Chapitre I : Topologie.

Déf :

Soit $d : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction qui vérifie les pptés suivantes :

1) $\forall x, y \in E, d(x,y) = d(y,x)$

2) $\forall x \in E ; d(x,x) = 0$

3) $\forall x, y, z ; d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

4) $\forall x, y \in E \; d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow$ Cette fct s'appelle la distance.

- le couple (E, d) est appelé espace métrique.

Ouvert :

Déf :

- on note la boule de centre x_0 et de rayon r : $B(x_0, r)$ définie

$\Rightarrow B(x_0, r) = \{ \forall y \in E \,/\, d(y, x_0) < r \}$

on dit que $B(x_0, r)$ est ouverte.

$\Rightarrow$ La boule fermée est définie :

$B(x_0, r) = \{ y \in E \,/\, d(y, x_0) \leqslant r \}$

Déf :

Une partie U de E est ouverte si $\forall x \in U \;\; \exists \alpha > 0 : B(x, \alpha) \subset U$.

Fermé :

Déf :

Une partie F de E est fermée si $\complement F = F^c$ le complémentaire de F est ouvert.

Proposition :

F est fermé $\Longleftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F tq : $x_n \longrightarrow x$ alors $x \in F$.

L'interieure d'une partie.

Déf :

U partie de E :

$\mathring{U} = \{ x \in U \,/\, \exists \alpha > 0 : B(x, \alpha) \subset U \}$

l'interieur de U.

Déf :

on dit que $x \in E$ est un pt adhérent à A (partie de E) ssi

$\forall \varepsilon > 0, \; B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ (*)

L'ensemble des pts x verifient (*) est appelée l'adherente de A notée $\bar{A}$

Ex :

- Mq : $\complement \bar{A} = \mathring{\overbrace{\complement A}}$

Soit $x \in \complement \bar{A} \Longleftrightarrow x \notin \bar{A}$

$\Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$

$\Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \; B(x, \varepsilon) \subset \complement A \Longleftrightarrow x \in \mathring{\overbrace{\complement A}}$

- Mq : $\mathring{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

Soit $x \in \mathring{\overbrace{A \cap B}} \Rightarrow \exists \alpha > 0 \; B(x, \alpha) \subset A \cap B$

$\Longleftrightarrow \exists \alpha > 0 \; B(x, \alpha) \subset A$ et $B(x, \alpha) \subset B$

$\Longleftrightarrow x \in \mathring{A}$ et $x \in \mathring{B} \Longleftrightarrow x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$

$(\Leftarrow)$ $x \in A \cap B \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A}$ et $x \in \overset{\circ}{B}$

$\Rightarrow \exists \alpha > 0 \quad B(x,\alpha) \subset A$ et

$\exists \beta > 0 \quad B(x,\beta) \subset B$

$\bar{\alpha} = \min(\alpha, \beta)$

$$\Rightarrow \exists \bar{\alpha} > 0 \begin{cases} B(x,\bar{\alpha}) \subset A \\ B(x,\bar{\alpha}) \subset B \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists \bar{\alpha} > 0 \quad B(x,\bar{\alpha}) \subset (A \cap B)$

$\Rightarrow x \in \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$.

* Mq: $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$

Ex 3: $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$

Ex 4: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

Proposition:

* Une famille d'ouverts $(O_i)_{i \in I}$ et I un ensemble d'indices

1) $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un ouvert

2) $\bigcap_{i \in I} O_i$ est un ouvert si I finie

* Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermé

1) $\bigcup_{i \in I} F_i$ est un fermé si I est finie

2) $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé

Exemple.

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ est un fermé

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [0, 1 - \frac{1}{n}] = [0,1[$ n'est pas fermé

Intérieur - Adhérance

Compact

Déf : ppté de Borel - Lebesgue

K un ensemble.

K est compact ssi ∀ une famille d'ouverts $(O_i)_{i\in I}$ avec I un ensemble d'indices tq $K\subset \bigcup_{i\in I} O_i$ ∃ un nbr fini d'ouvert $(O_j)_{j\in J}$ ($J\subset I$, J est fini) : $K\subset \bigcup_{j\in J} O_j$

Prop :

K est compact ssi ∀ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de K, on peut extraire une sous suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans K.

Prop :

Si $K\in\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$) Alors K compact ssi K est fermé et borné.

