Elément de module :

Architecture des ordinateurs

Enseigné par:

- CHERIF Walid

Année universitaire 2023/2024

Chapitre 3:

3.1 - La couche des circuits logiques

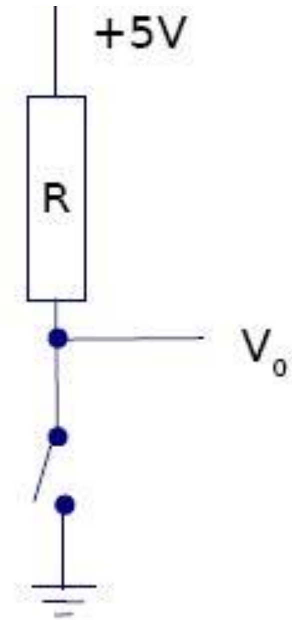
Introduction:

Les informations utilisées par les ordinateurs que nous étudions sont de type binaire

Un système binaire (signal, circuit, ...) est un système qui ne peut exister que dans 2 états

En électronique : 2 niveaux de tension V(0) et V(1)

Niveau	Logique positive	Logique négative
H	1	0
L	0	1



Qu'est ce qu'un circuit logique?

Circuits logiques:

Les circuits qui traitent des signaux logiques en exécutant des opérations (fonctions) sur des variables logiques.

Ils sont composés d'un ensemble de portes logiques, correspondant à des opérateurs logiques, interconnectées entre elles.

Une porte logique est un composant qui reçoit en entrée une ou plusieurs valeurs binaires (souvent 2) et renvoie en sortie une unique valeur binaire.

Opérateurs logiques ou booléens :

On appelle fonction logique ou booléenne une fonction à n variables logiques (à deux états) dont les valeurs appartiennent à l'ensemble {0,1}.

Elle est parfaitement définie par la donnée de ces valeurs pour les 2^n combinaisons des n variables qui la composent (table de vérité).

Les opérateurs logiques sont les fonctions logiques de base.

Opérateurs logiques :

Ils sont de deux types:

simples:

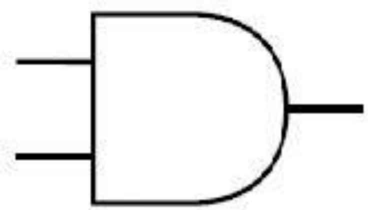
- OU inclusif (OR)
- ET (AND)
- NON (NOT)

composés:

- NON OU (NOR)
- NON ET (NAND)
- OU exclusif (XOR)

1- Opérateur ET

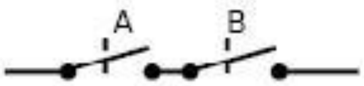
porte ET



a	b	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

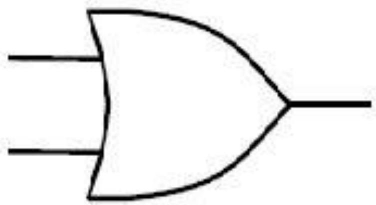
$$S = f(a, b) = a \cdot b$$

- associativité : (A.B).C = A.(B.C)
- commutativité : A.B = B.A
- idempotence : A.A = A
- élément neutre : A.1 = A
- élément absorbant : A.0 = 0



2- Opérateur OU

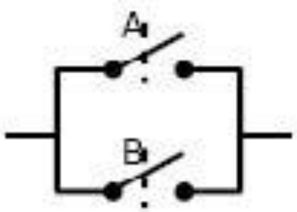
porte OU



a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$f(a,b) = a + b$$

- associativité : (A+B)+C = A+(B+C)
- commutativité : A+B = B+A
- idempotence : A+A = A
- élément neutre : A+0 = A
- élément absorbant : A+1 = 1



Propriétés des fonctions ET et OU

- les opérations OU et ET sont distributives l'une par rapport à l'autre

  $A.(B+C) = A.B + A.C$

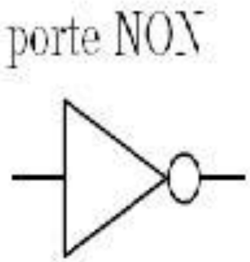
  $A+(B.C) = (A+B).(A+C)$

- propriétés d'absorption

  $A+(A.B) = A$

  $A.(A+B) = A$

3- Opérateur NON (inverseur)



a	S
0	1
1	0

$$f(a) = \bar{a}$$

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$$\bar{A}+A = 1$$

$$\bar{A}.A = 0$$

$$A+(\bar{A}.B) = A+B$$

Théorèmes de De Morgan

$$\overline{A.B.C\ldots} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\ldots$$

$$\overline{A+B+C+\ldots} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\ \ldots$$

vérification du 1er théorème :

