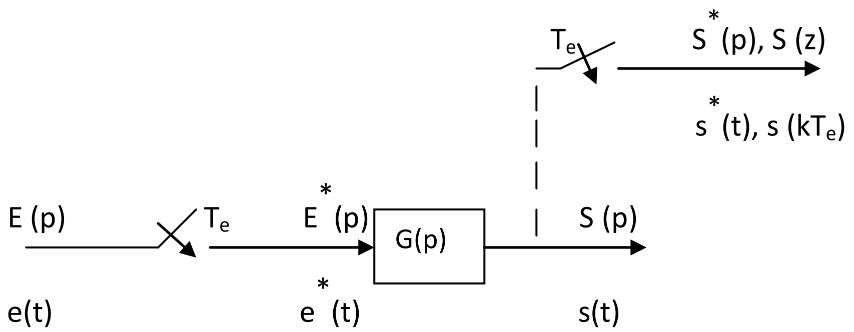
Chapitre 3

Analyse des systèmes échantillonnés

I. Transmittance des systèmes échantillonnés :

On considère un système continu linéaire de transmittance G(p) précédé d'un échantillonneur.



La sortie du système continu est évidemment, par nature un signal continu. Dans le domaine de Laplace, elle s'exprime par S(p) = $E^*(p)$. G(p).

L'expression de S(p) contient des termes en p et en $e^{T_e \cdot p}$. Pour simplifier l'analyse du système, on ne s'intéresse à la sortie qu'aux seuls instants d'échantillonnage, c.à.d. on considère en sortie un échantillonneur fictif (synchrone avec celui de l'entrée).

On définit alors la transmittance échantillonnée, appelée aussi transmittance pulsée, du système entre $E^*(p)$ et $S^*(p)$, soit $\frac{S^*(p)}{E^*(p)}$ ou $\frac{S(z)}{E(z)}$ en posant z= $e^{T_e \cdot p}$

Théorème de Convolution discrète :

Dans le cas du système représenté ci-dessus, étudions la réponse s(t) au train d'impulsions $E^*(p)$, avec g(t)= $\mathcal{L}^{-1}$[G(p)] $\mathcal{L}$: transformation de Laplace.

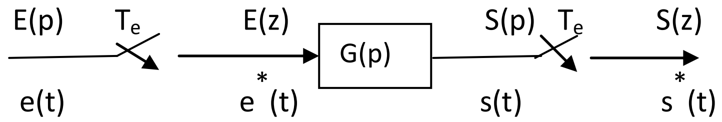
g(t) : la transformée de Laplace inverse de G(p), réponse impulsionnelle du système.

On a $e^*(t)$ $=\sum_{k=0}^{\infty} e(kT_e)\delta(t-kT_e\ )$, en appliquant le théorème de la superposition

Et pour un instant t quelconque on a :

S(t) = $\sum_{k=0}^{\infty} e(kT_e)g(t-kT_e\ )$.

On considère le système suivant :



Ou S(z) = $\sum_{k=0}^{\infty} s(kT_e).z^{-k}$

avec s (kT_e) = $\sum_{n=0}^{\infty} e(nT_e)g(kT_e - nT_e\ )$

D'où S (z) = $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e(nT_e)g(kT_e - nT_e\ ).z^{-k}$

On pose: k-n=m

S (z) = $\sum_{m=-n}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e(nT_e)g(mT_e).z^{-(m+n)}$

S (z) = $\sum_{m=0}^{\infty} g(mT_e)z^{-m}$. $\sum_{n=0}^{\infty} e(nT_e)z^{-n}$. g ($mT_e$)=0 pour m<0

S (z) = G (z). E (z) $\rightarrow$ $\frac{S(z)}{E(z)} = G(z)$

Remarque : La transmittance échantillonnée du système est la transformée en Z de la transmittance continue.

II. Fonction de transfert en présence d'un bloqueur (BO)

En commande numérique, le système échantillonné en entrée est fréquemment bloqué à la période d'échantillonnage.

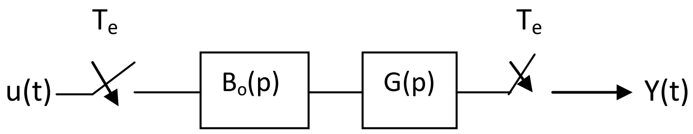


Figure 2. Système avec échantillonnage –blocage

TZ [Bo(p) .G(p)] = $(1- z^{-1})$ TZ [$\frac{G(p)}{p}$]

III. Stabilité des systèmes échantillonnés :

Tout réglage automatique, qu'il soit continu ou discret doit satisfaire à des conditions strictes de stabilité.

D'une façon très générale, on dit qu'un système est stable, lorsqu'écarté de sa position d'équilibre, il tend à y revenir ; il est dit instable lorsqu'il tend à s'en écarter davantage.

