Module : Distribution

Mr. Bouali

Mr. Samir Bouali 30/09/2019.

Définition Mésure. $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty]$

1°/ $\mu(\emptyset) = 0$

2°/ $\forall (A_n)_n$ suite d'ensembles $\neq$ 2 à 2

$$\mu(\bigcup A_n) = \sum_n \mu(A_n)$$

$$y \notin \emptyset \Rightarrow \delta_n(\emptyset) = 0$$

Exemple : Soit X un ensemble $y \in X$

$$\delta_y : P(X) \longrightarrow [0,+\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

$$\forall B \subset X \quad \delta_n(B) = \begin{cases} 1 \text{ si } y \in B \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Mq : δ_y est bien une mésure

Correction :

* si $y \notin \bigcup A_n \Rightarrow y \notin A_n, \forall n$.

$$\delta_y(\bigcup A_n) = 0 \quad , \quad \delta_y(A_n) = 0, \forall n$$

$$\Downarrow$$

$$\delta_y(\bigcup A_n) = \sum \delta_y(A_n) = 0$$

* si $y \in \bigcup A_n \Rightarrow \exists n_0, y \in A_{n_0}$ et $y \notin A_n, \forall n \neq n_0$

$$\Downarrow$$

$$\delta_y(\bigcup A_n) = 1 \qquad \begin{cases} \delta_y(A_{n_0}) = 1 & , n = n_0 \\ \delta_y(A_n) = 0 & , n \neq n_0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum \delta_y(A_n) = 1 + 0 = 1$$

$\delta_y(\bigcup A_n) = \delta_y(A_{n_0}) = 1$ | Donc δ_y est une mésure

PROPOSITION : (Résultat, admis), soit $n \in \mathbb{N}^*$

il existe une mesure λ_n définie comme suit

$\forall P$ de type "pavé ouvert", sous forme

$$P =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \cdots \times]a_n, b_n[.$$

$$\lambda_n(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n)$$
$$= \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

Cette mésure s'appelle **mésure de Lebesgue**:

- Si $n=1$ alors : $P =]a,b[\Rightarrow \lambda_1(P) = b - a$
  $\Rightarrow$ l est la longueur
- si $n=2$: alors : $P =]a_1,b_1[\times]a_2,b_2[$.
  $\lambda_2(P) = (b_2 - a_2)(b_1 - a_1) \Rightarrow$ C'est la surface ou l'aire
- Si $n=3$; alors : $P =]a_1,b_1[\times]a_2,b_2[\times]a_3,b_3[$.
  $\lambda_3(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$.
  $\Rightarrow$ C'est le volume.

- Définition

Soit X un ensemble et A une partie de X.

On dit que A est negligeable si la mesure est 0.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, MQ $\lambda_n(\{x\}) = 0$

$$x = (x_1, x_2, \text{—}, x_n)$$
$$= \{x_1\} \times \{x_2\} \text{——} \{x_n\}$$

$\forall i \in [\![1,n]\!] : x_i \in]x_i - \frac{1}{p}, x_i + \frac{1}{p}[$ avec $p \in \mathbb{N}^*$

donc $\{x\} \subset \{x_1 - \frac{1}{p}, x_1 + \frac{1}{p}\} \text{——} \{x_n - \frac{1}{p}, x_n + \frac{1}{p}\}$.

$$A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$$

alors $\lambda_n(\{x\}) \leqslant \lambda_n(]x_1 - \frac{1}{p}, x_1 + \frac{1}{p}[\text{——}]x_n - \frac{1}{p}, x_n + \frac{1}{p}[)$

$$0 \leqslant \lambda_n\{x\} \leqslant \left(\frac{2}{p}\right)^n ; \forall p \in \mathbb{N}^*$$

Alors $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(\frac{2}{p}\right)^n = 0$ donc $\lambda_n(\{x\}) = 0$

- Pour $n = 1$, Mq $\lambda_1([a,b[) = \lambda_1(]a,b])$
$= \lambda_1(]a,b[) = \lambda_1([a,b])$

$\lambda_1([a,b[) = \lambda_1(\{a\} \cup]a,b[)$
$= \underbrace{\lambda_1(\{a\})}_{=0} + \lambda_1(]a,b[)$
$= \lambda_1(]a,b[) = \lambda_1(]a,b[)$
$= \lambda_1([a,b])$.

