Chapitre 1

Introduction à l'asservissement numérique

1. Introduction :

La commande numérique a pour objet principal l'utilisation de calculateurs numériques en temps réel pour commander, piloter ou guider des processus physiques qui sont le plus souvent à temps continu.

Ces machines numériques sont capables de calculer en temps réel les paramètres adéquats à appliquer à la commande du système, en fonction de son évolution.

La figure ci-dessous montre le schéma- bloc type d'un système à commande numérique :

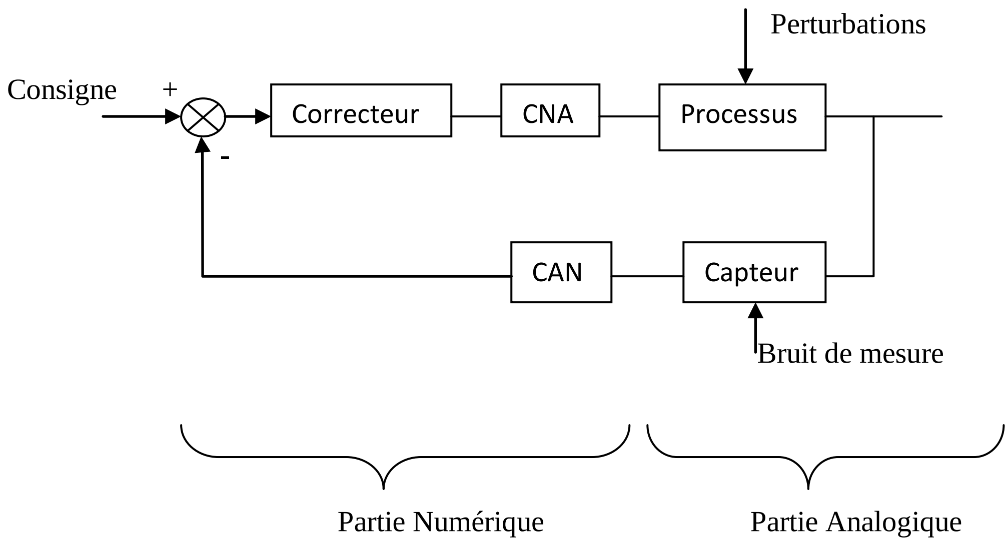


Fig. 1 Système à commande numérique.

Le processus et un certain nombre de composants (capteur, actionneur ….) restent de type analogique, et l'introduction d'ordinateurs ou processeurs pour commander un système nécessite la mise en œuvre d'une interface entre le calculateur et le procédé. Ceci est obtenu à l'aide d'un Convertisseur Analogique- Numérique (CAN) transmettant au processeur les mesures acquises sur le procédé par le système de mesure, ou réciproquement Numérique-Analogique (CNA) permettant d'envoyer les ordres du processeur vers l'actionneur du processus.

Cependant, un processeur numérique traite des valeurs numériques (des nombres) plutôt que des valeurs analogiques, d'où la nécessité de l'échantillonnage (réalisé par le CAN) qui joue un rôle capital en commande numérique et qui consiste à remplacer un signal analogique par une suite de ses valeurs prises à des instants bien définis.

II. Systèmes échantillonnés :

II.1 Définition :

Un système échantillonné est un système à évolution continue pour lequel la prise et la transmission d'informations s'effectuent à des instants discrets t_k (privilégiés) du temps appelés instants d'échantillonnage.
Le cas le plus fréquent est celui de l'échantillonnage à période constante T_e, pour lequel $t_{k+1} - t_k = T_e \; \forall \, k$ ou $t_k = k.T_e$.

II.2 Echantillonnage d'un signal continu :

On considère les signaux x(t) tels que :

$$\begin{cases} x(t) = 0 & pour \; t < 0 \\ x(\,0^{+}) = 0 \end{cases}$$

C'est le cas le plus fréquent en pratique.

L'échantillonnage d'un signal continu *x(t)* consiste à remplacer *x(t)* par la suite discontinue de ses valeurs $x(kT_e)$ aux instants respectifs d'échantillonnage $t = k.T_e$. (k=0, 1, 2,……….).