Prop :

1) Union fini de compacts est compact.

2) Intersection de compacts est compact.

Exercice :

On considère les applications

$P_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto P_1(x,y) = x$

1) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Mq : $P_1(O)$ et $P_2(O)$ est ouverts

(vérifier que si $A\subset B \Rightarrow P_1(A)\subset P_1(B)$)

$P_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longrightarrow P_2(x,y) = y$

2) Soit $H=\{(x,y) / xy=1\}$ Mq : H est fermé.

$x\in P_1(A) \Rightarrow \exists y : (x,y)\in A \Rightarrow (x,y)\in B \Rightarrow x\in P_1(B)$. (la vérification)

1) Soit $x\in P_1(O) \Rightarrow \exists y : (x,y)\in O$

$\Rightarrow \exists \alpha>0 :]x-\alpha, x+\alpha[\times]y-\alpha, y+\alpha[\subset O$

$\Rightarrow \exists \alpha>0 : P_1\left(]x-\alpha, x+\alpha[\times]y-\alpha, y+\alpha[\right)\subset P_1(O)$

$\Rightarrow]x-\alpha, x+\alpha[\subset P_1(O) \Rightarrow P_1(O)$ est un ouvert.

2) Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in H$:

$(x_n, y_n)\longrightarrow(x,y)$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ $x_n y_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n y_n = 1$

$\Rightarrow xy = 1$

donc $(x,y)\in H$

d'où H fermé

3) Vérifier que $P_1(H)$ et $P_2(H)$ ne sont pas des fermés.

$P_1(H) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$P_2(H) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow P_1(H)$ et $P_2(H)$ ne sont pas des fermés.

4) Mq si F est fermé et $P_2(F)$ borné Alors $P_1(F)$ est fermé.

Soit $(x_n) \in p_1(F)$ $\quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$

Mq : $x \in p_1(F)$

$\exists y_n : (x_n, y_n) \in F \cdot p_1(x_n, y_n) = x_n$

$\Rightarrow y_n \in p_2(F) \Rightarrow \exists (y_{\varphi(n)})_n$ sous suite qui C.V $\to y$

$\Rightarrow (x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \in F$ qui C vers (x, y) or F est fermé donc

$(x, y) \in F \Rightarrow x \in p_1(F)$

Exercice :

Soit E un espace vectoriel et F un sous espace vect de E

F est ouvert

M.q: $F = E$

on a : $F \subset E$

Mq : $E \subset F$

F ouvert et $\vec{\theta} \in F$ (s.e.V) Alors

$\exists \alpha > 0 \quad B(\vec{\theta}, \alpha) \subset F$

Soit $\vec{x} \in E \Rightarrow \begin{cases} \exists \vec{y} \in B(\vec{\theta}, \alpha) : \vec{x} = r.\vec{y} \\ \exists r > 0 \end{cases}$

or $r.\vec{y} \in F \Rightarrow \vec{x} \in F$

Exercice :

Soient A, B deux parties non vides de E e.v. normé tq.

$$d = d(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y) > 0$$

Mq : $\exists$ deux ouverts U et V disjoints tq : $A \subset U$ et $B \subset V$.

$$U = \bigcup_{x \in A} B\left(x, \frac{d}{2}\right)$$

$$V = \bigcup_{y \in B} B\left(y, \frac{d}{2}\right)$$

on : $U \cap V = \emptyset$ sinon $\exists x \in U \cap V$

$\Rightarrow x \in U$ et $x \in V$

$\Rightarrow \exists a \in A : x \in B(a, \frac{d}{2})$, $\exists b \in B : x \in B(b, \frac{d}{2})$

$\Rightarrow d(a, x) < \frac{d}{2}$ et $d(b, x) < \frac{d}{2}$

$\Rightarrow d(a, b) \leq d(a, x) + d(b, x)$

$\Rightarrow d(a, b) < d$ (absurde)

car $d = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y)$

Continuité :

On considère 2 espaces métriques (E, d) et (F, d')

$$f : E \to F$$

on dit que f est continue en $x_0 \in E$ ssi

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \geq 0$

$\forall x : d(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

Proposition :

f est continue en $a \in E$ ssi

$\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E : a_n \xrightarrow{n \to +\infty} a$

alors $(f(a_n))_n \xrightarrow{n \to +\infty} f(a)$

Proposition :

$f : E \to ~~F~~$ continue, on a..

