**Prop** : $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ cont et ses dérivés partielles cont

$\exists r > 0 : \forall h \in B(x, r)$

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i + o(\|h\|)$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\|h\|)$$

**Prop** :

$f$ admet des dérivés partielles d'ordre 2 continues :

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x)^T h + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o(\|h\|^2)$$

$$A = Hess_f(x) = \left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) h + \frac{1}{2} h^T A h + o(\|h\|^2)$$

- minimum relatif $u \in U$ de $f$
  $\Rightarrow \exists r > 0 : f(u) \leq f(x), \forall x \in B(u, r)$
- maximum relatif $u \in U$ de $f$
  $\Rightarrow \exists r > 0 : f(u) \geq f(x)$

Extremum ou optimum, c'est un max ou un min.

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2 + xyz$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x + yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y + xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z + xy$$

$$Hess_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & z & y \\ z & 2 & x \\ y & x & 2 \end{pmatrix}$$

**Prop** : $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ses dérivés partielles sont continues

Si $u \in U$ est un minimum de $f$. Alors : $\frac{\partial f}{\partial x_i}(u) = 0$

$i = 1, \dots, n$

un tel point est appelé un point critique.

**Ex** :

$f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$

or $0$ n'est pas extremum

Prop : $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre 2 continues en $u \in U$. Supposant que $u$ est un point critique.

On a :

1) Si les valeurs propres de la Hessienne sont de même signe et positive, alors $u$ est un minimum relatif.

2) Si les v.p sont toutes négatives. Alors $u$ est maximum relatif.

3) Si les v.p sont de signe opposé alors $u$ n'est ni minimum ni maximum

Exemple :

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy - \frac{8}{9}x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + 2\sqrt{2}y - \frac{8}{3}x^2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y + 2\sqrt{2}x = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{3}x$$

$$(1) \Rightarrow 4x - \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3}x - \frac{8}{3}x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x(1-x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

donc

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 - \frac{16}{3}x & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$$

- Pour $A(0,0)$ :

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$$

$$\chi(Hess_f(0,0)) = (\lambda-4)(\lambda-6) - 8 = (\lambda-2)(\lambda-8)$$

$$Sp(Hess_f(0,0)) = \{2, 8\}$$

donc le pt $A(0,0)$ est un minimum.

- Pour $B(1, -\frac{\sqrt{2}}{3})$

$$Hess_f(1, -\tfrac{\sqrt{2}}{3}) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$$

$$\chi(Hess_f(1, -\tfrac{\sqrt{2}}{3})) = (\lambda + \tfrac{4}{3})(\lambda - 6) - 8$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \frac{14}{3}\lambda - 16 = 0$$

$$\Rightarrow 3\lambda^2 - 14\lambda - 48 = 0$$

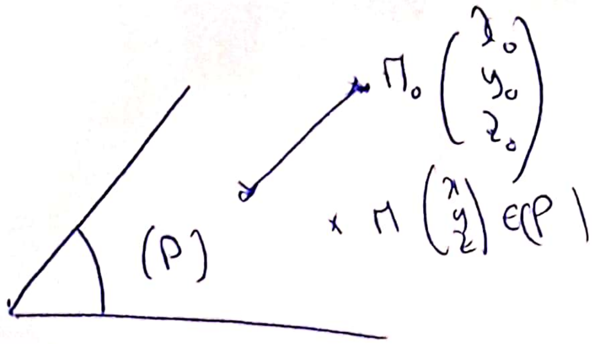
$$\Delta = 472 > 0$$

$$\lambda_1 = \frac{14 - \sqrt{472}}{6} < 0$$

$$\lambda_2 = \frac{14 + \sqrt{472}}{6} > 0$$

$\Rightarrow B(1, -\frac{\sqrt{2}}{3})$ n'est ni mini, ni maxi

Ex :



Calculons la distance séparant $M_0$ du plan (P)

$(P) : ax + by + cz = d$

$dist^2(M_0, P) = f(x, y, z)$

$= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$

tq $ax + by + cz = d$

$$dist(M_0, (P)) = \frac{|d - ax_0 - by_0 - cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\nabla f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \nabla g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$g(x, y, z) = ax + by\ cz - d = 0$

$Min\ f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ tq

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ ax + by + cz = d \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \mu a \\ y = y_0 + \mu b \\ z = z_0 + \mu c \end{array} \right. \quad \Bigg| \ \mu = \frac{\lambda}{2}$$

