دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکدهٔ مهندسی برق - گروه مهندسی کنترل

کنترل خطی

پاسخ تمرین ۳

نام و نام خانوادگی	محمدامین حری فراهانی
شمارهٔ دانشجویی	۴۰۲۱۶۶۷۳
تاریخ	آبان ۱۴۰۴

فهرست مطالب

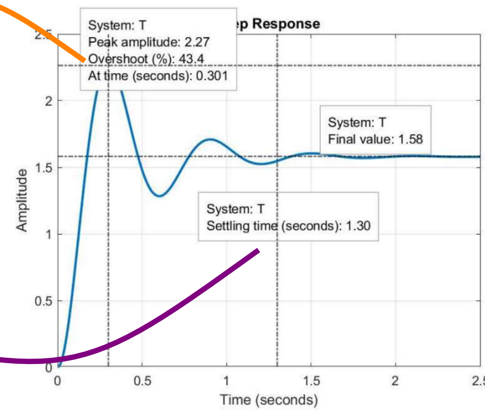
فهرست تصاویر

۱ سوال ۱

با توجه به شکل میتوان فهمید که :

$$e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.434 \qquad \text{(بالا زدگی\%)}$$

$$\frac{4}{\zeta\omega_n} = 1.3 \qquad \text{(زمان نشست با معیار ۲\%)}$$



خب با توجه به رابطهٔ (۱) و چون تنها ζ در آن مجهول است، می‌توان مقدار ζ را محاسبه کرد که مقدار تقریبی آن برابر است با :

$$\boxed{\zeta \approx 0.256}$$

حال می‌توانیم مقدار ζ را در رابطهٔ (۲) (زمان نشست) قرار دهیم تا ω_n به‌دست آید. با قرار دادن مقدار $\zeta \approx 0.256$ در رابطهٔ (۲) داریم:

$$\frac{4}{\zeta\omega_n} = 1.3$$

$$\frac{4}{0.256\,\omega_n} = 1.3$$

$$\boxed{\omega_n \approx 12.02}$$

$$T(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{144.48k}{s^2 + 6.15s + 144.48}$$

حال می‌توانیم k را از مقدار پیک محاسبه کنیم. اگر ζ را در رابطهٔ (۱) قرار دهیم، داریم:

$$1 + e^{-\frac{\pi(0.256)}{\sqrt{1-(0.256)^2}}} \approx 1 + 0.435 = 1.435$$

با توجه به اینکه مقدار پیک در شکل 2.27 است، مقدار k برابر است با:

$$k = \frac{2.27}{1.435} \approx 1.58$$

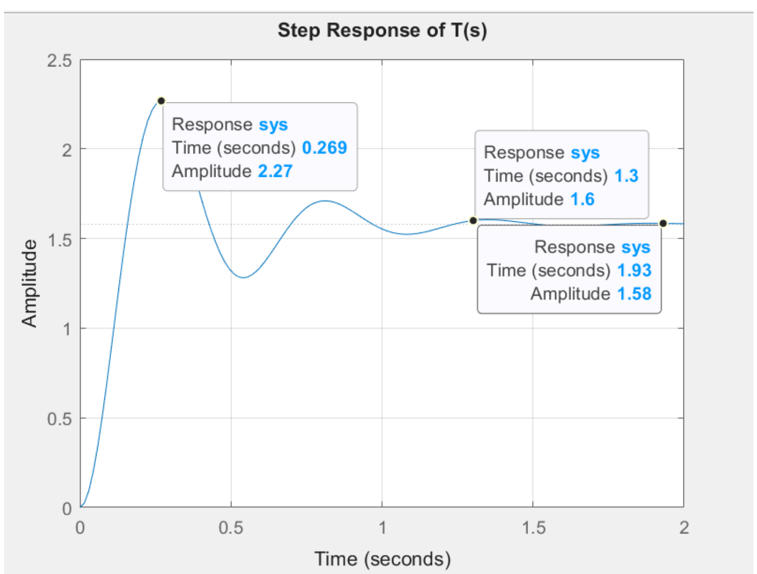
پس در نتیجه $T(s)$ می‌شود:

$$T(s) = \frac{228.27}{s^2 + 6.15s + 144.48}$$

میتوانیم در متلب پاسخ پله این تابع تبدیل را بدست بیاریم و با نتیجه مقایسه کنیم :

