Déf : $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle pavé ouvert tout ensemble P qui s'écrit sous la forme : $P =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[$

$a_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$

Proposition : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe une mesure λ_n appelée mesure de Lebesgue telle que pour tout pavé ouvert P :

$P =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[$, on a

$$\lambda_n(P) = (b_n - a_n) \times \dots \times (b_1 - a_1)$$

si $n = 3$: $\lambda_3(P) =$

En particulier pour

$n = 1$: $\lambda_1(P) = b - a$, $P =]a, b[\longrightarrow$ longueur

$n = 2$: $\lambda_2(P) = (b_2 - a_2)(b_1 - a_1) \longrightarrow$ surface

Déf : $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle pavé ouvert tout ensemble P qui s'écrit comme suit : $P =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[$

$a_i < b_i$ $\quad i = 1, \dots, n$

Proposition : $\forall n \in \mathbb{N}^*$. il existe une mesure λ_n appelée mesure de Lebesgue telle que pour tout pavé ouvert P :

$P =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[$, On a

$$\lambda_n(P) = (b_n - a_n) \times \dots \times (b_1 - a_1)$$

En particulier pour

$n = 1$: $\lambda_1(P) = b - a$ $\quad P =]a, b[\longrightarrow$ longueur

$n = 2$: $\lambda_2(P) = (b_2 - a_2)(b_1 - a_1) \longrightarrow$ surface

si $n = 3$: $\lambda_3(P) = (b_3 - a_3)(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)$

$\longrightarrow$ Volume.

Déf : A ensemble on dit que A est négligeable par rapport à la mesure μ si sa mesure est nulle

$\mu(A) = 0$

Ex $x \in \mathbb{R}^n$

Mq $\lambda_n(\{x\}) = 0$ | $\{x\} \subset \left]x_1 - \frac{1}{p}, x_1 + \frac{1}{p}\right[\times \cdots \times \left]x_n - \frac{1}{p}, x_n + \frac{1}{p}\right[$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

$\Rightarrow \lambda_n(\{x\}) < \frac{2}{p} \times \cdots \times \frac{2}{p} = \left(\frac{2}{p}\right)^n \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$

$\left(\frac{2}{p}\right)^n \xrightarrow{p \to \infty} 0$

$\Rightarrow 0 \leq \lambda_n(\{x\}) \leq 0 \Rightarrow \lambda_n(\{x\}) = 0$

A dénombrable $\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \Rightarrow \lambda_n(A) = 0$

$\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ sont négligeables par rapport à la mesure de Lebesgue.

Ex : $x \in \mathbb{R}^n$

Mq $\lambda_n(\{x\}) = 0$ | $\{x\} \subset \left]x_1 - \frac{1}{p}, x_1 + \frac{1}{p}\right[\times \cdots \times \left]x_n - \frac{1}{p}, x_n + \frac{1}{p}\right[$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

$\Rightarrow \lambda_n(\{x\}) \leq \frac{2}{p} \times \cdots \times \frac{2}{p} = \left(\frac{2}{p}\right)^n \xrightarrow{p \to \infty} 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow 0 \leq \lambda_n(\{x\}) \leq 0 \Rightarrow \lambda_n(\{x\}) = 0$

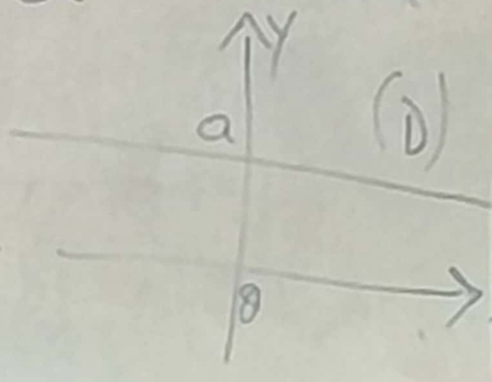
A dénombrable $\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \Rightarrow \lambda_n(A) = 0$

$\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ sont négligeables par rapport à la mesure de Lebesgue

Question ?! $\exists$ des ensembles infinis de mesure nulle

(D) _ $\lambda_2(D)$

$(D) \mathbin{//} (OX)$ passant par a



Ex

$$(D) = \mathbb{R} \times \{a\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1[\times \{a\}$$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} D_k .$$

Mq : $\lambda_2(D_k) = 0$

$$D_k \subset \underbrace{]k-1, k+1[\times]a - \tfrac{1}{p}, a + \tfrac{1}{p}[}$$

$$\lambda_2(D_k) \leq 2 \times \frac{2}{p} = \frac{4}{p} \quad \boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*}$$

or $\frac{4}{p} \xrightarrow{p \to \infty} 0$ Alors

$$0 \leq \lambda_2(D_k) \leq 0 \Rightarrow \lambda_2(D_k) = 0 \Rightarrow \lambda_2(D) = 0$$

Scanned with CamScanner