$ax + by + cz = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \mu a \\ y = y_0 + \mu b \\ z = z_0 + \mu c \\ \cancel{ax + by + cz = d} \\ a(x_0 + \mu a) + b(y_0 + \mu b) + c(z_0 + \mu c) = d \end{cases}$$

$\Rightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + \mu(a^2 + b^2 + c^2) = d$

$$\Rightarrow \mu = \frac{d - ax_0 - by_0 - cz_0}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \frac{\lambda}{2}$$

Ex 1 :

En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, trouver la solution du problème d'optimisation suivant :

$max(f(x, y)) = x^3 y^5$ tq $x + y = 8$

Correction :

$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$

$f(x, y) = x^3 y^5$, $g(x, y) = x + y - 8$

$$\begin{cases} 3x^2 y^5 = \lambda \\ 5x^3 y^4 = \lambda \\ x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 y^5 - 5x^3 y^4 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 y^4 (3y - 5x) = 0 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 y^4 \text{ ou } 3y = 5x \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Si $x=0$, On a $y=8 \Rightarrow P(0,8)$
ou
Si $y=0$, On a $x=8 \Rightarrow P(8,0)$
ou
Si
$$\begin{cases} 3y = 5x \\ x+y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}y \\ \frac{3}{5}y + y = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}y \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow P(3,5)$$

Ex 2 :
Trouver la distance entre l'origine du repère et le plan d'équation $x+2y+2z=3$ en utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

1) Sans calcul.

$$d\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, (P)\right) = \frac{|3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{3}{3} = 1$$

~~2) Lagrange sous~~

$$f(x,y,z) : x^2+y^2+z^2$$

$$z = \frac{1}{2}(3-x-2y)$$

$$\boxed{f_1(x,y) = x^2+y^2+\frac{1}{4}(3-x-2y)^2}$$

sous contrainte

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x - \frac{1}{2}(3-x-2y) = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y - (3-x-2y) = 0$$

$$\begin{cases} 4x-3+x+2y=0 \\ 2y-3+x+2y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+2y=3 \\ 4y+x=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3-4y \\ 15-20y+2y=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3-4y \\ -18y = -12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 2/3 \\ z = 1/2\left(3-1/3-4/3\right) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

3) Min $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sous contrainte $x+2y+2z=3$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y = 2\lambda \\ 2z = 2\lambda \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1/2\,\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \\ \frac{1}{2}\lambda + 2\lambda + 2\lambda = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \\ 9\lambda = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \\ x = 1/3 \\ y = 2/3 \\ z = 2/3 \end{cases}$$

donc

$$\operatorname{Min} f(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2$$

$$= 1$$

Ex 3 :

En utilisant les multiplicateurs minimale et la distance entre le point de coordonnées $(2,1,-2)$ et la sphère d'éq: $x^2+y^2+z^2=1$

$$f(x,y,z) = (x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2$$

$$g(x,y,z) : x^2+y^2+z^2-1=0$$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(x-2) = 2\lambda x \\ 2(y-1) = 2\lambda y \\ 2(z+2) = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 = \lambda x \\ y-1 = \lambda y \\ z+2 = \lambda z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(1-\lambda) = 2 \\ y(1-\lambda) = 1 \\ z(1-\lambda) = -2 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-\lambda = \frac{2}{x} \\ 1-\lambda = \frac{1}{y} \\ 1-\lambda = \frac{-2}{z} \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{1}{y} = \frac{-2}{z}$$

$$\Rightarrow x = -z \text{ et } -2y = z$$

$$\Rightarrow y = \frac{-z}{2}$$

$$\Rightarrow z^2 + \frac{z^2}{4} + z^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} z^2 = 1$$

$$\Rightarrow z^2 = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow z = \pm \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$

Si $z = \frac{2}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ et $y = -\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)$$

Si $z = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ et $y = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}\right)$$

Ex 4 :

