Optimisation :

Exo (1) :

trouver la distance entre $O = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et le plan d'équation $2x + y + 3z - 4 = 0$

(1) Mtd géométrique

$$d(O, \text{plan}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|2 + 1 + 3 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}}$$

$$= 0,53$$

(2) Mtd Analytique (Lagrange)

$$\begin{cases} f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \\ g(x,y,z) = 2x + y + 3z - 4 \end{cases}$$

$$\text{grad}\,(f(x,y,z)) = \lambda\ \text{grad}\,(g(x,y,z))$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \\ 2x + y + 3z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-1) = 2\lambda \\ 2(y-1) = \lambda \\ 2(z-1) = 3\lambda \\ 2x + y + 3z = 4 \\ \lambda \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{9}{4}\lambda^2 \\ 2(\lambda+1) + \frac{\lambda}{2} + 1 + 3\left(\frac{3}{2}\lambda + 1\right) = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-2}{7} \\ f(\lambda) = \frac{2}{7} \end{cases}$$

d'où $d = \sqrt{\frac{2}{7}} = 0{,}53$

Ex 3

$F(x) = \lambda^T (Ax - b)$ avec $\lambda, b \in \mathbb{R}^m$ $x \in \mathbb{R}^n$ $A \in \mathcal{M}_{mn}$

- Calculer le grad $(F(x))$

$$F(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n - b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n - b_m \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \lambda_1 (a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n - b_1) + \dots + \lambda_m (a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n - b_m)$$

alors :

$$\nabla_x F(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_m} \right)$$

$$\nabla_x F(x) = \lambda_1 (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n}) + \dots + \lambda_m (a_{m1} + \dots + a_{mn})$$

$$\nabla_x F(x) = A^T \lambda$$

Ex 2

Prob OL :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} \left(-x_1 + 2x_2 - 7x_3\right)$$

$$\text{tq :} \quad \begin{cases} x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 \geq 1 \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

(1) Forme primale standard

$$\min \tilde{c}^T \tilde{x} \quad \text{tq} \quad \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \quad \text{et} \quad \tilde{x} \geq 0$$

(2) Rendre ce problème standard :

On sait pas le signe de x_2 $\quad x_2 = x_2^+ - x_2^-$

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2^+ - 6x_2^- - 3x_3 - 2 = y_1 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2^+ - x_2^- - 5x_3 - 1 = y_2 \geq 0 \\ -x_1 - 6x_2^+ + 6x_2^- + 3x_3 + 4 = y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 6x_2^+ - 6x_2^- - 3x_3 - y_1 = 2 \\ 2x_1 + x_2^+ - x_2^- - 5x_3 - y_2 = 1 \\ x_1 + 6x_2^+ - 6x_2^- - 3x_3 + y_3 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 6 & -6 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -5 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -6 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{\tilde{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\tilde{b}}$$

On a $\tilde{c}^T = \left(-1 \;\; 2 \;\; -2 \;\; -7 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0\right)$

Rappels :

- Gradient de f en x_0 : $\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{pmatrix}$

- Hessienne de f : $\text{Hess } f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \nabla(\partial f/\partial y) \\ \nabla(\partial f/\partial z) \end{pmatrix}$

- u extremum de $f \Rightarrow \nabla f(u) = 0$

- f admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues en $u \in U$
  - $\rightarrow$ si $\forall \lambda_i \in Sp(\text{Hess } f(u))$ $\lambda_i > 0$ alors f admet minimum strict u
  - $\rightarrow$ si $\forall \lambda_i \in Sp(\text{Hess } f(u))$ $\lambda_i < 0$ alors f admet maximum strict u
  - $\rightarrow$ si les signes des λ_i est opposé alors u est pt critique

- Extremes liées : (mtd Lagrange) min f tq g

$$\begin{cases} f : \text{fct obj} \\ g : \text{fct contrainte} \end{cases} \Rightarrow \nabla f = \sum_i \lambda_i \nabla g_i$$

Optimisation linéaire

* Notations :