1) L'image réciproque d'un ouvert est ouvert.

2) " " " fermé est fermé.

3) K compact, son image directement compacte.

Proposition :

K compacte et f continue

$f : K \to \mathbb{R}$. Alors,

f est bornée et atteint ses bornes.

Exercice :

E espace vect normé.

a) Soit F partie fermé non vide de E et $x \in E$.

Mq :

$$d(x, F) = 0 \iff x \in F.$$

$$d(x,F) = \inf_{y \in F} d(x,y)$$

$$\Updownarrow$$

$(\Rightarrow)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in F$

$$d(x,F) \leqslant d(x, y_\varepsilon) < d(x,F) + \varepsilon$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\exists y_n \in F$

$$d(x, y_n) < \frac{1}{n}$$

or $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \Rightarrow y_n \xrightarrow{n \to +\infty} x$

En plus F fermé et $(y_n)_n \in F$

d'où $x \in F$.

$(\Leftarrow)$ $0 \leqslant d(x,F) \leqslant d(x,x) = 0$

$$d(x, F) = 0$$

b) Soient F et G 2 fermés non vide : $F \cap G = \phi$

Mq : il reste 2 ouverts U et V.

$F \subset U$ et $G \subset V$ et $U \cap V = \phi$

NB :

$\forall x \in G$ $d(x, F) \neq 0$.

$\forall y \in F$ $d(y, G) \neq 0$.

$$U = \bigcup_{x \in F} B\left(x, \frac{d}{2}(x,G)\right) \text{ et}$$

$$V = \bigcup_{x \in G} B\left(x, \frac{d}{2}(x,F)\right)$$

M.q : $U \cap V = \phi$

S.q : $U \cap V \neq \phi$

$\Rightarrow \exists x \in U \cap V \Rightarrow \begin{cases} x \in U \\ \text{et} \\ x \in V \end{cases}$

$\Rightarrow \exists a \in F$.

$$d(a, x) < \frac{d}{2}(a, G)$$

$\exists b \in G : d(b, x) < \frac{d}{2}(b, F)$

$\Rightarrow d(a,b) \leqslant d(a,x) + d(b,x)$

Sachant que :

$$\frac{d}{2}(a, G) \leqslant \frac{d}{2}(a, b)$$

$$\frac{d}{2}(b, F) \leqslant \frac{d}{2}(a, b)$$

$$\Rightarrow d(a,b) < \frac{d}{2}(a,G) + \frac{d}{2}(b,F)$$

$$d(a,b) < d(a,b) \text{ (absurde)}$$

d'où : $U \cap V = \phi$

Exercice:

Mq: $\mathbb{Z}$ est fermé

1) par la caractérisation des fermés.

2) En Mq son complémentaire est ouvert.

Rép:

2) $\mathbb{Z}^c = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k, k+1[$ ouvert

D'où $\mathbb{Z}$ fermé.

3) l'utilisation de l'image réciproque d'un fermé par une application continue, est fermé.

1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z} : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon \ |x_n - x| < \varepsilon$

pour $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N \ |x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < 1$

$\Rightarrow x_n = x_m \quad \forall n,m \geq N$

$\Rightarrow x = x_n = x_m \in \mathbb{Z}$

d'où $\mathbb{Z}$ fermé.

Déf: la mesure

on considère l'application μ suivante définie comme suit:

$\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$

$\mathcal{P}(X)$: l'ensemble de toutes les parties de X, vérifiant:

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\forall (A_i)_{i\in I}$ famille disjointe 2 à 2.

i.e $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(A_i)$$

cette application est appelée mesure.

ppté:

$A \subset B \Rightarrow \mu(B) \geq \mu(A)$

$B = A \cup (B \setminus A)$

$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B\setminus A)$

or $\mu(B\setminus A) \geq 0 \Rightarrow \mu(B) \geq \mu(A)$

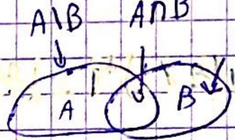
Ex:

$A, B \subset X$

M.q: $\mu(A\cup B) + \mu(A\cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

Sol:

on a:



$A\cup B = (A\setminus B) \cup (A\cap B) \cup (B\setminus A)$

$A = (A\setminus B) \cup (A\cap B)$

$B = (B\setminus A) \cup (A\cap B)$

$\mu(A) = \mu(A\setminus B) + \mu(A\cap B)$

$\mu(B) = \mu(B\setminus A) + \mu(A\cap B)$

$\mu(A\setminus B) = \mu(A) - \mu(A\cap B)$

$\mu(B\setminus A) = \mu(B) - \mu(A\cap B)$

or $\mu(A\cup B) = \mu(A\setminus B) + \mu(A\cap B) + \mu(B\setminus A)$

$= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A\cap B)$

d'où $\mu(A\cup B) + \mu(A\cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

Ex: mesure de dirac.

