$A \subset X$, μ est une mesure.

Déf : On dit qu'une propriété est vraie presque partout par rapport à la mesure μ sur A si l'ensemble pour lequel la propriété n'est pas vraie est négligeable.

Ex. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ \boxed{0} & \text{sinon. } (x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}) \end{cases}$$

$N = \{1,2\}$ $\quad \lambda_1(N) = 0$

On a $f = 0$ μ-pp.

$y \in \mathbb{R}$. On définit les parties positive et négative respectivement $y^+ = \max(y, 0)$; $y^- = -\min(y, 0)$.

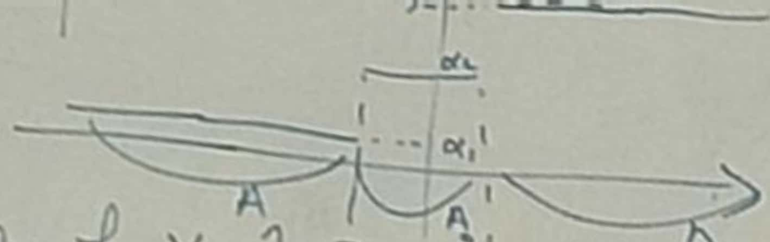
$\in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

On vérifie facilement : 1°/ $y^+ \geq 0$ et $y^- \geq 0$

2°/ $y = y^+ - y^-$. 3°/ $|y| = y^+ + y^-$.

Déf : $A \subset X$. La fct indicatrice de A est définie :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



__Déf__ : On dit que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est étagée s'il existe un nombre fini de valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ (k fixé) telles que : $f(X) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$.

$$A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\}) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{k} A_i = X \quad (\text{partition disjointe de } X)$$

$$f = \sum \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

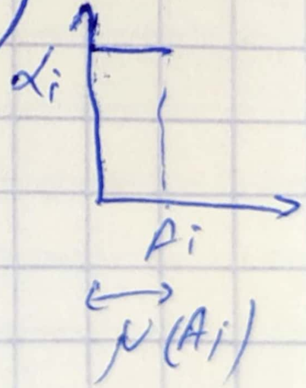
f inte Riemann $\Rightarrow$ f cont et borné

Riemann : $S_N = \sum f(a_i) \frac{b-a}{N}$

$$\int f(x)dx = \lim_{N \to +\infty} S_N$$

Etape 1 : f est fct étagée positive

on définit l'intégrale de Lebesgue comme suit : $\int_X f d\mu = \sum \alpha_i \mu(A_i)$



$P \in \mathbb{N}^*$

$\boxed{p \in \mathbb{N}^*}$. Etape 2 f positive $\frac{1}{2^p}$ $\frac{1}{p}$. $f : X \to \mathbb{R}_+$

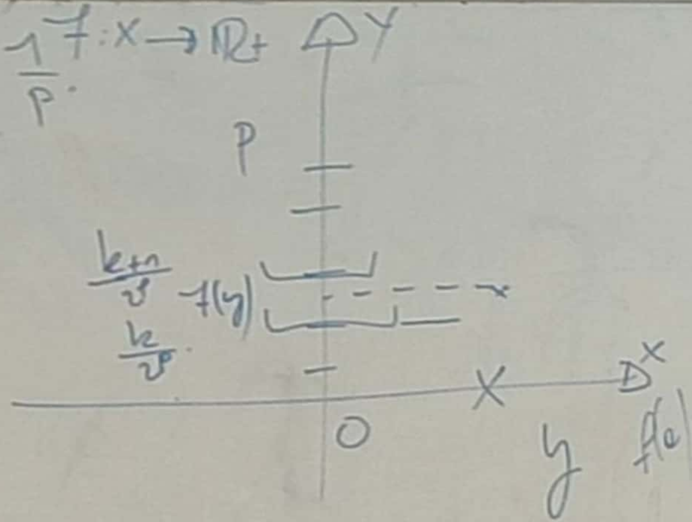
$\left[\frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p}\right[$.

$k=0 \longrightarrow \left[0, \frac{1}{2^p}\right[\longrightarrow \frac{1}{2^p}$.