- Soit A un ensemble dénombrable $A \subset \mathbb{R}$
Mq $\lambda_n(A) = 0$.
Puisque A est dénombrable alors $\exists I \subset \mathbb{N}$
tq $A = \{x_1\} \cup \ldots \cup \{x_n\} \cup \ldots$
$\lambda_n(A) = \lambda_n(\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \ldots \{x_n\})$
$= \sum^n 0 = 0$
En on déduit que $\lambda_1(\mathbb{Q}) = 0$, $\lambda_n(\mathbb{Q}^n) = 0$

- **EX**: $D = \mathbb{R} \times \{a\}$, $a \in \mathbb{R}$
Calculez $\lambda_2(D)$.

- Lundi 07.10.2019

Un ensemble non dénombrable dont la mésure est nulle.
Soit D un ensemble
On a $D = \mathbb{R} \times \{a\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1] \times \{a\}$.
On pose $D_k = [k, k+1[\times \{a\}$
On a : $[k, k+1[\times \{a\} \subset]k-1, k+1[\times]a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}[$
donc $\lambda_2([k, k+1[\times \{a\}) \leq \lambda_2(]k-1, k+1[\times]a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}[)$
$= 2 \cdot \frac{2}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$.
Puisque $\lim_{k \to \infty} \frac{4}{k} = 0$
On en déduit que $0 \leq \lambda_2[k, k+1[\times \{a\} \leq 0$
donc $\lambda_2(D_k) = 0$

donc $\lambda_2(D_{1K}) = 0$

or $\lambda_2(D) = \lambda_2(\mathbb{R} \times \{a\}) = 0$

• Définition :

X un ensemble et $A \subset X$, on dit qu'une ppté est vraie μ-presque portant sur A (μ-p-p), si l'ensemble des $x \in A$ pour lesquels la ppté n'est pas vraie est un ensemble negligeable.

• Exemple :
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) \begin{cases} 1 & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{si } x \neq 2 \text{ et } x \neq 3. \end{cases}$$

Mq $f \equiv 0$ μ-p.p

On a $f(x) \neq 0$ pour $x = 2, x = 3$.

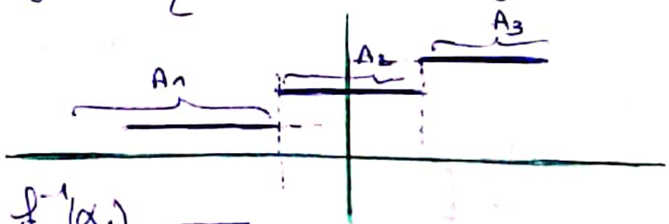
$B = \{2, 3\}$ pousque B est dénombrable.

donc $\lambda(B) = 0 \Rightarrow B$ est négligeable.

donc $f \equiv 0$ μ-pp.

• Définition

On dit que la fonction f est une fonction étagée si $\exists$ un nbr fini de valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K$ (K fixe) telque $f(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$



$A_1 = f^{-1}(\alpha_1)$ —

On a $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$

$A \subset X$ la fct indicatrice est définie :
$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Exprimez f à l'aide des α_i et $\mathbb{1}_{A_i}$

On a $f = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$

$y \in \mathbb{R}$, on note $y^+ = \max(y, 0)$; partie positive de y
, on note $y^- = \min(-y, 0)$; partie négative de y.

On a $y = y^+ - y^-$. $|y| = y^+ + y^-$

f fct $f : X \to \mathbb{R}$

- $f^+ : X \to \mathbb{R}^+$ définie
  $f^+(x) = (f(x))^+$; partie positive de $f(x)$.
- $f^-(x) = (f(x))^-$; partie négative de $f(x)$.

<!-- (On a $X = A_1 \cup A_2 \cup \_ \cup A_k$ avec $\underset{\forall i \neq j}{A_i \cap A_j} = \emptyset$) -->

Proposition : Toute fonction integrable au sens de Rieman. est bornée + Continue.

Calculer $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$

- Integrale de Lesbegue

- Etape 1 : $f : X \to \mathbb{R}$ fct étagée.

$$f = \sum \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

On définit l'intégrale de f :

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i)$$

- Etape 2 : $f : X \to [0, +\infty]$ arbitraire.

