Analyse :

Distance :

E ep vect d : application : $E \times E \longrightarrow [0, +\infty[$ qui vérifie :

- $\forall x, y \in E \quad d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
- $\forall x, y \in E \quad d(x,y) = d(y,x)$
- $\forall x, y, z \in E \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

l'espace (E, d) appellé espace métrique

Boule :

boule ouverte de centre $x_p \in E$ et de rayon α :

$$B(x_p, \alpha) = \{ y \in E \mid d(x_p, y) < \alpha \}$$

boule fermée de centre $x_p \in E$ et de rayon α :

$$\bar{B}(x_p, \alpha) = \{ y \in E \mid d(x_p, y) \leq \alpha \}$$

Ouvert :

U ouvert ssi $\forall x \in U \ \exists \alpha > 0$ tel que $B(x, \alpha) \subset U$

Fermé :

F est fermé ssi le complementaire de F est un ouvert

Propositions :

- F est un fermé ssi $\forall (x_n)_n \in F$ telle que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ alors $x \in F$
- I ensemble d'indice $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts
  $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés alors :
  - $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert
  - $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé
  - $\bigcap_{i \in I} U_i$ est un ouvert si I est fini : $\bigcap \underbrace{]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[}_{\text{ouvert}} = \underbrace{\{0\}}_{\text{fermé}}$ intersection infini
  - $\bigcup_{i \in I} F_i$ est un fermé si I est fini : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \underbrace{[0, 1 - \frac{1}{n}]}_{\text{fermé}} = \underbrace{[0, 1[}_{\text{ouvert}}$ union infini

- Si F est l'image réciproque d'un fermé par une application continue alors F est fermé

• Adhèrence :

E espace metrique. $P \subset E$ l'adhérence de P est :

$$\overline{P} = \{ x \in E \mid \forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap P \neq \emptyset \}$$

• Interieure :

(E, d) esp met. $A \subset E$ on appelle interieur de A l'ensemble

$$\mathring{A} = \{ x \in E \mid \exists \alpha > 0 \quad B(x; \alpha) \subset A \}$$

• Propositions :

- F un fermé $\Leftrightarrow \overline{F} = F$
- $\overline{F}$ est le plus petit fermé contenant F
- $C\overline{A} = \mathring{\overline{CA}}$
- $\overset{\circ}{\overline{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$; $\overset{\circ}{\overline{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

• Compact :

K est un compact ssi de toute suite $(x_n)_n$ de K on peut extraire une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers K.

• Ex :

Mq $\forall$ fermé F : F est l'intersection d'ouvert décroissant

famille d'ouvert décroissante càd $U_{n+1} \subset U_n$ U_n : ouvert.

On construit O_n tel que $O_n = \bigcup_{x \in F} B(x, \frac{1}{n})$.

Mq $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ on a $F \subset O_n \Rightarrow F \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ par construction

l'autre sens $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \subset F$? :

Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$ Mq $x \in F$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x \in O_n = \bigcup_{x \in F} B(x, \frac{1}{n})$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\exists y_n \in F$ tel que $d(x, y_n) < \frac{1}{n}$

On a $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. $(y_n)_n \in F \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ or F est fermé D'ou $x \in F$.

D'ou $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \subset F$

Pars suite $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$

Proposition: • Les compacts sur $\mathbb{R}$ sont les parties fermée bornées.

• $(K_i)_{i\in I}$ famille de compact alors :

- $\bigcap_{i\in I} K_i$ est un compact
- $\bigcup_{i\in I} K_i$ est un compact si I fini

Ex 2:

On designe par P_1 et P_2 les applications définis par $P_i(x_1, x_2) = x_i$ de $\mathbb{R}^2$

a) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$, montrer que $P_1(O)$ et $P_2(O)$ sont des ouvert de $\mathbb{R}$

b) Soit $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ Mq H est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que $P_1(H)$ et $P_2(H)$ ne sont pas de fermé de $\mathbb{R}$

c) Mq si F est fermé et que $P_2(F)$ est borné alors $P_1(F)$ est fermé.

