Partie II : Étude théorique du Problème des Tours de Hanoï

i. Historique et Présentation du Problème :

Le Problème des Tours de Hanoï, bien que popularisé par Édouard Lucas au XIXe siècle, peut avoir des origines plus anciennes. Certains historiens des mathématiques ont suggéré que le problème a des racines dans des énigmes et des jeux de réflexion traditionnels de l'Inde ancienne. Cependant, il n'y a pas de consensus absolu sur son origine exacte.

Édouard Lucas, un mathématicien français du XIXe siècle, a contribué de manière significative à la diffusion et à la popularisation du Problème des Tours de Hanoï. Dans son livre "Récréations Mathématiques", publié en 1883, Lucas présente une version du problème qui implique trois piliers et un certain nombre de disques. Il attribue le nom du problème à une légende populaire impliquant un temple bouddhiste à Hanoï, au Vietnam, où les moines devaient déplacer une tour de disques d'or d'un pilier à un autre dans un ordre spécifique sans jamais placer un disque plus grand sur un disque plus petit.

Le Problème des Tours de Hanoï est devenu un casse-tête classique et a fasciné les mathématiciens, les informaticiens et les amateurs de jeux de réflexion depuis sa formulation par Lucas. Il est souvent utilisé comme exemple pour enseigner des concepts mathématiques et informatiques tels que la récursivité, la complexité algorithmique et la conception d'algorithmes.

L'aspect intéressant du Problème des Tours de Hanoï réside dans sa simplicité apparente, mais aussi dans sa complexité sous-jacente. Bien qu'il soit facile à comprendre, sa résolution nécessite une compréhension profonde des propriétés des fonctions récursives et des stratégies algorithmiques efficaces. Par conséquent, le Problème des Tours de Hanoï continue de susciter l'intérêt et de servir de sujet d'étude dans divers domaines des mathématiques et de l'informatique.

ii. Définition Formelle du Problème :

Données :

Trois piliers (ou tiges) A, B et C.

Un ensemble de disques de tailles différentes, empilés en ordre croissant de taille sur le pilier A, le plus grand disque étant en bas et le plus petit en haut.

But :

Déplacer tous les disques du pilier A vers le pilier C, en utilisant le pilier B comme pilier auxiliaire, tout en respectant les règles suivantes :

On ne peut déplacer qu'un disque à la fois.

À aucun moment, un disque plus grand ne peut être placé sur un disque plus petit.

Formulation Mathématique :

Soit n le nombre total de disques. Le Problème des Tours de Hanoï peut être représenté mathématiquement comme une fonction H(n,A,C,B), où :

n est le nombre de disques à déplacer.

A est le pilier source où se trouvent les disques initialement.

C est le pilier destination où tous les disques doivent être déplacés.

B est le pilier auxiliaire utilisé lors du déplacement des disques.

La fonction H peut être définie récursivement comme suit :

Si n=1, déplacer le disque unique directement de A à C.

Sinon, déplacer n−1 disques de

A à B en utilisant

C comme pilier auxiliaire, puis déplacer le disque restant de A à C, enfin déplacer les n−1 disques de B à C en utilisant A comme pilier auxiliaire.

Exemple :

Pour illustrer, considérons un exemple avec 3 disques :

Disque 1 : Taille 1

Disque 2 : Taille 2

Disque 3 : Taille 3

Le but est de déplacer tous les disques du pilier A au pilier C en utilisant le pilier B comme pilier auxiliaire, tout en respectant les règles du problème. Cette définition formelle fournit un cadre mathématique précis pour comprendre et résoudre le Problème des Tours de Hanoï.

iii. Modélisation de la Solution :

Approche Récursive :

Dans l'approche récursive, l'algorithme suit une stratégie diviser-pour-régner pour résoudre le problème. Voici comment l'algorithme fonctionne :

Si n=1, il suffit de déplacer le disque unique directement de la tige source à la tige de destination.

Sinon, le problème est décomposé en trois étapes :

Déplacer n−1 disques de la tige source à la tige auxiliaire, en utilisant la tige de destination comme tige auxiliaire.

Déplacer le disque restant de la tige source à la tige de destination.

Déplacer les n−1 disques de la tige auxiliaire à la tige de destination, en utilisant la tige source comme tige auxiliaire.

Cette approche récursive utilise la pile d'appels pour stocker les sous-problèmes à résoudre et les reprendre à mesure que les appels récursifs sont déroulés.

Approche Itérative :

Dans l'approche itérative, une pile explicite est utilisée pour simuler la récursivité de manière itérative. L'algorithme suit les mêmes étapes que l'approche récursive, mais utilise une pile pour stocker les informations sur les sous-problèmes à résoudre. L'algorithme itératif peut être moins intuitif que l'approche récursive, mais peut être plus efficace en termes de consommation de mémoire et de performance.

Représentation des Mouvements :

Chaque mouvement dans la solution est représenté par le déplacement d'un disque d'une tige à une autre. Un mouvement est décrit en indiquant le numéro du disque déplacé et les noms des tiges source et destination impliquées dans le mouvement. Par exemple, "Déplacer le disque 1 de la tige A à la tige B".

Complexité :

La complexité de la solution récursive est exponentielle, de l'ordre de

O(2 ^n), où n est le nombre de disques. Cela signifie que le nombre de mouvements requis pour résoudre le problème double à chaque ajout de disque.

iv. Algorithme de Résolution et Complexité Théorique :

Algorithme de Résolution :

L'algorithme de résolution du Problème des Tours de Hanoï repose principalement sur une approche récursive. Voici une description plus détaillée de l'algorithme récursif :

Cas de Base : Si le nombre de disques à déplacer est égal à 1, alors le déplacement est trivial : le disque unique est déplacé directement de la tige source à la tige de destination.