X un ensemble. Soit $y \in X$

on considère l'app

$$\delta_y : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty[$$
$$B \longrightarrow \delta_y(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in B \\ 0 & \text{si } y \notin B \end{cases}$$

M.q δ_y est bien une mesure

Sol:

on a $\delta_y(\emptyset) = 0$ car $\forall y \in X$ $y \notin \emptyset$

soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille disjointes 2 à 2 de X.

$\delta_y\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$?

Si $y \notin \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ Alors $y \notin A_i$, $\forall i \in I$

Donc $\forall i \in I$ $\delta_y(A_i) = 0$

Alors $\delta_y\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 0 = \sum_{i \in I} \delta_y(A_i)$

Si $y \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ $\exists i_0 \in I$ tq $y \in A_{i_0}$ et

$y \notin A_j$ $\forall j \neq i_0$

Donc $\delta_y\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1$ et $\delta_y(A_{i_0}) = 1$

et $\delta_y(A_j) = 0$ $\forall j \neq i_0$

$$\sum \delta_y(A_i) = \delta_y(A_{i_0}) + \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i_0}} \delta_y(A_j)$$

$$= 1 + 0$$

Alors $\delta_y\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \delta_y(A_i)$, $\forall i \in I$

et δ_y est une mesure.

$\mathbb{R}$

Déf:

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$

Soient $b_1, b_2, \dots, b_n$

$a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$

on appelle pavé ouvert l'ensemble suivant

(*) $P =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \dots \times]a_n, b_n[$

Proposition:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$\exists$ une mesure λ_n tq:

$\forall P$ pavé ouvert de la forme (*)

on a : $\lambda_n(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$

cette mesure s'appelle la mesure de Lebesgue.

Si $n = 1$: $P =]a, b[$ $a < b$

$\lambda_1(P) = b - a \to$ la longueur de $]a, b[$

Si $n = 2$: $P =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$

$\lambda_2(P) = (b_2 - a_2)(b_1 - a_1) \to$ la surface.

Si $n = 3$: $P =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times]a_3, b_3[$

$\lambda_3(P) = (b_3 - a_3)(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)$
$(a_1 < b_1), (a_2 < b_2)$

Déf:

on considère M une mesure sur un ensemble X et $A \subset X$

on dit que A est negligeable si $M(A) = 0$

Ex:

$x \in \mathbb{R}^n$, Mq $\lambda_n(\{x\}) = 0$ $n \in \mathbb{N}^*$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$\{x\} \subset \underbrace{]x_1 - \varepsilon, x_1+\varepsilon[\times \dots \times]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[}_{P}$

$p \in \mathbb{N}^*$ prenons $\varepsilon = \frac{1}{p}$

$\lambda_n(\{x\}) \leq \lambda_n(P)$

$\lambda_n(P) = \lambda_n(]x_1 - \frac{1}{p}, x_1 + \frac{1}{p}[\times \dots \times]x_n - \frac{1}{p}, x_n + \frac{1}{p}[)$

$= \left(\frac{2}{p}\right)^n \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$

or $\left(\frac{2}{p}\right)^n \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$

$0 \leq \lambda_n(\{x\}) \leq 0$

d'où $\lambda_n(\{x\}) = 0$

Ex:

Verifier que :

$\lambda_1(]a,b[) = \lambda_1(]a,b])$
$= \lambda_1([a,b[) = \lambda_1([a,b])$

Sol:

