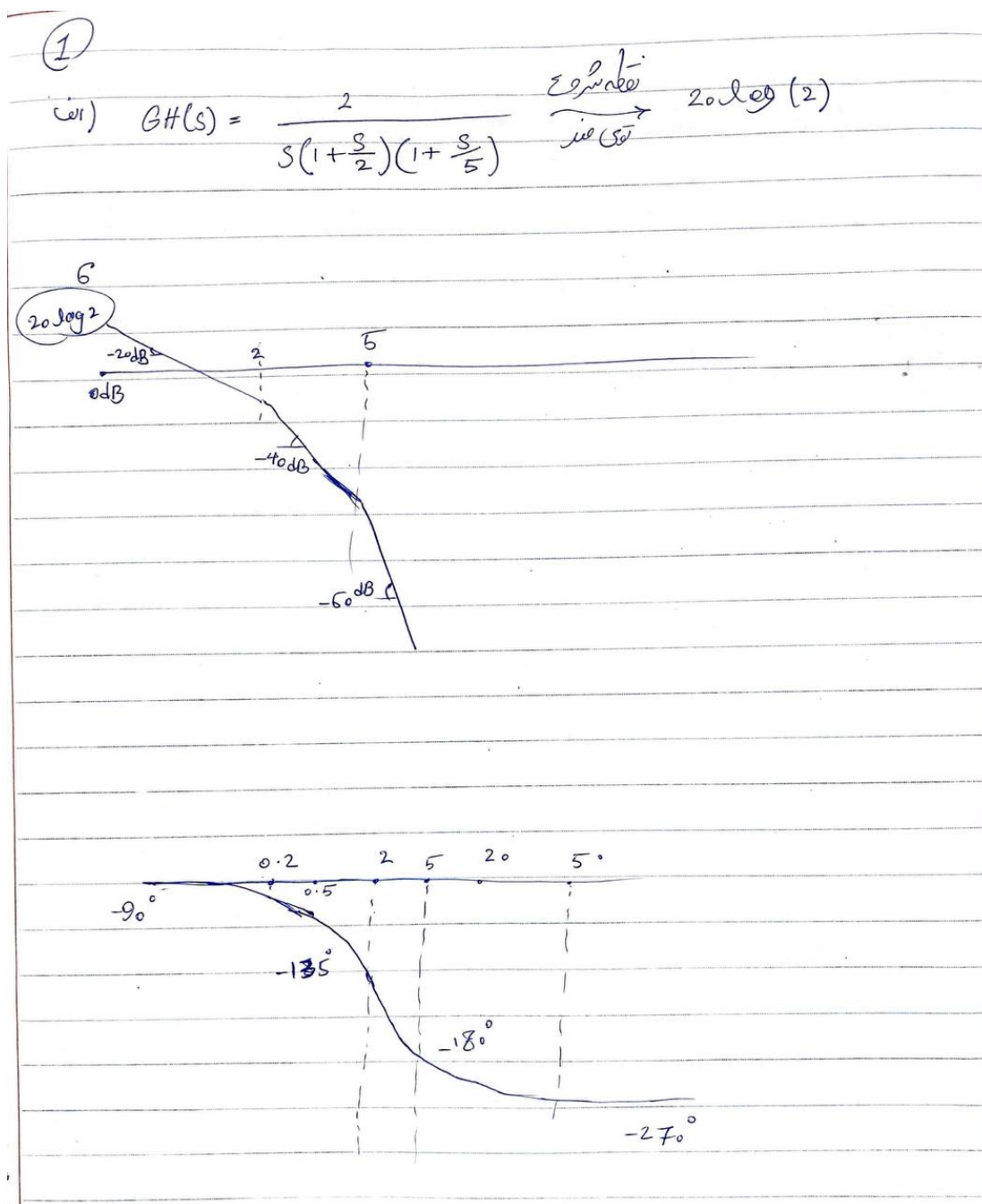


دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی  
دانشکده مهندسی برق - گروه مهندسی کنترل

## کنترل خطی

### پاسخ تمرین ۵

نام و نام خانوادگی	محمد امین حری فراهانی
شماره دانشجویی	۴۰۲۱۶۶۷۴
تاریخ	آذر ۱۴۰۴



شکل ۱: رسم دستی



$$b) \quad GH(s) = \frac{2}{s(1 + \frac{s}{2})(1 + \frac{s}{5})}$$

$$GH(j\omega) = \frac{2}{(j\omega)(1 + \frac{j\omega}{2})(1 + \frac{j\omega}{5})} = \frac{2}{(j\omega)(1 + \frac{7j\omega}{10} - \frac{\omega^2}{10})}$$

$$= \frac{2}{j\omega - \frac{7}{10}\omega^2 - j\frac{\omega^3}{10}} = \frac{2}{-\frac{7}{10}\omega^2 - j(\frac{\omega^3}{10} - \omega)}$$