On considère la suite des fcts étagées

$$f_p(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^p} & \text{si } f(y) \in [\frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p}[\\ p & \text{si } f(y) \geq p \end{cases}$$

$p \in \mathbb{N}^*$
$k \in \{0, 1, 2, \_, p \cdot 2^p - 1\}$.

On démontre ce qui suit

1- $(f_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ suite fct décroissante.

2- $f_p \xrightarrow{+\infty} f$ CVS ($\forall y$, $\lim f_p(y) = f(y)$)

$R = p2^p - 1$

$$I_p = \int f_p \, d\mu = \sum_{k=0}^{R = p2^p - 1} \frac{k}{2^p} \mu\left(f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p}\right]\right)\right) + p\mu\left(f^{-1}[p, +\infty[\right).$$
$p \in \mathbb{N}^*$

⑥ On a $(I_p)_p$ est croissante positive. donc elle admet une limite dans $[0,+\infty]$ ou on définit l'intégrale de f : $\int f d\mu = \lim_{p\to\infty} I_p$.

- Etape 3 : $f : X \to \mathbb{R}$ qq.

On a $f = f^+ - f^-$ on peut appliquer l'Etape 2. pour f^+ et f^- (puisque f^+ et f^{-1} sont positives)

On aura: $\int f^+ d\mu$ et $\int f^- d\mu$

On définit $\int f d\mu = \int f^+ d\mu + \int d\mu f^-$

Exemple

Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap]0,1[\\ 0 & \text{si } x \in (\mathbb{R}-\mathbb{Q}) \cap]0,1[\end{cases}$$

Où $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nbr rationnels

MQ f est intégrable Lebesgue et non intégrable au sens de Rieman.

⊛ x_0 si f continue en x_0 Alors

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \geq 0, \forall x \ |x - x_0| \leq \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap]0,1[$

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \cap [0,1] = [0,1]$

$\Rightarrow \forall \alpha > 0 \ B(x_0, \alpha) \cap]0,1[\cap \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathbb{Q} \cap]0,1[.$

$|x - x_0| < \alpha$

$\neg(*) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 : \exists x : |x - x_0| \leq \delta$

et $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Pour $\varepsilon = 1/2$ $\quad |f(x_0) - f(x)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2}$

$\forall \delta = \alpha \geq 0 : \exists x \quad |x - x_0| \leq \delta$ (densité)

et $|f(x) - f(x)| > \frac{1}{2}$ $\Rightarrow f$ est discontinue.

On a $\mathbb{Q} \cap]0,1[$ denombrable

$\Rightarrow$ négligeable

$\Rightarrow f = 0 \quad \lambda_1.p.p$

or $\int 0 \, d\lambda_1 = 0 \Rightarrow f$ intégrable Lebesgue.

- **Rappel:**

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert $f : \Omega \to \mathbb{R}$

- dérivée partielle de f d'% 1 :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{f(x + t e_i) - f(x)}{t} \right)$$

- dérivée partielle de f d'% 2 :

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x).$$

- dérivée partielle de f d'% α :

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

Cette dérivée est notée $D^\alpha f$. Elle est définie ; $[\alpha] = \sum \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$

$$\begin{cases} D^\alpha f = f & \text{si } \alpha = (0, \ldots, 0) \\ D^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 . \partial^{\alpha_2} x_2 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n} \end{cases}$$

- **Rappel:** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert $f : \Omega \to \mathbb{R}$

1°/ $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(\Omega)$

2°/ $\mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^n(\Omega)$: l'ensemble des fonctions dont les dérivé d'% inf ou égale à m existent et Continues

3°/ $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$: l'ensemble des fcts indéfinisement dérivables.

