

Optimisation course de vitesse

Mohamed Amine JANATI

Épreuve de TIPE

Session 2024

Plan

- 1 Introduction
- 2 Problématique
- 3 Étude théorique
- 4 Étude statistique
- 5 Conclusion
- 6 Annexe



Problématique

Comment optimiser les performances d'un athlète en jeux de course ?

Modèle de Keller

Notations

- d : la distance a parcourir
- $x(t)$: la position a l'instant t
- $v(t)$: la vitesse a l'instant t
- $e(t)$: l'énergie anaérobie a l'instant t
- $f(t)$: force propulsive par unité de masse
- τ : coefficient de friction propre a chaque athlète
- $\bar{\sigma}$: volume d'oxygène par unité de temps transformé en énergie (énergie aérobie)

Modèle de Keller

Définitions

Définition 1 : Force propulsive par unité de masse $f(t)$

C'est la force générée par l'athlète divisée par sa masse totale

Définition 2 : Énergie anaérobie $e(t)$

C'est l'énergie due à la transformation des sucres (glycogène et lactate) c'est à dire l'énergie hors respiration

Définition 3 : Énergie anaérobie

C'est l'énergie générée grâce à la respiration

Modèle de Keller

Définitions

Définition 1 : Force propulsive par unité de masse $f(t)$

C'est la force générée par l'athlète divisée par sa masse totale

Définition 2 : Énergie anaérobie $e(t)$

C'est l'énergie due à la transformation des sucres (glycogène et lactate) c'est à dire l'énergie hors respiration

Définition 3 : Énergie anaérobie

C'est l'énergie générée grâce à la respiration

Modèle de Keller

Définitions

Définition 1 : Force propulsive par unité de masse $f(t)$

C'est la force générée par l'athlète divisée par sa masse totale

Définition 2 : Énergie anaérobie $e(t)$

C'est l'énergie due à la transformation des sucres (glycogène et lactate) c'est à dire l'énergie hors respiration

Définition 3 : Énergie anaérobie

C'est l'énergie générée grâce à la respiration

Modèle de Keller

Hypothèses du modèle

- ❶ La résistance est une fonction linéaire de v
- ❷ Le coefficient de friction τ est constant
- ❸ La force de propulsion doit vérifier :

$$0 \leq f(t) \leq f_M \quad \forall t \geq 0 \quad (1)$$

- ❹ L'énergie anaérobie vérifie :

$$e(t) \geq 0 \quad (2)$$

Modèle de Keller

Hypothèses du modèle

- ❶ La résistance est une fonction linéaire de v
- ❷ Le coefficient de friction τ est constant
- ❸ La force de propulsion doit vérifier :

$$0 \leq f(t) \leq f_M \quad \forall t \geq 0 \quad (1)$$

- ❹ L'énergie anaérobie vérifie :

$$e(t) \geq 0 \quad (2)$$

Modèle de Keller

Hypothèses du modèle

- ❶ La résistance est une fonction linéaire de v
- ❷ Le coefficient de friction τ est constant
- ❸ La force de propulsion doit vérifier :

$$0 \leq f(t) \leq f_M \quad \forall t \geq 0 \quad (1)$$

- ❹ L'énergie anaérobie vérifie :

$$e(t) \geq 0 \quad (2)$$

Modèle de Keller

Hypothèses du modèle

- ❶ La résistance est une fonction linéaire de v
- ❷ Le coefficient de friction τ est constant
- ❸ La force de propulsion doit vérifier :

$$0 \leq f(t) \leq f_M \quad \forall t \geq 0 \quad (1)$$

- ❹ L'énergie anaérobie vérifie :

$$e(t) \geq 0 \quad (2)$$

Modèle de Keller

Équations et conditions

- Deuxième loi de Newton :

$$\dot{x}(t) = v(t) \quad x(0) = 0 \quad x(t_f) = d \quad v(0) = v^0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = f \quad (3)$$

- Conservation d'énergie

$$\dot{e}(t) = \bar{\sigma} - f(t)v(t) \quad (4)$$

$$e(0) = e^0 \quad e(t) \geq 0 \quad e(t_f) = 0.$$

- On assume que l'énergie aérobie est constante durant la course.