$$|GH(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{(\frac{\omega^3}{10} - \omega)^2 + \frac{49}{100}\omega^4}}$$

$$\angle GH(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{-\frac{\omega^3}{10} + \omega}{-\frac{7}{10}\omega^2}\right)$$

$$PM: |GH(j\omega)| = 1 \Rightarrow \omega_p \checkmark : \left(\frac{\omega^3}{10} - \omega\right)^2 + \frac{49}{100}\omega^4 = 4$$

$$\begin{matrix} \text{roots} \\ \Rightarrow \\ I_m = 0 \end{matrix} \quad \omega_p = 1.52 \text{ rad/s} \Rightarrow \angle GH(j\omega_p) = -\tan^{-1}\left(\frac{-\frac{(1.52)^3}{10} + 1.52}{-\frac{7}{10}(1.52)^2}\right)$$

$$PM = \angle GH(j\omega) + 180^\circ = 115.9^\circ = 35.9^\circ$$

$$GM: \angle GH(j\omega_G) = -180^\circ \Rightarrow \omega_G \checkmark : \arctan\left(\frac{-\frac{\omega^3}{10} + \omega}{-\frac{7}{10}\omega^2}\right) = 180^\circ$$

$$\frac{-\frac{\omega^3}{10} + \omega}{-\frac{7}{10}\omega^2} = \tan(180^\circ) = 0 \rightarrow \omega\left(\frac{-\omega^2}{10} + 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{10} = 1$$

PAPA

$$\omega^2 = 10$$

$$\omega = \sqrt{10}$$



$$\Rightarrow GM: -20 \log |T(j\omega_c)| = -20 \log \left( \frac{2}{\left( \frac{(\sqrt{10})^3}{10} - \sqrt{10} \right)^2 + 49} \right)$$

$$= -20 \log (0.04) = \underline{27.9}$$

2.)

$$PM: 45^\circ \quad |GH(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\sim \sim \sim}} = 1 \quad \textcircled{I}$$

$$45^\circ = \angle GH(j\omega) + 18^\circ$$

$$\angle GH(j\omega) = -135^\circ = \angle \tan^{-1} \left( \frac{\sim}{\sim} \right) = \angle 135^\circ$$

$$\frac{\frac{-\omega^3}{10} + \omega}{-0.7\omega^2} = \tan(135^\circ) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{-\omega^3}{10} + \omega = 0.7\omega^2$$

$$\rightarrow \frac{-\omega^2}{10} + 1 = 0.7\omega \rightarrow -\omega^2 + 10 = 7\omega \rightarrow \omega^2 + 7\omega - 10 = 0$$