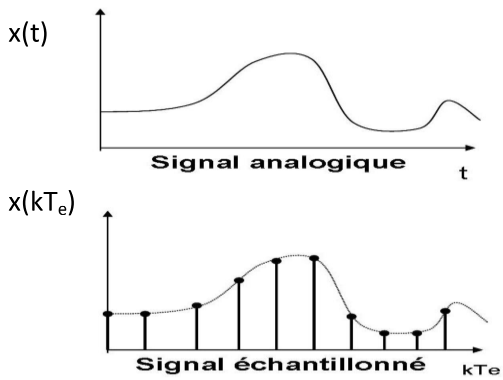


Fig. 2 Echantillonnage d'un signal.

$$\{x(kT_e)\} = \{x(0), x(T_e), x(2T_e), x(3T_e) \ldots\ldots x(kT_e)\}$$

que l'on note en général

$$x^{*}(t) = \{x(kT_e)\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_k\}$$

Ou encore

$$x(k) = \{x(kT_e)\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_k\}$$

Définition : L'échantillonnage d'un signal continu *x(t)* est la modulation du peigne de Dirac par le signal *x(t).*

Le signal échantillonné $x^{*}(t) = x(t).\,\delta_{T_e}(t)$ avec T_e : période ou pas d'échantillonnage.

$\delta_{T_e}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t} - \mathrm{kT_e})$ $\delta_{T_e}(t)$: Peigne de Dirac, Fonction non causale périodique

$$x^{*}(t) = x(t).\,\delta_{T_e}(t) = x(t).\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t} - \mathrm{kT_e}) = \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{+\infty} \mathrm{x(kT_e)}\delta(\mathrm{t} - \mathrm{kT_e}) \,.$$

$x^{*}(t)$ est une fonction peigne de Dirac modulée en amplitude par la fonction *x(t).*

Le développement en série de Fourier du peigne de Dirac

$\delta_{T_e}(t) = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi jkt/T_e} = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi jkt F_e} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT_e)$.

La TF du peigne de Dirac

Tf $(\delta_{T_e}(t))$= $F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty}$ Tf$(e^{2\pi jkt F_e}) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f-kF_e) = F_e \delta_{F_e}(f)$

Évaluons la transformée de Fourier du signal $x^*(t)$

$$X^*(f) = X(f) * Tf\left[\delta_{T_e}(t)\right] = X(f) * F_e\delta_{F_e}(f) = F_e X(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f-kF_e) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta(f-kF_e)$$
$$= F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f-kF_e)$$

Rq : La transformée de Fourier du signal échantillonné $x^*(t)$ est celle du signal continu *x(t)* périodisé c.à.d. répété sur l'axe des fréquences avec une période $F_e = \frac{1}{T_e}$.

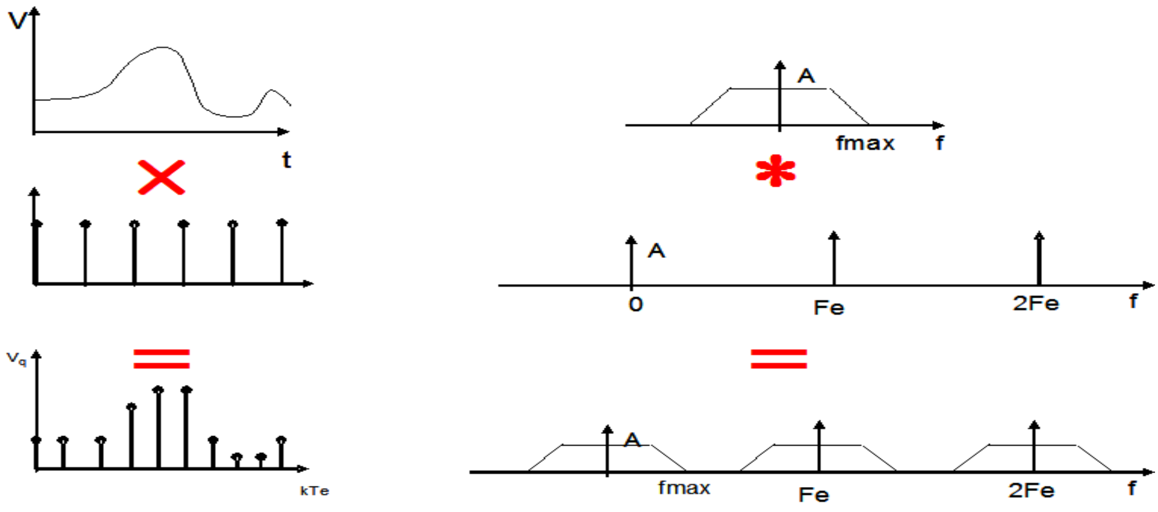


Fig.3 Spectre d'un signal échantillonné (échantillonnage parfait).

Pour échantillonner le signal x(t) sans perte d'information (il est possible de le reconstruire à partir de ses échantillons), il faut choisir F_e de telle sorte qu'il n'y ait pas de recouvrement de son spectre.