Soit $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- **Définition:** On appelle support de φ l'ensemble noté $\overline{\text{supp}\,\varphi}$

adhérent ($\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$) Adhérent

$$\text{supp}\,\varphi = \overline{\{x \in \Omega \,/\, \varphi(x) \neq 0\}}$$

- **Définition 2:** On note l'ensemble $D(\Omega, \mathbb{R}) = D(\Omega)$ des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

C'est l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $\exists K$ Compact tel que : $\forall x \in \Omega \setminus K, \varphi(x) = 0$

- **Définition 3:** On dit que $\varphi \in D(\Omega)$ si:

$$\begin{cases} 1°/ \ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \\ 2°/ \ \text{Supp}\,\varphi \text{ est compact.} \end{cases}$$

NB: **Déf 2 $\Leftrightarrow$ Déf 3**

Exemple $\varphi(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

(*) $\text{supp}\,\varphi = \overline{\{x \in \Omega / \varphi(x) \neq 0\}}$

(*) $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) = \overline{\emptyset} = \emptyset \Rightarrow \text{Supp}\,\varphi$ Compact

Exemple:

On considère $n = 1$ et $\Omega = \mathbb{R}$. On introduit la fonction $\theta_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\theta_1(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ & \text{si } |x| \geq 0 \end{cases}$$

La fonction θ_1 est un élément de $D(\mathbb{R})$.

1. Montrer que θ_1 est une fonction continue.
2. Calculer $\theta_1'(x)$ pour $x \notin \{-1, 1\}$
3. Montrer que $\theta_1'(x)$ se prolonge par continuité en ± 1 et en déduit que θ_1 est fonction de classe C^1.
4. En raisonnant par reccurence montrer que pour tout $K \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]-1, 1[$ la dérivée à l'ordre K de θ_1 s'écrit sous la forme

$$\theta_1^{(K)}(x) = \frac{P_K(x)}{(1-x^2)^{2K}} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$$

où P_K est un polynome.

5. En raisonnant encore par reccurence montrer que $\theta_1 \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R})$.

Correction

1) On a θ_n est composé de 2 fcts continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.

On a $\lim\limits_{|x| \to 1} \theta_n(x) = \lim\limits_{|x| \to 1} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = 0$

θ_1 est prolongeable par continuité en $\{1, -1\}$ d'où, θ_n est continue.

2) Pour $x \notin \{-1, 1\}$, on a, $\theta_n'(x) = \left(\frac{1}{x^2-1}\right)' \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$

On a $\lim\limits_{|x| \to 1} \theta_1'(x) = 0$, D'où θ_1' est prolongeable par continuité en $\{1, -1\}$.

$D(\Omega, \mathbb{R}) = D(\Omega)$ est appelé ensemble des fonctions test.

⑨+1 14/10/2019.

$\Omega = \mathbb{R}$

Exercice 1 :

Une fonction constante quelconque non nulle est-elle dans $D(\Omega)$ ou $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$? → indifiniment dérivable.

Exercice 2 :

Montrez que la fonction nulle est toujours un élément $D(\Omega)$

Exercice 3 :

Soit $\Omega = \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction qui vaut 0 sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et qui vaut $1 - x^2$ si $x \in]-1, 1[$

Montrez que cette fonction n'est pas dans $D(\mathbb{R})$.

▲ Compact : fermé + borné

Exercice 1 :

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \Omega \,/\, f(x) \neq 0\}}$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = a, \quad a = c^{te}$$

$\text{supp} f = \overline{\{x / f(x) \neq 0\}} = \overline{\mathbb{R}}$ n'est pas borné

donc n'est pas compact. donc $f \notin D(\Omega)$.

$\Rightarrow f \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R})$

Corrigé

Exercice 2 :

"On a $\text{supp} f = \overline{\{x / f(x) \neq 0\}} = \overline{\emptyset} = \emptyset$

or $\emptyset$ compact.

et $f \in \mathcal{E}^\infty$ donc $f \in D(\mathbb{R})$"

Exercice 3 :

$\mathcal{C} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

en a $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in]-\infty,-1] \\ 1-x^2 & \text{si } x \in]-1,1[\end{cases}$

On a $\mathcal{C}$ est prolongeable par continuité en 1 et -1

donc $\mathcal{C} \in C(\mathbb{R})$,

* cherchons $\mathcal{C}'$; $\mathcal{C}' = \begin{cases} 0 & \forall x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[. \\ -2x & \forall x \in]-1,1[\end{cases}$

$\mathcal{C}'(-1) = 0$ or $\lim\limits_{x \mapsto -1} \varphi'(x) = 2$

donc $\mathcal{C}'$ n'est pas prolongeable par continuité en -1 (de m̂ pour 1), donc $\varphi \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ donc

$\mathcal{C} \notin \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice :

Soit (X,μ) un espace mesuré et $P(X)$ l'ensemble de tt les parties de X.