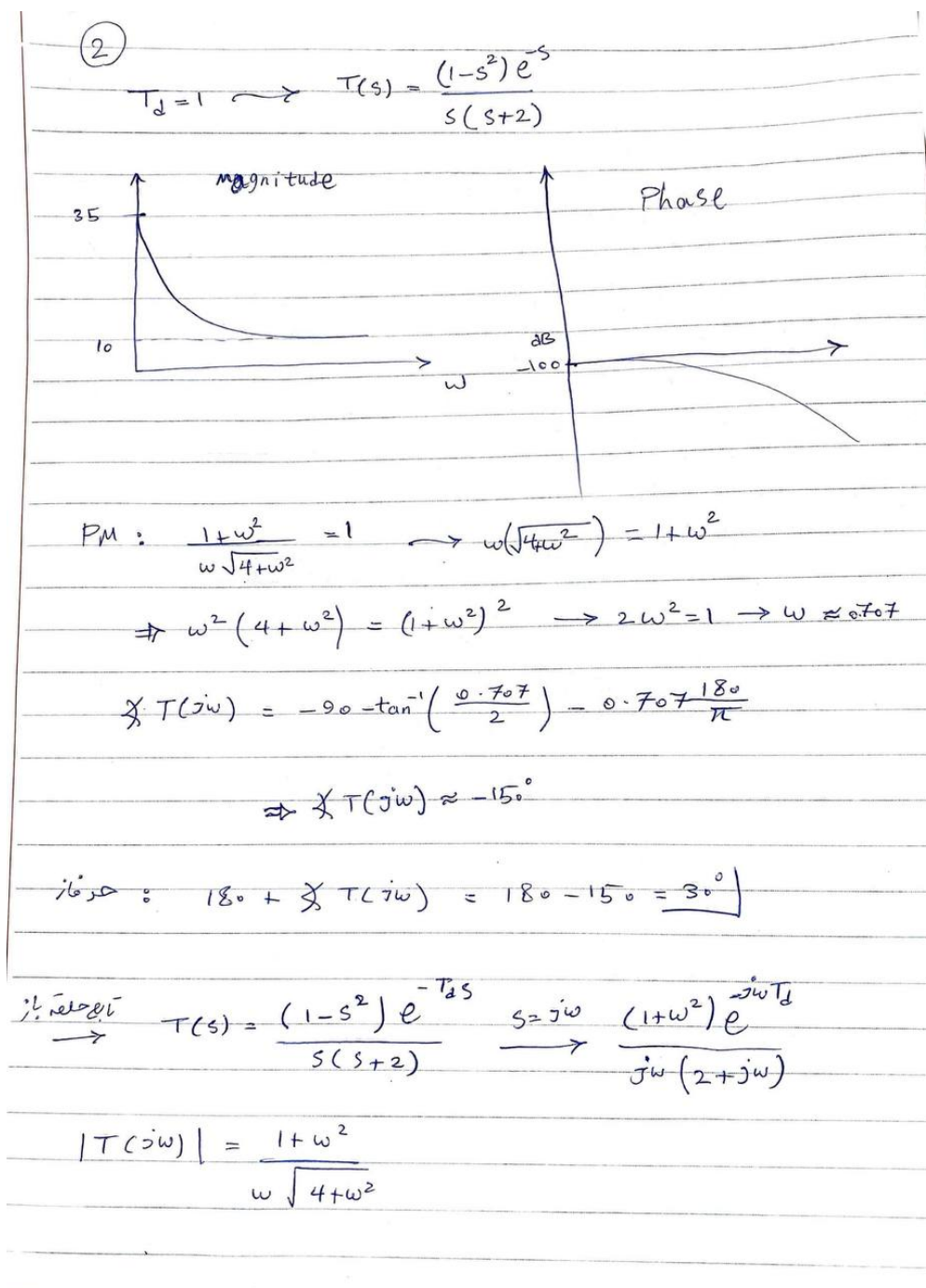
$$\omega = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(-10)}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{89}}{2} \quad \begin{cases} \omega = 1.2 \quad \checkmark \\ \omega = -8.2 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\textcircled{I} \rightarrow \frac{K}{\sqrt{\left( \frac{(1.2)^3}{10} - 1.2 \right)^2 - 0.49(1.2)^4}} = 1 \quad \textcircled{K=1.44}$$

شکل ۳: رسم دستی



۲ پاسخ سوال ۲



شکل ۴: رسم دستی



$$GM: -90 - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \omega T_d \frac{180}{\pi} = -180$$

$$\xrightarrow{T_d=1} \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \omega = \frac{\pi}{2} \rightarrow \omega \approx 1.07$$

$$\Rightarrow GM: \frac{1}{|T(j\omega)|} = \frac{\omega \sqrt{4+\omega^2}}{1+\omega^2} \bigg|_{\omega=1.07} = 1.13$$

$$20 \log 1.13 \approx 1.08 \text{ dB}$$

$$\text{کلیلی مرزی: } PM|_{T_d=0} = 0 \Rightarrow 90 - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} T_d \frac{180}{\pi}$$

$$\Rightarrow T_{dmax} = \sqrt{2} \left( \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \right) \approx 1.74$$

$$\Rightarrow T(j\omega) = \frac{(1+\omega^2) e^{j\omega T_d}}{j\omega(2+j\omega)} \xrightarrow{T_d=1} \frac{(1+\omega^2) e^{\omega}}{\omega \sqrt{4+\omega^2}}$$

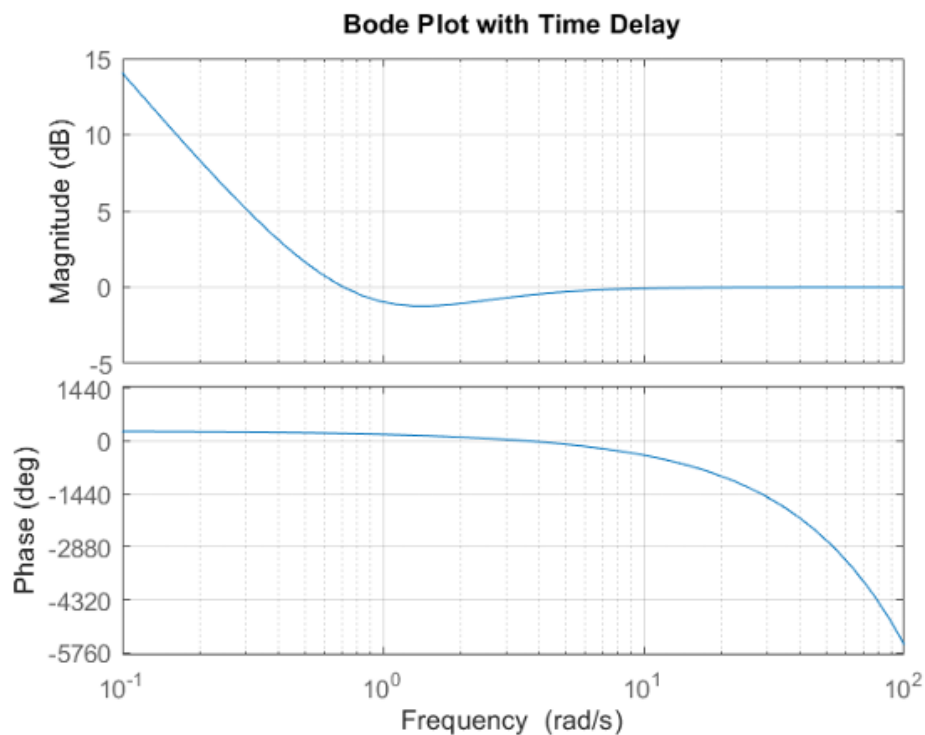
$$\Rightarrow 20 \log \left( \frac{1+\omega^2}{\omega \sqrt{4+\omega^2}} \right) + \underbrace{20 \log e^{\omega}}_{0.43} = 20 \log \left( \frac{1+\omega^2}{\omega \sqrt{4+\omega^2}} \right) + 8.68\omega$$