Solution:

Mq d'abord que si $A \subset B \Rightarrow \begin{cases} P_1(A) \subset P_1(B) \\ P_2(A) \subset P_2(B) \end{cases}$ L'idée :

a) O ouvert de $\mathbb{R}^2$ Mq $P_i(O)$ ouvert,

Soit $x \in P_i(O) \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) \in O$

or O ouvert $\Rightarrow \exists d > 0$ tel que $B((x,y), d) \subset O$: $]x-d, x+d[\times]y-d, y+d[\subset O$

$P_1(]x-d, x+d[\times]y-d, y+d[) =]x-d, x+d[\subset P_1(O)$

D'où $\forall x \in P_1(O)$ $\exists d > 0$ tel que $]x-d, x+d[\subset P_1(O)$ alors $P_1(O)$ est un ouvert

b) Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de H qui converge vers (x,y)

On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n y_n = 1 \Rightarrow \lim(x_n y_n) = x.y = 1 \Rightarrow (x,y) \in H$

D'où H est un fermé.

• $P_1(H) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $P_2(H) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ne sont pas des fermé

c) On a F fermé $P_2(F)$ (fermé) borné Mq $P_1(F)$ est fermé

Soit $(x_n)_n \in P_1(F)$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$

$\Rightarrow \exists y_n \in \mathbb{R}$ tel que $(x_n, y_n) \in F$ c.à.d $y_n \in P_2(F)$

or $P_2(F)$ est borné alors (x_n, y_n) est aussi bornée

$\rightarrow$ on peut extraire une sous suite $(x_{\varphi_n}, y_{\varphi_n})$ converge vers (x,y)

$\begin{cases} (x_{\varphi_n}, y_{\varphi_n}) \in F \\ F \text{ est fermé} \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in F \Rightarrow P_1(x,y) = x \Rightarrow x \in P_1(F)$ D'où $P_1(F)$ est fermé

Ex3 :

Mq si un sous espace vectoriel F d'un esp vect normé E est ouvert alors $F = E$

Solution :

F sous esp vect de E ; F ouvert $\quad F \subset E$ triviale

Mq $E \subset F$:

Soit $x \in E$; on F ouvert c-à-d $\exists \alpha > 0$ tel que $B(0_E, \alpha) \subset F$

$x \in E \Rightarrow \exists y \in B(0_E, \alpha)\ \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$

$\lambda \in \mathbb{R} \quad y \in F \Rightarrow \lambda y \in F \Rightarrow x \in F \Rightarrow F = E$

Ex4 :

A, B deux parties non vides d'un esp vect normé E tel que :

$$d(A, B) = \inf_{x \in A,\, y \in B} d(x, y) > 0$$

Mq $\exists\ U, V$ tel que $A \subset U$ et $B \subset V$; U, V des ouverts.

Ex 5 :

a) E esp. vect normé ; F partie fermée non vide de E $x \in E$ Mq :

$$d(x,F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$$

b) F et G deux fermés non vide disjoint de E . Mq $\exists$ U, V deux ouvert tel que :

$$F \subset U, \quad G \subset V \quad \text{et} \quad U \cap V = \emptyset$$

Ex 6 :

Mq Z est une partie fermé de $\mathbb{R}$:

a) en observant que sont complément est (fermé) ouvert

b) en tant qu'image réciproque d'une application continue d'un fermé

Solution :

Ex 5 :

a) $\Leftarrow$) $x \in F \Rightarrow 0 \leq d(x,F) \leq \inf d(\{x\},F)$

$\Rightarrow 0 \leq d(x,F) \leq d(\overset{x \in F}{x},x) = 0 \Rightarrow d(x,F) = 0$

$\Rightarrow$) $d(x,F) = \inf_{y \in F} d(x,y)$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists y \in F \quad d(x,F) \leq d(x,y) \leq d(x,F) + \varepsilon$ — caractérisation de la borne inférieure.

pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N}^*$ $\exists y_n \in F$ $d(x,y_n) < \frac{1}{n}$

$y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ F est fermé d'où $x \in F$

b) soit $U = \bigcup_{x \in F} B(x, \frac{d}{2}(x,G))$ $\quad V = \bigcup_{x \in G} B(x, \frac{d}{2}(x,F))$ — par construction on a $F \subset U$, $G \subset V$

vérification d'existence de la boule ; il suffit de vérifier que $\underset{x \in F}{\frac{d}{2}(x,G)}$ et $\underset{x \in G}{\frac{d}{2}(x,F)} \neq 0$

- $x \in F$ $d(x,G) = 0 \Rightarrow x \in G$ or $F \cap G \neq \emptyset$ absurde

de m̂ pour $\underset{x \in G}{d(x,F)} \neq 0$

- Supposons par absurde que $U \cap V \neq \emptyset$. $\exists x \in U \cap V$

$\Rightarrow x \in U$ et $x \in V \Rightarrow \exists a \in F$; $\exists b \in G$ tel que :

$$\begin{cases} d(a,x) < \frac{d}{2}(a,G) \\ d(b,x) < \frac{d}{2}(b,F) \end{cases} \quad \text{on a :} \quad \begin{matrix} d(a,G) \leq d(a,b) \\ d(b,F) \leq d(a,b) \end{matrix}$$

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(b,x) < \frac{d}{2}(a,G) + \frac{d}{2}(b,F) \leq d(a,b)$$

$\Rightarrow \quad d(a,b) < d(a,b)$ absurde

D'où $U \cap V = \emptyset$.