کد متلب:

```
clc
clear

zeta = 0.256;
wn   = 12.02;
k    = 1.58;
num = k * wn^2;
den = [1  2*zeta*wn  wn^2];

sys = tf(num, den);

figure;
step(sys)
grid on
title('Step Response of T(s)')
```



شکل ۱: خروجی متلب

حالا می‌توانیم $G(s)$ را حساب کنیم. داریم:

$$T(s) = \frac{G(s)}{G(s)+1} \Rightarrow G(s) = \frac{T(s)}{1-T(s)}$$

$$T(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}, \qquad H(s) = 1$$

$$G(s) = \frac{T(s)}{1-T(s)} = \frac{\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}}{1-\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}} = \frac{k\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2-k\omega_n^2}.$$

با جایگذاری مقادیر

$$\zeta = 0.256, \quad \omega_n = 12.02, \quad k = 1.58$$

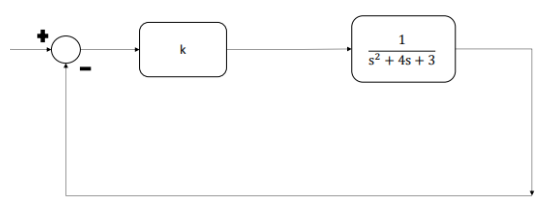
$$\omega_n^2 = (12.02)^2 = 144.4804, \qquad k\omega_n^2 = 1.58 \times 144.4804 = 228.279032,$$

$$2\zeta\omega_n = 2 \times 0.256 \times 12.02 = 6.15424, \qquad \omega_n^2 - k\omega_n^2 = 144.4804 - 228.279032 = -83.798632.$$

$$\boxed{G(s) = \frac{228.279032}{s^2+6.15424\,s-83.798632}}$$

۲ سوال ۲

۱.۲ استفاده از فرمول میسون



$$T(s) = \frac{KG(s)}{KG(s)+1}$$

$$\Rightarrow T(s) = \frac{k}{s^2+4s+3+k}$$

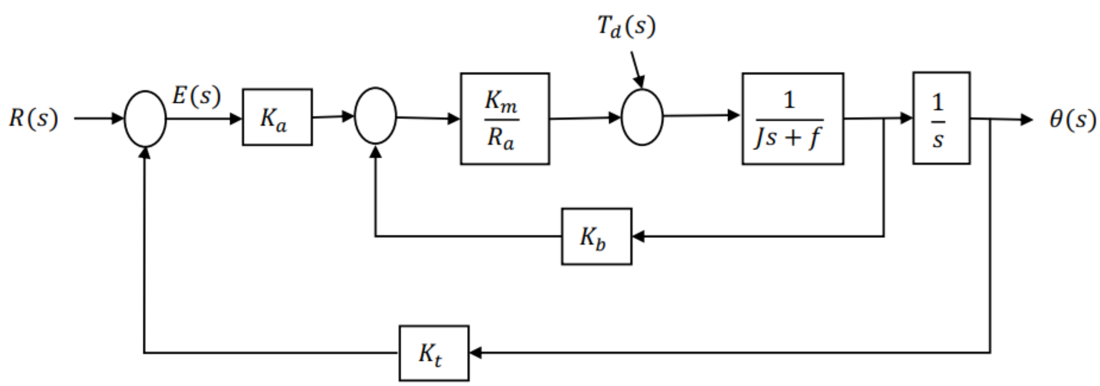
$$2\zeta\omega_n = 4 \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \omega_n = 2\sqrt{2}$$