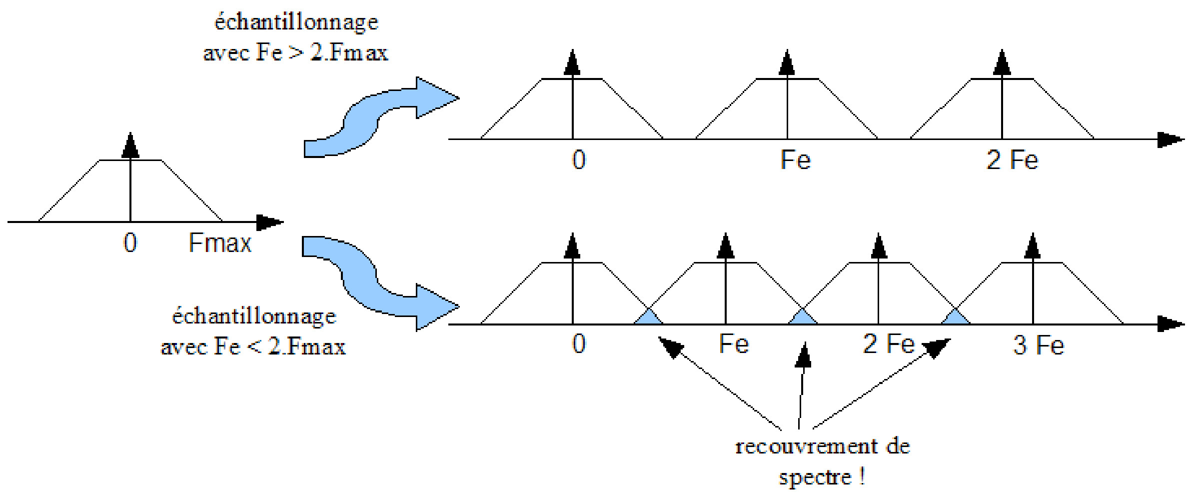


Fig.4 Phénomène de recouvrement de spectre.

II.2.1 Théorème de Shannon (théorème d'échantillonnage) :

On peut reconstruire un signal à temps continu *x(t)* à partir du signal échantillonné $x^*(t)$ avec un pas T_e si :

- le signal à temps continu est à bande passante limitée (borné)

$$X(f) = 0 \qquad\qquad pour \;\; |f| > f_{max}$$

- et si la période d'échantillonnage vérifie :

$$T_e < \frac{1}{2f_{max}} \qquad\qquad (F_e > 2f_{max}) \qquad\qquad (1)$$

La condition (1) est appelée condition de Shannon.

On peut donc énoncer le théorème de Shannon :

Lorsqu'on échantillonne un signal continu, on ne perd aucune information si la fréquence d'échantillonnage $F_e = \frac{1}{T_e}$ est supérieure au double de la plus haute fréquence contenue dans le signal initial.

II.3 Reconstitution d'un signal à partir de ses échantillons

$$\underbrace{x(kTe)}_{\text{Échantillons}} \xrightarrow{\text{Reconstitution}} \underbrace{x(t)}_{\text{signal continu}}$$

La reconstitution est l'opération inverse de l'échantillonnage, c'est-à-dire la transformation d'une suite d'échantillons en un signal continu.

En fait, cette opération est réalisée à l'aide de filtres ou de bloqueurs.

$$x^*(t) = x(t).\,\delta_{T_e}(t)$$

En appliquant la transformée de Fourier,

$$X^*(f) = X(f) * Tf\left[\delta_{T_e}(t)\right] = X(f) *\ \mathrm{F_e}\delta_{F_e}(f) = F_e \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{+\infty} \mathrm{X(f - kF_e)} \qquad (2)$$

La reconstitution n'est possible que si $\mathrm{F_e}$ est conforme au théorème de Shannon. Multiplions les membres de l'équation (2) par rect (f / $\mathrm{F_e}$) :

$$\underbrace{F_e\left[\,X(f) *\ \delta_{F_e}(f)\right]}_{X^*(f)}.rect\left(\frac{f}{F_e}\right) = F_e[X(f) * \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{f - kF_e})].\,\mathrm{rect(f/F_e) = F_e.X(f)}$$

Prenons les transformées inverses de ces deux expressions :

$$x^*(t) * F_e \sin c\ (F_e t) = x^*(t) * \frac{1}{T_e}.\sin c\ (\frac{t}{T_e}) = \ F_e\ x(t)$$

Avec $x^*(t) = \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{+\infty} \mathrm{x(kT_e)\delta(t - kT_e)}$.