Modèle de Keller

Équations et conditions

- Deuxième loi de Newton :

$$\dot{x}(t) = v(t) \quad x(0) = 0 \quad x(t_f) = d \quad v(0) = v^0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = f \quad (3)$$

- Conservation d'énergie

$$\dot{e}(t) = \bar{\sigma} - f(t)v(t) \quad (4)$$

$$e(0) = e^0 \quad e(t) \geq 0 \quad e(t_f) = 0.$$

- On assume que l'énergie aérobie est constante durant la course.

Modèle de Keller

Équations et conditions

- Deuxième loi de Newton :

$$\dot{x}(t) = v(t) \quad x(0) = 0 \quad x(t_f) = d \quad v(0) = v^0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = f \quad (3)$$

- Conservation d'énergie

$$\dot{e}(t) = \bar{\sigma} - f(t)v(t) \quad (4)$$

$$e(0) = e^0 \quad e(t) \geq 0 \quad e(t_f) = 0.$$

- On assume que l'énergie aérobie est constante durant la course.

Modèle de Keller

Nature du problème

- Problème de contrôle où $f(t)$ est la variable de contrôle. T est le coût à optimiser.
- On cherche alors :

$$\min_{f \in \mathcal{F}} T(f) \quad \text{ou} \quad \mathcal{F} = \{f : 0 \leq f(t) \leq f_{\max} \quad \forall t \geq 0\}$$

Modèle de Keller

Solution de Keller

On démontre que la vitesse varie selon 3 phases :

- 1 Phase d'accélération :

$$v(t) = f_{\max} \tau (1 - e^{-t/\tau}) \quad 0 \leq t \leq T_c.$$

- 2 Phase constante :

$$v(t) = cte = \left(\frac{2\tau(E_0 + \sigma T)}{2 + \tau} \right)^{1/2} \quad T_c \leq t \leq T_d$$

- 3 Phase de décélération :

$$v(t) = (\sigma\tau + [v^2(t_2) - \sigma\tau]e^{2(t_2-t)/\tau})^{1/2} \quad T_d < t$$

Modèle de Keller

Solution

- Deux solutions : analytique et numérique
- On utilise le logiciel de résolution de problème d'optimisation **Bocop**
- On traite deux courses : 100m et 800m

Modèle de Keller

Solution analytique

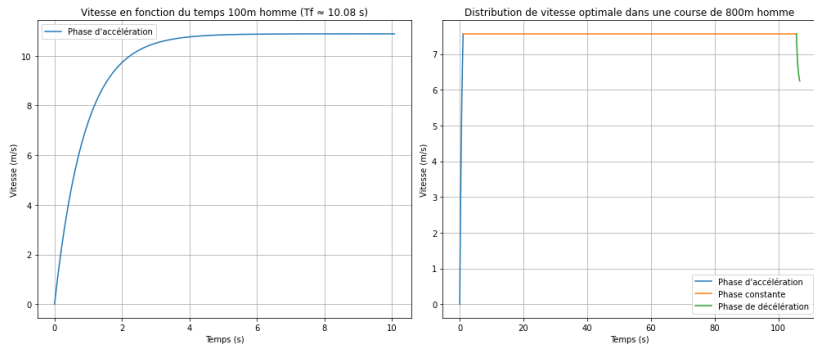


Figure – Trace pour $d=100m(800m)$, $\sigma=41.56$, $F_{max} = 12.2$, $e^0 = 2406$, $\tau=0,892$

Modèle de Keller

Solution numérique

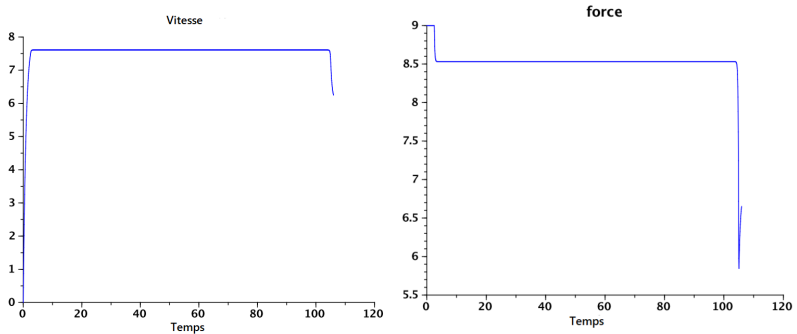


Figure – Distribution de vitesse et de force obtenue par simulation numérique pour 800m homme

