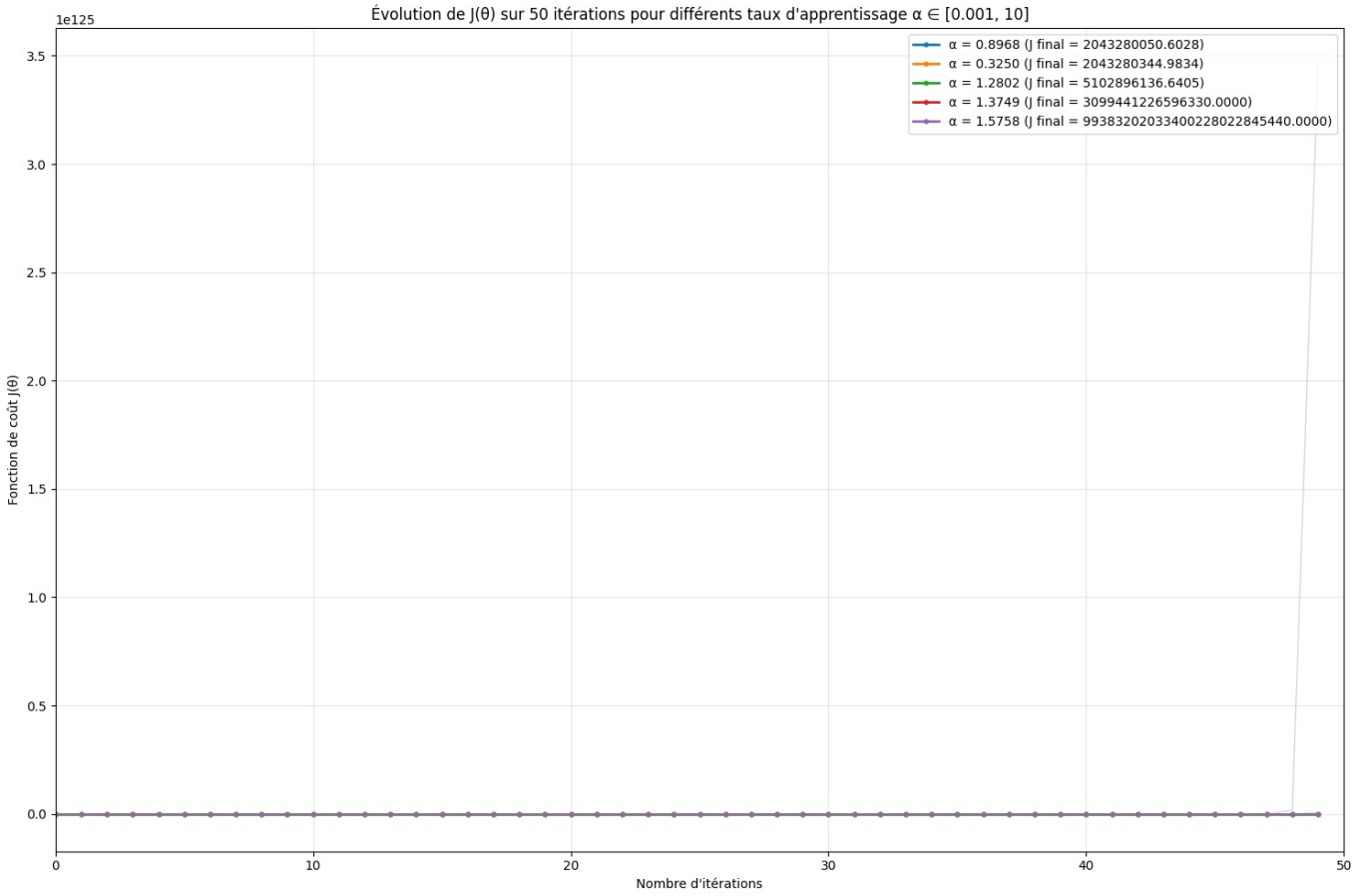
5. Nous allons maintenant automatiser la recherche du meilleur taux d'apprentissage $\alpha \in [0,001 ; 10]$. Pour ce faire, on devra calculer pour chaque itération la valeur de la fonction de coût $J(\theta)$ et on stockera toutes ces valeurs dans un vecteur. Comme on veut sélectionner un taux d'apprentissage efficace, on va comparer les résultats de calcul de $J(\theta)$ sur 50 itérations en changenat de taux d'apprentissage à chaque série d'itérations. Les valeurs de ce taux doivent rester dans l'intervalle initialement donné $\alpha \in [0,001 ; 10]$. On tracera alors les courbes représentant en abscisse, le nombre d'itérations et en ordonnées les valeurs de la fonction de coût ; chaque courbe correspond à une valeur du taux d'apprentissage. A partir de ces courbes, sélectionner ce qui parît être le meilleur taux d'apprentissage et recalculer le vecteur θ jusqu'à la convergence. Utiliser ce vecteur θ pour prédire le prix d'un logement de 1650 m2 et de 3 pièces.

