Algèbre Matriciel : Cherif — Méthodes itératives | $Ax=b$

I) Cas Général : condition de convergence x^*

$A = M - N$

avec et $\begin{cases} M : \text{inversible} \\ \text{ou } \begin{cases} \rho(M^{-1}N) < 1 \\ A \text{ et } M + {}^tN \text{ déf positives} \end{cases} \end{cases}$

II) Méthode de Jacobi :

$\begin{cases} M = D_A \\ N = -E-F \end{cases}$ avec $\begin{cases} \cdot\ D_A : \text{diag}(A) \\ \cdot\ E : \text{elts ss diag} \\ \cdot\ F : \text{elts sur diag} \end{cases}$

- **Matrice de Jacobi**

$$J = M^{-1}N$$

$$J = D_A^{-1}(-E-F)$$

- **Condition de CV :**
  - → Mtd 1 : A à diag str dominante $\Rightarrow$ Et $\begin{cases} \rho(J) < 1 \\ D_A \text{ inv} \end{cases}$
  - → Mtd 2 : A et $2D - A$ sym déf positives $\Rightarrow$ Et $\begin{cases} D_A \text{ inv} \\ A \text{ et } M + {}^tN \text{ déf positives} \end{cases}$

- **En pratique :** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$x^* \text{ CV} \iff \forall i \in [1,n] \quad |a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$$

III) Méthode Gauss Seidel :

$\begin{cases} M = D_A + E \\ N = -F \end{cases}$

- **Matrice Gauss-Seidel**

$$G_S = (D_A + E)^{-1}(-F)$$

- **Condition CV :** (la même)

IV) Algos des Mtds itératives :

1) Jacobi :

Etape 1 : vérifier si A est diag dom.

↳ si Oui : Etape 2

↳ sinon : rendre A diag dom.

⚠ en agissant identiquement sur les lignes de A et b uniquement

Etape 2 : Ecriture système linéaire :

$$\begin{cases} x^{k+1} = \lambda_1 y^k + \lambda_2 z^k + \lambda_3 \\ y^{k+1} = \alpha_1 x^k + \alpha_2 z^k + \alpha_3 \\ z^{k+1} = \beta_1 x^k + \beta_2 y^k + \beta_3 \end{cases}$$

⚠ α_M^N $\begin{cases} N : \text{itération} \\ M : \text{~~composante~~ indice} \end{cases}$

Etape 3 calculer successivement $x^1, x^2, \ldots$

jusqu'à atteindre ou $\begin{cases} \text{soit max it} \\ \text{soit une approximation adéquate} \end{cases}$

⚠ Approximation : ε

$$\begin{cases} \text{mtd 1} : \|x^{k+1} - x^k\|_\infty < \varepsilon \\ \text{mtd 2} \quad \|Ax^{k+1} - b\|_\infty < \varepsilon \end{cases}$$

$\|A\|_\infty = \max_{i \in [1,n]} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$

si $x \in \mathbb{C}^n$ $\|x\|_\infty = \max_{i \in [1,n]} (|x_i|)$

Etape 4 : on trouve x^*

2) Gauss-Seidel :

seule différence réside dans l'étape 2

$$\begin{cases} x^{k+1} = \lambda_1 y^k + \lambda_2 z^k + \lambda_3 \\ y^{k+1} = \alpha_1 x^{k+1} + \alpha_2 z^k + \alpha_3 \\ z^{k+1} = \beta_1 x^{k+1} + \beta_2 y^{k+1} + \beta_3 \end{cases}$$

⚠ convergence plus rapide que Jacobi

3) SOR :

seule diff réside dans l'étape 2

CNS

⚠ $w \in]0, 1[$ si A diag Dom

⚠ $w \in]0, 2[$ si A sym déf positive

$$\begin{cases} x^{k+1} = (1-w)x^k + w(\lambda_1 y^k + \lambda_2 z^k + \lambda_3) \\ y^{k+1} = (1-w)y^k + w(\alpha_1 x^{k+1} + \alpha_2 z^k + \alpha_3) \\ z^{k+1} = (1-w)z^k + w(\beta_1 x^{k+1} + \beta_2 y^{k+1} + \beta_3) \end{cases}$$

V) Remarques Importantes :

1) Rappel Déterminant :

- $\det(D) = \prod d_i$; $\det(T_n) = \prod d_i$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- $\det({}^tA) = \det(A)$
- $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$
- $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$; $\det(A) \neq 0$

- $L_i \longleftrightarrow L_j \implies \times(-1)$ det
- $L_i \leftarrow \lambda L_i \implies \times(\lambda)$ det
- $L_i \leftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j L_j \implies$ même det

---

- Astuces calcul det :
  - → Astuce ①: les combinaisons linéaires (det inchangé)
  - → Astuce ②: matrice triangulaire par bloc
  - → Astuce ③: Dev par L ou C (max de zeros)

2) Rappel calcul inverse de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- si $A \in GL_n(\mathbb{K}) \implies A^{-1} = \dfrac{{}^T\mathrm{Com}(A)}{\det(A)}$

- si $A \in GL_2(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- si $A \in GL_3(\mathbb{K})$
  - → dét $\det(A)$
  - → dét $\mathrm{com}(A)$ $\begin{pmatrix} |\because| & |\because| & |\because| \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$
    - → matrices des mineurs
    - → matrices des signes $\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & & & \\ + & \cdots & & \end{pmatrix}$
  - → dét ${}^T\mathrm{com}(A)$.

③ Rappel Réduction :

$\lambda \in Sp(A) \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$

$\iff \lambda$ solution de $\chi_A(x) = x^n - tr(A)\,x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$

$\Rightarrow$ si $A \in M_2(\mathbb{K})$: $\chi_A(x) = x^2 - tr(A)\,x + \det(A)$

$\Rightarrow$ si $A \in M_3(\mathbb{K})$:
- → essayer de trouver une solution triviale $-1, 0, 1, e..$
- → factoriser le polynome caractéristique par $(X - \text{solution})$
- → factoriser le polynome de 2nd degré
- → trouver les valeurs propres

↳ $\rho(A) = \max\{|\lambda_i| \,;\, \lambda_i \in Sp(A)\}$

VI Remarques Calcul:

• Exemple calcul déterminant par développement :

↳ si $A \in M_3(\mathbb{R})$: règle de Sarrus

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - bdi$$

↳ si $A \in M_n(\mathbb{R})$ tq $n \geq 3$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$ (Dev par 1ère ligne)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$ (Dev par 1ère colonne)

• Supposons $A \in GL_3(\mathbb{R})$

↳ matrice des mineurs

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

d'où $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \, {}^{T}com(A)$

• division euclidienne polynomiale :

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 + 0x^2 + 5x - 4 & x^2 - x + 1 \\ \cline{3-3} - & (x^3 - x^2 + x) & x + 1 \\ \cline{2-2} & 0 + x^2 + 4x - 4 & \\ - & (x^2 - x + 1) & \\ \cline{2-2} & 0 + 5x - 5 & \end{array}$$