Trouver les valeurs maximales et minimales de la fct $f(x,y,z) = xyz$ sur la sphère d'éq $x^2+y^2+z^2=12$

$$f(x,y,z) = xyz$$

donc $\begin{cases} yz = 2\lambda x \\ xz = 2\lambda y \\ xy = 2\lambda z \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} xyz = 2\lambda x^2 \\ xyz = 2\lambda y^2 \\ xyz = 2\lambda z^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3xyz = 2\lambda(x^2+y^2+z^2)$$

$$= 24\lambda$$

$$\Rightarrow xyz = 8\lambda$$

donc $(xy)z) = 2\lambda z^2 = z\lambda$

$\Rightarrow z^2 = 4$ ou $\lambda = 0$

de m̂ $x^2 = 4$ ou $\lambda = 0$ et $y^2 = 4$ ou $\lambda = 0$

donc les points $(2,2,2)$,

$(2,2,-2)$, $(2,-2,2)$, $(2,-2,-2)$

$(-2,-2,-2)$, $(-2,-2,2)$, $(-2,2,-2)$

$(-2,2,2)$ sont des extremums

Si $\lambda = 0$ donc $x = 0$ et $y = 0$ ou $z = 0$

$\hookrightarrow$ Si $y = 0 \Rightarrow z = 2\sqrt{3}$

si $z = 0 \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$

$(0,0,\pm\sqrt{12})$, $(0,\pm\sqrt{12},0)$ et

$(\pm\sqrt{12},0,0)$

Ex 5 :

Trouver les valeurs maximales et minimales de la fct $f(x,y,z) = x$ sur l'ensemble d'intersection de l'ellipsoïde d'éq : $x^2+2y^2+2z^2 = 8$ et le plan $z = x+y$

$f(x,y,z) = x$

$g_1(x,y,z) = x^2+2y^2+2z^2-8 = 0$

$g_2(x,y,z) = x+y-z = 0$

$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \lambda_1(2x) + \lambda_2 \\ 0 = \lambda_1(4y) + \lambda_2 \\ 0 = \lambda_1(4z) - \lambda_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \lambda_1(2x) + \lambda_2 \\ \lambda_1(4z + 4y) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y^2 + y^2 + y^2 = 4 \\ x = 2y \\ \lambda_1 = 0 \text{ ou } z = -y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y^2 = 4 \\ x = 2y \\ \lambda_1 = 0 \text{ ou } z = -y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \text{ ou } y = -1 \\ x = -2 \text{ ou } x = 2 \\ z = 1 \text{ ou } z = -1 \end{cases}$$

Si $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$ absurde

## Optimisation linéaire (OL)

La forme standard d'1 problème d'OL :

Min $C^t x$ tq : $Ax = b$ et $x \geq 0$
$x \in \mathbb{R}^n$

$\Downarrow$

primal standard

Son problème dual est défini comme suit :

Max $b^t\lambda$ tq : $A^t\lambda \leq c$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow$ Pb dual standard

~~$\lambda \in \mathbb{R}^m$~~

On pose : $\omega := b - AX$, $\omega \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}^m$

$X = X^+ - X^-$ ; $\underbrace{X^+, X^-}_{\in \mathbb{R}^n} \geq 0$

$AX + \omega = b \Rightarrow A(X^+ - X^-) + I\omega = b$

$\Rightarrow AX^+ - AX^- + I\omega = b$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A & -A & I \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} X^+ \\ X^- \\ \omega \end{pmatrix}}_{\tilde{X}} = b$$

$\Rightarrow \tilde{A}\tilde{X} = b$

$c^t X = c^t(X^+ - X^-) = c^t X^+ - c^t X^-$

$$c^t X = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} X^+ \\ X^- \\ \omega \end{pmatrix}$$

$= \tilde{C}^t \tilde{X}$

$\tilde{X} \in \mathbb{R}^{2n+m}$

$\tilde{C} \in \mathbb{R}^{2n+m}$

$A \in \mathcal{M}_{m \times (2n+m)}$

Ex :

$$\begin{cases} \text{Min } c^t x \text{ tq : } AX \geq b \text{ et} \\ x \leq U,\ U \in \mathbb{R}^n \text{ et } U = \text{cte} \end{cases}$$

On pose : $\omega := AX - b$, $\omega \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}^m$

$X = X^+ - X^-$ ; $X^+, X^- \geq 0$, $\in \mathbb{R}^n$

On pose $y = u - X$, $y \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \begin{cases} AX - \omega = b \\ X + y = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(X^+ - X^-) - I\omega = b \\ IX^+ - IX^- + Iy = u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AX^+ - AX^- - I\omega = b \\ IX^+ - IX^- + 0\omega + Iy = u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} A & -A & -I & 0 \\ I & -I & 0 & I \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} X^+ \\ X^- \\ \omega \\ y \end{pmatrix}}_{\tilde{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ u \end{pmatrix}}_{\tilde{b}}$$

