Méthodes itératives pour résoudre les systèmes linéaires

1 - Méthode Jacobi

2 - Méthode Gauss-Seidel

3 - Méthode Sor

4 - Méthode du gradient conjugué

Différence entre

Méthodes directes

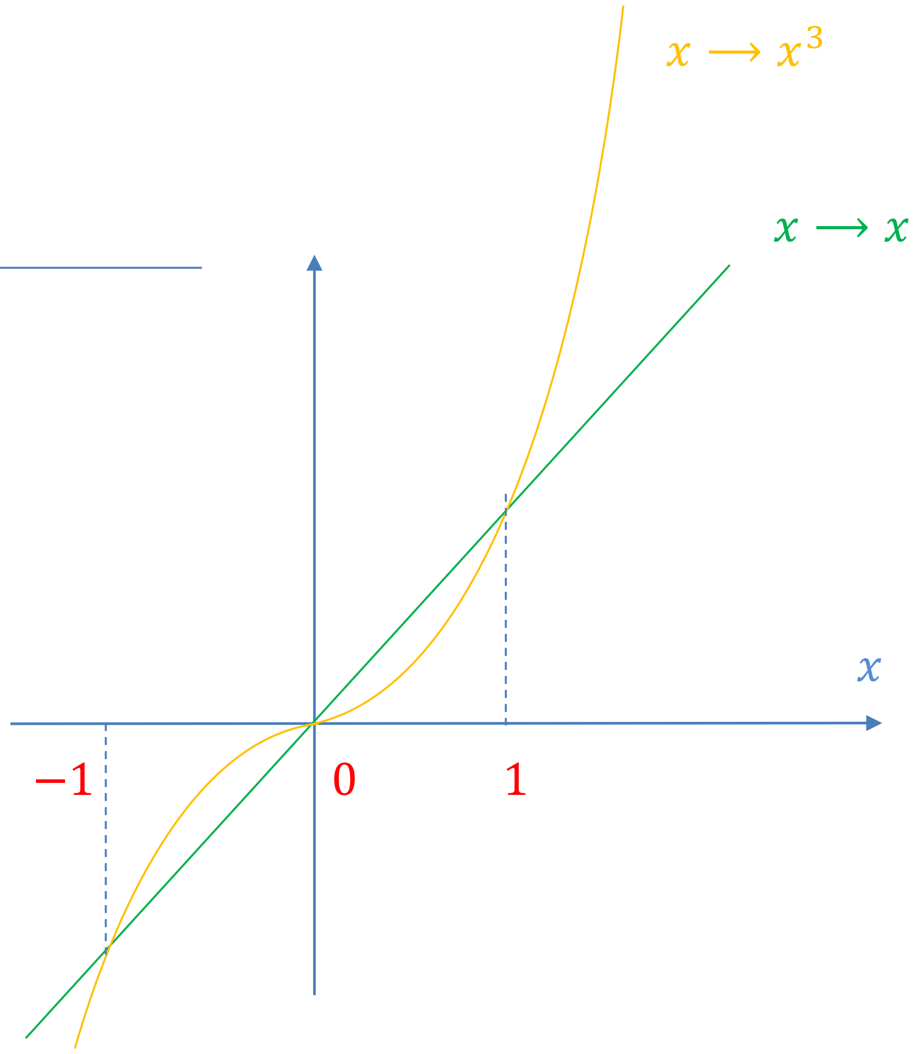
Méthodes itératives

Exemple 01 *Méthode directe*

On cherche x pour lequel : $f(x) = 0$

On prend comme exemple : $f(x) = x(x^2 - 1)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = x$$