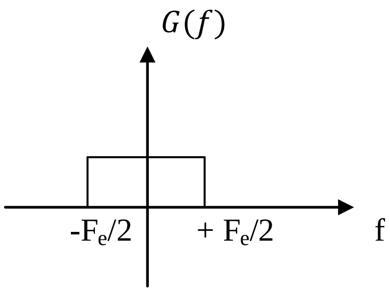
$$\cancel{\frac{1}{T_e}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\,.\,\delta(t - kT_e) * sinc\left(\frac{t}{T_e}\right) = \cancel{\frac{1}{T_e}}\, x(t).$$

En utilisant le rappel mathématique sur les propriétés de l'impulsion de Dirac, on peut écrire :

$$\delta(t - kT_e) * sinc\left(\frac{t}{T_e}\right) = sinc\left(\frac{t-kT_e}{T_e}\right)$$

Et donc $x(t) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\,.\,sinc\left(\frac{t-kT_e}{T_e}\right)}_{x(kT_e) * sinc(kT_e)}$

Le filtre qui admet pour réponse impulsionnelle $g(t) = sinc\left(\frac{t}{T_e}\right) = sinc(F_e t)$ est un filtre passe-bas.



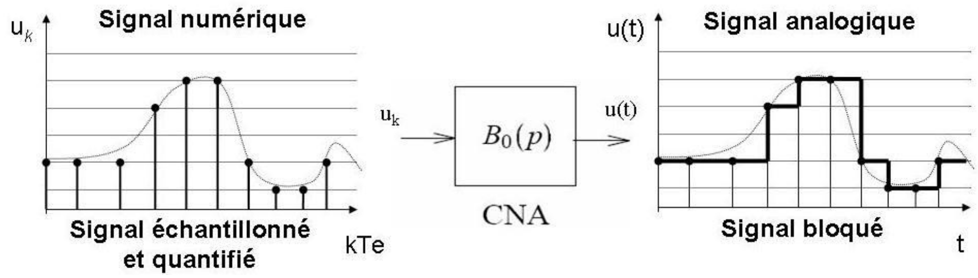
$G(f) = \ rect(f/Fe)$ $\qquad$ $x(t) = sinc(F_e t) * x^*(t)$

Avec $sinc(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

II.4 Reconstitution approchée :

Cette reconstitution est généralement obtenue à l'aide de bloqueurs, le plus utilisé est le bloqueur d'ordre zéro.

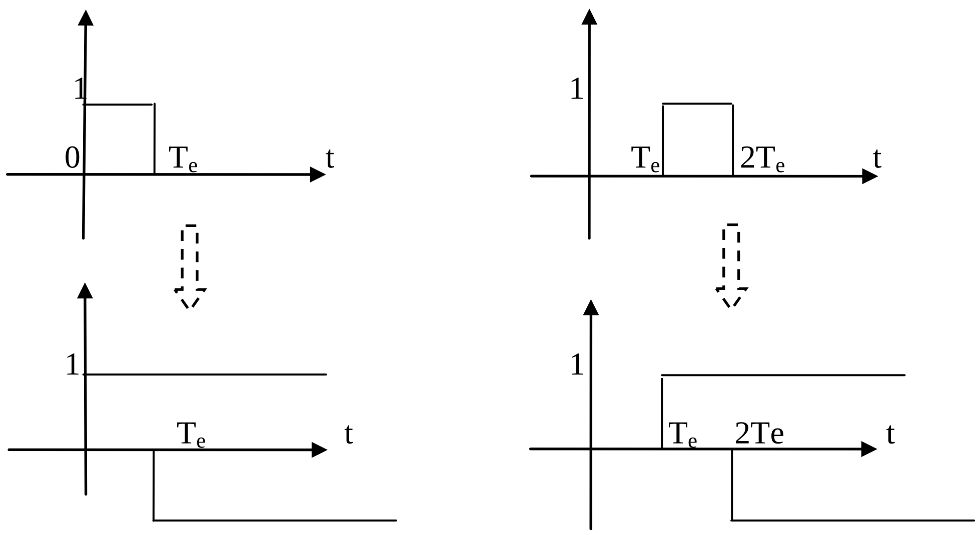
II.4.1 Bloqueur d'ordre zéro



Effet du bloqueur d'ordre zéro

Le bloqueur d'ordre zéro a pour action de maintenir constante et égale à $x(kT_e)$,l'amplitude de l'impulsion entre les instants kT_e et $(k+1)T_e$.