Modèle de Keller

Limite du modèle

- 1 L'énergie aérobie varie au cours du temps
- 2 $f(t)$ ne peut pas rester maximale pendant toute la course
- 3 Courbures dans la trajectoire

Modèle de Keller

Limite du modèle

- 1 L'énergie aérobie varie au cours du temps
- 2 $f(t)$ ne peut pas rester maximale pendant toute la course
- 3 Courbures dans la trajectoire

Modèle de Keller

Limite du modèle

- 1 L'énergie aérobie varie au cours du temps
- 2 $f(t)$ ne peut pas rester maximale pendant toute la course
- 3 Courbures dans la trajectoire

Premier modèle correctif

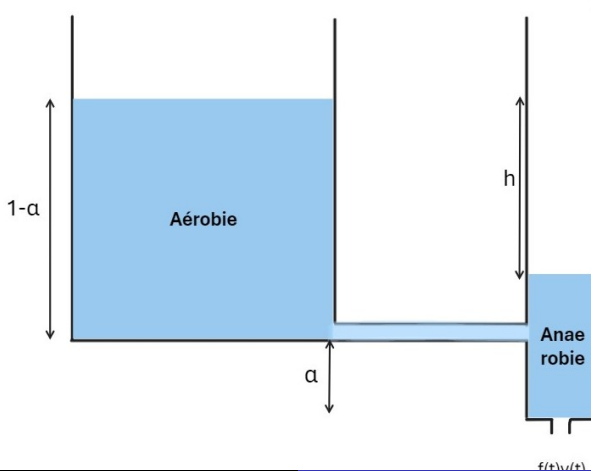
Hypothèses de ce modèle

Même hypothèses qu'avant, d'avantage :

- Prise en compte de la variation de l'énergie aérobie
- Considération d'une phase initiale pour le volume d'oxygène

Premier modèle correctif

Modélisation énergie anaérobie : Analogie hydraulique



Premier modèle correctif

Avantages de l'analogie

- Redéfinir le problème en fonction de h
- Simplification des équations et de la résolution
- $e(t) := e_{an}$, A_p : surface du conteneur

Premier modèle correctif

Avantages de l'analogie

- Redéfinir le problème en fonction de h
- Simplification des équations et de la résolution
- $e(t) := e_{an}$, A_p : surface du conteneur

Premier modèle correctif

Avantages de l'analogie

- Redéfinir le problème en fonction de h
- Simplification des équations et de la résolution
- $e(t) := e_{an}$, A_p : surface du conteneur

Formulation du problème

$$e_{an}^0 - e_{an} = A_p h \quad (5)$$

où $A_p = e_{an}^0$

$$W = fv = \bar{\sigma} + A_p \frac{dh}{dt} \quad (6)$$

Fonction de répartition de l'énergie aérobie :

$$\sigma(h) = \begin{cases} \bar{\sigma} \frac{h}{1-\alpha} & \text{si } h < 1 - \alpha \\ \bar{\sigma} & \text{si } h \geq 1 - \alpha \end{cases} \quad (7)$$

Premier modèle correctif

Formulation du problème

Nouvelles équations

$$\frac{de_{an}}{dt} = \begin{cases} \lambda \bar{\sigma}(e_{an}^0 - e_{an}) - fv & \text{si } \lambda(e_{an}^0 - e_{an}) < 1 \\ \bar{\sigma} - fv & \text{si } \lambda(e_{an}^0 - e_{an}) > 1 \end{cases} \quad (8)$$

où $\lambda = \frac{1}{e_{an}^0(1-\alpha)}$.