پس باید :

$$(3+k) = \omega_n^2 = 8$$

$$k = 5$$

۳ سوال ۳



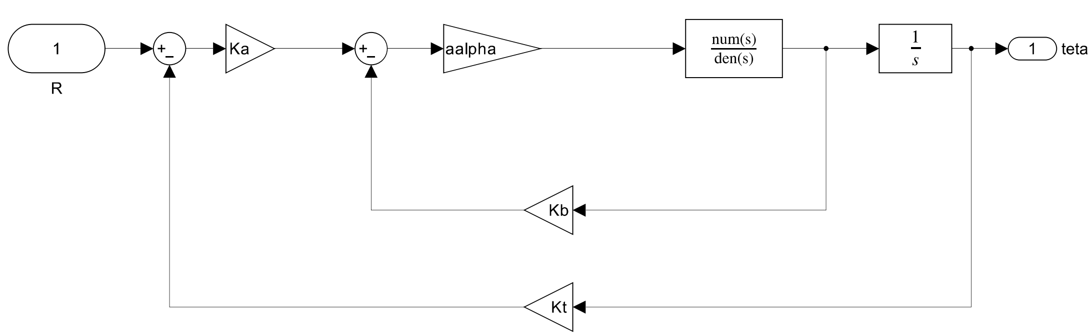
شکل ۲: بلوک دیاگرام سیستم کنترل وضعیت موتور DC

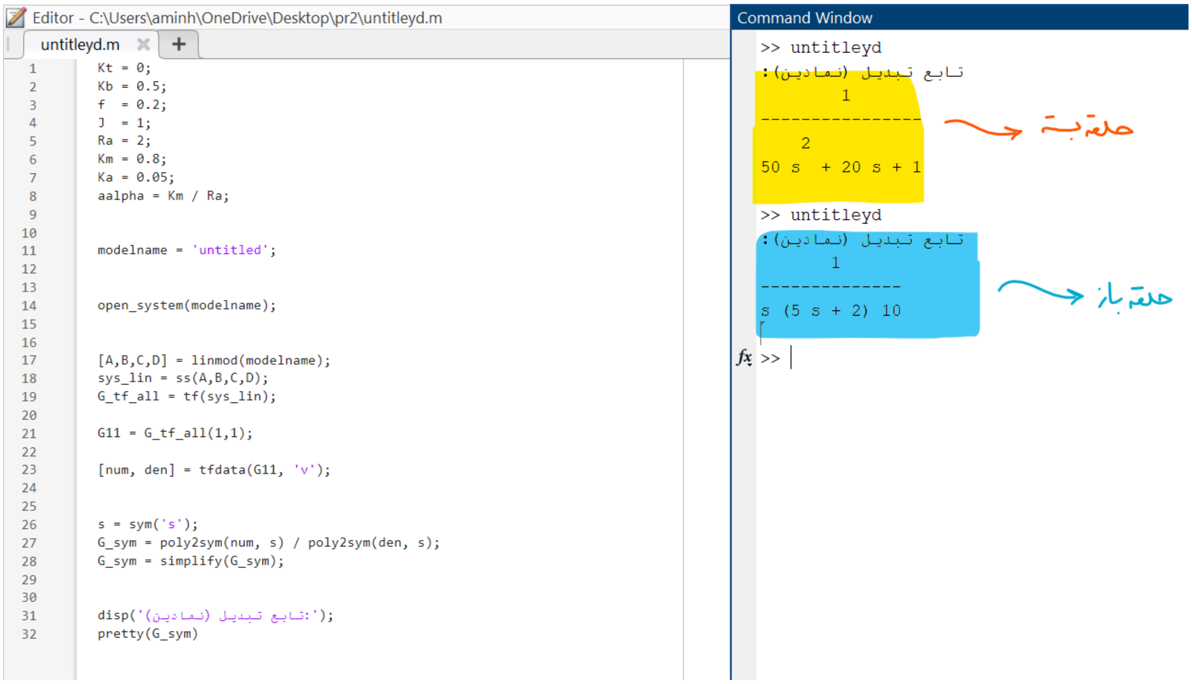
۱.۳ تابع تبدیل حلقه باز و بسته

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{K_a \frac{K_m}{R_a} \frac{1}{Js+f} \frac{1}{s}}{1 - (\frac{K_m}{R_a} . \frac{-1}{Js+f} . k_b + K_a . \frac{K_m}{R_a} . \frac{-1}{Js+f} . \frac{1}{s} . k_t)} = \frac{0.02}{s^2 + 0.4s + 0.02} \qquad \text{(حلقه بسته)}$$

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{K_a \frac{K_m}{R_a} \frac{1}{Js+f} \frac{1}{s}}{1 - (\frac{K_m}{R_a} . \frac{-1}{Js+f} . k_b)} = \frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{0.02}{s(s+0.4)} \qquad \text{(حلقه باز)}$$