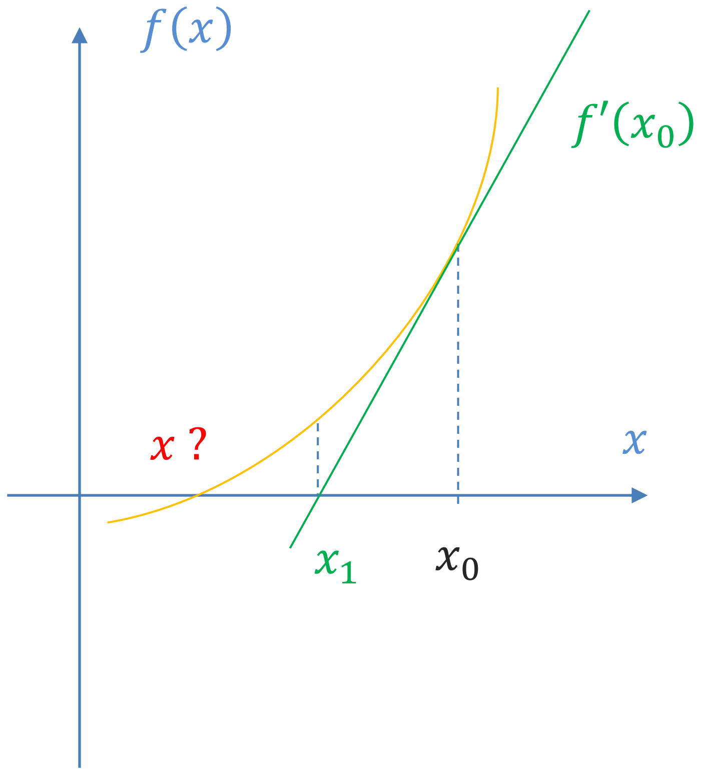


Exemple 02 *Méthode itérative - Newton*

On considère une fonction $f(x)$ dérivable

On cherche x pour lequel : $f(x) = 0$

On prend une valeur de départ x_0



On a : $f'(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$f(x) = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$$

$$f(x) \approx 0$$

$$(x - x_0)f'(x_0) + f(x_0) \approx 0$$

On prend la nouvelle valeur x_1 qui est plus proche du x recherché.

Exemple 02 *Méthode itérative - Newton*

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

x_2

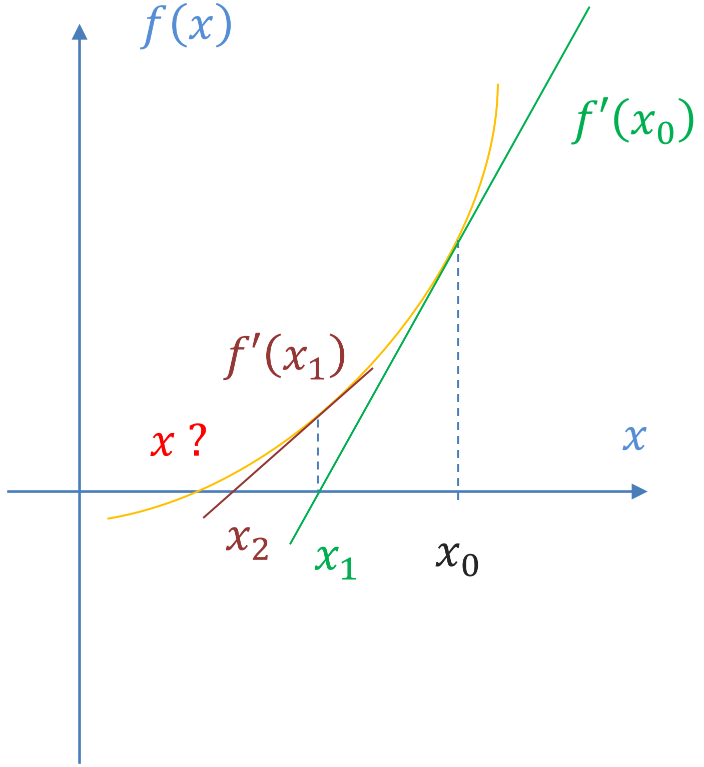
...

Méthode itérative

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Seuil d'arrêt ε

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$$



Programmation

Résolution d’une équation.

Résolution d’un système d’équations linéaires.