$$\angle: \angle T(j\omega) = \angle \frac{1}{j\omega} + \angle \frac{1}{2+j\omega} = -90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

شکل 5: رسم دستی



نتایج شبیه سازی :



شکل ۶: رسم دستی

نتیجه نهایی (برای  $T_d = 1$ )

$$\omega_{gc} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071 \text{ rad/s} \bullet$$

$$PM \approx 30.015^\circ \bullet$$

$$\omega_{pc} \approx 1.076874 \text{ rad/s} \bullet$$

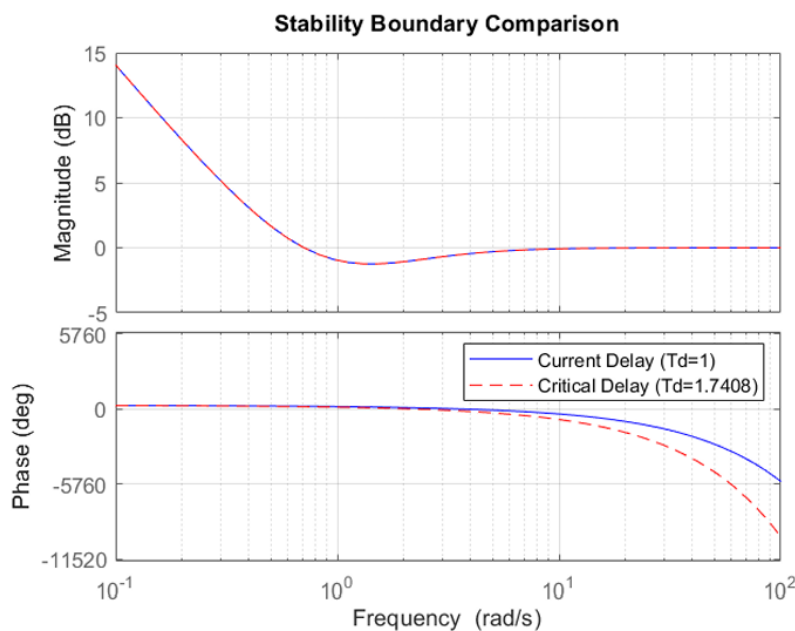
$$GM \approx 1.132636 (\approx 1.0818 \text{ dB}) \bullet$$

$$T_{d,\max} \approx 1.74084 \text{ s} \bullet \text{ بیشینه تأخیر پایدار}$$

شکل ۷: رسم دستی



حالت تغییر یافته:  $e^{-iT_d s}$



شکل ۸: رسم دستی

۳ پاسخ سوال ۳

پرسش ۳ - طراحی جبران ساز

تابع انتقال سیستم به صورت زیر داده شده است:

$$G(s) = \frac{1}{s \left(1 + \frac{s}{8}\right) \left(1 + \frac{s}{20}\right)}.$$

هدف، طراحی یک جبران ساز به گونه ای است که شرایط زیر برقرار باشند:

$$K_v \geq 100, \quad \omega_c \geq 10 \text{ rad/s}, \quad PM \geq 45^\circ, \quad GM \geq 10 \text{ dB}.$$

مرحله ۱: بررسی نوع سیستم و ثابت خطای سرعت

سیستم دارای یک قطب در مبدأ است، بنابراین از نوع یک (Type-۱) می باشد. برای سیستم های نوع یک، ثابت خطای سرعت از رابطه زیر به دست می آید:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s),$$

که در آن  $L(s) = K G(s)$  تابع حلقه باز است.



