

Let $x \in f^{-1}(B_1)$ and $B_1 \subset B_2$
 $\Rightarrow \exists y \in B_2 \mid f(x) = y$
 $\Rightarrow x \in f^{-1}(B_2)$
 $\Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

Let $x \in f^{-1}B_1 \cap B_2$
 $\iff \exists y \in B_1 \cap B_2 \mid f(x) = y$
 $\iff x \in f^{-1}(B_1)$ and $x \in f^{-1}(B_2)$
 $\iff x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
 $\iff f^{-1}B_1 \cap B_2 = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Let $y \in f(A_1)$ and $A_1 \subset A_2$
 $\Rightarrow \exists x \in A_1 \mid f(x) = y$
 $\Rightarrow y \in f(A_2)$
 $\Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$

Let $y \in f(f^{-1}(B_1))$
 $\Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B_1) \mid f(x) = y$
 $\Rightarrow y \in B_1$
 $\Rightarrow f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$

Let $x \in A_1$
 $\Rightarrow \exists y \in f(A) \mid f(x) = y$
 $\Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$
 $\Rightarrow A_1 \subset f^{-1}(f(A))$