$\lambda_1(]a,b]) = \lambda_1(]a,b[\cup \{b\}) = \lambda_1(]a,b[)$

$\lambda_1([a,b]) = \lambda_1([a,b[\cup \{b\}) = \lambda_1([a,b[)$

- Si A est un ensemble dénombrable fini ou infini

on a : $\lambda_n(A) = 0$

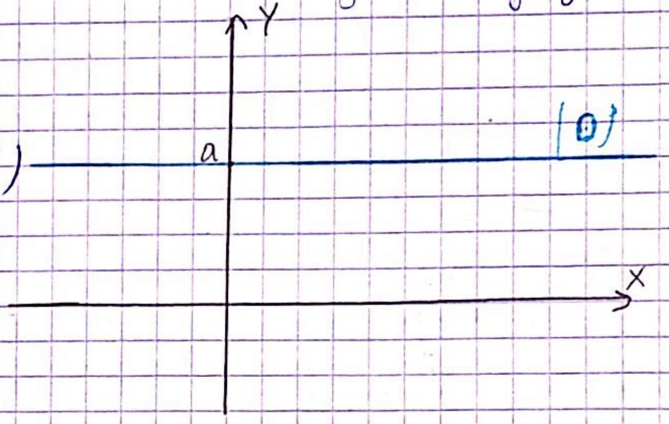
car $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$

Resultat: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}^n$
$\mathbb{Q}^n$ sont de mesure nulle.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ dénombrable infini negligeables.

Question:

Est-ce qu'il $\exists$ des ensembles non denombrables infinis negligeable?



Mq: $\lambda_2(D) = 0 \quad D = \mathbb{R} \times \{a\}$

$D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{[k, k+1[\times \{a\}}_{D_k} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} D_k$

Sol.

$p \in \mathbb{N}^*$

$D_k \subset]k-1, k+1[\times]a - \frac{1}{p}, a + \frac{1}{p}[$

$0 \leq \lambda_2(D_k) \leq 2 \times \frac{2}{p} = \frac{4}{p} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$

or $\frac{4}{p} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ Alors

$\lambda_2(D_k) = 0$

En plus:

D est construit par des parties disjoints 2 à 2

$\lambda_2(D) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_2(D_k) = \sum 0$

$\Rightarrow$ (D) est negligeable % à λ_2

Déf:

$(X, \mathcal{M})$ espace normé. Soit $A \subset X$

on dit qu'une propriété est vraie (a lieu) sur A ssi l'ensemble des $x \in A$ sur lequel la propriété n'est vraie est negligeable par rapport à la mesure $\mathcal{M}$.

Ex:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to \begin{cases} f(x) = 1 \; ; x = 1 \\ f(x) = 2 \; ; x = 2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$f \equiv 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$ car $\{1, 2\}$ est negligeable % à λ_1.

$y \in \mathbb{R}$ on définit

$y^+ = \max(y, 0)$ partie positive de y.

$y^- = \min(y, 0)$ " négative de y

on verifie facilement que:

* $y^+, y^- \geq 0$
* $y = y^+ - y^-$
* $|y| = y^+ + y^-$

$f : X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subset \mathbb{R}$

On definit la partie positive et negative de f comme dit

Notées f^+ et f^- | $f^+(x) = (f(x))^+$

$f^-(x) = (f(x))^-$

On a $f = f^+ - f^-$

$f^+, f^- : X \to \mathbb{R}_+$

Déf:

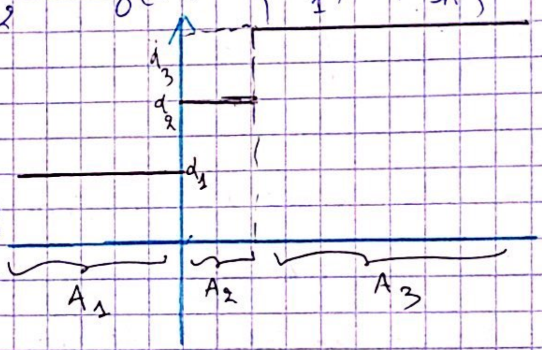
$A \subset X$ la fct indicatrice sur A est:

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déf:

$f : X \to \mathbb{R}$ On dit que f est une f est étagée si il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k \in \mathbb{R}$