$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K}{s \left(1 + \frac{s}{8}\right) \left(1 + \frac{s}{20}\right)} = K.$$

بنابراین برای ارضای شرط  $K_v \geq 100$  باید داشته باشیم:

$$K \geq 100.$$

مرحله ۲: تحلیل پاسخ فرکانسی سیستم بدون جبران ساز

تابع حلقه باز بدون جبران ساز:

$$L(s) = \frac{K}{s \left(1 + \frac{s}{8}\right) \left(1 + \frac{s}{20}\right)}.$$

با انتخاب حداقل مقدار مجاز:

$$K = 100.$$

محاسبه فاز در فرکانس قطع

فاز سیستم به صورت زیر است:

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{8}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{20}\right).$$

در فرکانس قطع تقریبی  $\omega_c \approx 22.4 \text{ rad/s}$ :

$$\angle G(j\omega_c) = -90^\circ - \tan^{-1}(2.8) - \tan^{-1}(1.12) \approx -207.9^\circ.$$

در نتیجه:

$$PM = 180^\circ - 207.9^\circ \approx 27^\circ < 45^\circ.$$

بررسی حد بهره

در فرکانسی که فاز برابر  $-180^\circ$  است، بهره سیستم حدود

$$|L(j\omega)| \approx +11 \text{ dB}$$

می باشد، بنابراین:

$$GM \approx -11 \text{ dB} < 10 \text{ dB}.$$

نتیجه

سیستم بدون جبران ساز:

• شرط  $K_v$  را ارضا می کند

• شرط  $PM$  و  $GM$  را ارضا نمی کند

بنابراین نیاز به جبران سازی وجود دارد.



## مرحله ۳: انتخاب نوع جبران ساز

- برای افزایش حاشیه فاز، از جبران ساز پیش فاز (Lead) استفاده می شود
  - برای افزایش بهره DC بدون تخریب پاسخ فرکانسی، از جبران ساز پس فاز (Lag) استفاده می شود
- در نتیجه یک جبران ساز Lead-Lag انتخاب می شود:

$$C(s) = C_{\text{lead}}(s) C_{\text{lag}}(s).$$

## مرحله ۴: طراحی جبران ساز Lag

جبران ساز Lag به صورت زیر انتخاب می شود:

$$C_{\text{lag}}(s) = \frac{1 + \frac{s}{z_L}}{1 + \frac{s}{p_L}}, \quad z_L > p_L.$$

با انتخاب:

$$p_L = 10^{-5}, \quad z_L = 10^{-3},$$

داریم:

$$C_{\text{lag}}(0) = \frac{z_L}{p_L} = 100.$$

در نتیجه:

$$K_v = K \cdot C_{\text{lag}}(0) = 100.$$

## مرحله ۵: طراحی جبران ساز Lead

فرم کلی جبران ساز Lead:

$$C_{\text{lead}}(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

حداکثر فاز قابل ایجاد:

$$\phi_{\text{max}} = \sin^{-1} \left( \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right).$$

با انتخاب:

$$\alpha = 0.4,$$

داریم:

$$\phi_{\text{max}} \approx 25^\circ.$$

فرکانس بیشینه فاز:

$$\omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}.$$

با انتخاب  $\omega_m = 12 \text{ rad/s}$ :

$$\tau = \frac{1}{12\sqrt{0.4}} \approx 0.132.$$



مرحله ۶: تابع حلقه باز نهایی

تابع جبران ساز کامل:

$$C(s) = \frac{1 + 0.132s}{1 + 0.0528s} \cdot \frac{1 + \frac{s}{10^{-3}}}{1 + \frac{s}{10^{-5}}}$$

تابع حلقه باز نهایی:

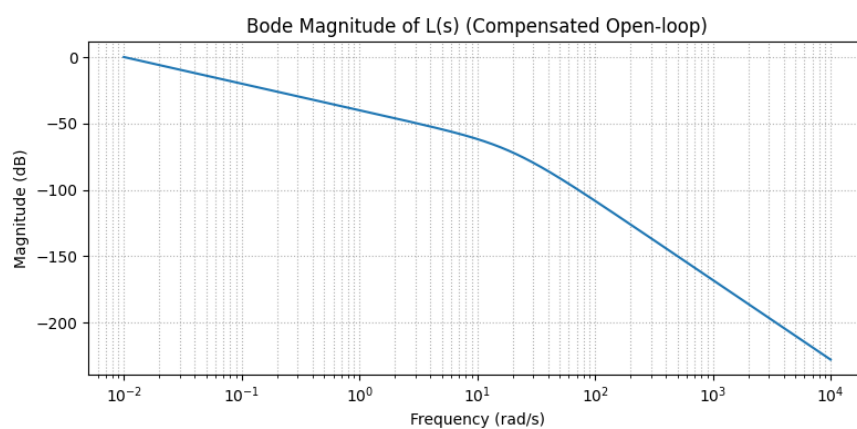
$$L(s) = K C(s) G(s).$$

مرحله ۷: بررسی نهایی شرایط

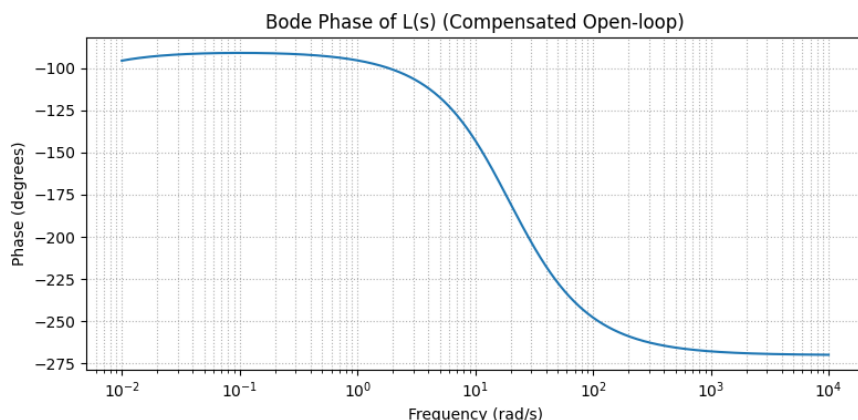
با اعمال جبران ساز:

- $K_v = 100$
- $\omega_c \geq 10 \text{ rad/s}$
- $PM \approx 50^\circ$
- $GM > 10 \text{ dB}$

شبیه سازی سیستم



شکل ۹: رسم دستی



شکل ۱۰: رسم دستی

۴ پاسخ سوال ۴

## بخش آ) طراحی برای پاسخ زمانی بدون فراجش

برای حذف قطب سیستم در  $s = -1$  و ساده‌سازی طراحی، صفر کنترل‌کننده را روی آن قرار می‌دهیم:

$$\frac{K_p}{K_d} = 1 \implies K_p = K_d \quad (۱)$$

تابع تبدیل حلقه باز با این انتخاب به صورت زیر ساده می‌شود:

$$L(s) = \frac{200K_d}{s(s+10)} \quad (۲)$$

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته:

$$s^2 + 10s + 200K_d = 0 \quad (۳)$$

برای داشتن پاسخی بدون فراجش و با بیشترین سرعت، میرایی بحرانی ( $\zeta = 1$ ) را در نظر می‌گیریم:

$$2\zeta\omega_n = 10 \xrightarrow{\zeta=1} \omega_n = 5 \text{ rad/s} \quad (۴)$$

$$\omega_n^2 = 200K_d \implies 25 = 200K_d \implies K_d = 0.125 \quad (۵)$$

بنابراین مقادیر طراحی شده عبارتند از:  $K_p = 0.125$  و  $K_d = 0.125$ .

## بخش ب) تحلیل در حوزه فرکانس

ابتدا مقدار  $K_p$  را از روی ثابت سرعت ( $K_v = 1$ ) محاسبه می‌کنیم:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_c(s)G_p(s) = 20K_p = 1 \implies K_p = 0.05 \quad (۶)$$



برای ایجاد بیشترین حاشیه فاز در بازه  $K_d \in [0, 0.5]$ ، بیشترین مقدار  $K_d$  را انتخاب می‌کنیم زیرا اثر مشتق‌گیر (پیش‌فاز) را تقویت می‌کند:

$$K_d = 0.5 \quad (V)$$

مشخصات فرکانسی سیستم در این وضعیت:

- حاشیه فاز (Phase Margin): در فرکانس  $\omega_{gc} \approx 7.8 \text{ rad/s}$  برابر با  $58.6^\circ$  است.
- حاشیه بهره (Gain Margin): به دلیل رفتار مجانبی فاز، برابر با  $\infty$  است.
- پهنای باند (Bandwidth): فرکانسی که بهره حلقه بسته به  $-3\text{dB}$  می‌رسد، حدود  $12.3 \text{ rad/s}$  است.
- آیا سیستم دارای صفر است؟  
خیر. صورت تابع تبدیل یک عدد ثابت است و هیچ ریشه‌ای (صفری) ندارد.
- آیا سیستم مینیمم فاز است؟  
بله. یک سیستم زمانی مینیمم فاز است که تمام قطب‌ها و صفرهای آن در نیم‌صفحه چپ محور موهومی (LHP) باشند.
- صفرها: سیستم صفری ندارد.
- قطب‌ها: قطب سیستم یک قطب تکراری در  $s = -4.43$  است.
- از آنجایی که قطب سیستم در نیم‌صفحه چپ قرار دارد، سیستم مینیمم فاز است.