Rappels sur l'algèbre linéaire

Nous appelons **norme matricielle** : une norme définie sur $M_n(C)$ qui est compatible avec la multiplication de matrice:

$$\|\,.\,\| : M_n(C) \rightarrow R^+$$
$$A \rightarrow \|\, A \,\|$$

$\forall\, A, B \in M_n(C) \quad , \quad \forall\, \lambda \in C$

- $\|\, A \,\| = 0 \iff A = 0$ *Séparation*
- $\|\lambda \,.\, A\,\| = |\lambda| \,.\, \|A\,\|$ *Homogénéité*
- $\|A + B\| \leq \|A\,\| + \|B\,\|$ *Inégalité triangulaire*
- $\|A \,.\, B\| \leq \|A\,\| \,.\, \|B\,\|$

Rappels sur l'algèbre linéaire

Exemple 03 Norme de Frobenius

$\forall A \in M_n(C)$:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}} = \sqrt{tr(\,{}^tA\,A)}$$

Étudiez les 4 propriétés de la norme

Rappels sur l'algèbre linéaire

Rappel Norme vectorielle

Norme infinie

$$\forall\, x \in C^n: \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

Rappels sur l'algèbre linéaire

Définition 01 Norme induite

Soit $\|\,.\,\|_v$ une norme vectorielle sur C^n

On appelle norme induite :

$$M_n(C) \to R^+$$

$$A \to \|A\| = \max_{x \in C^n,\, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

Exemple 04 La norme induite de la norme vectorielle $\|\,.\,\|_\infty$ s'écrit: $\| A \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Rappels sur l'algèbre linéaire

Définition 02

Une norme matricielle $\|\,.\,\|$ est **compatible** avec une norme vectorielle $\|\,.\,\|_v$ ssi :

$$\forall\, x \qquad \|\, A\,.\,x\,\|_v = \|A\,\|\,.\,\|\,x\,\|_v$$

Propriété 01

Pour toute norme matricielle, il existe une norme vectorielle avec laquelle elle est compatible.

Rappels sur l'algèbre linéaire

Définition 03 Rayon spectral

Soit $A \in M_n(C)$

Notons λ_i les valeurs propres de A

On appelle **rayon spectral** de la matrice A le nombre réel : $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$

Propriétés 02

Pour toute norme matricielle $\| \, . \, \|$ et toute matrice A: $\rho(A) \leq \|A\|$

$\forall A \in M_n(C), \forall \varepsilon \in R^+$: $\exists$ une norme matricielle induite $\| \, . \, \|_*$ tq: $\rho(A) \leq \| A \|_* \leq \rho(A) + \varepsilon$

Méthodes itératives

On cherche à résoudre une équation de la forme : $Ax = b$

Les méthodes directes fournissent la solution x^* après un grand nombre d'opérations.

Les méthodes itératives permettent d'automatiser ces opérations:

- On construit une suite de vecteurs $(x^k)_{k \in N}$ qui tend vers x^*
- On choisit x^0 : l'approximation de départ par une méthode directe
- Pour construire $(x^k)_{k \in N}$, on utilise la linéarité pour décomposer la matrice A en une partie facilement inversible et un reste.

Méthodes itératives

On décompose la matrice A :

$$A = M - N$$

avec M : une matrice facilement inversible

L'équation $Ax = b$ devient :

$$Mx = Nx + b$$

On calcule la suite de vecteurs $(x^k)_{k \in N}$:

$$Mx^{k+1} = Nx^k + b$$

$$\begin{cases} x^{k+1} = M^{-1}Nx^k + M^{-1}b \\ x^0 \; donné \end{cases}$$

Méthodes itératives

Posons : $C = M^{-1}N$ $\quad D = M^{-1}b$

Nous obtenons la suite récurrente:
$$\begin{cases} x^{k+1} = C\,x^k + D \\ x^0 \; donné \end{cases}$$

La solution x^* est donc le point fixe de la fonction linéaire: $f(x) = C\,x + D$

Le problème se ramène donc à l'étude de la convergence de la fonction f

Méthodes itératives

Théorème 01

Soit $A \in M_n(C)$

S'il existe une norme matricielle induite $\|\,.\,\|_*$ vérifiant : $\| A \|_* < 1$

alors:

- l'équation $x = Ax + B$ admet une solution unique x^*
- $\forall\, x_0$: $x^k \to x^*$

