Chapitre 2

La Transformée en Z

La transformée en Z est un outil équivalent à la transformée de Laplace pour les signaux discrets et échantillonnés.

I. Définition :

Soit une suite $x(k)\ avec\ k \geq 0,$ la transformation en Z, $X(z)$ de la suite $x(k)$ est définie par la relation :

$$X(z) = TZ[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \, . \, z^{-k}$$

Si la suite $x(k)$ provient de l'échantillonnage à la période T_e d'un signal continu, la transformée en Z est obtenue à partir de la transformée de Laplace $X^*(P)$ du signal échantillonné $x^*(t)$ en posant :

$$Z = e^{T_e p}$$

$$X^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\, e^{-p.k.T_e} \;\rightarrow\; X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\, z^{-k}$$

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k).\, \delta(t - k.T_e)$$

II. Propriétés de la transformée en Z

Linéarité

$$x(k) = a_1 x_1(k) + a_2 x_2(k)$$

$$TZ[x(k)] = X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$$

Translation temporelle

$$y(k) = x(k - k_0) \qquad TZ[y(k)] = Y(z) = z^{-k_0}.X(z)$$

Changement d'échelle

$$y(k) = a^k x(k) \qquad TZ[y(k)] = Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Multiplication par k

$$TZ[k.x(k)] = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

Convolution

$$y(k) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n).\,g(k-n) \qquad\qquad TZ[y(k)] = Y(z) = X(z).\,G(z)$$

Théorème de la valeur initiale $\lim_{k\to 0} x(k) = \lim_{z\to\infty} X(z)$

Théorème de la valeur finale $\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}(z-1).\,X(z)$

- Nous pouvons aussi calculer la transformée en Z à partir de la transformée de la transformée de Laplace d'un signal continu $x(t)$ en utilisant la méthode des résidus :

$$X(z) = \sum_{p_i} résidus\ de\ \frac{X(p)}{1-e^{pT_e}.\,z^{-1}}]_{p=p_i}$$

$$= \sum_{p_i} \frac{1}{(m_i-1)!}.\frac{d^{m_i-1}}{dp^{m_i-1}}[(p-p_i)^{m_i}X(p).\frac{1}{1-e^{pT_e}.\,z^{-1}}]_{p=p_i}$$

Avec p_i: les pôles de $X(p)$

m_i : Ordre du pôle p_i

III. Transformée en Z inverse

1- Consultation de la table

En général, sur la table des transformées en Z, figure $x(t)$ et non pas $x(k)$.Il faut toujours présenter le résultat sous la forme $x(kT_e)$

Exemple : la transformée en Z inverse de $X(z) = \frac{z.\sin(w_0T)}{z^2-2.z.\cos(w_0T)+1}$

est la suite des valeurs { $x(kT_e) = \sin(w_0kT_e)$, $k = 0,1,2 \ldots.$}, et non pas la fonction $sin(w_0t)$.

2- Division suivant les puissances croissantes de Z

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 1.414.z^{-1} + z^{-2}} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k).z^{-k}$$

$$\begin{array}{l|l} z^{-1} & 1 - 1.414z^{-1} + z^{-2} \\ \cline{2-2} z^{-1} - 1.414z^{-2} + z^{-3} & z^{-1} + 1.414z^{-2} + z^{-3} \\ \cline{1-1} 1.414z^{-2} - z^{-3} & \end{array}$$

$x(0) = 0;\ x(1) = 1;\ x(2) = 1.414;\ x(3) = 1;\ x(4) = 0$, ……………

3- Méthode de l'équation aux différences (équation récurrente)

La méthode s'appuie sur la formule :

$TZ^{-1}(z^{-n}.X(z)) = x[(k-n)T_e] = x(k-n)$ n : entier positif

La résolution d'une équation aux différences exige la connaissance des conditions initiales.

Exemple :

Soit la fonction $\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z-0.5}$ (x $\frac{z^{-1}}{z^{-1}}$)

On peut écrire :

$$Y(z) - 0.5\ z - 1\ \ Y(z) = z - 1\ \ X(z).$$

Donc $y\,(kTe) = 0.5\, y\,[(k-1)\,Te] + x\,[(k-1)\,Te]$

Si le système est causal et x(t) est l'échelon unitaire alors :

$$y(0) = 0\,;\ y(1) = 1\,;\ y(2) = 1.5\,;\ y(3) = 1.75$$

Rq : Ce calcul peut se programmer très facilement.

4- Méthode des Résidus

$x(kT_e) = \sum_{i=1}^{n} [résidus\ de\ X(z).z^{k-1}]_{z=z_i}$ avec z_i : les pôles de X(z)
et n : le nombre de pôles.

Remarque : Dans le cas ou $G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = X(z).z^{k-1}$, ne possède que des pôles simples, cette formule s'écrit :

$$X(kT_e) = \sum_{i=1}^{n} \frac{N(z_i)}{D'(z_i)}$$

Pour calculer de la Transformée en Z inverse:

$$X(kT_e) = \sum_{z_i} \frac{1}{(m_i - 1)!} \cdot \frac{d^{m_i - 1}}{dz^{m_i - 1}} [(z - z_i)^{m_i}. X(z). z^{k-1}]_{z=z_i}$$

m_i : Ordre du pôle z_i

5- Décomposition en fractions rationnelles

Cette méthode consiste à décomposer X(z) en éléments simples, dont on trouve la transformée en Z inverse dans les tables.

6- Transformée en Z modifiée

La transformée en Z modifiée a pour but de fournir des informations sur le comportement du système ***entre les instants d'échantillonnage***. Elle est utilisée pour les signaux qui comportent un retard quelconque τ par rapport à l'origine ou si la fonction de transfert continue présente un retard quelconque.

Dans le cas d'un retard, nous avons deux cas :

Cas 1 : **Cas d'un retard inférieur au pas Te** $\tau = \lambda T_e$ avec $0 < \lambda < 1$

$$TZ(x^*(t - \lambda T_e) = \sum_{k=1}^{\infty} x(kT_e - \lambda T_e)\, z^{-k}$$

Pour $k = 0$ $(t = 0)$ le signal est nul.

Pour calculer la transformée en Z modifiée :

- On pose $m = 1 - \lambda$

$$TZ(x^*(t - \lambda T_e) = \sum_{k=1}^{\infty} x(kT_e + (m-1)T_e)\, z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} x[(k + m - 1)T_e]\, z^{-k}$$

- Ensuite, on pose $n = k - 1$

$$TZ(x^*(t - \lambda T_e) = \sum_{n=0}^{\infty} x\big((n+m)T_e\big)\, z^{-(n+1)}$$

- Enfin, la transformée en Z modifiée est :

$$X(z,m) = z^{-1}.\sum_{n=0}^{\infty} x[(n+m)T_e]\, z^{-n}$$

Ou $x[(n+m)T_e]$ sont les valeurs de $x(t)$ non retardée aux instants$(n+m)T_e$.

Cas 2 : **<u>Cas d'un retard quelconque</u>** $\tau = \lambda T_e + NT_e$ avec $0 < \lambda < 1$ et N entier.

Pour calculer la transformée en Z modifiée :

- Mettre le retard sous la forme $\tau = \lambda T_e + NT_e$ et déterminer λ et N
- Calculer $X(z,m)$ en suivant les étapes du cas 1,
- Multiplier $X(z,m)$ obtenue par z^{-N}.