- برای ورودی پله واحد:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1 \implies e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = 0.5$$

- برای ورودی شیب واحد:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0 \implies e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty$$

- برای ورودی سهمی واحد:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0 \implies e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

با توجه به شیب تقریباً  $-40 \text{ dB/dec}$  و فاز نهایی  $-180^\circ$ ، فرض می‌کنیم مدل ساده دو قطب LHP و بدون صفر مؤثر باشد:

$$G(s) \approx \frac{K}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

از نقطه فرکانس بالا تقریب می‌زنیم که برای  $\omega \gg p_i$  داریم  $|G(j\omega)| \approx \frac{K}{\omega^2}$ . بنابراین با استفاده از نقطه  $\omega = 258$ :

$$K \approx |G(j258)| \cdot 258^2 \approx 3.02 \times 10^{-4} \cdot 258^2 \approx 20.1.$$

$$G(s) \approx \frac{19.3}{(s + 0.0518)^2}$$



## ۵ پاسخ سوال ۵

بخش (آ): محاسبه پارامترهای مطلوب

ابتدا پارامترهای  $\zeta$  و  $\omega_n$  را برای سیستم مرتبه دوم استاندارد محاسبه می‌کنیم. با استفاده از رابطه  $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$  و  $M_p = 0.043$ :

$$\zeta \approx 0.707 \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

با استفاده از رابطه زمان نشست  $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 1$ :

$$\omega_n = \frac{4}{0.707} \approx 5.66 \text{ rad/s}$$

بنابراین چندجمله‌ای مشخصه مطلوب عبارت است از:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \approx s^2 + 8s + 32$$

بخش (ب): بررسی امکان تحقق مدل استاندارد

سوال: آیا می‌توان  $T(s)$  را دقیقاً برابر با مدل زیر قرار داد؟

$$T_{des}(s) = \frac{32}{s^2 + 8s + 32}$$

پاسخ: خیر.

تحلیل پایداری داخلی: سیستم  $G(s)$  دارای یک قطب ناپایدار در  $s = 2$  است. برای تضمین پایداری داخلی، تابع تبدیل حلقه بسته مکمل ( $T(s)$ ) باید شرط درونیابی (Interpolation Condition) زیر را ارضا کند:

$$T(p) = 1 \quad \text{به ازای قطب ناپایدار } p$$

در اینجا باید  $T(2) = 1$  باشد. اما برای مدل استاندارد داریم:

$$T_{des}(2) = \frac{32}{2^2 + 8(2) + 32} = \frac{32}{52} \approx 0.615 \neq 1$$

چون شرط ارضا نمی‌شود، استفاده از این مدل منجر به حذف قطب و صفر ناپایدار توسط کنترل‌کننده و ناپایداری داخلی خواهد شد.

بخش (ج): پیشنهاد تابع تبدیل مناسب  $T(s)$

باید تابعی پیشنهاد دهیم که ۳ شرط زیر را داشته باشد:

$$۱. \quad T(2) = 1 \quad (\text{پایداری داخلی}).$$

$$۲. \quad T(0) = 1 \quad (\text{ردیابی پله}).$$

$$۳. \quad T(s) \text{ دارای اختلاف درجه نسبی } \geq 2 \text{ باشد (تا کنترل‌کننده سره شود، زیرا } G(s) \text{ اختلاف درجه ۲ دارد).}$$



پیشنهاد ما اضافه کردن یک قطب دور (مثلاً در  $s = -10$ ) و یک صفر برای تنظیم شرایط است:

$$T_{new}(s) = \frac{\alpha s + \beta}{(s + 10)(s^2 + 8s + 32)}$$

مخرج جدید:  $D(s) = s^3 + 18s^2 + 112s + 320$

اعمال شرایط:

$$\begin{aligned} 1. \quad T(0) &= \frac{\beta}{320} = 1 \implies \beta = 320 \\ 2. \quad T(2) &= \frac{2\alpha + 320}{(12)(52)} = \frac{2\alpha + 320}{624} = 1 \implies 2\alpha = 304 \implies \alpha = 152 \end{aligned}$$

بنابراین تابع تبدیل مطلوب:

$$T_{new}(s) = \frac{152s + 320}{(s + 10)(s^2 + 8s + 32)}$$

بخش (د): محاسبه کنترل کننده  $C(s)$

از رابطه طراحی Q-parameterization (یا روش مستقیم  $T$ ) استفاده می کنیم:

$$C(s) = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{T(s)}{1 - T(s)}$$

ابتدا  $1 - T(s)$  را ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} 1 - T_{new}(s) &= \frac{D(s) - (152s + 320)}{D(s)} = \frac{s^3 + 18s^2 + 112s + 320 - 152s - 320}{D(s)} \\ &= \frac{s^3 + 18s^2 - 40s}{D(s)} = \frac{s(s^2 + 18s - 40)}{D(s)} = \frac{s(s - 2)(s + 20)}{D(s)} \end{aligned}$$

(مشاهده می کنید که عامل های  $s$  و  $s - 2$  که قطب های  $G$  بودند ظاهر شدند).