- Si toutes les entrées sont à 1, les 2 membres de l'équation sont nuls

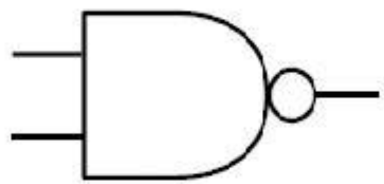
- Si une au moins des entrées est à 0, les 2 membres de l'équation = 1

Résumé des règles de l’algèbre de Boole

Lois	Opérateur ET	Opérateur OU
Identité	$1.A=A$	$0+A=A$
Nullité	$0.A=0$	$1+A=1$
Associativité	$(A.B).C=A.(B.C)$	$(A+B)+C=A+(B+C)$
Commutativité	$A.B=B.A$	$A+B=B+A$
Distributivité	$A.(B+C)=A.B+A.C$	
Idempotence	$A.A=A$	$A+A=A$
Inversion	$A.\overline{A}=0$	$A+\overline{A}=1$
Absorption(1)	$A.(A+B)=A$	$A+A.B=A$
Absorption(2)	$A+\overline{A}B=A+B$	
Loi de De Morgan	$\overline{A.B}=\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A+B}=\overline{A}.\overline{B}$

4- Opérateur NON ET et NON OU

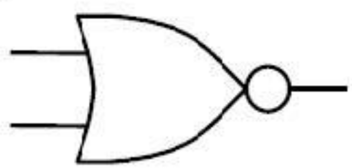
porte NON-ET



a	b	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f(a,b) = \overline{a \cdot b}$$

porte NON-OU



a	b	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$f(a,b) = \overline{a + b}$$

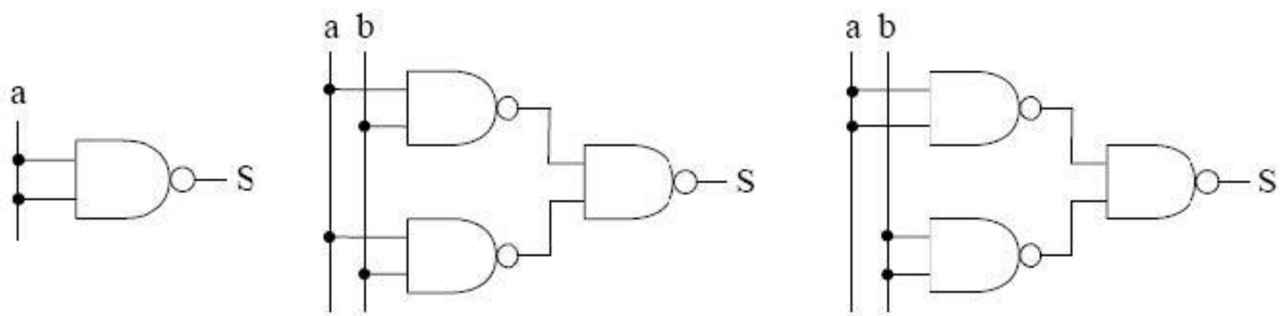
Complétude de la porte NON ET

La porte NON-ET est complète : on peut réaliser n'importe quelle fonction booléenne uniquement avec des portes NON-ET.

$$\bar{a} = \overline{a \cdot a}$$

$$\begin{aligned} a \cdot b &= \overline{\overline{a \cdot b}} \\ &= \overline{\overline{ab} \cdot \overline{ab}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b &= \overline{\overline{a + b}} \\ &= \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}} \\ &= \overline{\overline{aa} \cdot \overline{bb}} \end{aligned}$$

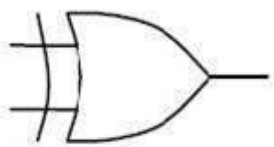


Exercice:

Réaliser les fonctions vues précédemment avec des portes NON ET

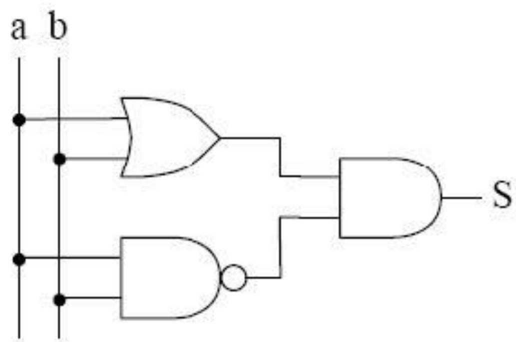
5- Opérateur XOR (OU exclusif)