$$\frac{dv}{dt} = f - \frac{v}{\tau} \quad (9)$$

Deuxième modèle correctif

Modèle de Fiorini et Aftalion

- Prise en compte de la variation en phase finale
- Énergie aérobie varie en fonction de l'énergie anaérobie
- Effet de la fatigue inclus
- Les paramètres proviennent de données expérimentales

Deuxième modèle correctif

Modèle de Fiorini et Aftalion

Équation de σ en fonction de e_{an}

$$\sigma = \begin{cases} \bar{\sigma} \frac{e}{e^0 e_{cr}} + \sigma_f \left(1 - \frac{e}{e^0 e_{cr}}\right) & \text{si } e < e^0 e_{cr} \\ \bar{\sigma} & \text{si } e^0 e_{cr} \leq e \leq e^0 \alpha \\ \sigma_r + \frac{(\bar{\sigma} - \sigma_r)(e^0 - e)}{e^0(1 - \alpha)} & \text{si } e \geq e^0 \alpha \end{cases} \quad (10)$$

ou $\bar{\sigma}, \sigma_f, \sigma_r$: le volume maximale (respec. finale, initiale au repos)

α, e_{cr} : paramètre $\in [0, 1]$

Deuxième modèle correctif

Courbe de σ en fonction de e

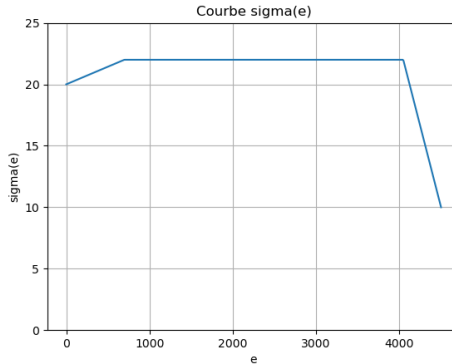


Figure – Sigma en fonction de l'énergie e

Deuxième modèle correctif

Résultat de simulation en BOCOP

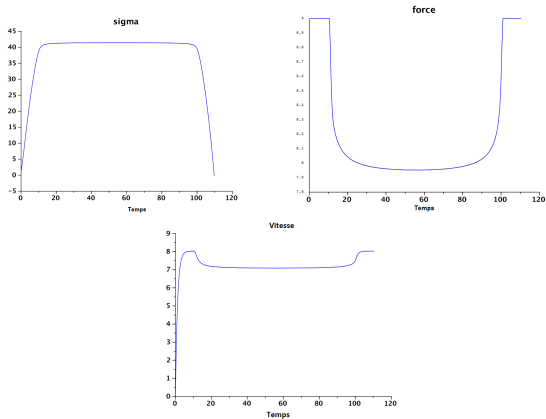


Figure – Vitesse, sigma et force en fonction du temps

Deuxième modèle correctif

Stratégie optimale

- ① Si $d > 291\text{m}$:
 - Phase 1 : accélération jusqu'à la vitesse maximale
 - Phase 2 : petite décélération puis vitesse constante
 - Phase 3 : accélération dans les dernières secondes (Finish)
- ② Si $d < 291\text{m}$:
 - ① Accélération continue jusqu'à la vitesse maximale puis même vitesse jusqu'à la fin de la course

Deuxième modèle correctif

Vérification des résultats théoriques

Étude statistique

- Comparaison : Passé et présent
- Comparaison : Même course
- Comparaison : Effets aérodynamiques

