Élément de module n°2 : Algèbre matricielle (théorie)

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ensemble de matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{K} \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Def : $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on dit que A est semblable à B $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ (P est inversible)
$$B = P^{-1} A P$$

Ex : M.q $A \sim B$ (A semblable à B) est une relat° d'éq.
→ (Réflexive, symétrique et transitive)

* Réflexive (ressemble à elle m̂) $P = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$A = I_n^{-1} A I_n \Rightarrow A$ est semblable à A

* symétrique $A \sim B \Rightarrow \exists P : B = P^{-1} A P$

$\Rightarrow A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1} B P^{-1} = (P')^{-1} B P'$

avec $P' = P^{-1} \Rightarrow B \sim A$

* Transitive : Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $A \sim B$ et $B \sim C$ Mq $A \sim C$

$A \sim B \Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ $B = P^{-1} A P$

$B \sim C \Rightarrow \exists P' \in GL_n(\mathbb{K})$ $C = (P')^{-1} B P'$

$\Rightarrow \exists P', P \in GL_n(\mathbb{K})$

$C = (P')^{-1} P^{-1} A P P'$ $\quad P'' = PP' \in GL_n(\mathbb{K})$

$C = (P'')^{-1} A P'' \Rightarrow A \sim C$

théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et β et β' sont 2 bases de E avec $A = \mathcal{M}_{\beta}(f)$ et $B = \mathcal{M}_{\beta'}(f)$

A est semblable à B $\quad B = P^{-1} A P$

$P = \mathcal{P}_{\beta}^{\beta'}$ ou bien $A = PBP^{-1}$

Proposition : si A et B sont semblables et E de dimension n (finie $\dim(E) < \infty$)

1/ $rg(A) = rg(B)$

2/ $tr(A) = tr(B)$

3/ $\det(A) = \det(B)$

Ex : $A \sim B$, Mq A inversible $\Leftrightarrow B$ inversible

* On a A inversible donc $\det(A) \neq 0$ et on a $A \sim B$ donc $\det(A) = \det(B) \neq 0$

Donc B est inversible.

* $A \sim B$ $\quad B^p \in \mathbb{N}^*$

Proposition : $A \sim B \Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K})$
$$B = P^{-1} A P$$
$\forall p \in \mathbb{N}^*$ $B^p = P^{-1} A^p P$

En plus si A est inversible alors $\forall k \in \mathbb{Z}$: $B^k = P^{-1} A^k P$

Ex : On considère $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \sim B$
Mq A est nilpotente $\Leftrightarrow B$ est nilpotente
A et B ont le m̂ indice de nilpotence

$\Rightarrow$ $A \sim B$ alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $B = P^{-1} A P$

Puisque B est nilpotente alors $\exists k \in [0, n]$ tq $B^{k-1} \neq 0$ et $B^k = 0$

donc $P^{-1} A^k P = 0$ alors $A^k = 0$

donc A est nilpotente

Matrices diagonales et triangulaires

Def : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

A diagonale càd $a_{ij} = 0$ $\forall i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$= diag(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$

Proposition : On considère 2 matrices diagonales.

$diag\begin{pmatrix} \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq n}$ et $diag(\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$

1° $diag(\lambda_i) + diag(\mu_i) = diag(\lambda_i + \mu_i)_{1 \leq i \leq n}$

2° $diag(\lambda_i) \times diag(\mu_i) = diag(\lambda_i \mu_i)_{1 \leq i \leq n}$

3° $(diag(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n})^p = diag(\lambda_i^p)_{1 \leq p \leq n}$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$

4/ si $\lambda_i \neq 0$ $\forall i = 1 \dots n$

$(diag(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n})^{-1} = diag\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)_{1 \leq i \leq n}$

⊛ $D_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices diagonales qui est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Def : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $A = (a_{ij})$ est triangulaire supérieure $\forall i > j$ $a_{ij} = 0$ $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & a_{n,n} \end{pmatrix}$

inférieure $\forall i<j \quad a_{ij}=0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On appelle T_{ns} et T_{ni} les ensembles des matrices triangulaires sup. et inf.