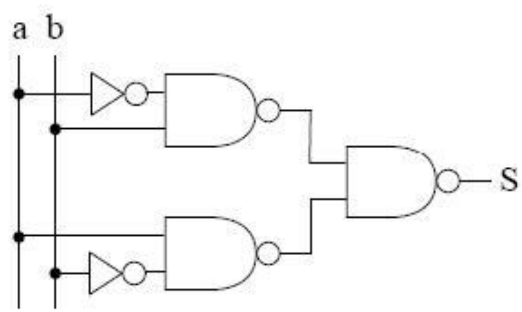
porte XOR



a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\begin{aligned} f(a,b) &= a \oplus b \\ &= (a+b)(\overline{ab}) \\ &= (a+b)(\bar a + \bar b) \\ &= a\bar a + a\bar b + b\bar a + b\bar b \\ &= a\bar b + b\bar a \\ &= \overline{\overline{a\bar b}} + \overline{\overline{b\bar a}} = \overline{\overline{a\bar b} \cdot \overline{b\bar a}} \end{aligned}$$





Exercice:

Fonctions logiques

I. Donner toutes les fonctions logiques à 1 puis à 2 variables.

II. Avec 3 variables, combien de fonctions ? Conclusion

Corrigé:

Les 16 fonctions booléennes de 2 variables ($\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$)

00	01	10	11	$f(a,b)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	ab
0	0	1	0	$a\bar{b}$
0	0	1	1	a
0	1	0	0	$\bar{a}b$
0	1	0	1	b
0	1	1	0	$a \oplus b$
0	1	1	1	$a + b$

00	01	10	11	$f(a,b)$
1	0	0	0	$\overline{a+b}$
1	0	0	1	$\overline{a \oplus b}$
1	0	1	0	$\bar{b}$
1	0	1	1	$a + \bar{b}$
1	1	0	0	$\bar{a}$
1	1	0	1	$\bar{a} + b$
1	1	1	0	$\overline{ab}$
1	1	1	1	1

Pour n variables correspond 2^n fonctions possibles.

Ecriture canonique d'une fonction logique

La première forme canonique:

= Somme logique des mintermes correspondant à chaque sortie valant 1 de la table de vérité

un minterme étant le produit logique de toutes les variables d'entrée apparaissant chacune

- sous la forme vraie si elle a valeur 1
- ou complémentée si elle a la valeur 0.

Ecriture canonique d'une fonction logique

La deuxième forme canonique:

= Produit logique des maxtermes correspondant à chaque sortie valant 0 de la table de vérité

un maxterme est la somme logique de toutes les variables d'entrée apparaissant chacune

- sous la forme vraie si elle a la valeur 0
- ou complémenté si elle a la valeur 1.

Exemple: Fonction majoritaire

La sortie est égale à 1 quand le nombre de "1" est majoritaire. Elle est définie par la table de vérité suivante :

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Donner les deux formes canoniques de cette fonction.