① Mq $\forall$ ensembles $C, D \in P(X)$. si $C \subset D$

$$\mu(D \setminus C) = \mu(D) - \mu(C)$$

② Mq $\forall\ A, B \in P(X)$ on a

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Correction :

$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

les ensembles sont disjoints.

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$$
$$= \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Alors : $\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Exercice :

$f \in D(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Mq : $f.g \in D(\mathbb{R})$

Corrigé.

1° $fg \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

2°/ $\exists K'$ Compact $\forall x \in \mathbb{R}\setminus K'$ $(f\cdot g)(x) = 0$

$\exists K$ compact :

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus K$ $f(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus K$ $f(x)\cdot g(x) = 0$

$(f\cdot g)(x) = 0$

$\exists K' = K : \forall x \in \mathbb{R}\setminus K$

$(f\cdot g)(x) = 0$

Alors $f\cdot g \in D(\mathbb{R})$.

- **Exercice :**

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R})$ mq :

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in D(\mathbb{R})$

- Correction

↳ $\varphi_1 \in D(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists K_1$ compact tq

$\forall x \in \Omega\setminus K_1 ; \varphi_1(x) = 0$

↳ $\varphi_2 \in D(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists K_2$ compact tq

$\forall x \in \Omega\setminus K_2 ; \varphi_2(x) = 0$

On considère : $K = K_1 \cup K_2$

$\Omega\setminus(K_1 \cup K_2) = (\Omega\setminus K_1) \cap (\Omega\setminus K_2)$

Soit $x \in \Omega\setminus(K_1 \cup K_2) \Rightarrow x \notin K_1$ et $x \notin K_2$

$\Rightarrow \varphi_1(x) = 0$ et $\varphi_2(x) = 0$

$\Rightarrow \alpha\varphi_1(x) = 0$ et $\beta\varphi_2(x) = 0$

donc $\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x) = 0$

$\Rightarrow \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in D(\mathbb{R})$

On en déduit que l'ensemble $D(\mathbb{R})$ est un ev réel.

Définition

On considère l'application linéaire

$T : D(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que.

$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R})\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$T(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha T(\varphi_1) + \beta T(\varphi_2)$

Cette application est appellée **distribution**

l'ensemble de toutes les ~~fonctions~~ distributions est notée $D'(\mathbb{R})$.

$D'(\mathbb{R})$ est appelé l'espace dual de $D(\mathbb{R})$.

On note $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$

Exercice :

Soit la fct $\delta_a : D(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}$ $\qquad \varphi \mapsto \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$

Mq δ_a est une distribution.

— 17/10/2019

soit $\varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\delta_a(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) &= \langle \delta_a, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle \\
&= (\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)(a) \\
&= \alpha\varphi_1(a) + \beta\varphi_2(a) \\
&= \alpha\langle \delta_a, \varphi_1 \rangle + \beta\langle \delta_a, \varphi_2 \rangle \\
&= \alpha\delta_a(\varphi_1) + \beta\delta_a(\varphi_2)
\end{aligned}$$

Alors δ_a est une distrubution

Définition :

On appelle l'ensemble des fcts localement integrables noté $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ défini

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}) = \left\{ u : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; \forall K \text{ compact } \int_K |u(x)|\,dx \text{ existe} \right\}$$

(14)

Exercice:

$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ on considère l'app suivante

$$T_u : \quad D(\mathbb{R}) \longrightarrow D(\mathbb{R})$$
$$\varphi \longmapsto \langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)\,dx$$

Mq : 1°/ $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$ $\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)\,dx$ existe

2°/ T_u est une distribution.

Correction:

φ continue sur K compact.
$\Rightarrow \varphi$ atteint ses bornes.

1°/ $\varphi \in D(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists K$ compact : $\varphi(x) = 0$
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus K$.

2°/ φ atteint ses bornes sur K.