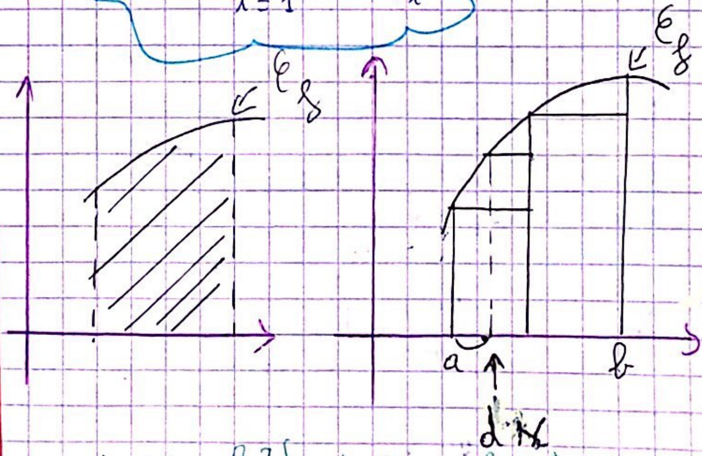
$$f(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$$



$A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\})$ $\quad i = 1, \ldots, k$

Alors les ensembles A_i forment une partition de X

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$



$\lambda_1([a, b]) = \lambda_1(]a, b[)$

N.B.

Une fct intégrable en sens de Riemann est nécessairement bornée et continue.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

1ère étape:

$$f : X \to [0, +\infty[$$

f est étagée. on définit l'intégrale de cette fct, notée $\int_X f\,d\mu = \sum_1^k \alpha_i \mu(A_i)$ sachant que $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$

2ème étape:

on considère une fct arbitraire positive $f : X \to [0, +\infty[$

on construit la suite de fcts f_p comme suit :

$$\begin{cases} f_p(y) = \frac{k}{2^p} \text{ si } f(y) \in [\frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p}[\quad k \in \{0, 1, 2, \dots, p2^p - 1\} \\ f_p(y) = p \text{ si } f(y) \geq p \end{cases}$$

$p \in \mathbb{N}^*$

on M.q

- $(f_p(y))_{p \in \mathbb{N}^*}$ est croissante

- $\forall y \in X \quad f_p(y) \xrightarrow[p \to \infty]{} f(y)$

$\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\int_X f_p\,d\mu$ est l'intégrale définie dans la 1ère étape car f_p est une fct étagée.

$I_p = \int_X f_p\,d\mu \in \mathbb{R}_+$ on M.q

$(I_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est une suite $\nearrow$

$(I_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ a une limite dans $[0, +\infty[$

on définit $\int_X f\,d\mu = \lim_{p \to 0} I_p$

$= \lim_{p \to 0} \int_X f_p\,d\mu$

3ème étape:

on considère une fct qq:

$$f : X \to \mathbb{R}$$

on a la décomposition:

$$f = f^+ - f^-$$

f^+ et f^- sont arbitraires positives.

D'après l'étape 2 on a

$\int_X f^+\,d\mu \quad \int_X f^-\,d\mu$

Alors on va dire que f est intégrable si $\int f^+\,d\mu < \infty$ et $\int f^-\,d\mu < \infty$

$$\int_X f\,d\mu = \int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu$$

Toutes les pptés de l'intégrale de Riemann ont été revérifiées par Lebesgue.

ppté 1:

$c \in \mathbb{R}$ $\int_A c\,dM = c\,M(A)$

ppté 2:

$\forall \alpha_1, \alpha_2, f_1, f_2$ integrables alors : (linéarité)

$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ est aussi integrable

$$\int (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\,dM = \alpha_1 \int f_1\,dM + \alpha_2 \int f_2\,dM$$

ppté 3:

Relation de chales

Si f est integrable sur A_1 et A_2.

$$\int_{A_1 \cup A_2} f\,dM = \int_{A_1} f\,dM + \int_{A_2} f\,dM$$

Exercice :

Soit $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap]0,1[\\ 0 & \text{si } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap]0,1[\end{cases}$$

Mq. f est integrable au sens de Lebesgue et non integrable au sens de Riemann

Déf 1:

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

La dérivée partielle d'/. α notée D_f^α et defini comme suit.

$$\begin{cases} D_f^\alpha = f \\ [\alpha] = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \\ D_f^\alpha = \dfrac{\partial^{[\alpha]} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \end{cases}$$

Déf 2:

on appelle l'ensemble $\mathcal{E}^m(\Omega, \mathbb{R})$ des fcts dont la derivée partielle $D^\alpha f$ tq: $[\alpha] \leq m$ existent et continues.

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fcts indefinies et derivables.