۲.۳ مدل شبیه سازی شده





Editor - C:\Users\aminh\OneDrive\Desktop\pr2\untitleyd.m

untitleyd.m

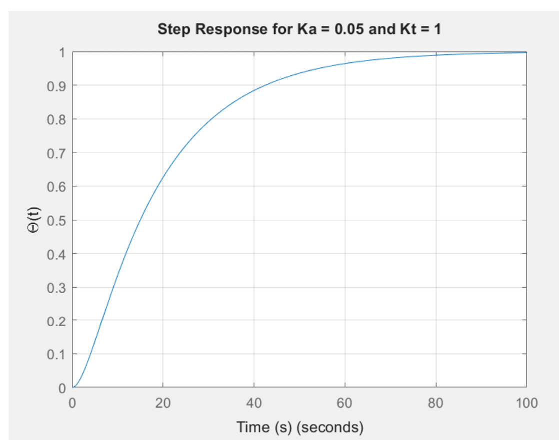
```
Kt = 0;
Kb = 0.5;
f  = 0.2;
J  = 1;
Ra = 2;
Km = 0.8;
Ka = 0.05;
aalpha = Km / Ra;


modelname = 'untitled';


open_system(modelname);


[A,B,C,D] = linmod(modelname);
sys_lin = ss(A,B,C,D);
G_tf_all = tf(sys_lin);

G11 = G_tf_all(1,1);

[num, den] = tfdata(G11, 'v');


s = sym('s');
G_sym = poly2sym(num, s) / poly2sym(den, s);
G_sym = simplify(G_sym);


disp('تابع تبدیل (نمادین):');
pretty(G_sym)
```

Command Window

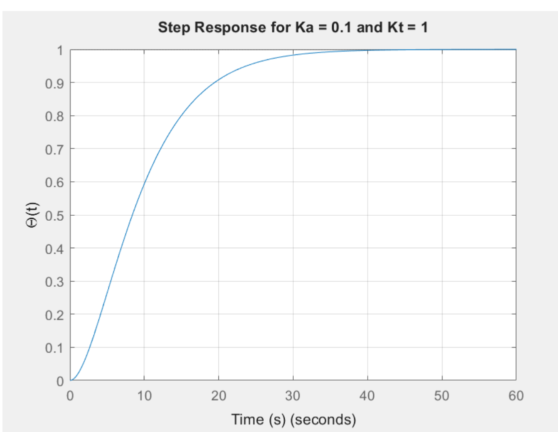
```
>> untitleyd
تابع تبدیل (نمادین):
        1
---------------
     2
50 s  + 20 s + 1
>> untitleyd
تابع تبدیل (نمادین):
        1
--------------
s (5 s + 2) 10
>>
```


مشاهده میشود که نتایج متلب با حل دستی یکسان است فقط در متلب صورت و مخرج هر دو تابع تبدیل در ۵۰ ضرب شده