Calculons la fonction de transfert du bloqueur d'ordre zéro :



$$x_{BO}(t) = x(0)[u(t) - u(t - T_e) + x(T_e)[u(t - T_e) - u(t - 2T_e) \dots\dots\dots$$

$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{p}$

$\mathcal{L}[x(t - \tau)] = X(p).e^{-\tau p}$ Théorème du retard.

$$X_{BO}(p) = \frac{x(0)}{p}\,[1 - e^{-T_e p}] + \frac{x(T_e)}{p}\,e^{-T_e p}\,[1 - e^{-T_e p}] + \dots\dots\dots\dots$$

$$X_{BO}(p) = \frac{1-e^{-T_e p}}{p}\ [\,x(0) + x(T_e).\,e^{-T_e p} + x(2T_e).\,e^{-2T_e p} + \ \dots\dots]$$

$$X_{BO}(p) = \frac{1-e^{-T_e p}}{p}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT_e).\,e^{-kT_e p} = \frac{1-e^{-T_e p}}{p}\ X^*(p)$$

On rappelle que $x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\delta(t-kT_e)$ et sa transformée de Laplace est :

$$X^*(p) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\ \mathcal{L}[\delta(t-kT_e)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)e^{-kT_e p}.\mathcal{L}[\delta(t)]$$

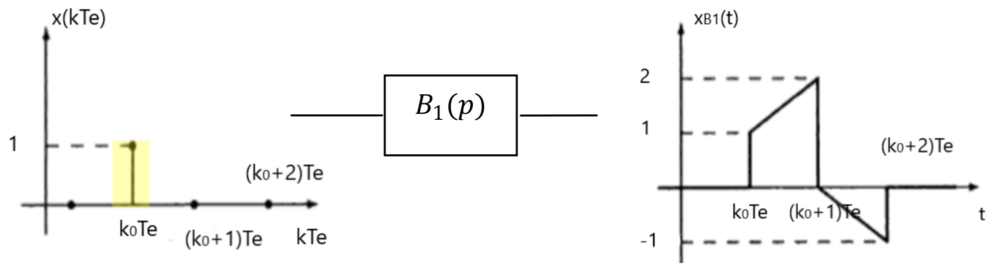
$$X^*(p) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\ e^{-kT_e p}$$

La fonction de transfert du bloqueur d'ordre zéro :

$$B_0(p) = \frac{X_{BO}(p)}{X^*(p)} = \left(\frac{1-e^{-T_e p}}{p}\right)$$

II.4.2 Bloqueur d'ordre un

Le bloqueur d'ordre 1 réalise une extrapolation linéaire entre les instants d'échantillonnage kT_e et (k+1)Te à partir de $x(kT_e)$ et $x((k-1)T_e)$. Il permet donc de reproduire un signal linéaire échantillonné. La réponse à une impulsion unitaire à l'instant k_0T_e est représentée ci-dessous :

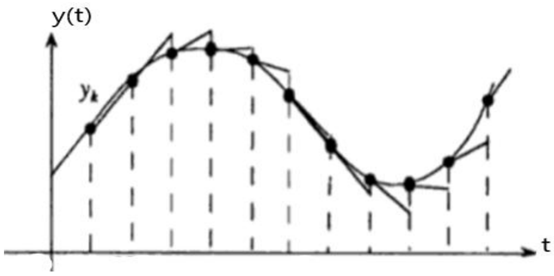


Effet du bloqueur d'ordre 1

On en déduit alors la fonction de transfert du bloqueur d'ordre 1 :

$$B_1(p) = \frac{X_{B1}(p)}{X^*(p)} = \left(\frac{1-e^{-T_e p}}{p}\right)^2\ \frac{(1+T_e p)}{T_e}$$

Nous montrons ci-dessous l'effet du bloqueur d'ordre 1 sur le signal échantillonné $y^*(t)$:



Effet du bloqueur d’ordre 1

II.5 Choix du pas d'échantillonnage :

Le choix de la période d’échantillonnage est important. Il est restreint par une limite fondamentale (le théorème de Shannon), par contre sur-échantillonner (T_e très petit) nécessite un microprocesseur puissant et génère du bruit. Plusieurs auteurs proposent des formules empiriques de calcul de la période d’échantillonnage, mais qui donnent de bons résultats.

Par exemple :

Pour un premier ordre : $\frac{\tau}{4} < T_e < \tau$

Pour un second ordre : $\frac{0.25}{W_n} < T_e < \frac{1.25}{W_n}$

En pratique, il est recommandé de choisir la fréquence d’échantillonnage F_e :

$6f_c \leq F_e \leq 24f_c$ avec f_c la fréquence de coupure du système continu