$\Rightarrow \tilde{A}\tilde{X} = \tilde{b}$

$c^t X = c^t(X^+ - X^-)$

$$= \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} X^+ \\ X^- \\ \omega \\ y \end{pmatrix} = \tilde{C}^t \tilde{X}$$

$\text{Min } \tilde{C}^t \tilde{X} : \tilde{A}\tilde{X} = \tilde{b}$, $\tilde{X} \geq 0$

Ex :

$\text{Min}(-2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4)$

$$\text{tq} \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \leq 15 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ 3x_3 - 4x_4 \geq -20 \end{cases}$$

$X = (x_1\, x_2\, x_3\, x_4) \in \mathbb{R}^4$

* transformer le Pb précédent en Pb standard

- En déduire son Problème dual

Ex 3 :

On considère le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\min(-x_1 + 7x_2 + 4x_3 - x_4)$$

$$\text{tq} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 \leq 3 \\ 3x_2 - 4x_3 - 8x_4 \geq -5 \\ x_1 + 5x_2 + x_4 \geq -5 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 30 \end{cases}$$

$$\text{et} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0$$

1) Reformuler le problème pour qu'il soit présenté dans sa forme standard

2) Quel est le dual de ce problème?

1)
$$\begin{cases} y_1 = 3 - x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 \\ y_2 = 15 + 3x_2 - 4x_3 - 8x_4 \\ y_3 = 5 + x_1 + 5x_2 + x_4 \\ y_4 = 30 - 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}_{\tilde{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix}}_{\tilde{b}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T}_{\tilde{C}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}_{\tilde{X}} = \tilde{C}^T \tilde{X}$$

2)
$$\text{Max} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \text{ tq } \tilde{A}^t \lambda \leq \tilde{C}$$

Pour le cas de souf $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

1

$$\begin{cases} X_1 - X_2 - X_3^+ + X_3^- + 5X_4^+ - 5X_4^- + Y_1 = 3 \\ -3X_2 + 4X_3^+ - 4X_3^- + 8X_4^+ - 8X_4^- + Y_2 = 15 \\ -X_1 - 5X_2 - X_4^+ + X_4^- + Y_3 = 5 \\ 3X_1 - 5X_2 - 6X_3^+ + 6X_3^- + Y_4 = 30 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 8 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3^+ \\ X_3^- \\ X_4^+ \\ X_4^- \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix}$$

2) ~~D~~.

$$\text{Max} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$$

---

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, p$

$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{Min}}\, f(x)$ tq $g_1(x) \geq 0 \dots\dots g_p(x) \geq 0$

Déf : On définit le Langrangien

$\mathcal{L}(x) := f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots\dots - \lambda_p g_p(x)$

Resultat :

Si $x$ est minimum de $f$ alors

$\nabla \mathcal{L}(x) = 0$

$\nabla \mathcal{L}(x) = \nabla ( f(x) - \lambda_1 g_1(x) \dots - \lambda_p g_p(x))$

$= 0$

$\Rightarrow \nabla \mathcal{L}(x) = \nabla f(x) - \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$

$\Rightarrow \nabla f(x) = \sum \lambda_i \nabla g_i(x)$

Ex :

$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$F(x) = \lambda^t (AX - b)$

$A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $b, \lambda \in \mathbb{R}^m$

Calculez $\nabla_x F(x)$, $\nabla_x (c^t x)$

Pour le cas de souf $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

1)
$$\begin{cases} X_1 - X_2 - X_3^+ + X_3^- + 5X_4^+ - 5X_4^- + Y_1 = 3 \\ -3X_2 + 4X_3^+ - 4X_3^- + 8X_4^+ - 8X_4^- + Y_2 = 15 \\ -X_1 - 5X_2 - X_4^+ + X_4^- + Y_3 = 5 \\ 3X_1 - 5X_2 - 6X_3^+ + 6X_3^- + Y_4 = 30 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 8 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3^+ \\ X_3^- \\ X_4^+ \\ X_4^- \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix}$$

2) $\mathcal{D}$ :

$$\text{Max} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$$

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, p$

$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{Min}}\, f(x)$ tq $g_1(x) \geq 0 \dots g_p(x) \geq 0$

Déf : On définit le Langrangien

$\mathcal{L}(x) := f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_p g_p(x)$

Resultat :

Si $x$ est minimum de f alors

$\nabla \mathcal{L}(x) = 0$

$\nabla \mathcal{L}(x) = \nabla (f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_p g_p(x))$
$= 0$