In [13]:
```python
def gradient_with_comparison(X, Y, nb_tests=20, iterations_par_test=50, e=1e-6):
    """
    Compare différents taux d'apprentissage sur 50 itérations chacun
    """
    best_alpha = None
    best_cost = float('inf')
    alpha_costs = []
    all_costs_evolution = []  # Pour tracer les courbes

    print("=== Comparaison de différents taux d'apprentissage ===")

    for test in range(nb_tests):
        # Générer un alpha aléatoire dans [0.001, 10]
        alpha = np.random.uniform(0.001, 10)

        # Initialiser theta pour ce test
        theta = np.zeros(X.shape[1])
        cout_evolution = []

        # Faire exactement 50 itérations avec cet alpha
        for i in range(iterations_par_test):
            theta = iteration(theta, X, Y, alpha)
            cout = J(theta, X, Y)
            cout_evolution.append(cout)

        # Stocker les résultats
        cout_final = cout_evolution[-1]
        alpha_costs.append((alpha, cout_final))
        all_costs_evolution.append((alpha, cout_evolution))

        # Comparer avec le meilleur
        if cout_final < best_cost:
            best_cost = cout_final
            best_alpha = alpha
            print(f"Test {test+1:2d}: Nouveau meilleur α = {alpha:.4f}, J(θ) = {cout_final:.4f} ☆")
        else:
            print(f"Test {test+1:2d}: α = {alpha:.4f}, J(θ) = {cout_final:.4f}")

    print(f"\n=== Résultats de la comparaison ===")
    print(f"Meilleur taux d'apprentissage: α = {best_alpha:.4f}")
    print(f"Meilleur coût après 50 itérations: J(θ) = {best_cost:.4f}")

    return best_alpha, alpha_costs, all_costs_evolution

def convergence_complete_avec_meilleur_alpha(X, Y, best_alpha, e=1e-6, max_iter=2500):
    """
    Calcule θ optimal jusqu'à convergence avec le meilleur alpha trouvé
    """
    print(f"\n=== Convergence complète avec α = {best_alpha:.4f} ===")

    theta = np.zeros(X.shape[1])
    cout_vector = []

    for i in range(max_iter):
        theta_old = theta.copy()
        theta = iteration(theta, X, Y, best_alpha)
        cout = J(theta, X, Y)
        cout_vector.append(cout)

        # Afficher le progrès
        if i % 100 == 0:
            print(f"Itération {i:4d}: J(θ) = {cout:.6f}")

        # Critère d'arrêt
        if i > 0:
            diff_theta = np.linalg.norm(theta - theta_old)
            norm_theta_old = np.linalg.norm(theta_old)

            if norm_theta_old > 1e-10:
                diff_rel = diff_theta / norm_theta_old
```

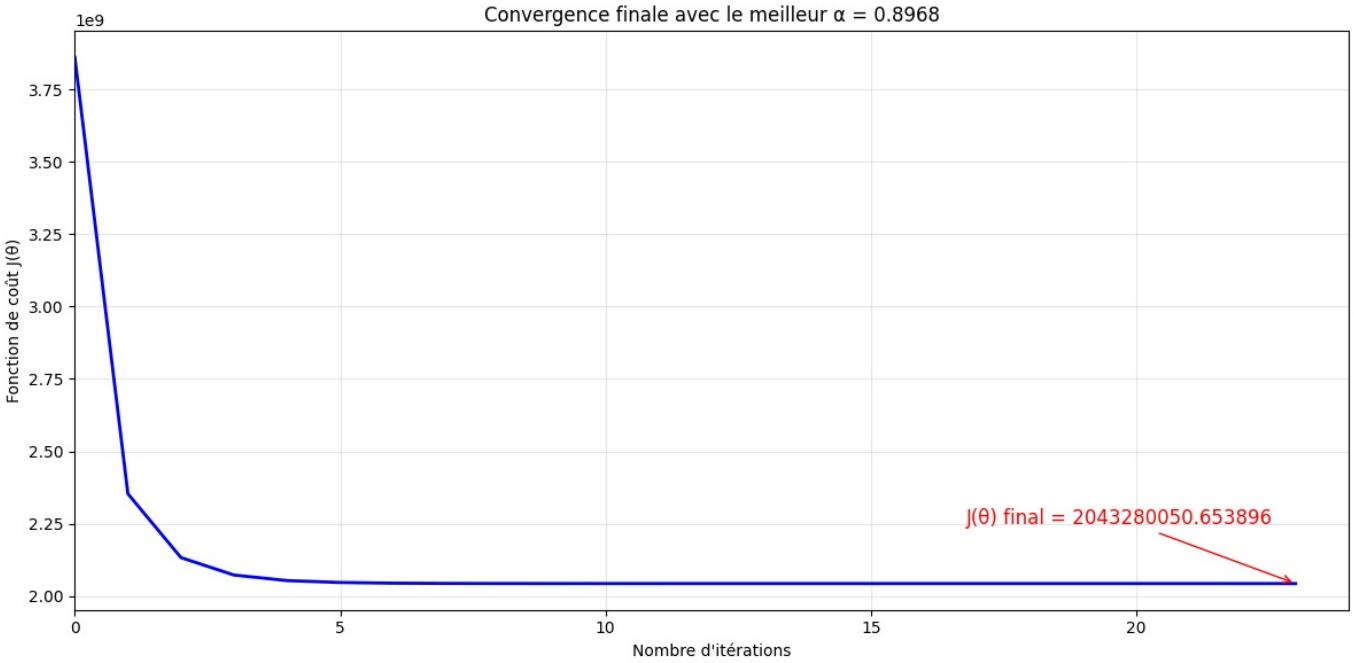
```
                if diff_rel < e:
                    print(f"Convergence atteinte à l'itération {i}")
                    break
    else:
        print("Nombre d'itération maximum atteint")

    print(f"Theta optimal final: {theta}")
    return theta, cout_vector

best_alpha, alpha_costs, all_costs_evolution = gradient_with_comparison(X, Y, nb_tests=20, iterations_par_test=

# Afficher le top 5 des meilleurs taux d'apprentissage
print("\n=== Top 5 des meilleurs taux d'apprentissage ===")
alpha_costs_triees = sorted(alpha_costs, key=lambda x: x[1])[:5]
for i, (alpha_val, cost_val) in enumerate(alpha_costs_triees):