$x, y \in \mathbb{R}^n$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

- $x^T y = (x_1, \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \langle x, y \rangle$ (Produit scalaire)
- $A \in \mathcal{M}_{mn}$, $z \in \mathbb{R}^m$ $\quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$; $A^T z \in \mathbb{R}^n$
- $x, y \in \mathbb{R}^n$ $\quad x \cdot y = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ \vdots \\ x_n y_n \end{pmatrix}$
- $x \geq 0 \iff \forall i \quad x_i \geq 0$
- $x \geq y \iff \forall i \quad x_i \geq y_i$

* P.OL

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{tq} \quad Ax = b \text{ et } x \geq 0 \quad \text{(Forme standard)}$$

avec c, b et A des données du problème

$c \in \mathbb{R}^n$; $b \in \mathbb{R}^m$ $\quad A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$

Exercice

Donner la formule standard du Prob suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{tq} \quad Ax \leq b$$

on pose $x = x^+ - x^-$ $\quad \begin{cases} x^+ = \max(0, x) \geq 0 \\ x^- = \max(0, -x) \geq 0 \end{cases}$

on pose la variable d'écart $z = b - Ax$

donc $Ax + z = b$

- $C^T(x) = C^T(x^+ - x^-)$

$$= C^T x^+ - C^T x^- + 0^T . z$$

$$= \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ z \end{pmatrix}$$

$\tilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ z \end{pmatrix}$ avec $\tilde{x} \geqslant 0$

- $A(x^+ - x^-) + z = b$

$Ax^+ - Ax^- + z = b \Rightarrow Ax^+ - Ax^- + I_m z = b$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{A} & \boxed{-A} & \boxed{I_m} \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ z \end{pmatrix}}_{\tilde{x}} = b$$

d'où la forme standard.

Exercice:

Transformez en forme standard le prob suivant $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

$\min C^T x \quad Ax \geqslant b$ et $x \leqslant u$. $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$

On pose $z = Ax - b \geqslant 0$ et $y = u - x \geqslant 0$

$Ax - z = b \qquad x + y = u$

$A(x^+ - x^-) - z = b$

donc $\begin{cases} Ax^+ - Ax^- - I_m z = b \\ I_n x^+ - I_n x^- + I_n y = u \end{cases}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{A} & \boxed{-A} & \boxed{-I_m} & \boxed{O_m} \\ \boxed{I_n} & \boxed{I_n} & \boxed{O_n} & \boxed{I_n} \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ z \\ y \end{pmatrix}}_{\tilde{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ u \end{pmatrix}}_{\tilde{b}}$$

$\tilde{A} \in \mathcal{M}_{(m+n)\times(m+3n)}$ et $\tilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice :

$\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$ ty $Ax \geq b$ $\quad v \leq x \leq u$ $\quad ; u, v \in \mathbb{R}^n$

On considère $Ax \geq b$ et $v \leq x$ et $x \leq u$

On pose
$$z = Ax - b \qquad y = x - v \qquad k = u - x \implies \begin{cases} Ax - z = b \\ x - y = v \\ k + x = u \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} Ax^+ - Ax^- + I_m z = b \\ I_n x^+ - I_n x^- - I_n y = v \\ I_n k + I_n x^+ - I_n x^- = u \end{cases}$$

$$\implies \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{A} & \boxed{-A} & \boxed{-I_m} & \boxed{O_n} & \boxed{O_n} \\ \boxed{I_n} & \boxed{-I_n} & \boxed{O_m} & \boxed{-I_n} & \boxed{O_n} \\ \boxed{I_n} & \boxed{-I_n} & \boxed{O_n} & \boxed{O_n} & \boxed{I_n} \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ z \\ y \\ k \end{pmatrix}}_{\tilde{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ v \\ u \end{pmatrix}}_{\tilde{b}}$$

$\tilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \tilde{A} \in \mathcal{M}_{(2n+m)\times(4n+m)}$

Exercice: soit $\lambda \in \mathbb{R}^m$ (vect indép de x) et $x \in \mathbb{R}^n$

$$F(x) = \lambda^T (Ax - b) \qquad A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \ b \in \mathbb{R}^m$$