Déf 3:

on définit le support d'une fct f

$$\text{supp}(f) = \{ x \in \mathbb{R}^n / f(x) \neq 0 \}$$

Déf 4:

on définit l'ensemble $D(\Omega, \mathbb{R})$, c'est l'ensemble des fcts indéfiniment dérivables à support compact on le note $D(\Omega)$

Déf 5.

$$\varphi \in D(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \varphi \in \mathcal{E}^\infty(\Omega) \\ 2)\ \exists K \text{ compact tq: } \forall x \in \Omega \setminus K\ f(x) = 0 \end{cases}$$

Déf 4 $\Leftrightarrow$ Déf 5

Ex 1:

$f = 0$

?! $f \in D(\mathbb{R})$

Scanned with CamScanner

N.B.

on a $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

et $supp(f) = \emptyset \Rightarrow$ compact

$\Rightarrow 0 \in D(\mathbb{R})$

Ex 2:

$a \in \mathbb{R} \quad f(x) = a \ \forall x \in \mathbb{R}$

?? $f \in D(\mathbb{R})$

$Supp(f) = \mathbb{R} \Rightarrow$ n'est pas borné

$\Rightarrow$ " " " compact

Ex 3.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(x) = 1 - x^2 & si \ |x| < 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

?! $f \in D(\mathbb{R})$

f est continue

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} -2x & si \ |x| < 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$f'_d(1) = 0 \neq f'_g(1) = -2 \Rightarrow f'$ n'est pas cont $\Rightarrow f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow f \notin D(\mathbb{R})$

2) $supp(f) = \overline{]-1,1[} = [-1,1]$

$supp(f) = \overline{\{x / f(x) \neq 0\}}$

$=]-1,1[$

a] [b

$\Rightarrow f \notin D(\mathbb{R})$ Alors que son support est compact.

Ex:

$f \in D(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

M.q $fg \in D(\mathbb{R}^n)$

$f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow fg \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

$f \in D(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists K$ compact

$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K \quad f(x) = 0$

$\Rightarrow \exists K$ compact $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K$

$f(x)\, g(x) = 0$

$fg(x) = 0$

$fg \in D(\mathbb{R}^n)$

Ex: $\varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R}^n)$

Mq $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \ \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in D(\mathbb{R}^n)$

En déduit que $(D(\mathbb{R}^n), +, \cdot)$ e.v.

Sol:

$\varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi_1(x) = 0$ et $\varphi_2(x) = 0$

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 = 0$

$\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in D(\mathbb{R}^n)$

$\varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists K_1, K_2$ compact tq:

$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K_1 \quad \varphi_1(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K_2 \quad \varphi_2(x) = 0$

on pose: $K = K_1 \cup K_2$

$x \in \complement(K_1 \cup K_2) = \complement K_1 \cap \complement K_2$

or $\forall x \in \complement K_1 \quad \varphi_1(x) = 0$
$\forall x \in \complement K_2 \quad \varphi_2(x) = 0$
$\Big\} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K$

En plus $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

Ex: Soit f et θ_1 definie

$$\theta_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \theta_1(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} & si \ |x| < 1 \\ 0 \ sinon & sinon \end{cases}$$

prouver que $\theta_1 \in D(\mathbb{R})$

$D(\Omega) = \{ \varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,/\, \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \,/\, \text{supp}(\varphi) \text{ compact} \}$

On définit l'ensemble dual de $D(\Omega)$ noté $D'(\Omega)$ comme suit.

$T \in D'(\Omega)$ si $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$ et T est linéaire

Ex:

$a \in \mathbb{R}$ on définit $\delta_a : D(\Omega) \to \mathbb{R}$

$\varphi \to \delta_a(\varphi) = \varphi(a)$

M.q: $\delta_a \in D'(\Omega)$

Sol.

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega)$

$\delta_a(\varphi_1 + \varphi_2) = (\varphi_1 + \varphi_2)(a)$

$= \varphi_1(a) + \varphi_2(a)$

$= \delta_a(\varphi_1) + \delta_a(\varphi_2)$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $\varphi \in D(\Omega)$

$\delta_a(\alpha\varphi) = (\alpha\varphi)(a) = \alpha\varphi(a)$

$= \alpha\, \delta_a(\varphi)$

on en déduit $\delta_a \in D'(\Omega)$

Déf.