Ex: Mq toute matrice inf st semblable à une matrice sup

→ $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\dim(E)=n$ et sa matrice $A=\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ associée à $\beta:(e_1 \ldots e_n)$

On considère $\beta' : (e_n, \ldots e_1)$

donc $B=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_n) & f(e_1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{11} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ & & a_{n,1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_n \\ \vdots \\ e_1 \end{array}$

donc $A \sim B$

Def: On considère les ssespaces vect $F_1, \ldots F_p$ dans E ev de $\dim(E)<\infty$

$F_1+F_2+\cdots+F_p = \sum_{i=1} F_i = \{x \in E / x = x_1+x_2+\cdots+x_p$ avec $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2 \ldots x_p \in F_p\}$

On dit que les F_i sont une somme directe notée aussi $\bigoplus_{i=1} F_i = \{x \in E / \exists! x_1 \in F_1, \ldots x_p \in F_p$ $x = x_1+\cdots+x_p\}$

et on a aussi $F_i \cap F_j = \{0\}$ $\forall i \neq j$

théorème: On a :

1/ $\dim(\bigoplus F_i) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$

2/ $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$

3/ Si $\dim(E)<\infty$ (finie)

$\dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$

On considère $F_1, \ldots F_p$ des sev de E supplémentaires (i.e $F_i \cap F_j = \{0\}$ $\forall i,j$) et $\dim(E)<\infty$

On considère $n_1 = \dim(F_1)$ $n_2 = \dim(F_2) \ldots$

$n_p = \dim(F_p)$

$\beta_1 = (e_{11}, \ldots e_{n_1 1})$ base de F_1

$\beta_2 = (e_{12}, \ldots e_{n_2 2})$ base de F_2

$\beta_p = (e_{1p}, \ldots e_{n_p p})$ base de F_p

$$\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_p)$$

Ex: Mq $E = \bigoplus F_i \iff \beta$ une base de E.

→ $\dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i) = \sum n_i = \text{card}\,\beta$

$\iff \text{Card}(B) = n = \dim(E)$

Sous espaces stables On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ F st un sev. F st stable par f

càd $f(F) \subset F$

$\forall x \in F \quad f(x) \in F$

Ex: $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $g \circ f = f \circ g$

Mq $\operatorname{Im}(f)$ st stable par g

$\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f-\lambda Id)$ sont stables par g

• Mq $g(\operatorname{Im}(f)) \subset \operatorname{Im}(f)$

→ 1/ a- Soit $z \in g(\operatorname{Im}(f))$

donc $\exists y \in \operatorname{Im}(f)$

tq $g(y) = z$

$y \in \operatorname{Im}(f)$ donc $\exists x \in E$

tq $f(x) = y$ d'où:

$g \circ f(x) = z$

$f \circ g(x) = z$

donc $z \in \operatorname{Im}(f)$

d'où finalement $g(\operatorname{Im}(f)) \subset \operatorname{Im}(f)$

donc $\operatorname{Im}(f)$ st stable par g.

b- Soit:

$z \in g(\operatorname{Ker}(f))$

donc $\exists y \in \operatorname{Ker}(f)$ tq: $z = g(y)$

avec $f(y) = 0$

donc $f(z) = f \circ g(y) = g \circ f(y) = 0$

donc $z \in \operatorname{Ker}(f)$

d'où $g(\operatorname{Ker}(f)) \subset \operatorname{Ker}(f)$

c- Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda Id)$

$\Rightarrow f(x) - \lambda x = 0$

$g \circ f(x) - \lambda g(x) = 0$

$f \circ g(x) - \lambda g(x) = 0$

$(f - \lambda Id)(g(x)) = 0$

donc $g(x) \in \operatorname{Ker}(f - \lambda Id)$

d'où $g(\operatorname{Ker}(f - \lambda Id)) \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda Id)$

donc $\operatorname{Ker}(f - \lambda Id)$ st stable par g.

Valeurs propres

Def: λ st une v.p si $\exists x \in E \setminus \{0\}$

tq $f(x) = \lambda x$

x st une valeur propre associé à λ

Si x st vp de 2 vp λ et μ Alors : $\lambda = \mu$

En effet $f(x) = \lambda x \quad f(x) = \mu x$

$\Rightarrow \lambda x = \mu x \Rightarrow (\lambda - \mu) x = 0$

$\Rightarrow \lambda = \mu$ car $x \neq 0$

Ex: $f: \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$
$P \longmapsto P'$

Quelles sont les v.p de f

→ soit $\lambda \in Sp(f)$

$\Rightarrow \exists P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ tq $f(P) = \lambda P$