    print(f"{i+1}. α = {alpha_val:.4f}, J(θ) = {cost_val:.4f}")

# Convergence complète avec le meilleur alpha trouvé
theta_optimal, cout_vector = convergence_complete_avec_meilleur_alpha(X, Y, best_alpha)


# VISUALISATION
import matplotlib.pyplot as plt

# Visualisation des courbes de comparaison des alphas
print("\n=== Visualisation des courbes de comparaison ===")

plt.figure(figsize=(15, 10))

# Trier par coût final pour mettre en évidence les meilleurs
sorted_results = sorted(all_costs_evolution, key=lambda x: x[1][-1])

# Tracer toutes les courbes
for i, (alpha, cout_evolution) in enumerate(sorted_results):
    if i < 5:  # Les 5 meilleurs en couleurs distinctes et traits pleins
        plt.plot(range(len(cout_evolution)), cout_evolution,
                linewidth=2, marker='o', markersize=3,
                label=f"α = {alpha:.4f} (J final = {cout_evolution[-1]:.4f})")
    else:  # Les autres en gris transparent
        plt.plot(range(len(cout_evolution)), cout_evolution,
                color='gray', alpha=0.3, linewidth=1)

plt.xlabel('Nombre d\'itérations')
plt.ylabel('Fonction de coût J(θ)')
plt.title('Évolution de J(θ) sur 50 itérations pour différents taux d\'apprentissage α ∈ [0.001, 10]')
plt.legend(loc='upper right')
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.xlim(0, 50)
plt.tight_layout()
plt.show()

# Visualisation de la convergence finale
print("\n=== Visualisation de la convergence finale ===")

plt.figure(figsize=(12, 6))

plt.plot(range(len(cout_vector)), cout_vector, 'b-', linewidth=2)
plt.xlabel('Nombre d\'itérations')
plt.ylabel('Fonction de coût J(θ)')
plt.title(f'Convergence finale avec le meilleur α = {best_alpha:.4f}')
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.xlim(0, len(cout_vector))

# Ajouter une annotation pour le coût final
plt.annotate(f'J(θ) final = {cout_vector[-1]:.6f}',
            xy=(len(cout_vector)-1, cout_vector[-1]),
            xytext=(len(cout_vector)*0.7, cout_vector[-1]*1.1),
            arrowprops=dict(arrowstyle='->', color='red'),
            fontsize=12, color='red')

plt.tight_layout()
plt.show()

# Prédiction pour un logement de 1650 m² et 3 pièces
print("\n=== Prédiction pour un logement de 1650 m² et 3 pièces ===")
nouveau_logement = np.array([[1650, 3]])  # Surface et nombre de pièces
nouveau_logement_norm = scaler.transform(nouveau_logement)  # Normalisation

# Construire correctement X_prediction avec le biais
X_prediction = np.c_[np.ones(nouveau_logement_norm.shape[0]), nouveau_logement_norm]

prix_predit = h(theta_optimal, X_prediction)
```

```python
print(f"Prix prédit: {prix_predit[0]:.2f}")

print(f"\n=== Résumé final ===")
print(f"- Meilleur α trouvé: {best_alpha:.4f}")
print(f"- Theta optimal: {theta_optimal}")
print(f"- Nombre d'itérations pour la convergence: {len(cout_vector)}")
print(f"- Coût final: J(θ) = {cout_vector[-1]:.6f}")
```

```
=== Comparaison de différents taux d'apprentissage ===
Test  1: Nouveau meilleur α = 3.2748, J(θ) = 964493666021114631097747678108673753546023703431895364070587022023065560.0000 ☆