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)\,dx = \int_K + \cancel{\int_{\mathbb{R}\setminus K}}^{0} = \int_K u(x)\varphi(x)\,dx$$

on pose $M = \sup_{x \in K} |\varphi(x)| < +\infty$

$$\left|\int_K u(x)\cdot\varphi(x)\,dx\right| \leq \int_K |u(x)|\,|\varphi(x)|\,dx$$
$$\leq M \cdot \int_K |u(x)|\,dx$$

or $u \in L^1_{loc} \Rightarrow \int_K |u(x)|\,dx$ existe

$\left|\int_K u(x)\varphi(x)\,dx\right|$ existe

On en déduit que T_u est bien définie

2°/ $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

On pose $T_u(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \int_{\mathbb{R}} u(x)(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)(x)\,dx$

Alors $T_u(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \int_{\mathbb{R}} \alpha u(x)\varphi_1(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} \beta u(x)\varphi_2(x)\,dx$

donc $T_u(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi_1(x)\,dx + \beta\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi_2\,dx$

Finalement: $T_u(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha T_u(\varphi_1) + \beta T_u(\varphi_2)$

- **Proposition:**

Soient $T_1, T_2 \in D'(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Alors $\alpha T_1 + \beta T_2 \in D'(\mathbb{R})$

$D'(\mathbb{R})$ c'est l'ensemble de toutes les distributions

- **Lemme:** $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que

$\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$ $\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)\,dx = 0$

Alors $u = 0$.

$\Leftrightarrow [T_u = 0 \Rightarrow u = 0]$

On considère l'application G déf.

$$G: \begin{array}{ccc} L^1_{loc}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & D'(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & T_u \end{array}$$

Mq G est un isomorphisme de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ vers $G(L^1_{loc}(\mathbb{R}))$

Soient $u, v \in L^1_{loc}$

$G(u+v) = T_{u+v}$ définie

$\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$: $T_{u+v}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} (u+v)(x)\varphi(x)\,dx$

$= \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi(x)\,dx$

$$T_u(\varphi) + T_v(\varphi)$$
$$= (T_u + T_v)(\varphi)$$

$$\Rightarrow T_{u+v} = T_u + T_v$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$: $G(\alpha u) = T_{\alpha u}$

$\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$: $T_{\alpha u}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} (\alpha u)(x) \varphi(x)\, dx$

$= \alpha \int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi(x)\, dx = \alpha T_u(\varphi)$

Alors $T_{\alpha u} = \alpha T_u$ on en déduit que G est morphisme

- Montrons que G est surjective :

On pose $\forall u_1, u_2 \in L^1_{loc}$, $G(u_1) = G(u_2)$

alors $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$, $T_{u_1}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) . u_1(x) = T_{u_1}(\varphi)$

$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) . u_2(x)\, dx$

Càd $\int (u_1 - u_2)(x) \varphi(x)\, dx = 0$

et d'après lemme : on a bien: $u_1(x) - u_2(x)$

donc $G(u_1) = G(u_2) \Leftrightarrow u_1(x) = u_2(x)$.

alors G est injective or G est surjective

par construction sur $G(L^1_{loc})$

On en déduit : G est isomorphisme.

Convergence :

Définitions :

On considère la suite des distributions $(T_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $T \in D'(\mathbb{R})$ on dit que $(T_p)_p$ Converge vers T si $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$ $\langle T_p, \varphi \rangle \xrightarrow[p \to \infty]{} \langle T, \varphi \rangle$

Exercice

On considère la fct f_p définie

$$f_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_p(x) = \begin{cases} \frac{p}{2} & \text{si } |x| < \frac{1}{p} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère la suite $(T_{f_p})_{p \in \mathbb{N}^*}$

Mq $T_{f_p} \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \delta$

Théorème de la moyenne :

si f est continue alors

$\exists c \in]a, b[: \int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(c)$

Soit $f_p \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$

on a $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$ $\langle T_{f_p}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_p(x)\varphi(x)\,dx$

$$= \frac{p}{2} \int_{-\frac{1}{p}}^{\frac{1}{p}} \varphi(x)\,dx$$

il $\exists$ $a_p \in]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}[$ tq

$$\langle T_{f_p}, \varphi \rangle = \frac{p}{2} \times \frac{2}{p} \varphi(a_p) = \varphi(a_p)$$

$$|a_p| < \frac{1}{p} \Rightarrow |a_p| \mapsto 0$$

or φ est continue $\varphi|a_p| \underset{p \to \infty}{\longmapsto} \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$

On en déduit que

$$\langle T_{f_p}, \varphi \rangle \longmapsto \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Dérivation

18

Définition

Soit $T \in D'(\mathbb{R})$, on appelle la dérivée de T d'ordre α notée $D^\alpha T$ cette distribution est déf $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad [\alpha] = \sum \alpha_i$$

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{[\alpha]} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

Exercice

$u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, Mq : $(T_u)^{(k)} = T_{u^{(k)}}$.