$\Rightarrow P' = \lambda P$

Si $P = \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow f(P) = P' = 0 = 0 \times P$

Donc 0 est une v.p du polynôme non nul. avec $P \neq 0$

Si $\deg(P) \geq 1$

$\deg(P') = \deg(P) - 1 < \deg(P)$

or $\deg(P) = \deg(\lambda P)$

$\Rightarrow \deg(P') < \deg(\lambda P)$

donc $f(P) \neq \lambda P$

ainsi $Sp(f) = \{0\}$

Ex: Soient F et G 2 sevs supplémentaires $E = F \oplus G$. On considère la projection p sur F // à G : $p : E = F \oplus G \to E$

$x = x_1 + x_2 \mapsto x_1$

Quelles sont les v.p de p

→ Soit S la symétrie % à F // à G définie :

$S : F \oplus G \longrightarrow E$

$x = x_1 + x_2 \longmapsto x_1 - x_2$

Quelles sont les vp de S

↳ Soit $\lambda \in Sp(p)$, $\exists x \in E$ tq

alors $p(x) = \lambda x$

et on a $x = x_1 + x_2$ tq $x_1 \in F$, $x_2 \in G$

donc $p(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2)$
$= \lambda x_1 + \lambda x_2$

d'autre $p(x_1 + x_2) = x_1$

donc $p(x_1 + x_2) = 1 x_1 + 0 x_2$

d'où les vp de p sont 1 et 0

Si $x \in F$ $p(x) = x = 1.x$
⇒ 1 est vp de toutes les valeurs non nulles

Si $x \in G$ $p(x) = 0 = 0.x$
⇒ 0 est une vp de tout les valeurs non nuls de G

Ex: Mq le spectre d'un endomorphisme nilpotent est réduit à 0

Solution: f nilpotent $\Rightarrow \exists k \in [\![1, n]\!]$ tq $f^k = 0$
et $f^{k-1} \neq 0$

$\lambda \in Sp(f) \Rightarrow f(x) = \lambda x$
$f^k(x) = \lambda^k x = 0$

d'où $\lambda^k = 0 \Rightarrow \lambda = 0$
$Sp(f) = \{0\}$

Ex: $f \in \mathcal{L}(E)$

Mq 0 est une vp de $f \Leftrightarrow f$ n'est pas injectif

Mq λ est une vp de $f \Leftrightarrow (f - \lambda Id)$ n'est pas inj

↳ On a 0 vp de f

donc $\exists x \in E \setminus \{0\}$ tq $f(x) = 0$

d'où $Ker(f) \neq \{0\}$

alors f n'est pas injectif

. Si λ est vp de f alors $\exists x \in E \setminus \{0\}$ tq

$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow (f - \lambda Id)(x) = 0$

d'où $Ker(f - \lambda Id) \neq \{0\}$

alors $(f - \lambda Id)$ n'est pas injectif

Ex: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Mq 2 est vp de A

→ $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $rg(A - 2I_3) = 1$

$\Rightarrow \dim(Ker(A - 2I)) = 2$

$\Rightarrow Ker(A - 2I) \neq \{0\}$

⇒ 2 est vp de f.

Ex: On considère une famille de valeurs propres $x_1, \dots, x_n$ associés à des vp $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinctes 2 à 2

Mq $(x_1, \dots, x_n)$ est libre

→ Pour $n = 1$ $\{x_1\}$ est libre

On supp que c'est vrai pour n Mq c'est vrai pour n+1

$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$

$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$ (I)

$f \in \mathcal{L}(E)$ $f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n x_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} x_{n+1} = 0}_{(II)}$

$\lambda_{n+1} \times (I) \Rightarrow \underbrace{\alpha_1 \lambda_{n+1} x_1 + \dots + \alpha_n \lambda_{n+1} x_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} x_{n+1} = 0}_{III}$

$(II) - (III) \Rightarrow \alpha_1 x_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) + \dots + \alpha_n x_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0$

$\Rightarrow \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) = \dots = \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0$

$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n$ $\lambda_i - \lambda_{n+1} \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

$\Rightarrow \alpha_{n+1} = 0$ car $x_{n+1} \neq 0$

Rp: • $Ker(f) = 0 \Leftrightarrow f$ inj

• th de rang : $\dim(E) = rg(f) + \dim Ker(f)$

• f inj $\Leftrightarrow rg(f) = \dim(E)$ $f \in \mathcal{L}(E, F)$

• f surj $\Leftrightarrow rg(f) = \dim(F)$

Ex: $a \in \mathbb{C}$ $\quad f_a(x) = e^{ax}$ $\quad E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Mq $(f_a)_{a\in\mathbb{C}}$ st libre

→ On considère l'endomorphisme φ définit par $\varphi : \begin{cases} E \to E \\ f \mapsto f' \end{cases}$

Alors $\varphi(f_a) = a f_a$

donc la famille (f_a) st associé à des valeurs propres $a \in \mathbb{C}$ distincts 2 à 2 distincts donc la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{C}}$ st libre.