Étude statistique : Comparaison passé et présent

Carl Lewis et Usain Bolt

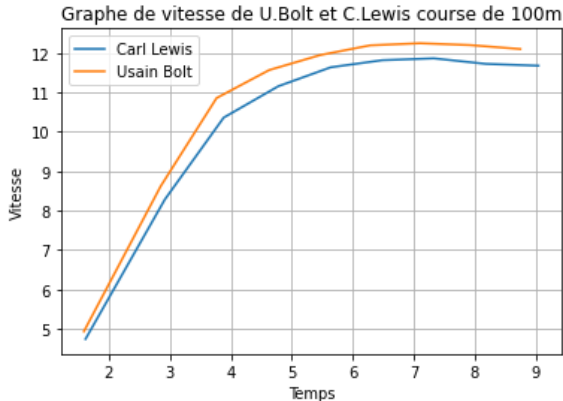


Figure – Comparaison entre Usain Bolt 2009 et Carl Lewis 1988

Étude statistique : Même course

Performances final 100m homme Berlin 2009

	20m	40m	60m	80m	100m
Bolt	2.88	4.64	6.31	7.92	9.58
Gay	2.92	4.7	6.39	8.02	9.71
Powell	2.91	4.71	6.42	8.10	9.84
Bailey	2.92	4.73	6.48	8.18	9.93
Thompson	2.9	4.71	6.45	8.17	9.93
Burns	2.94	4.76	6.52	8.24	10.00
Chambers	2.93	4.75	6.5	8.22	10.00
Patton	2.96	4.85	6.65	8.42	10.34

Étude statistique : même course

Performances final 100m homme Berlin 2009

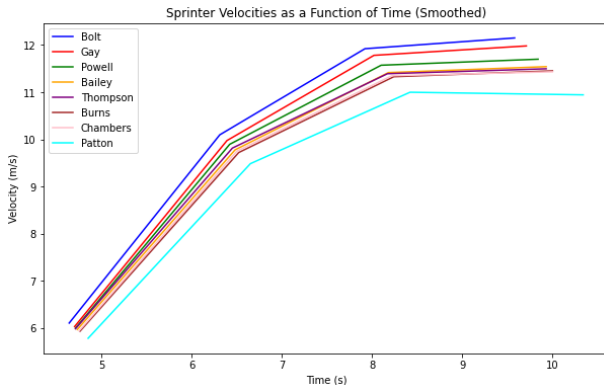


Figure – Performances en final 2009 Berlin 100m

Étude statistique : Effets aérodynamiques

- Les courses de vitesse se jouent en plein air
- Le vent peut affecter positivement ou négativement les scores
- Existence d'un lien entre la vitesse du vent et le temps mis lors de la course

Étude statistique : Effets aérodynamiques

Finals 100m Homme, championnats du monde (2009-2023), ligues de diamant 2024, jeux olympiques (1996-2020)

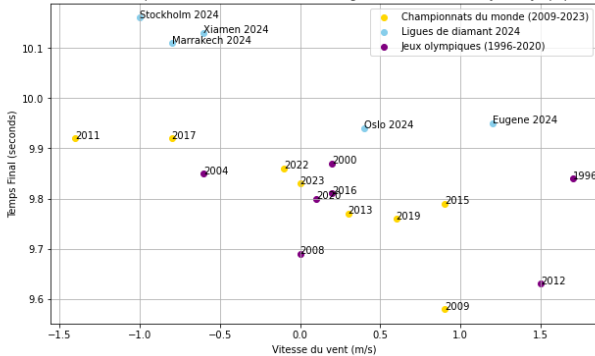


Figure – Courbe de temps finaux en fonction de la vitesse du vent

Conclusion

Limites de la modélisation

- Courbure de la piste
- Effet des autres joueurs (Tactique)
- Effets aérodynamiques
- Matériaux sportifs (espadrilles)
- Effets psychiques (encouragement du public)

Conclusion

Suggestions et possibles améliorations

- Force centrifuge dans les courbures
- Fonction qui modélise l'effet psychique
- Force de résistivité de l'air (algébrique soit + ou -)

Conclusion

MERCI POUR VOTRE ATTENTION

Codes simulations PYTHON

Code1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import fsolve
# parametres de la premiere figure
f_max_1 = 12.2
tau_1 = 0.892
# fonction qui definit la distance pour la premiere courbe
def distance(t, f_max, tau):
    return f_max * tau * t - f_max * tau**2 * (1 - np.exp(-t / tau))
# Define the equation to solve for T_c for the first plot
def equation(T_c, f_max, tau):
    return distance(T_c, f_max, tau) - 100
# trouver Tfinale optimale
T_c_initial_guess = 10
T_c_1 = fsolve(equation, T_c_initial_guess, args=(f_max_1, tau_1))[0]
# valeur discrete de temps
t1 = np.linspace(0, T_c_1, 100)
# equation de vitesse phase 1
v1 = f_max_1 * tau_1 * (1 - np.exp(-t1 / tau_1))
# parametres seconde figure
f_max_2 = 12.2
tau_2 = 0.892
sigma = 41.56
T_c_2 = 1.06
T_d = 105.65
# valeurs discrete du temps
t2 = np.linspace(0, T_c_2, 100)
t3 = np.linspace(T_c_2, T_d, 100)
t4 = np.linspace(T_d, 106.69, 100)
```

Codes simulations PYTHON

Code1