- Mq $\nabla F(x) = A^T \lambda$

$$F(x) = \lambda^T . (Ax) - \lambda^T . b$$

$$\nabla F(x) = \nabla \lambda^T (A.x)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \qquad Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i \end{pmatrix}$$

$$\lambda^T (A.x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i \end{pmatrix} = \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i\right) + \ldots + \lambda_m \left(\sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i\right)$$

$$\nabla \lambda^T (A.x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_m a_{m1} \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{1n} + \ldots + \lambda_m a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{in} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$= A^T \lambda$$

donc $\nabla F(x) = A^T \lambda$

- De même: on mq $\nabla c^T x = c$

Th : x solution optimale de (P), alors x satisfait (*)

$$(*)\quad \begin{cases} Ax = b & (1) \\ A^T\lambda + S = c & (2) \\ x_i S_i = 0 \quad \forall i \in [1,m] \end{cases} \qquad x \geq 0 \text{ et } S \geq 0$$

↳ système des conditions optimale ou K.K.T système (*)

↳ Lagrangien de (P) est déf comme suit

$$L(x) = c^T x - \lambda^T (Ax - b) - S^T x \qquad (\lambda, S \text{ multi de Lagrange})$$

$$\nabla L(x) = \nabla c^T x - \nabla\left(\lambda^T (Ax - b)\right) - \nabla(S^T x) = 0$$

$$= c - A^T\lambda - S = 0$$

donc $\boxed{A^T\lambda + S = c}$

~~(3) $x^T s = 0$ $x, s \geq 0$~~

~~↳ On déf le Prob dual à (P) comme suit~~

~~(D) max $b^T\lambda$ tq $A^T\lambda \leq C$ (λ variable)~~

• (3) $\Rightarrow$ $x^T s = 0$ $\quad x, s \geq 0$

• Mq $c^T x^* = b^T \lambda^*$ avec (x^*, λ^*, s^*) solution de (*)

$$c^T x^* = (A^T \lambda^* + s^*)^T x^*$$

$$= (A^T\lambda^*)^T x^* + \underbrace{s^{*T} x^*}_{0}$$

$$= \lambda^{*T}(A x^*)$$

$$\boxed{c^T x^* = \lambda^{*T} b}$$

↳ donc, on def le problème dual de (P) comme suit

$$(D)\ \max b^T \lambda \quad tq \quad A^T\lambda \leq c \qquad (\lambda\ \text{vm})$$

* <u>Comment trouver le dual d'un P.L qlq linéaire</u>

<u>Exemple 1</u>

$$(P) \begin{cases} \max z = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 \quad + 3x_3 \leq 8 \\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (D)\ ?$$

$$(D) \begin{cases} \min z' = 10y_1 + 7y_2 + 8y_3 \\ sc \begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 = 3 \\ 2y_1 - y_2 \geq 1 \\ y_2 + 3y_3 \geq -2 \\ y_1 \leq 0 \quad y_2 \gtrless 0 \quad y_3 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

<u>MaMi</u> $\begin{cases} \underline{\text{Etape 1}} \quad \text{chg} = / \gtrless \\ \underline{\text{Etape 2}} \quad \text{chg} \geq / \leq / = / \gtrless \end{cases}$

Exemple (2)

MIMA $\begin{cases} \text{Etape (1)} & \text{chg tt} \\ \text{Etape (2)} & \text{chg } = / \geq \end{cases}$

$$(P)\begin{cases} \text{Min } Z = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_3 \leq -10 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \text{ qcq} \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} \text{Max } Z' = 12y_1 + 8y_2 - 10y_3 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1 \\ 2y_1 - 3y_2 = 3 \\ y_2 + 2y_3 \leq -2 \\ y_1 \geq 0 \quad y_2 \text{ qcq} \quad y_3 \leq 0 \end{cases}$$

