Partie 2 : Modélisation Linéaire et Algorithme du Simplexe

2.1 Méthodologie

La programmation linéaire est une technique d'optimisation mathématique permettant de déterminer la meilleure solution à un problème modélisé par des contraintes et une fonction objectif linéaires. L'algorithme du simplexe est une méthode efficace pour résoudre ces problèmes.

Phases de l'algorithme du simplexe :

- **Phase 0 : Formulation du problème**
  - Définition de la fonction objectif (maximisation ou minimisation)
  - Identification des variables de décision
  - Formulation des contraintes
- **Phase 1 : Recherche d'une solution de base réalisable initiale**
  - Introduction de variables artificielles pour obtenir une base initiale
  - Minimisation de la somme des variables artificielles
  - Élimination des variables artificielles de la base
- **Phase 2 : Optimisation de la fonction objectif**
  - Itérations successives pour améliorer la solution
  - Sélection de la variable entrante (critère d'entrée)
  - Sélection de la variable sortante (critère de sortie)
  - Pivot et mise à jour du tableau

Notre implémentation en Python suit cette méthodologie et inclut :

- La construction du tableau initial du simplexe
- L'exécution des deux phases de l'algorithme
- L'extraction et l'interprétation de la solution optimale

2.2 Exemple 1 : Problème de production

Énoncé du problème :

Une entreprise fabrique deux produits (P1 et P2) nécessitant deux matières premières (M1 et M2). Les contraintes sont :

- P1 nécessite 2 unités de M1 et 1 unité de M2
- P2 nécessite 1 unité de M1 et 3 unités de M2
- M1 disponible : 100 unités, M2 disponible : 90 unités
- Profits : 3€ par P1, 2€ par P2

Formulation mathématique :

Variables de décision : x_1 = quantité de P1, x_2 = quantité de P2

$$\begin{aligned}
&\text{Maximiser } Z = 3x_1 + 2x_2 \\
&\text{sous les contraintes :} \\
&2x_1 + x_2 \leq 100 \quad \text{(M1)} \\
&x_1 + 3x_2 \leq 90 \quad \text{(M2)} \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Résolution et analyse :

— Introduction des variables d'écart s_1, s_2
— Construction du tableau augmenté
— Application de l'algorithme du simplexe
Itérations principales :
— 1ère itération : x_1 entre dans la base
— 2e itération : x_2 entre dans la base
— Vérification de l'optimalité
Solution optimale :

$$x_1 = 30$$
$$x_2 = 20$$
$$Z_{\max} = 3 \times 30 + 2 \times 20 = 130$$

Interprétation :
— Produire 30 unités de P1 et 20 unités de P2
— Les ressources M1 et M2 sont entièrement utilisées

2.3 Exemple 2 : Problème de transport

Énoncé du problème :
Trois usines (A, B, C) et quatre clients (1, 2, 3, 4).
— Capacités : A = 100, B = 80, C = 120
— Demandes : 70, 50, 90, 90 respectivement
Coûts de transport par unité :

	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4
Usine A	10	12	15	8
Usine B	14	10	16	11
Usine C	12	9	11	13

Formulation mathématique :
Variables de décision : x_{ij} = quantité transportée de l'usine i au client j

$$\begin{aligned}\text{Minimiser } Z = {} & 10x_{11} + 12x_{12} + 15x_{13} + 8x_{14} \\ & + 14x_{21} + 10x_{22} + 16x_{23} + 11x_{24} \\ & + 12x_{31} + 9x_{32} + 11x_{33} + 13x_{34}\end{aligned}$$

Contraintes :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 100 \quad \text{(Usine A)}$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 80 \quad \text{(Usine B)}$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 120 \quad \text{(Usine C)}$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 70 \quad \text{(Client 1)}$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50 \quad \text{(Client 2)}$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 90 \quad \text{(Client 3)}$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 90 \quad \text{(Client 4)}$$
$$x_{ij} \geq 0$$

Résolution et analyse :

— Variables d'écart pour les inégalités de production
— Variables artificielles pour les égalités de demande
— Phase I : recherche d'une solution réalisable initiale
— Phase II : optimisation de la solution

Solution optimale :

— Usine A $\rightarrow$ Client 2 : 10 unités, Client 4 : 90 unités
— Usine B $\rightarrow$ Client 2 : 40 unités, Client 3 : 40 unités
— Usine C $\rightarrow$ Client 1 : 70 unités, Client 3 : 50 unités

$$Z_{\min} = 2920$$

Interprétation :

— L'usine A fournit surtout le client 4
— L'usine B fournit les clients 2 et 3
— L'usine C fournit les clients 1 et 3
— Toutes les demandes sont satisfaites, et les capacités respectées