Réponse : Ex 6 :

a) $C^{\mathbb{Z}} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[$ ouvert, union des ouverts $\Rightarrow \mathbb{Z}$ est fermé.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{Z}$

$x \mapsto \sin(\pi x)$ et "$\{0\}$ est un fermé" et la fct est continue. D'où $\mathbb{Z}$ est un fermé car c'est l'image réciproque d'un (ouvert) fermé "$\{0\}$" par la fct continue $x \mapsto \sin(\pi x)$.

c) Prouver par la caractérisation des fermés que $\mathbb{Z}$ est un fermé.

soit $(x_n)_n \in \mathbb{Z}$ $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ tq $l \in \mathbb{Z}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \quad |x_n - l| < \varepsilon$

pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\forall n, m > N_\varepsilon$ $|x_n - x_m| \leq |x_n - l| + |x_m - l| < 2\frac{\varepsilon}{2} = 1$

$\forall n, m > N_\varepsilon$ $|x_n - x_m| < 1$ signifie $x_n = x_m$ car $x_n, x_m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (x_n)$ est une suite stationnaire

D'où $l \in \mathbb{Z}$

• Continuité :

$f : E \to F$ continue en x_0 ssi (E, d) ; (F, d')

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

• propriété :

f est continue en $a \iff \forall (a_n)_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a)$

• k lipshizienne :

On dit que f est k lipshizienne si $\forall (x, y) \in E \times E$

$d'(f(x), f(y)) \leq k \, d(x, y)$

• Mesure :

X partie de E $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble de toutes les parties de X

l'application definie par :

$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty[$ telle que :

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\forall (A_n)_n$ famille disjoint 2 à 2 $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

Elle est appellée mesure (X, μ) espace mesuré

- **Résultats :** I ensemble d'indice :
  - Si $(A_n)_{n\in I}$ famille dénombrable finie $\Rightarrow \mu(\bigcup_{n\in I} A_n) = \sum_{n\in I} \mu(A_n)$
  - $A, B \mid A\cap B = \emptyset$ $\quad \mu(A\cup B) = \mu(A)+\mu(B)$
  - $A, B \mid A\subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

    En effet $B = A \cup (B\setminus A)$ or $A\cap(B\setminus A) = \emptyset$

    D'où $\mu(A) + \mu(B\setminus A) = \mu(B)$ puisque $\mu(B\setminus A) \geq 0$

    alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Ex 1

Mq : 1). $\mu(D\setminus C) = \mu(D) - \mu(C)$

2). $\mu(A\cup B) + \mu(A\cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

Solution :

2) on a $A = (A\setminus B) \cup (A\cap B) \Rightarrow \mu(A) = \mu(A) - \mu(B) + \mu(A\cap B)$ ⊕

$B = (B\setminus A) \cup (A\cap B) \Rightarrow \mu(B) = \mu(B) - \mu(A) + \mu(A\cap B)$ ⊕⊕

on a $A\cup B = (A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)$ $\in$ disjoints.

$\Rightarrow \mu(A\cup B) = \mu(A\setminus B) + \mu(A\cap B) + \mu(B\setminus A)$ d'après ⊕ et ⊕⊕

$\Rightarrow \mu(A\cup B) = \mu(A) \cancel{-\mu(B)} + \mu(A\cap B) - \mu(A\cap A) + \mu(B) \cancel{-\mu(A)} + \mu(A\cap A)$

$\Rightarrow \mu(A\cup B) + \mu(A\cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Ex 2.

X partie non vide $y\in X$ soit $\delta_y : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty[$

$$B \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x\in B \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mq δ_y est une mesure.