Corrigé : Fonction majoritaire

La première forme canonique

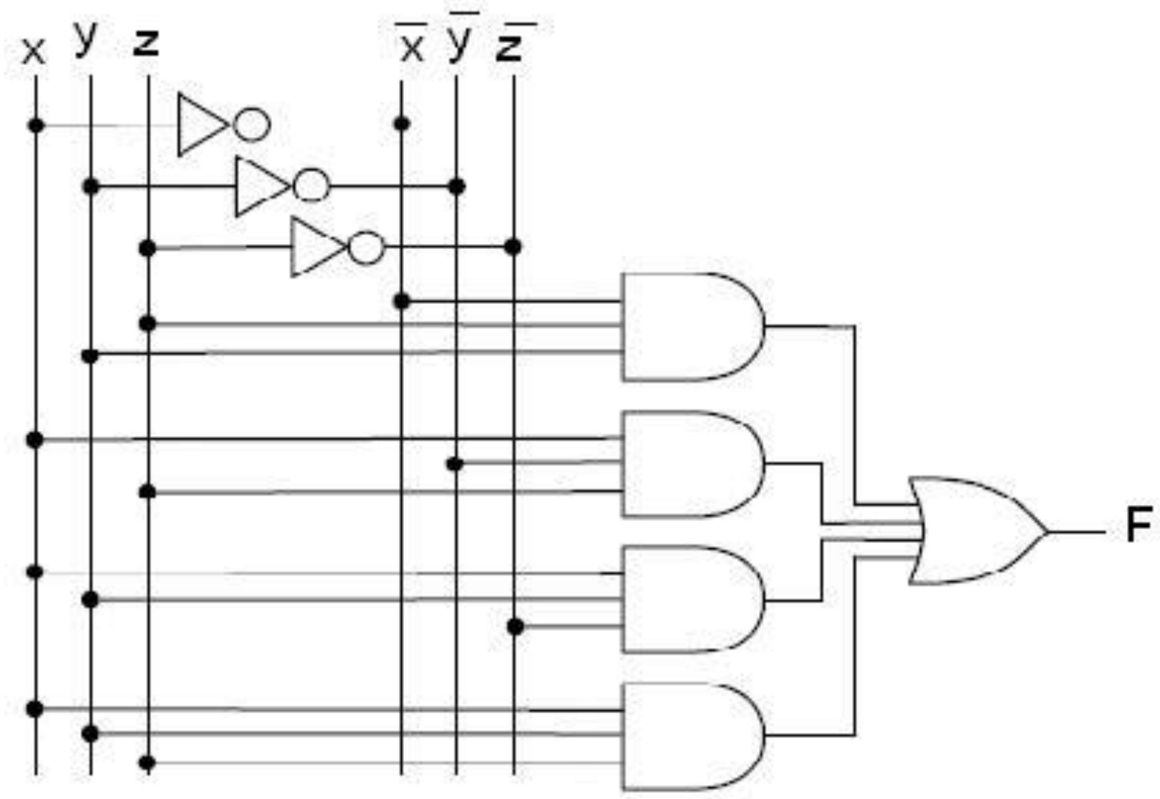
$$F = \overline{x}\,y\,z + x\,\overline{y}\,z + x\,y\,\overline{z} + x\,y\,z$$

La deuxième forme canonique

$$F = (\overline{x} + y + z)(x + \overline{y} + z)(x + y + \overline{z})(x + y + z)$$

Ces deux expressions sont-elles équivalentes ?

Circuit réalisant la fonction



Simplification des fonctions logiques

Simplifier une expression logique = trouver une forme plus condensée:

- moins d'opérateurs
- implémentation plus compacte (diminuer le coût)
- Deux méthodes de simplification des fonctions logiques

Les outils:

- Outil algébrique
- Outil graphique

Simplification Algébrique:

En utilisant les théorèmes fondamentaux de l'algèbre de Boole

- A partir de la première forme canonique (somme de produits)
- dépend de l'habilité et l'expression

Exemple:

$$
\begin{aligned}
F &= \bar{x}\,y\,z + x\,\bar{y}\,z + x\,y\,\bar{z} + x\,y\,z \\
&= (\bar{x}\,y\,z + x\,y\,z) + (x\,\bar{y}\,z + x\,y\,z) + (x\,y\,\bar{z} + x\,y\,z) \\
&= y\,z\,(\bar{x} + x) + x\,z\,(\bar{y} + y) + x\,y\,(\bar{z} + z) \\
&= x\,y + y\,z + z\,x
\end{aligned}
$$

Simplification graphique: Tableau de Karnaugh

Le tableau de Karnaugh: est une représentation compacte des fonctions logiques.

Il permet de simplifier de manière apparente et méthodique des expressions booléenne.

Principe de représentation :

Si une fonction dépend de n variables il y a 2^n produits possibles.
Chacun de ces produits est représenté par une case dans le tableau de Karnaugh

Structure des tableaux de Karnaugh pour 2, 3, 4 et 5 variables

y \ x	0	1
0		
1		

Tableau à 2 variables

z \ xy	00	01	11	10
0				
1				

Tableau à 3 variables

zt \ xy	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Tableau à 4 variables

tu \ xyz	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
11								
10								

Tableau à 5 variables

Méthode de simplification

I. Remplir chaque case du tableau avec la valeur de la fonction pour le produit correspondant. Il est possible de ne copier que les 1.

II. Rassembler les cases adjacentes contenant des 1 par groupements de 2, 4 ou 8 termes (puissances de 2)

III. On cherche à avoir le minimum de groupements, chaque groupement rassemblant le maximum de termes. Une même case peut intervenir dans plusieurs groupements, au pire un 1 isolé est un groupement de taille un.