Méthodes itératives

Démonstration

Nous avons: $\rho(A) \leq \| A \|_* < 1$

Donc les valeurs propres λ_i vérifient : $\|\lambda_i\| < 1$

Donc la matrice $I - A$ est inversible

Donc il existe une unique solution x^*

Méthodes itératives

Théorème 02

Les assertions suivantes sont équivalentes:

- A est une matrice convergente : $A^k \longrightarrow 0$
- $\rho(A) \leq 1$
- Il existe une norme matricielle induite vérifiant : $\| A \|_* \leq 1$

Méthodes itératives

Théorème 03

Soit A est une matrice **symétrique définie positive**

Si : $A = M - N$ et $M + {}^{t}N$ est définie positive

Alors la suite: $x^{k+1} = C\, x^{k} + D$ est convergente

$(\mathrm{C} = M^{-1}N)$

Méthodes itératives

Objectif

Pour résoudre le système d'équations: $Ax = b$

Nous devons décomposer A sous la forme : $A = M - N$

Tq: $$\begin{cases} \text{M soit inversible} \\ et \\ \left| \begin{array}{l} C = M^{-1}N \quad avec \quad \rho(C) < 1 \\ ou \\ A \; et \; M + {}^{t}N \text{ sont définies positives} \end{array} \right. \end{cases}$$

Comment choisir M et N ?

1 - Méthode de Jacobi

Exemple 05

Considérons le système d'équations: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nous cherchons donc une solution $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}$

Le développement des lignes nous donne:

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{matrix} \qquad \text{soit} \qquad \begin{matrix} x_1 = -x_2 \\ x_2 = -x_1 + x_3 - 1 \\ x_3 = 2 - x_2 \end{matrix}$$

1 - Méthode de Jacobi

Exemple 05

Itérativement, considérons un point de départ : $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix}$

Nous cherchons une nouvelle valeur $x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix}$ plus proche du résultat par :

$$\begin{aligned} x_1^1 &= -x_2^0 \\ x_2^1 &= -x_1^0 + x_3^0 - 1 \\ x_3^1 &= 2 - x_2^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^1 &= -x_2^0 \\ x_2^1 &= -x_1^0 + x_3^0 - 1 \\ x_3^1 &= 2 - x_2^0 \end{aligned}$$

Nous réitérons jusqu'à ce qu'on s'approche suffisamment de la solution

1 - Méthode de Jacobi

Algorithme

Données : $A, b, x^0, n, \varepsilon$

Début

Initialisation par x_i^0

pour $i = 1$ à n faire

$x_i^k \leftarrow x_i^0$

Itérations pour s'approcher de x^*

tant que $\|Ax^k - b\| > \varepsilon$ faire

pour $i = 1$ à n faire

$$x_i^{k+1} \leftarrow \frac{b_i - \sum_{j=1, j\neq i} a_{ij} x_j^k}{a_{ii}}$$

pour $i = 1$ à n faire

$x_i^k \leftarrow x_i^{k+1}$

Fin

1 - Méthode de Jacobi

Algorithme

Données : $A, b, x^0, n, \varepsilon$, max_it

Début

pour $i = 1$ à n faire
$x_i^k \leftarrow x_i^0$

$Nb \leftarrow 0$

tant que $\|Ax^k - b\| > \varepsilon$ $et\ Nb <$ max_it faire

$Nb \leftarrow Nb + 1$

pour $i = 1$ à n faire
$x_i^{k+1} \leftarrow \frac{b_i - \sum_{j=1, j\neq i} a_{ij} x_j^k}{a_{ii}}$

pour $i = 1$ à n faire
$x_i^k \leftarrow x_i^{k+1}$

Fin

1 - Méthode de Jacobi

Décomposition de A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & & \\ & & & \cdots & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Dg = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \cdots & & \\ & & & \cdots & 0 \\ 0 & & & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \cdots & & \\ & & & \cdots & 0 \\ a_{n1} & & & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \cdots & & \\ & & & \cdots & a_{n-1n} \\ 0 & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\textit{éléments diagonaux}$