Un système linéaire échantillonné est stable, lorsqu'il satisfait la définition précédente, aux instants d'échantillonnage.

IV.1. Conditions de Stabilité

On considère le système représenté par $H^*(p)$ ou $H(z)$ transmittance échantillonnée.
La stabilité exige que tous les pôles de $H^*(p)$ aient leurs parties réelles négatives.

$R_e(p_i) < 0$ ou bien $H(z)$ en remplaçant $z = e^{T_e\,p}$

$$z_i = e^{T_e\,p_i} \quad \rightarrow \quad z_i = e^{\alpha_{iTe}} . e^{jw_{iTe}} \quad \text{avec} \quad p_i = \alpha_i + jw_i$$

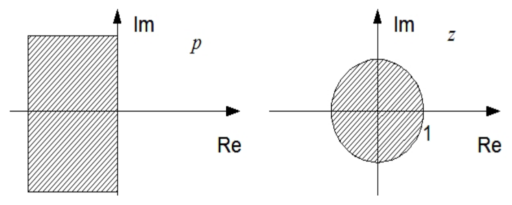
$$R_e(p_i) = \alpha_i < 0 \quad \rightarrow \quad (e^{\alpha_{iTe}}) < 1 \quad \rightarrow \quad |z_i| < 1$$

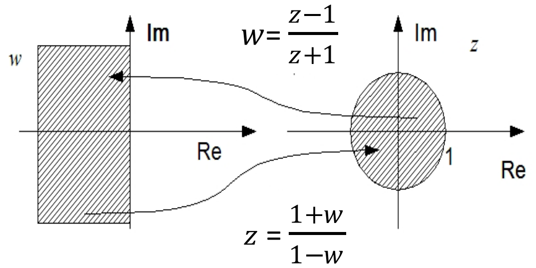
On peut énoncer qu'un système échantillonné est stable si et seulement si tous les pôles de sa transmittance H(z) sont de modules inferieur à 1 (c.à.d. Les pôles de sa transmittance soient situés à l'intérieur du cercle unité du plan Z).

En utilisant la transformation en w, on peut étendre aux systèmes échantillonnés les méthodes d'études de la stabilité des systèmes continus.

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad \leftrightarrow \quad z = \frac{1+w}{1-w}$$

Cette transformation transforme l'intérieur du cercle trigonométrique (cercle centré sur l'origine et de rayon unité), dans le domaine (Z), dans le demi-plan gauche du domaine (w).





IV.2. Critères algébriques

IV.2.1. Critère de ROUTH

On considère l'équation caractéristique :

$$D(w) = a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 w + a_0 = 0$$

D(w) =1+FTBO, est le dénominateur de la FTBF.

Condition nécessaire : a_i soient de mêmes signes. $a_i > 0$ non nuls.

Condition nécessaire et suffisante :

$a_n \quad a_{n-2} \quad a_{n-4} \quad a_{n-6}$

$a_{n-1} \quad a_{n-3} \quad a_{n-5} \quad a_{n-7}$ $\qquad b_1 = \dfrac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$

$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4$ $\qquad b_2 = \dfrac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$

$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4$ $\qquad c_1 = \dfrac{b_1\, a_{n-3} - a_{n-1}\, b_2}{b_1}$

La condition nécessaire et suffisante est que tous les termes de la première colonne du tableau soient de même signe.

Le nombre de changements de signe (lu de haut en bas) est égal au nombre de pôles instables.

IV.2.2. Critère de Jury

Ce critère utilise directement l'équation caractéristique en Z, du système :

$D(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$

Soit le tableau (2n-3) lignes

1 $\quad a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \ldots\ldots\ a_{n-k} \ldots\ldots\ a_{n-1} \quad a_n$

2 $\quad a_n \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \ldots\ldots\ a_k \ldots\ldots\ a_1 \quad a_0$

3 $\quad b_0 \quad b_1 \quad \ldots\ldots \quad b_{n-k} \ \ldots\ldots\ b_{n-1}$

4 $\quad b_{n-1} \quad b_{n-2} \ \ldots\ldots \quad b_k \ \ldots\ldots \quad b_0$

2n-5 p_0 p_1 p_2 p_3

2n-4 p_3 p_2 p_1 p_0

2n-3 q_0 q_1 q_2

Avec $b_0=\begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}$ $b_k=\begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}$ $b_{n-1}=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix}$

$q_0=\begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix}$ $q_1=\begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_3 & p_1 \end{vmatrix}$ $q_2=\begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}$

Une condition nécessaire et suffisante pour que D(z) ait des racines de modules < 1, est que soient satisfaites les conditions suivantes :