Test  2: α = 6.4299, J(θ) = 153724621321320569594828525818884019523668913058109547464368670303671304832440409474709624842472393592012 8.0000
Test  3: α = 7.2157, J(θ) = 518078220279223045602020303176850827956818829308552960610731969810699128517560536675187596355601989635271557120.0000
Test  4: α = 4.6656, J(θ) = 250816084154746708357133639088142829130183824435635650903459449416987659429033042761482240.0000
Test  5: α = 5.4101, J(θ) = 589306203254731870850539868787296472595294204558261688948329154519177914961355190242 6505859301376.0000
Test  6: Nouveau meilleur α = 1.2802, J(θ) = 5102896136.6405 ☆
Test  7: α = 5.4509, J(θ) = 138295452332220668721286593496783775947308602240358199037565118310263383776791713006 74239874465792.0000
Test  8: α = 5.0759, J(θ) = 412609200814658031949226770774391165607216944535869094865628297257959501332056144240 9328672768.0000
Test  9: α = 1.3749, J(θ) = 3099441226596330.0000
Test 10: α = 8.6193, J(θ) = 131206772889196154532304726421256475538330678614290441366438065957936290607592885852 048221388253013666897759564415893504.0000
Test 11: α = 7.8082, J(θ) = 2894828959831514520920750954185156766439755868555216732056835313042708385150412174172940978492689388364887293427712.0000
Test 12: α = 9.8905, J(θ) = 345608536214084800203938827709315844304004129636001718006107530656223187198026634432 297135420247490845191472850749140781498368.0000
Test 13: α = 5.5051, J(θ) = 42335273772564391336838782772882535569853212326392611569304100350672700330190869125689149780656128.0000
Test 14: α = 9.0846, J(θ) = 37988695410797748337607205932098192035687426332802710398441567573521839429331544096168857679078024142289949436326524747776.0000
Test 15: α = 1.5758, J(θ) = 99383202033400228022845440.0000
Test 16: α = 3.3632, J(θ) = 26253069375589577914946800016427943304064632206035290449196348533867806 72.0000
Test 17: α = 9.3225, J(θ) = 61144501137824516693230632162222944354840764484464473738922056825987611743042459169182887362492882145649277590783832516198 4.0000
Test 18: Nouveau meilleur α = 0.8968, J(θ) = 2043280050.6028 ☆
Test 19: α = 0.3250, J(θ) = 2043280344.9834
Test 20: α = 2.5005, J(θ) = 732884327704634133326471148376706037719208024670522572 80.0000

=== Résultats de la comparaison ===
Meilleur taux d'apprentissage: α = 0.8968
Meilleur coût après 50 itérations: J(θ) = 2043280050.6028

=== Top 5 des meilleurs taux d'apprentissage ===
1. α = 0.8968, J(θ) = 2043280050.6028
2. α = 0.3250, J(θ) = 2043280344.9834
3. α = 1.2802, J(θ) = 5102896136.6405
4. α = 1.3749, J(θ) = 3099441226596330.0000
5. α = 1.5758, J(θ) = 99383202033400228022845440.0000

=== Convergence complète avec α = 0.8968 ===
Itération    0: J(θ) = 3860194475.950355
Convergence atteinte à l'itération 23
Theta optimal final: [340412.65957447 109447.45579035  -6578.01420205]

=== Visualisation des courbes de comparaison ===
```



=== Visualisation de la convergence finale ===




```
=== Prédiction pour un logement de 1650 m² et 3 pièces ===
Prix prédit: 293081.54

=== Résumé final ===
- Meilleur α trouvé: 0.8968
- Theta optimal: [340412.65957447 109447.45579035  -6578.01420205]
- Nombre d'itérations pour la convergence: 24
- Coût final: J(θ) = 2043280050.653896
```