$\textit{éléments sous} - \textit{diagonaux}$ $\quad a_{ij} \;\; i > j$

$\textit{éléments sur} - \textit{diagonaux}$ $\quad a_{ij} \;\; i < j$

1 - Méthode de Jacobi

Décomposition de A

$$A = M - N$$

$$M = Dg$$
$$N = -E - F$$

et on calcule la suite:

$$x^{k+1} = M^{-1}N\,x^k + M^{-1}b$$

Définition 04

On appelle matrice de JACOBI la matrice:

$$J = Dg^{-1}(-E - F)$$
$$= M^{-1}N$$

1 - Méthode de Jacobi

Propriété 03

$$x^{k+1} = M^{-1}N\, x^k + M^{-1}b$$

$$J = Dg^{-1}(-E - F) = M^{-1}N$$

La suite x^k converge ssi :

- Dg est inversible $\quad a_{ii} \neq 0$
- $\rho(J) < 1$

En pratique, on cherche des matrices à diagonale strictement dominante $\quad \forall i :\ |a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$

ou des matrices symétriques $\quad \forall i\ \forall j\colon\ a_{ij} = a_{ji}$

1 - Méthode de Jacobi

Théorème 04

Si : A est une matrice à diagonale strictement dominante,

Alors : la méthode de JACOBI est convergente quelque soit le vecteur initial x^0.

1 - Méthode de Jacobi

Théorème 05

Si: A et $2D - A$ sont symétriques définies positives,

Alors: la méthode de JACOBI converge.

2 - Méthode Gauss-Seidel

On reprend l'algorithme de Jacobi

Données : $A, b, x^0, n, \varepsilon$, max_it

Début

pour $i = 1$ à n faire

$x_i^* \leftarrow x_i^0$

$Nb \leftarrow 0$

tant que $\|Ax^k - b\| > \varepsilon$ $et\ Nb <$ max_it faire

$Nb \leftarrow Nb + 1$

pour $i = 1$ à n faire

$$x_i^{k+1} \leftarrow \frac{b_i - \sum_{j=1, j<i} a_{ij}\, x_j^{k+1} - \sum_{j=1, j>i} a_{ij}\, x_j^k}{a_{ii}}$$

pour $i = 1$ à n faire

$x_i^k \leftarrow x_i^{k+1}$

Fin

2 - Méthode Gauss-Seidel

Décomposition de A

$$A = M - N$$

$$M = Dg + E$$
$$N = -F$$

et on calcule la suite:

$$x^{k+1} = M^{-1}N\,x^k + M^{-1}b$$

Définition 05

On appelle matrice de Gauss-Seidel la matrice:

$$GS = (Dg + E)^{-1}(-F)$$
$$= M^{-1}N$$

2 - Méthode Gauss-Seidel

Propriété 04

$$x^{k+1} = M^{-1}N\, x^k + M^{-1}b$$

$$GS = (Dg + E)^{-1}(-F) = M^{-1}N$$

La suite x^k converge ssi :

- $(Dg + E)$est inversible $\qquad a_{ii} \neq 0$
- $\rho(GS) < 1$

2 - Méthode Gauss-Seidel

Théorème 06

Si : A est une matrice à diagonale strictement dominante,

Alors : la méthode de GAUSS-SEIDEL est convergente quelque soit le vecteur initial x^0.

2 - Méthode Gauss-Seidel

Théorème 07

Si : A est une matrice symétrique définie positive,

Alors : la méthode de GAUSS-SEIDEL est convergente quelque soit le vecteur initial x^0.

Applications 01

Exercice 1

Soit le système $AX = b$ $$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

On prend : $$X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \max\_it = 4$$

1. A est-elle à diagonale dominante?
2. Résoudre le système en utilisant Jacobi.
3. Résoudre le système en utilisant Gauss-Seidel.

Applications 01

Exercice 2

Soit le système $AX = b$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 10 \\ 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

On prend : $X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \max\_it = 3$

1. Transformer A pour qu’elle soit à diagonale dominante.
2. Résoudre le système en utilisant Jacobi.
3. Résoudre le système en utilisant Gauss-Seidel.