Sol : Soient (A_n) famille disjoint 2 à 2 ① on a $\delta_y(\emptyset) = 0$ car $y \notin \emptyset$

② Mq $\delta_y(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_y(A_n)$

- Si $y \in B = \bigcup A_n \Rightarrow \begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad y\in A_{n_0} \\ y\notin A_n \quad n\neq n_0 \end{cases} \Rightarrow \delta_y(\bigcup A_n) = 1$

  $\delta_y(A_{n_0}) = 1$ et $\forall n\neq n_0 \quad \delta_y(A_n) = 0$

  D'où $\delta_y(\bigcup A_n) = \delta_y(A_{n_0}) + \sum_{i\neq n_0 \in\mathbb{N}} \delta_y(A_i) = 1 + 0 = 1$

  D'où $\delta_y(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta(A_n)$.

- Si $y \notin B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} \quad y\notin A_n$

  $\Rightarrow \delta_y(\bigcup A_n) = 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_y(A_n) = 0$

D'où δ_y est une mesure.

Proposition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\exists$ une mesure λ_n mesure de Lebesgue telle que :
$\forall P$ de la forme $P =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \dots]a_n, b_n[$ appelé pavé ouvert
on a $\lambda_n(P) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

- Si $n=1$ $\lambda_1 = b - a$: longueur du seg $]a, b[$
- Si $n=2$ $\lambda_2 = (b_1-a_1)(b_2-a_2)$: surface de $]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$ parallélogramme
- Si $n=3$ $\lambda_3 = (b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3)$ volume du parallélépipède ...

Négligeable :

(X, μ) espace mesuré $A \subset X$ on dit que A est négligeable par rapport à μ si sa mesure est nulle $\mu(A) = 0$

Exercices

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tq : $\lambda_n(\{x\}) = 0$

$x \in \mathbb{R}^n$ $x = (x_1, \dots x_n)$ $\{x\} \subset]x_1 - \frac{1}{k}; x_1 + \frac{1}{k}[\times \dots]x_n - \frac{1}{k}; x_n + \frac{1}{k}[$ $k \in \mathbb{N}$

on a $\lambda_n(x) \leq \lambda_n(\underbrace{] \; [\times \dots] \; [}_{A})$ A est un pavé D'où :

$\lambda_n(A) = \left(\frac{2}{k}\right)^n$ $\forall k \in \mathbb{N}$ d'où $\lambda_n(\{x\}) \leq \left(\frac{2}{k}\right)^n$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$

on $\left(\frac{2}{k}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $0 \leq \lambda_n(\{x\}) \leq 0 \Rightarrow \lambda_n\{x\} = 0$

- Verifier que $\lambda_1(]a, b[) = \lambda_1([a, b])$

on $[a, b] =]a, b[\cup \{a\} \cup \{b\}$ $\leftarrow$ disjoint

D'où $\lambda([a, b]) = \lambda(]a, b[) + \lambda(\{a\}) + \lambda(\{b\})$

$\lambda([a, b]) = \lambda(]a, b[)$

Résultat

$A \subset \mathbb{R}^n$ au plus dénombrable alors $\lambda_n(A) = 0$

au plus dénombrable : fini ou bij avec $\{1, \dots n\}$
ou dénombrable càd En bijection avec $\mathbb{N}$.

En effet on peut écrire A sous la forme

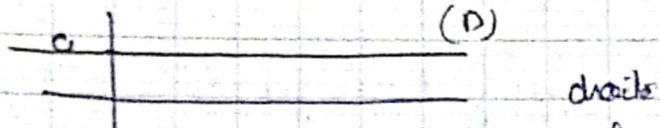
$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ les singletons sont disjoint

$\lambda_n(A) = \sum_{x \in A} \lambda_n \{x\} = 0$

on a $\mathbb{Q}$ est au plus dénombrable. D'où $\lambda_n(\mathbb{Q}^n) = 0$ $\lambda_1(\mathbb{Q}) = 0$

Ex 1

Soit (D) :



tq $\lambda_2(D) = 0$ même si D est non dénombrable.

$D = \mathbb{R} \times \{a\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1[\times \{a\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} D_k$. $D_k = [k, k+1[\times \{a\}$

On les $(D_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille disjointe 2 à 2

$D_k \subset]k-1, k+1[\times]a - \frac{1}{p}, a + \frac{1}{p}[\quad p \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \lambda_2(D_k) \leq 2 \cdot \frac{2}{p} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$

or $\frac{4}{p} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0 \qquad \lambda_2(D_k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \lambda_2(\cup D_k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_2(D_k) = 0$ D'où $\lambda_2(D) = 0$ D est négligeable par la mesure λ_2.