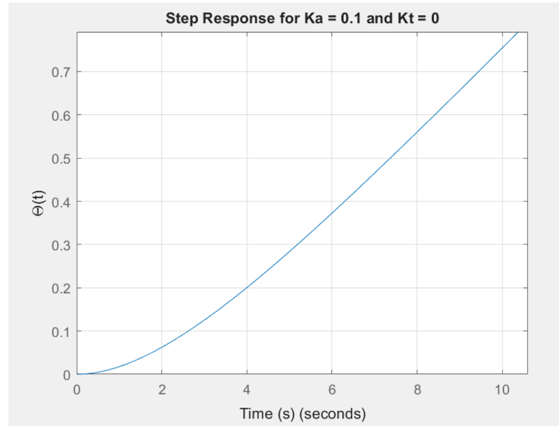
۳.۳ پاسخ پله



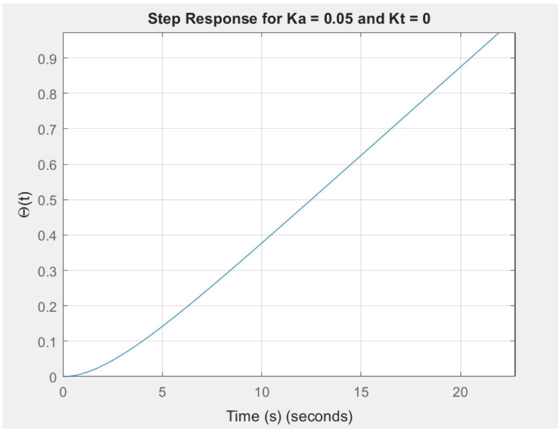
شکل ۳: فرامیرایی



شکل ۴: میرایی مرزی



شکل ۵: ناپایدار



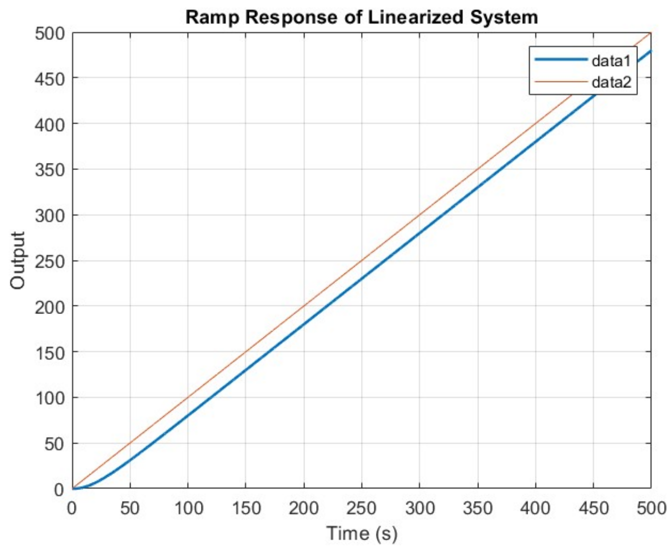
شکل ۶: ناپایدار

ج)

$$L(s) = \frac{0.02}{s^2 + 0.4s}$$

$$k_v = \lim_{s\to 0} sL(s) = \lim_{s\to 0} \frac{0.02}{s^2 + 0.4s} = \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 20$$

خروجی با تابع شیب حدود ۲۰ واحد فاصله دارد.



د)

فراجهش برابر است با $M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

واضح است که مقدار فراجهش تنها به ζ وابسته است .

بار دیگر تابع تبدیل کل سیستم را بر حسب پارامتر K_a مینویسیم.

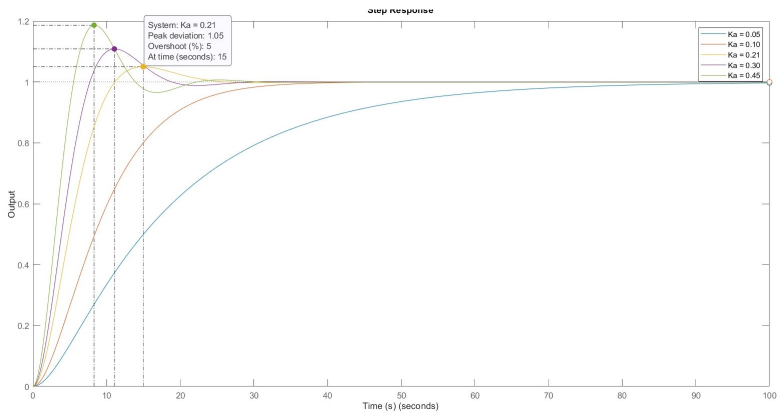
$$\frac{0.8K_a}{s^2+0.4s+0.4K_a}$$

$$\omega_n^2 = 0.4K_a \qquad 2\omega_n\zeta = 0.4 \qquad \Rightarrow \zeta = \frac{0.2}{\sqrt{0.4K_a}}$$

$$M_p < 5 \quad \rightarrow \quad e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} < 0.05 \quad \rightarrow \quad \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} < \ln 0.05 \quad \Rightarrow \zeta > 0.68$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{0.2}{\sqrt{0.4K_a}} > 0.68 \Rightarrow K_a < 0.21$$

پاسخ پله را در متلب به ازای مقادیر مختلف ka مشاهده میکنید.
همانطور که محاسبه کردیم به ازای k_a بزرگتر از 0.21 overshoot بزرگتر از ۵ درصد خواهد بود.



۴ ضمیمه

ادرس گیت هاب (GitHub).