On définit l'ensemble des fonctions localement integrable d'1 noté $L^1_{loc}(\Omega)$

$L^1_{loc}(\Omega) = \{ u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,/\, \int_K |u(x)|\,dx < \infty \ \ \forall K \text{ compact} \}$

Soit

$u \in L^1_{loc}(\Omega)$. On définit $T_u : D(\Omega) \to \mathbb{R}$

$\varphi \mapsto T_u(\varphi) = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx$

M.q: $T_u \in D'(\Omega)$

Prouvont aussi que T_u est bien définie i.e $x \mapsto u(x)\varphi(x)$ integrable $\forall \varphi \in D(\Omega)$.

$\varphi \in D(\Omega)$ $\text{Supp}(\varphi) = K$ compact

$\int_\Omega |u(x)\varphi(x)|\,dx = \int_K + \int_{\Omega \setminus K}$

$= \int_K |u(x)\varphi(x)|\,d(x)$

φ continue sur K compact $\Rightarrow \varphi$ est bornée

$\int_\Omega |u(x)\varphi(x)|\,dx = \int_K |u(x)\varphi(x)|\,dx$

$\leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \int_K |u(x)|\,dx$

En plus $u \in L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow \int_K |u(x)|\,dx < \infty$

$\Rightarrow \int_\Omega |u(x)\varphi(x)|\,dx < \infty \Rightarrow T_u$ est bien défini

$\varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega)$

$T_u(\varphi_1 + \varphi_2) = \int_\Omega u(x)(\varphi_1(x) + \varphi_2(x))\,dx$

$= T_u(\varphi_1) + T_u(\varphi_2)$

$T_u(\alpha\varphi) = \int_\Omega u(x)\,\alpha\varphi(x)\,dx$

$= \alpha\, T_u(\varphi) \Rightarrow T_u \in D'(\Omega)$

Lemme.

$u \in L^1_{loc}(\Omega)$

si $\forall \varphi \in D(\Omega)$ $\int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = 0$

Alors $u=0$ ($T_u=0 \Rightarrow u=0$)

on définit l'application suivante

$$\mathcal{G} : L^1_{loc}(\Omega) \to D'(\Omega)$$
$$u \longmapsto \mathcal{G}(u) = T_u$$

__M.q:__ il y a une bijection entre $L^1_{loc}(\Omega)$ et $\mathcal{G}(L^1_{loc}(\Omega))$

__sol:__

__i.e:__ M.q Il y a une injection $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tq: $T_u = T_v$

$\Rightarrow T_{u-v} = 0$ D'après le lemme

$\Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v \Rightarrow$ d'où l'injection.

__Déf:__

Soit la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}} \in D'(\Omega)$ et soit $T \in D'(\Omega)$, on dit que $(T_p)_p$ converge vers T.

$(T_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} T)$ si $\forall \varphi \in D(\Omega)$

$$T_p(\varphi) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} T(\varphi)$$

$$T_p, T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$\varphi \mapsto T_p(\varphi) \quad T(\varphi) \in \mathbb{R}$$

__Ex:__

$p \in \mathbb{N}^*$ on définit la fct g_p

$$g_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g_p(x) = \begin{cases} \frac{p}{2} & \text{si } |x| < \frac{1}{p} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudions la convergence de la suite $(T_{g_p})_{p\in\mathbb{N}^*}$

$$\forall \varphi \in D(\Omega) \quad T_{g_p}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g_p(x)\varphi(x)\,dx$$

$$T_{g_p}(\varphi) = \frac{p}{2}\int_{-\frac{1}{p}}^{\frac{1}{p}} \varphi(x)\,dx$$

f continue $\exists c \in]a,b[$:
$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(c)$$

$$\exists c_p \in \left]\frac{-1}{p}, \frac{1}{p}\right[: \int_{-\frac{1}{p}}^{\frac{1}{p}} \varphi(x)\,dx = \frac{2}{p}\varphi(c_p)$$

$$\Rightarrow T_{g_p}(\varphi) = \frac{p}{2} \times \frac{2}{p}\varphi(c_p) = \varphi(c_p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(0)$$

$$\varphi(0) = \delta_0(\varphi)$$

$$T_{g_p}(\varphi) \longrightarrow \delta_0(\varphi)$$

$\forall \varphi \in D(\Omega)$.