```
# equations de vitesse seconde figure
v2_acc = f_max_2 * tau_2 * (1 - np.exp(-t2 / tau_2))
v2_const = f_max_2 * tau_2 * (1 - np.exp(-T_c_2 / tau_2))
v2_dec = np.sqrt(sigma * tau_2 + (v2_const**2 - sigma * tau_2) * np.exp(2 * (T_d - t4) /
tau_2))
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(14, 6))
# premiere figure
ax1.plot(t1, v1, label='Phase d\'accélération')
ax1.set_xlabel('Temps (s)')
ax1.set_ylabel('Vitesse (m/s)')
ax1.set_title(f'Vitesse en fonction du temps 100m homme (Tf ≈ {T_c_1:.2f} s)')
ax1.legend()
ax1.grid(True)
# deuxieme figure
ax2.plot(t2, v2_acc, label='Phase d\'accélération')
ax2.plot(t3, [v2_const] * len(t3), label='Phase constante')
ax2.plot(t4, v2_dec, label='Phase de décélération')
ax2.set_xlabel('Temps (s)')
ax2.set_ylabel("Vitesse (m/s)")
ax2.set_title('Distribution de vitesse optimale dans une course de 800m homme')
ax2.legend()
ax2.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Codes Simulations PYTHON

Code3 : sigma en fonction de e

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def sigma(e, sigma_bar, sigma_f, sigma_r, alpha, e_cr):
    e0 = 4651 # Valeur arbitraire pour e0, vous pouvez la changer selon vos besoins
    if e < e0 * e_cr:
        return sigma_bar * (e / (e0 * e_cr)) + sigma_f * (1 - e / (e0 * e_cr))
    elif e0 * e_cr <= e <= e0 * alpha:
        return sigma_bar
    else:
        return sigma_r + ((sigma_bar - sigma_r) * (e0 - e)) / (e0 * (1 - alpha))

# Définition des paramètres
sigma_bar = 22
sigma_f = 20
sigma_r = 6
alpha = 0.87
e_cr = 0.15

# Génération des données pour le tracé
e_values = np.linspace(0, 4500, 500)
sigma_values = [sigma(e, sigma_bar, sigma_f, sigma_r, alpha, e_cr) for e in e_values]

# Tracé de la courbe
plt.plot(e_values, sigma_values)
plt.xlabel('e')
plt.ylabel('sigma(e)')
plt.title('Courbe sigma(e)')
plt.yticks(np.arange(0, max(sigma_values)+5, 5))
plt.grid(True)
plt.show()
```


Simulation BOCOP

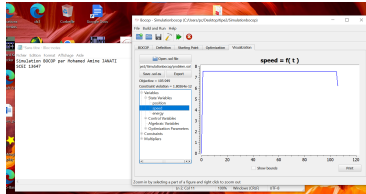


Figure – Courbe de vitesse

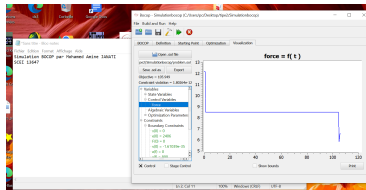


Figure – Courbe de force propulsive

Modèle de Keller

Re-formulation du problème

- En utilisant (1.3) et (1.4) puis en intégrant :

$$e(t) = e^0 + \sigma t - \frac{v^2(t)}{2} - \frac{1}{\tau} \int_0^t v^2(s) ds.$$

- Par hypothèse $e(t) \geq 0$ donc :

$$e^0 + \sigma t - \frac{v^2(t)}{2} - \frac{1}{\tau} \int_0^t v^2(s) ds \geq 0.$$

- En utilisant (1.3) et (1.1) :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} \leq f_{\max}$$