Cas Récursif : Si le nombre de disques à déplacer est supérieur à 1, l'algorithme suit les étapes suivantes :

Déplacer les n−1 disques supérieurs de la tige source à la tige auxiliaire, en utilisant la tige de destination comme tige auxiliaire (étape récursive).

Déplacer le disque restant de la tige source à la tige de destination.

Déplacer les n−1 disques de la tige auxiliaire à la tige de destination, en utilisant la tige source comme tige auxiliaire (étape récursive).

L'algorithme suit cette logique récursive jusqu'à ce que tous les disques soient déplacés de la tige source à la tige de destination.

Complexité Théorique :

La complexité temporelle de l'algorithme récursif du Problème des Tours de Hanoï est exponentielle, de l'ordre de O(2^ n), où

n est le nombre de disques. Cette complexité provient du fait que le nombre de mouvements requis pour résoudre le problème double à chaque ajout de disque.

Pour comprendre cette complexité, considérez le nombre total de mouvements nécessaires pour déplacer n disques. À chaque étape, soit T(n) le nombre de mouvements requis pour déplacer n disques. Pour déplacer n disques, l'algorithme doit d'abord déplacer n−1 disques, puis déplacer le disque restant, puis déplacer à nouveau les n−1 disques. Ainsi,

T(n)=2T(n−1)+1, ce qui correspond à une complexité exponentielle.

Cette complexité exponentielle rend le Problème des Tours de Hanoï un excellent exemple pour illustrer les concepts de récursion et de complexité algorithmique. Bien qu'il existe des moyens d'optimiser l'algorithme, la nature fondamentale du problème reste exponentielle.

v. Algorithme de Vérification et Complexité Théorique et Spatiale :

Algorithme de Vérification :

L'algorithme de vérification pour le Problème des Tours de Hanoï peut être conçu pour s'assurer que la solution générée respecte les règles du problème. Voici une approche générale pour vérifier une solution :

Initialisation : Réinitialiser la configuration initiale avec tous les disques sur la tige source (pilier A).

Parcourir les Mouvements : Appliquer chaque mouvement de la solution à la configuration initiale. Vérifiez à chaque étape que le mouvement est valide selon les règles du problème :

Vérifiez que le disque déplacé est le disque supérieur de la tige source.

Vérifiez que le disque déplacé est placé sur le dessus de la tige de destination ou sur un disque de taille supérieure.

Vérifiez que les autres tours n'ont pas été modifiées de manière incorrecte pendant le mouvement.

Validation : Une fois que tous les mouvements ont été appliqués, vérifiez si la configuration finale correspond à la configuration attendue où tous les disques sont empilés sur la tige de destination dans l'ordre décroissant de taille.

Cet algorithme de vérification garantit que la solution générée respecte les règles du Problème des Tours de Hanoï.

Complexité Théorique et Spatiale :

La complexité théorique de l'algorithme de vérification dépend du nombre de mouvements à vérifier dans la solution. Dans le pire des cas, où chaque disque est déplacé à chaque étape, la complexité est linéaire par rapport au nombre total de mouvements effectués dans la solution.

En termes de complexité spatiale, l'algorithme de vérification nécessite de stocker la configuration initiale ainsi que les informations sur chaque mouvement de la solution. Cela peut nécessiter de l'espace supplémentaire, mais la complexité spatiale dépend principalement de la façon dont les données sont stockées et de la taille maximale des données à stocker.

En pratique, la complexité théorique et spatiale de l'algorithme de vérification est généralement négligeable par rapport à celle de l'algorithme de résolution, car elle ne nécessite qu'une vérification de conformité plutôt qu'une génération complète de la solution.

vi. Instance du Problème avec Solution :

Instance du Problème :

Nombre de disques : 3

Tiges : A, B, C (où A est la tige source, B est la tige auxiliaire et C est la tige de destination)

Solution :

Déplacer le disque 1 de la tige A à la tige C

Déplacer le disque 2 de la tige A à la tige B

Déplacer le disque 1 de la tige C à la tige B

Déplacer le disque 3 de la tige A à la tige C

Déplacer le disque 1 de la tige B à la tige A

Déplacer le disque 2 de la tige B à la tige C

Déplacer le disque 1 de la tige A à la tige C

Déroulement :

À l'étape 1, le disque 1 est déplacé de A à C.

À l'étape 2, le disque 2 est déplacé de A à B.

À l'étape 3, le disque 1 est déplacé de C à B.

À l'étape 4, le disque 3 est déplacé de A à C.

À l'étape 5, le disque 1 est déplacé de B à A.

À l'étape 6, le disque 2 est déplacé de B à C.

À l'étape 7, le disque 1 est déplacé de A à C.

À la fin de ces étapes, tous les disques sont déplacés de la tige A à la tige C, en respectant les règles du Problème des Tours de Hanoï. Cette solution démontre le processus complet de déplacement des disques et illustre comment les mouvements sont effectués pour atteindre la configuration finale.

références :

1)-Knuth, D. E. (1997). The Art of Computer Programming, Volume 1: Fundamental Algorithms (3rd Edition). Addison-Wesley Professional.

2)-Graham, R. L., Knuth, D. E., & Patashnik, O. (1994). Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science (2nd Edition). Addison-Wesley Professional.

3)-Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (3rd Edition). MIT Press.

4)-Weisstein, E. W. "Tower of Hanoi." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/TowerofHanoi.html.

5)-Wikipedia. "Tower of Hanoi." https://en.wikipedia.org/wiki/Tower\_of\_Hanoi.