Applications 01

Exercice 3

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices B_J et B_{GS}
2. Calculer $\rho(B_J)$ et $\rho(B_{GS})$
3. Quelle méthode est plus rapide?

Applications 01

Exercice 4

Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. En utilisant la méthode Jacobi,

   résoudre de système $AX = b$ en fixant: $\varepsilon = 0,25$

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3 - Méthode SOR (Successive Over Relaxation)

$$X_i{}^{k+1} = (1-\omega)\,X_i{}^{k} + \frac{\omega}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j\Big)$$

$$X_i{}^{k+1} = (1-\omega)\,X_i{}^{k} + \frac{\omega}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\Big)$$

$$0 < \omega < 2$$

3 - Méthode SOR (Successive Over Relaxation)

Exemple 06

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\omega = 1{,}25 \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= 7 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= -7 \end{aligned}$$

3 - Méthode SOR (Successive Over Relaxation)

Exemple 06

$$x_1^{k+1} = (1-\omega)\, x_1^{k} + \omega .\ \frac{1}{3}\left(x_2^{k} - x_3^{k} - 1\right)$$
$$x_2^{k+1} = (1-\omega)\, x_2^{k} + \omega .\ \frac{1}{3}\left(x_1^{k+1} + x_3^{k} + 7\right)$$
$$x_3^{k+1} = (1-\omega)\, x_3^{k} + \omega .\ \frac{1}{3}\left(-x_1^{k+1} + x_2^{k+1} - 7\right)$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= 7 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= -7 \end{aligned}$$

$Calculer\ x^1, x^2, x^3$

3 - Méthode SOR (Successive Over Relaxation)

Exercice 5

1. Refaire le système de l’exercice 4 en utilisant la méthode SOR.

2. Refaire le système de l’exercice 2 en utilisant la méthode SOR.

4 - Méthode du gradient conjugué

On cherche le minimum de la fonction

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 + 4$$

On considère le point de départ: $X^0 = \begin{pmatrix} x^0 = 2 \\ y^0 = 1 \end{pmatrix}$

On calcule le gradient $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

En X^0: $\frac{\partial f}{\partial x} = 6$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$ $\nabla f = 6i + 2j$

4 - Méthode du gradient conjugué

$$X^{k+1} = X^{k} + h \, \nabla\vec{f}$$

$$f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 + 4$$

$$X^{1} = \binom{2}{1} + h\binom{6}{2}$$

$$f(X^{1}) = (2+6h)^2 + 2(2+6h) + (1+2h)^2 + 4$$

$$X^{1} = \binom{-1}{0}$$

$$g(h) = (2+6h)^2 + 2(2+6h) + (1+2h)^2 + 4$$

g_{min} $$\frac{\partial g}{\partial h} = 0$$ $$\boxed{h^* = -\frac{1}{2}}$$

En X^0: $$\frac{\partial f}{\partial x} = 6 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \qquad \nabla f = 6i + 2j$$

4 - Méthode du gradient conjugué

$$X^0 = \begin{pmatrix} x^0 = 2 \\ y^0 = 1 \end{pmatrix} \qquad f(X^0) = 13$$

$$X^1 = \begin{pmatrix} x^1 = 2 + 6 \times (-\frac{1}{2}) \\ \\ y^1 = 1 + 2 \times (-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(X^1) = 3$$

4 - Méthode du gradient conjugué

Le nouveau point de départ: $X^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Le gradient en X^1:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2 = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$$

$$\nabla f = 0i + 0j$$

Conclusion: X^1 est un minimum local

Et: $f_{min} = (-1)^2 + 2(-1) + 0^2 + 4 = 3$

4 - Méthode du gradient conjugué

Exercice 5

Trouver le minimum de la fonction

$$f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$$

En considérant le point de départ: $X^0 = \begin{pmatrix} x^0 = 0 \\ y^0 = 0 \end{pmatrix}$

4 - Méthode du gradient conjugué

Exercice 6

Trouver le minimum de la fonction

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy - \frac{8}{9}x^3$$

En considérant le point de départ: $X^0 = \begin{pmatrix} x^0 = 2 \\ y^0 = 1 \end{pmatrix}$