Def: f st diagonalisable s'il existe une base de E constituée de vp de f

f st diagonalisable s'il une somme directe des sous espaces propres de f.

Ex: On considère la projection p définie sur $E = F \oplus G$

On peut trouver une base adaptée à cette décomposition tq :

$$\mathcal{M}_B(P) = \mathrm{diag}(1 \dots 1, 0 \dots 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

De m pour la symétrie on a :

$$\mathcal{M}_B(S) = \mathrm{diag}(1 \dots 1, 1 \dots 1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Conséquences : $\lambda_1 \dots \lambda_p$ vp de $f \in \mathcal{L}(E)$

$\dim(E) = n$ et $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = n_i$

f diagonalisable $\Leftrightarrow n = \sum^p n_i$

$$\dim(E) = \sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(A))$$

Def: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le polynôme caractéristique de A noté $P_A(X) = \det(XI_n - A)$

Il s'ensuit que $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$

Ex: Det le sp(A) $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\to Sp(A) = \{-1, 2\}$

Sous espace propre :

$E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id_E)$

Ex: λ vp de $f \in \mathcal{L}(E)$

Mq $1 \leq \dim(E_\lambda(f)) \leq o(\lambda)$

$o(\lambda)$: ordre de multiplicité de vp de λ

$P_A(\lambda) = 0 \qquad P_A(\lambda) = (X - \lambda)^p$

→ $\dim(E) = n \qquad \dim(E_\lambda(f)) = p$

$(e_1, \dots, e_p)$ base de $E_A(\lambda)$ ss espace propre associé à λ

$$1 \leq \dim(E_A(\lambda)) \leq o(\lambda)$$

conséquence :

Si λ st vp simple

Alors $\dim E_A(\lambda) = 1$

Propriété

$f \in \mathcal{L}(E)$ st diagonalisable ssi $P_f(\lambda)$ st scindé et la dim de chaque ss espace propre st égale à l'ordre de multiplicité de la vp

scindé : $P_f(X) = \prod_{i=1} (X - \lambda_i)^{o(\lambda_i)}$

Si f a n valeurs propres simples Alors f st diagonalisable

Ex: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2$

$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 - 2 = 1 \neq 2$

$P_A(X) = X^2(X-4) \Rightarrow$ A n'st pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_A(X) = X^2 + 1$

donc $P_A(X)$ n'st pas scindé $\Rightarrow$ A n'st pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$

$P_A(X) = (X - i)(X + i)$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

1. Det les vp de A
2. " les ss esp propres
3. " la matrice passage

1/ $P_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -2 & 0 \\ -6 & X-3 & 0 \\ 10 & 5 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2 - 5X - 6)$

$= (X-1)(X-6)(X+1)$

On déduit que $P_A(A)$ st un polynôme scindé à racines simples donc A diagonalisable.

2/ $AX = \lambda X$

$AX = -X$

$\begin{cases} 2x + 2y = -x \\ 6x + 3y = -y \\ -10x - 5y + z = -z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$AX = 6X$ $\begin{cases} 2x + 2y = 6x \\ 6x + 3y = 6y \\ -10x + z - 5y = 6z \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ 6y = 6y \quad y \in \mathbb{R} \end{cases}$

3/ $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$D = B^{-1}AB$

Def E un $\mathbb{R}$-ev
Produit scalaire sur $\mathbb{R}$-ev
1/ $\forall x, y \quad \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ symétrique
2/ $\forall x, y, y' \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$
$\langle x, y + \alpha y'\rangle = \langle x, y\rangle + \alpha\langle x, y'\rangle$
3/ Déf positive
$\forall x \neq 0 \quad \langle x, x\rangle > 0$

Produit scalaire sur $\mathbb{C}$-ev
1/ $\forall x, y \quad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
2/ libre à droite
3/ déf positive