* solution sous Matlab : d'un P.O.L

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \quad t_q \begin{cases} A x \leq b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \leq x \leq ub \end{cases}$$

x = linprog (c, A, b)

x = linprog (c, A, b, Aeq, beq)

x = linprog (c, A, b, Aeq, beq, lb, ub)

__Exemple__ $\min -x - y/3 \quad t_q \begin{cases} x + y/4 = 1/2 \\ x + y \leq 2 \\ x + y/4 \leq 1 \\ x - y \leq 2 \\ -x/4 - y \leq 1 \\ -x - y \leq -1 \\ -x + y \leq 2 \\ -1 \leq x \leq 1{,}5 \\ -0{,}5 \leq y \leq 1{,}25 \end{cases}$

c = [-1 -1/3]';

b = [2 1 2 1 -1 2]';

A = [1 1 ; 1 1/4 ; 1 -1 ; ----];

Aeq = [1 1/4];

beq = 1/2

lb = [-1 -0,5]

ub = [-0,5 1,25]

MathLab – Méthode de Newton

• Méthode de Newton : (Algorithme) But $F(z)=0$

① Trouver l'équation de la droite tangente de la courbe de $F(z)$ au point $(z^k, F(z^k))$

② Trouver le pt d'intersection de cette droite avec l'axe z

③ Calculer le pas - ou le déplacement Δz

④ Le point obtenu est appelé z^{k+1}

⑤ Répéter jusqu'à ce que le déplacement devien petit selon l'approximation ou avec un nbr d'iter prédéfini

$$F(z+\Delta z) = F(z) + F'(z)\,\Delta z$$

$$\hookrightarrow \Delta z = (F'(z))^{-1} F(z)$$

$$\hookrightarrow \boxed{\begin{cases} \Delta z^k = (F'(z^k))^{-1} F(z^k) \\ z^{k+1} = z^k + \Delta z^k \end{cases}}$$

$$(J(z))_{ij} = \frac{\partial F_i(z)}{\partial z_j}$$

avec $i,j \in [1,n]$

$$\hookrightarrow F(z+\Delta z) = F(z) + J(z)\,\Delta z$$

. Méthode de Newton (script)

```
function [z] = newton (z0, F, J, eps, itmax)
z = z0 ; iter=0;
while iter < itmax
Fval = feval (F, z);
Jval = feval (J, z);
fprintf ('iteration %d, Fnorm = %.2e\n', iter, norm(Fval));
zstep = -Jval \ Fval ;
z = z + zstep ;
iter = iter + 1 ;
if norm (zstep) < eps
break;
end
end
return;
```

Rq Matlab :

- **déf de fct :**

function [variables de sortie] = test([var d'entrée]) !

- **appel fct :**

[var_out1, var_out2, ...] = test (var_in1, var_in2, ...)

- **if ... else ... end**

```
rep = input('Choisir un nbr 0 ou 1 ?.');
if rep == 0
disp ('Vous avez tapé la réponse 0');
else
disp (' vous avez tapé la réponse 1');
end
```

- **boucle for**

```
som = 0; % initialisation
for i = 1 : length(x)
    som += x(i);
end
```

- **while**

```
som = 0 ; % init
fin = 0 ; % var logique: flag
while not(fin)
end
```

- multiplication mat

E = B * C

- multiplication elt par elt

F = C.*D

- plot (x, y)

- `x.^e` $\Leftrightarrow$ `x**e`
- Meshgrid (x_1, y_1) $\Leftrightarrow$ 3D

Algo Newton Find

Input :
$$\begin{cases} z_0 : \text{vect de démarrage} \\ F(z) : \text{fct dont on cherche le zéro} \\ \varepsilon : \text{précision} \\ itmax : \text{nbr d'ita} \end{cases}$$

Begin :

loop $(iter < itmax)$ or $(\| \Delta z^k \| \leq \varepsilon)$

$$J(z^k)\,\Delta z^k = -F(z^k)$$

$$z^{k+1} = z^k + \Delta z^k$$

$iter += 1$

End loop

end

---

function z = phi (x,y)

z = . . . -

:

end