Méthode de simplification

I. Le tableau doit être considéré de façon circulaire (on peut replier le tableau comme une sphère).

II. Chaque groupement de 1 correspond à un minterme qui contient que les variables qui ne changent pas d'état sachant que

$$(A.B) + (A.\bar{B}) = A.(B+\bar{B}) = A$$

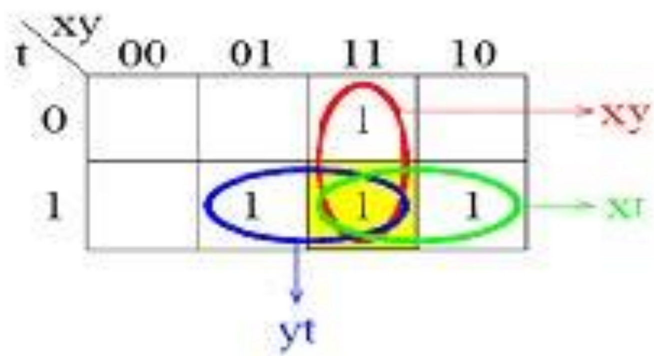
III. L'expression logique finale est la somme de tous les mintermes obtenus.

Exemple: Simplification graphique:

Reprenons la fonction logique définie par la table de vérité

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Le tableau de Karnaugh correspondant est :



Nous y observons trois groupements de deux 1 chacun.

L'expression simplifiée de la fonction est :

$F(x) = xy + xt + yt$

Exercice:

En utilisant la méthode des tableaux de Karnaugh:

- Donner l'expression simplifiée de la fonction logique F de 4 variables définie par la table de vérité suivante :

x	y	z	t	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Corrigé:

Le tableau de Karnaugh correspondant est :

zt \ xy	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	1
11				1
10	1			1

$$F = x\bar{y} + \bar{y}\bar{t} + y\bar{z}t$$

Synthèse des circuits logiques

L'objectif est déterminer le logigramme (représentation graphique) d'une fonction logique

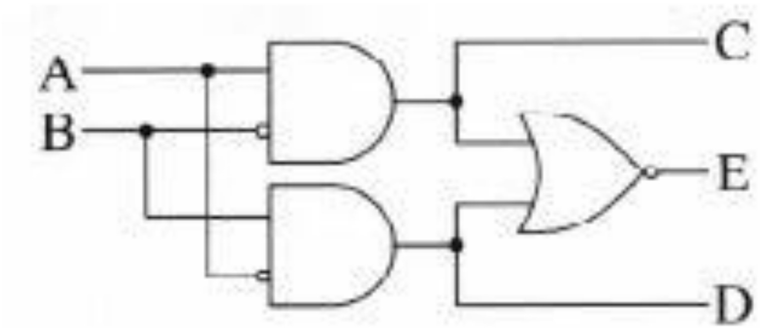
Procédure de synthèse:

I. Identifier les entrées et les sorties de la fonction logique.
II. Construire sa table de vérité
III. En dériver une expression algébrique (ex: somme des mintermes)
IV. Simplifier cette expression
V. Réaliser la fonction logique à l'aide d'opérateurs divers (plusieurs solutions possibles)

Analyse de circuits logiques

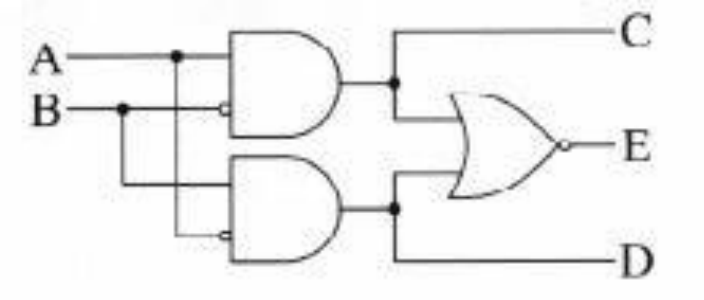
L'analyse de circuits logique consiste à trouver sa fonction logique pour en déduire d'éventuel rôle de ce circuit.

Exemple : Considérons le circuit logique suivant



- Quelle est la fonction qu'il réalise?

Exemple :



- on en déduit

$$C = A.\overline{B}$$
$$D = \overline{A}.B$$
$$E = \overline{A.\overline{B} + \overline{A}.B} = \overline{C + D}$$

- table de vérité

A	B	C=(A>B)	D=(A<B)	E=(A=B)
0	0	0	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1

≡ Comparateur