$\mathbb{R}$-ev + $\langle\cdot,\cdot\rangle$: esp euclidien] espace
$\mathbb{C}$-ev + $\langle\cdot,\cdot\rangle$: esp hermitien] préhilbertien

L'orthogonal
1/ $x, y \in E$ x est orthogonal à y
Note $x \perp y$ ssi $\langle x, y\rangle = 0$
2/ A partie de A
$x \perp A$ ssi $\langle x, a\rangle = 0 \quad \forall a \in A$

Ex: Mq $x \perp A \Leftrightarrow x \perp \text{Vect}(A)$
$\Leftarrow$] on suppose que $x \perp \text{Vect}(A)$
Puisque $A \subset \text{Vect}(A)$
On a $x \perp A$
$\Rightarrow$] On supp que $x \perp A$ Mq $x \perp \text{Vect}(A)$
Soit $y \in \text{Vect}(A)$
$\Rightarrow \begin{cases} \exists \varphi_1, \dots \varphi_n \in A \\ \exists \alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{K} \end{cases}$
$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$
$\langle x, y\rangle = \langle x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i\rangle$
$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x, \varphi_i\rangle = \sum 0 = 0$

Ex: A, B 2 parties de E $\mathbb{K}$-ev
Mq 1/ $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$
2/ $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$

Rep: 1/ Soit $x \in B^\perp \Leftrightarrow \forall b \in B, \langle x, b\rangle = 0$
$\Rightarrow \forall b \in A, \langle x, b\rangle = 0$
$\Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

2/ $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$
$(A \cup B)^\perp \subset A^\perp$ et $(A \cup B)^\perp \subset B^\perp$
$(A \cup B)^\perp \subset A^\perp \cap B^\perp$
Mq $A^\perp \cap B^\perp \subset (A \cup B)^\perp$
$x \in A^\perp \cap B^\perp$ Mq $x \in (A \cup B)^\perp$
Soit $y \in A \cup B$ Mq $\langle x, y\rangle = 0$
$y \in A$ ou $y \in B$
$x \in A^\perp \cap B^\perp \Rightarrow \forall a \in A \; \langle x, a\rangle = 0$
$\forall b \in B \quad \langle x, b\rangle = 0$
Si $y \in A \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$
Si $y \in B \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$
$\Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$ Alors $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$

Ex. Mq 1. $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$
2. $\text{Vect}(A) \subset (A^\perp)^\perp = A^{\perp\perp}$
3. Si $\dim(E) = n < \infty$
Alors $\text{Vect}(A) = A^{\perp\perp}$

$x \perp A \Leftrightarrow x \perp \text{Vect}(A)$

propriété: $\boxed{B \subset E \quad B^\perp \text{ est un sesp vect}}$

Rep de l'exo:
2/ $A \subset A^{\perp\perp} = (A^\perp)^\perp$
En effet : Si $x \in A$ et $y \in A^\perp$ Alors $\langle x, y\rangle = 0$
Donc $A^{\perp\perp}$ est sesp vectoriel contenant A
$\Rightarrow A^{\perp\perp}$ contient le Vect(A) parce que le Vect(A) est le plus petit sev engendré par A
* $\text{Vect}(A) = B \Rightarrow B^\perp = A^\perp \Rightarrow (B^\perp)^\perp = (A^\perp)^\perp$
$\dim(B^\perp) = n - \dim(B)$
$\Rightarrow \dim((B^\perp)^\perp) = n - \dim(B^\perp)$
$= n - (n - \dim(B))$
$= \dim(B)$
$\Rightarrow \dim(B^{\perp\perp}) = \dim(B)$
$\Rightarrow \dim(A^{\perp\perp}) = \dim(\text{Vect}(A))$
$\Rightarrow \text{Vect}(A) = A^{\perp\perp}$

Ex: E esp euclidien $x, y \in E$ Mq
$x \perp y \Leftrightarrow \underbrace{\|x + \lambda y\| \geq \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}}_{(*)}$

$(*) \Rightarrow \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2$
$\Leftrightarrow 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0 \quad (**) \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$] Si $x \perp y$ Alors $\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow (**)$ est vérifiée
$\Leftarrow$] Supposons que $(**)$ est vérifiée Alors
$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$
$\Rightarrow x \perp y$

Mq 1/ $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$

2/ $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$