$k=1 \longrightarrow \left[\frac{1}{2^p}, \frac{2}{2^p}\right[\longrightarrow \frac{1}{2^p}$

$\vdots$

$k = p2^p - 1 \longrightarrow \left[\frac{p2^p-1}{2^p}, p\right[$.



$$\begin{cases} f_p(y) = \frac{k}{2^p}. & k = \{0, 1, \ldots, p2^p - 1\} \text{ si } f(y) \leq p. \\ f_p(y) = p & \text{si } f(y) > p. \end{cases}$$

Résultats

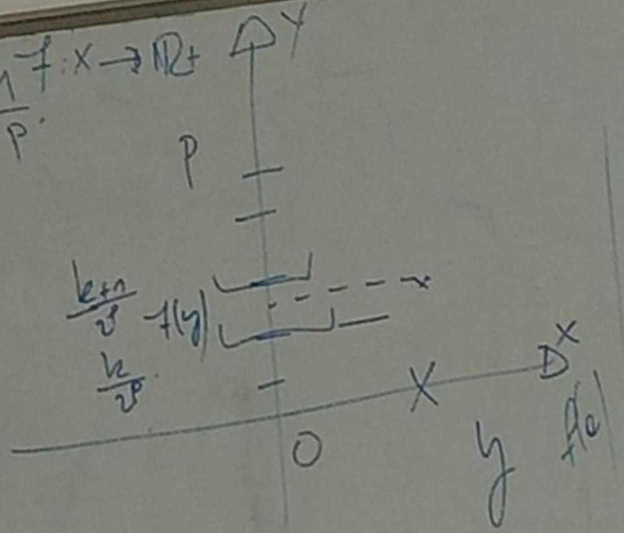
1°/ — (f_p)

$\forall y$

2°/ —

3°/ —

...sitive $\frac{1}{2^p}$ $\frac{1}{p}$. $f : X \to \mathbb{R}_+$



Résultats:

1°/ — $(f_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ suite de f^{ct} croissante positives étagées

$\forall y \quad f_p(y) \leq f_{p+1}(y)$.

2°/ — $\forall y$. $f_p(y) \xrightarrow[p \to \infty]{} f(y)$.

3°/ — D'après l'étape 1. On a :

$I_p = \int_X f_p \, d\mu \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{cases} f_p(y) = \frac{k}{2^p} & k = \{0, 1, \dots, p2^p - 1\} \text{ si } f(y) \leq P. \\ f_p(y) = p & \text{si } f(y) > p. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Une suite $(I_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ croissante positive réelle.

Étape 3 : $y^+ = \max(y,0)$. $y^- = -\min(y,0)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ $\quad f^+(x) = \left(f(x)\right)^+$

$f^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f^-(x) = \left(f(x)\right)^-$

Vérifier que : $f = f^+ - f^-$

$\frac{1}{p}$. $f : X \to \mathbb{R}_+$

<u>Etape 3</u> : On suppose que $f : X \to \mathbb{R}$ est arbitraire

On écrit : $f = f^+ - f^-$.

On dit que f est intégrable ssi : $\int f^+ d\mu < \infty$ et $\int f^- d\mu < \infty$.

$$f_p(y) = \frac{k}{2^p}$$

$-\mathrm{Min}(y, 0)$

$$f_p(y) = p$$

$(x) = (f(x))^+$

Les propriétés fondamentales de l'intégrale de Lebesgue

(L1) Pour toute constante $c \in \mathbb{R}$ on a $\int_A c\,d\mu = c\mu(A)$.

Conséquences :

1. La fonction constante $= 0$ est intégrable sur tout ensemble A et son intégrale sur A est égale à 0.
2. Toute fonction constante non nulle est intégrable sur A si et seulement si $\mu(A) < +\infty$.
3. On a la formule pratique suivante pour calculer la mesure d'un ensemble A :

$$\mu(A) = \int_A 1\,d\mu.$$

Les propriétés fondamentales de l'intégrale de Lebesgue

(L3) (relation de Chasles) Supposons que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et soit $f : A_1 \cup A_2 \to \mathbb{C}$. Si f est intégrable sur A_1 et sur A_2 alors f est intégrable sur $A_1 \cup A_2$ avec en plus

$$\int_{A_1 \cup A_2} f \, d\mu = \int_{A_1} f \, d\mu + \int_{A_2} f \, d\mu.$$

(L4) Soient $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ telles que $f(y) = g(y)$ μ - p. p. $y \in A$. Si f est intégrable sur A alors g est intégrable sur A avec en plus

$$\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu.$$

Exemple

Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap]0,1[\\ 0 & \text{si} \quad x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap]0,1[. \end{cases}$$

où $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.

Montrer que f est intégrable Lebesgue et non intégrable au sens de Riemann.