. Définition :

On dit qu'une propriété est vraie μ presque partout sur A si l'ensemble des éléments x de A pour lesquels la propriété n'est pas vérifiée est négligeable pas selon μ.

exp : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \text{ et } x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow f = 0 \ \lambda \text{ presque partout}$$

en effet $\lambda_1(\{1\}) = \lambda_1(\{2\}) = 0 \qquad \lambda_1 \{1, 2\} = 0$

. Partie positive / négative

. $y \in \mathbb{R} \quad y^+ = \max(y, 0) \ ; \ y^- = -\min(y, 0) \quad y^+$ partie positive y^- partie négative

on a . $y = y^+ - y^-$

. $|y| = y^+ + y^- \qquad . \ y^+, y^- \geq 0$

. $f : X \to \mathbb{R}$ on définit les parties positives et négatives de f par f^+ et f^- tel que

$$f^+ : X \to \mathbb{R}^+ \qquad f^- : X \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to f^+(x) = (f(x))^+ \qquad x \to f^-(x) = (f(x))^-$$

. Fonction indicatrice :

$A \subset \mathbb{R}$ la fct indicatrice 1_A est définie par :

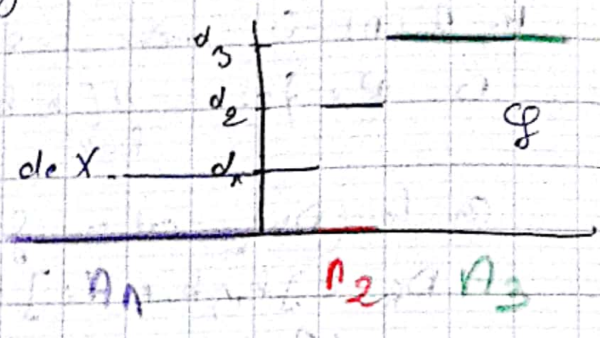
$$1_A : X \to \mathbb{R}$$
$$x \to 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

. Fonction étagée :

$f : X \to \mathbb{R}$ on dit que f est une fct étagée si $\exists\, d_1, d_2 — d_k$ tel que $f(X) = \{d_1, — d_k\}$

. $A_i = f^{-1}(\{d_i\})$. on $X = \bigcup_{1\leq i\leq k} A_i$

D'où les A_i forment une partition de X.



. Ex

Ecrire f en fct de 1_{A_i} ?

$\to f = \sum_{i=1}^{k} d_i \, 1_{A_i}$

. Construction de l'intégrale de Lebesgue :

. Etape 1 :

pour une fonction étagée : $f : X \to [0,+\infty[$ on definit l'intégrale de Lebesgue comme :

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} d_i \, \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{k} d_i \, \mu(f^{-1}(d_i)) \quad \mu : \text{mesure}$$

. Etape 2 :

Pour une fonction f arbitraire et positive on construit une suite de fct étagée $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ tel que :

$$f_p(y) = \begin{cases} \frac{k}{2^p} & \text{si } f(y) \in [\frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p}[\quad k \in \{0, — p2^p - 1\} \\ p & \text{sinon} \end{cases}$$

elle vérifie : $f_p(y) \xrightarrow[p\to+\infty]{} f(y)$ admis.

Resultat : f_p suite étagée positive croissante

. $\forall y \in \mathbb{R}$ $f_p(y) \leq f_{p+1}(y)$. $\forall y \in \mathbb{R}$ $f_p(y) \xrightarrow[p\to+\infty]{} f(y)$

En appliquant étape 1 on peut definir :

$$I_p = \int_X f_p \, d\mu = \sum_{k=0}^{p2^p-1} \frac{k}{2^p} \mu\left(f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p}\right[\right)\right) + p\,\mu(f^{-1}[p,+\infty[)$$

$\to (I_p)_p$ est une suite réelle positive croissante

on definit $\int_X f \, d\mu = \lim_{p\to+\infty} I_p = \lim_{p\to+\infty} \int_X f_p \, d\mu$.

Etape 3 :

$f : X \to \mathbb{R}$ quelconque. On sait que $f = f^+ - f^-$
alors f^+ et f^- sont deux fct arbitraires positives
on applique l'etape 2 et on peut calculer :

$\int_X f^+ d\mu$ et $\int_X f^- d\mu$ $\Rightarrow$ $\int_X f \, d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$

Scanned with CamScanner