Cas particuliers :

- $\forall i = 1, 2, \dots, n$

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$$

- Si $n = 1$ alors on note : $T', T'', \dots, T^{(k)}$

et on a $\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle$

Rappel : 21012019 :

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

Mq pour $u \in \mathcal{C}^{(K)}(\mathbb{R})$, $K \in \mathbb{N}^*$

$$(T_u)^{(K)} = T_{u^{(K)}}$$

Pour $K = 1$; Mq $(T_u)' = T_{u'}$

Si $\varphi \in D(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists K$ compact, $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus K$

$K = [a, b]$

Mq $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

(*) $\exists (a_n)_n \in]c, a[\subset \mathbb{R} \setminus [a,b]$

$a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$; $\varphi(a_n) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$

Or φ est continue $\Rightarrow \varphi(a_n) = 0 \xrightarrow[n+\infty]{} \varphi(a) = 0$

idem pour $\varphi(b) = 0$

utilisé pour la preuve (cas $K = 1$).

$$(T_u)' = \langle T_u', \varphi \rangle = -\langle T_u, \varphi' \rangle$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi'(x) dx = -\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx$$

$$= \left[-u(x) \varphi(x) \right]_a^b + \int_a^b u'(x) \varphi(x) dx$$

$$= \int_a^b u'(x) \varphi(x) dx = \langle T_{u'}, \varphi \rangle$$

$$(T_u)' = T_{u'}$$

Sq $(T_u)^{(K)} = T_{u^{(K)}}$

Mq $(T_u)^{(K+1)} = T_{u^{(K+1)}}$

③ $\langle T_u^{(k+1)}, \varphi\rangle = \langle (T_{u^{(k)}})', \varphi\rangle$

$$= -\langle T_u^{(k)}, \varphi'\rangle = -\langle T_{u^{(k)}}, \varphi'\rangle$$

$$= -\int_a^b u^{(k)}(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = \left[-u^{(k)}(x)\cancel{\varphi(x)}\right]_b^a + \int_a^b u^{(k+1)}\varphi(x)\,dx$$

$$= \langle T_{u^{(k+1)}}, \varphi\rangle$$

Proposition : $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}^*$

$$\forall\ |\alpha| \leqslant k,\ D^\alpha(T_u) = T_{D^\alpha u}$$

• **Exercice 1 :** Soit la fct indicatrice suivante :

$$H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculez $(T_H)'$; H s'appelle la fct de Heaviside

• **Exercice 2 :**

Soient $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$

Mq $D^\alpha(D^\gamma T) = D^\gamma(D^\alpha T) = D^{\alpha+\gamma} T$

• **Correction**

$$\langle (T_H)', \varphi\rangle = -\langle T_H, \varphi'\rangle$$

$$= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx$$

$$= -[\varphi(x)]_0^{+\infty} = +\varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle$$

$\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R})$

Alors $(T_H)' = \delta$

$|\alpha| = \sum \alpha_i$ $\quad |\gamma| = \sum \gamma_i$

$\Rightarrow |\alpha + \gamma| = |\alpha| + |\gamma|$

On a : $\langle D^\alpha(D^\gamma(T)), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\gamma|}\langle T, D^\gamma(D^\alpha\varphi)\rangle$

$$= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\gamma|}\langle T, D^\gamma(D^\alpha\varphi)\rangle$$

$$= (-1)^{|\alpha|+|\gamma|}\langle T, D^\gamma(D^\alpha\varphi)\rangle$$

$$= (-1)^{|\alpha+\gamma|}\langle T, D^\gamma(D^\alpha\varphi)\rangle$$

$$= (-1)^{|\alpha+\gamma|}\langle T, D^\gamma(D^\alpha\varphi)\rangle .$$

$$= (-1)^{|\alpha+\gamma|}\langle T, D^{\alpha+\gamma}\varphi\rangle$$

Exemple :

Soit $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ Suite de distribution

$T_p \to T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Mq $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ on a $D^\alpha T_p \xrightarrow[p]{\infty} D^\alpha T$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$\langle D^\alpha T_p, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_p, D^\alpha \varphi\rangle \xrightarrow[p]{\infty} (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle$

donc $D^\alpha T_p \xrightarrow[p]{+\infty} D^\alpha T$ $\quad = \langle D^\alpha T, \varphi\rangle$

Produit d'une distribution et une fct $\mathcal{C}^\infty$

Définition : Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

On définit le produit de g par T (noté gT).