$\Rightarrow \nabla \mathcal{L}(x) = \nabla f(x) - \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$

$\Rightarrow \nabla f(x) = \sum \lambda_i \nabla g_i(x)$

Ex :

$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$F(x) = \lambda^t (AX - b)$

$A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $b, \lambda \in \mathbb{R}^m$

Calculez $\nabla_x F(x)$, $\nabla_x (C^t X)$

1) $\nabla_x F(x)$

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_i a_{mi} x_i \end{pmatrix}$$

$\lambda^t AX = \lambda_1 \sum a_{1i} x_i + \dots + \lambda_m \sum_i a_{mi} x_i$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_m a_{m1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \lambda_1 a_{1n} + \dots + \lambda_m a_{mn} \end{cases}$$

$\Rightarrow \nabla F(x) = A^t \lambda$

2) $C^t X = C_1 x_1 + \dots + C_n x_n$

$$\nabla C^t X = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = C$$

$\lambda^T AX = \langle \lambda, AX \rangle$

$= \langle A^t \lambda, X \rangle$

d'après 2 :

$\nabla \langle A^t \lambda, x \rangle = A^t \lambda$

$\text{Min } C^t X$ tq $AX = b$ et $X \geq 0$

$\mathcal{L}(X) = C^t X - \lambda^t (AX - b) - S^T X$

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^t$, $S = (S_1, \dots, S_n)^t$

cas $X^*$ est minimum :

On a : $\nabla \mathcal{L}(X) = 0$

$\nabla \mathcal{L}(X^*) = \nabla(C^t X) - \nabla(\lambda^t (AX^* - b))$

$- \nabla(S^t X^*) = 0$

$= C - A^t \lambda - S$

$= 0$

$$\begin{cases} C = A^t \lambda^* + S^* \\ AX^* = b \\ X^* \geq 0 \\ S^* \geq 0 \\ X^* S^* = 0 \end{cases}$$

$\text{Max}_{\lambda \in \mathbb{R}^m} b^T \lambda$, $A^t \lambda \leq C$

$\Leftrightarrow$

$- \text{Min}(-b^T \lambda)$ tq $A^t \lambda \leq C$

$\mathcal{L}(\lambda) = -b^t \lambda - x^T (C - A^t \lambda)$

$\nabla_\lambda \mathcal{L}(\lambda) = \nabla_\lambda (-b^T \lambda) - \nabla(C^t X)$

$+ \nabla(\langle AX, \lambda \rangle)$

$= -b + AX$

$= 0$

$S = C - A^t \lambda$

$\Rightarrow C = A^t \lambda + S$

$$\Rightarrow \begin{cases} AX = b \\ C = A^t \lambda + S \\ X_i S_i \geq 0 \\ X_i S_i = 0 \text{ ; } i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Ex : Si $(X^*, \lambda^*, S^*)$ solutions des Pb primal et et duale

Mq : $C^T X^* = \cancel{b^T X^*}$ $b^T \lambda^*$

$C = A^t \lambda^* + S^*$

$C^T X^* = (A^t \lambda^* + S^*)^t X^*$

$= \langle X^*, A^t \lambda^* \rangle + S^*$

$= \langle AX^*, \lambda^* \rangle + 0$

$= \langle b, \lambda^* \rangle + 0$

$= b^T \lambda^*$

Ex : Si $X^*$ est solution
Mq $X^*$ est globale
(Si $X$ est un pt tq $AX = b$ et $X \geq 0$)
$C^t X \geq C^t X^*$

$$C^t x = (A^t \lambda^* + S^*)^T x$$
$$= \langle A^t \lambda^*, x \rangle + S^{*T} x$$
$$= \langle \lambda^*, Ax \rangle + S^{*T} x$$
$$= \langle \lambda^*, b \rangle + \underbrace{S^{*T} x}_{\geq 0}$$
$$= C^T X^* + S^{*T} x$$

Ex : Si $\lambda^*$ est solution
Mq $\lambda^*$ est globale
$( b^T \lambda \leq b^T \lambda^*$

$x^*$ solution du Problème primal.

$$x^{*T} (A^t \lambda) \leq x^{*T} C$$
$$\langle x^*, A^t \lambda \rangle \leq b^T \lambda^*$$
$$\langle A x^*, \lambda \rangle \leq b^T \lambda^*$$
$$b^T \lambda \leq b^T \lambda^*$$