- $D(1) > 0$
- $(-1)^n D(-1) > 0$
- $|a_0| < a_n$; $|b_0| > |b_{n-1}|$; $|p_0| > |p_3|$; $|q_0| > |q_2|$

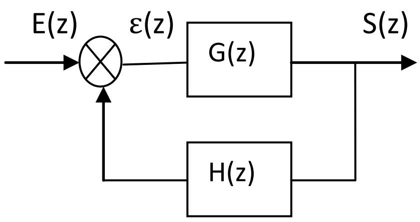
Pour n=1 $|a_0| < a_1$

n=2 $|a_0| < a_2$; $a_0+a_1+a_2 > 0$; $a_0-a_1+a_2 > 0$

IV. Etude de la précision en régime permanent des systèmes échantillonnés :

On considère un asservissement à temps discret représenté en Z, de la figure suivante :

$G_{BO}(z) = G(z).H(z)$.



L'erreur $\epsilon(z) = \frac{E(z)}{1+G_{BO\ (z)}}$

L'erreur statique permanente est obtenue à partir du théorème de la valeur finale

$$\epsilon(\infty) = \lim_{k\to\infty} \epsilon(kT_e) = \lim_{z\to 1}(z-1)\epsilon(z)$$

$$= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{E(z)}{1+G_{BO\,(z)}}$$

Rq : l'erreur dépend de la forme de l'entrée et de celle de la fonction de transfert du système échantillonné.

On introduit alors la notion de constante d'erreur, liée à l'ordre de l'entrée appliquée.

-Echelon de position : $E(z)= e_o .\frac{z}{z-1}$

$$\epsilon_p(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e_o z/(z-1)}{1+G_{BO}(z)} = \lim_{z\to 1}\frac{e_o}{1+G_{BO}(z)} = \frac{e_o}{K_p}$$

$K_p = \lim_{z\to 1}(1+G_{BO}(z))$ avec K_p : constante d'erreur de position.

-Echelon de vitesse : $E(z)= e_o\frac{Tz}{(z-1)^2}$

$$\epsilon_v(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\frac{e_o Tz}{(z-1)^2}}{1+G_{BO}(z)} = \lim_{z\to 1}\frac{e_o T}{(z-1)(1+G_{BO}(z))} = \frac{e_o T}{K_v}$$

Avec K_v : constante d'erreur de vitesse.

$K_v = \lim_{z\to 1}(z-1)(1+G_{BO}(z))$

-Echelon d'accélération : $E(z)=\frac{e_o T^2 z(z+1)}{2.(z-1)^3}$

$$\epsilon_a(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e_o T^2\, z(z+1)/2.(z-1)^3}{1+G_{BO}(z)} = \frac{e_o T^2}{(z-1)^2\big(1+G_{BO}(z)\big)} = \frac{e_o T^2}{K_a}$$

K_a : constante d'erreur d'accélération.

$K_a = \lim_{z\to 1}(z-1)^2\big(1+G_{BO}(z)\big)$

Les constantes d'erreurs dépendent de l'expression de la FTBO du système, celle-ci peut s'écrire sous la forme :

$$G_{BO}(z) = \frac{K}{(z-1)^{\alpha}} .\frac{N(z)}{D(z)}$$

α : représente le nombre de pôles égaux à 1 de la FTBO.

N(z) et D(z) sont des polynômes qui ne possèdent pas de racines égales à 1 et qui tendent vers une constante quand z→1.

Selon le type de l'entrée et le nombre de pôles égaux à 1 de sa FTBO, on peut établir le tableau suivant :

Signal d'entrée Nombre de pôles z=1 de la FTBO (α)	Echelon de position E(z)= $e_o\frac{z}{(z-1)}$	Echelon de vitesse E(z)= $e_o\frac{Tz}{(z-1)^2}$	Echelon d'accélération E(z)=$\frac{e_o T^2 z(z+1)}{2.(z-1)^3}$
0	$\frac{e_o}{K_p}$	∞	∞
1	0	$\frac{e_o T}{K_v}$	∞
2	0	0	$\frac{e_o T^2}{K_a}$
α>2	0	0	0

V. Rapidité des systèmes échantillonnés

Pour tester la rapidité d'un système échantillonné, on procède tout à fait comme pour les systèmes continus :

- Signal test : échelon unité $e^*(t)= \sum_{k=0}^{\infty} e(kT_e) = \delta_{T_e}(t)$
- Le temps de réponse à $\pm 5\%$ de la réponse permanente.
- La FT à prendre en considération est $G_{BO}(z)$, si on a un système en chaine ouverte, ou $G_{BF}(z)$ si on étudie le cas d'un système bouclé.

Rq : le temps de réponse ne peut s'évaluer qu'en nombre entier de période. T_r= n.T_e.