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\quad \langle gT, \varphi\rangle = \langle T, g\varphi\rangle$

[On a $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow g\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$].

1°/ Soit $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ Mq : $gT_u = T_{gu}$

2°/ $f, g \in \mathcal{C}^\infty$, $f(gT) = (fg).T$

1°// On a bien $g \in \mathcal{C}^\infty$ et $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

C'est à dire : $gu \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$$\langle gT_u, \varphi\rangle = \langle T_u, g\varphi\rangle$$
$$= \int u(x) g(x) \varphi(x)\, dx$$
$$= \int (ug)(x) \varphi(x)\, dx$$
$$= \langle T_{gu}, \varphi\rangle . \ \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$$

$$C/C \quad gT_u = T_{gu}$$

24/10/2019

- **Exercice 1**

$f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $T \in D'(\mathbb{R})$

$f(gT) = (fg)T$

- **Exercice 2**

$\circledast$ $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.

$\circledast$ $g\,\delta_a = g(a)\,\delta_a$

$\circledast$ En déduire que $x \cdot \delta = 0$

- Correction : Soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$, $\langle f(gT), \varphi\rangle = \langle gT, f\varphi\rangle$.

- 1 $= \langle T, gf\varphi\rangle = \langle (gf)T, \varphi\rangle$

$$\boxed{\Rightarrow f(gT) = (gf)T}$$

Soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle g\delta_a, \varphi\rangle = \langle \delta_a, g\varphi\rangle = g\varphi(a) = g(a)\langle \delta_a, \varphi\rangle$$
$$= \langle g(a)\delta_a, \varphi\rangle$$

Application

Appliquons pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = x$

et $a = 0$ Alors $x.\delta = 0$

EXERCICE 3 :

$g \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $T \in D'(\mathbb{R}^n)$

Mq $\frac{\partial}{\partial x_i}(gT) = \frac{\partial g}{\partial x_i}.T + g.\frac{\partial T}{\partial x_i}$

$\forall i = 1, 2, \ldots, n.$

$\boxed{\text{Mq } x\delta' = -\delta}$

On a $(x\delta)' = \delta + x\delta'$
et $x\delta = 0$
donc $x\delta' = -\delta$

$\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(gT), \varphi\rangle = -\langle gT, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle$

$$= -\langle T, g\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle$$

$$= -\langle T, \frac{\partial (g\varphi)}{\partial x_i} - \varphi\frac{\partial g}{\partial x_i}\rangle$$

$$= -\langle T, \frac{\partial (g\varphi)}{\partial x_i}\rangle + \langle T, \varphi\frac{\partial g}{\partial x_i}\rangle$$

$$= \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, g\varphi\rangle + \langle \frac{\partial g}{\partial x_i}T, \varphi\rangle \cdot \langle g\frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi\rangle$$
$$+ \langle \frac{\partial g}{\partial x_i}T, \varphi\rangle$$

Alors ; $\frac{\partial}{\partial x_i}(gT) = \frac{\partial g}{\partial x_i}.T + g\frac{\partial T}{\partial x_i}.$

EXERCICE :

$f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$: $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Mq $f \cdot \delta' = -\delta$

$$(f\delta)' = f'\delta + f\delta'$$
$$= f'(0)\delta + f\delta'$$
$$0 = \delta + f\delta'$$
$$\Rightarrow f\delta' = -\delta$$

Rappel : On considère la fct $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(t)$

on définit la fct F telle que

$$s \in \mathbb{R} ;\ F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

· si $F(s) < \infty$: on dit que f est TL (Transformée de Laplace) elle est notée, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

f est la transformée inverse de F.

noté $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

· exemple : $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$

$\exists!\ \mathcal{L}[e^{at}]$ existe.

$$\mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2} \ ; \ \mathcal{L}[H(t)] = \frac{1}{s}$$