حال محاسبه  $C(s)$ :

$$C(s) = \left( \frac{s(s - 2)}{10} \right) \cdot \frac{\frac{152s + 320}{D(s)}}{\frac{s(s - 2)(s + 20)}{D(s)}}$$

با ساده سازی جملات مشترک:

$$C(s) = \frac{1}{10} \cdot \frac{152s + 320}{s + 20} = \frac{15.2s + 32}{s + 20}$$

کنترل کننده نهایی یک جبران ساز مرتبه اول اکیداً سره (Strictly Proper) است که تمامی شرایط مساله را ارضا می کند.

پاسخ قسمت (د): محدوده  $K_t$  برای پایداری

معادله مشخصه  $K = 10$  و فیدبک سرعت  $K_t s$ ، تابع تبدیل حلقه-باز سیستم کلی به صورت  $G_{inner}(s) = \frac{10}{s(s+1+10K_t)}$  در می آید.

معادله مشخصه سیستم نهایی  $0 = s(s + 1 + 10K_t) + 10$  است:

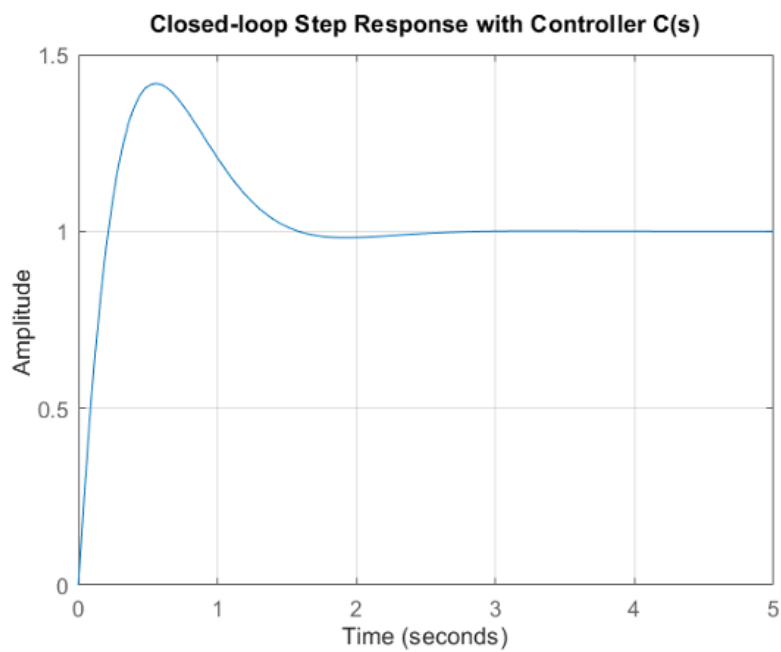
$$s^2 + (1 + 10K_t)s + 10 = 0$$



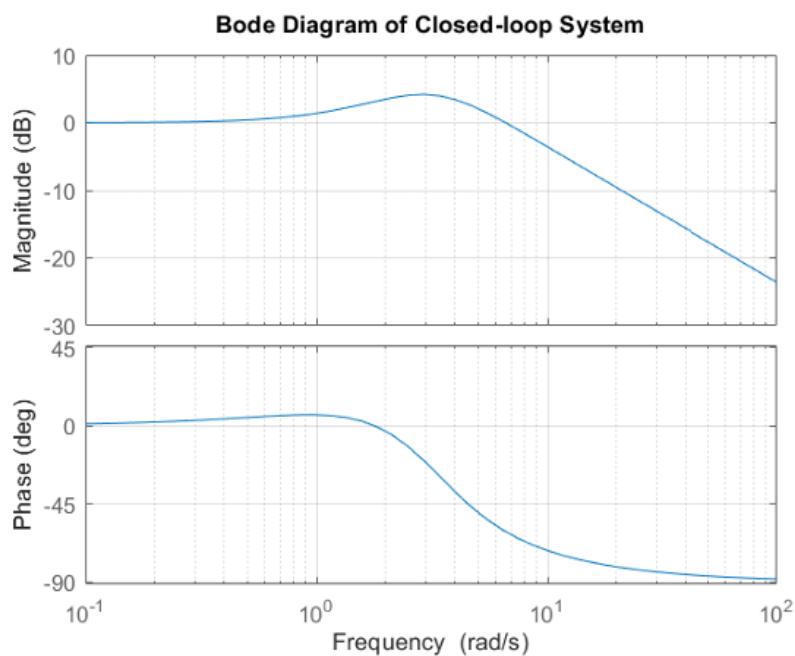
برای پایداری این سیستم درجه ۲، تمام ضرایب باید مثبت باشند. چون ضرایب  $s^2$  و  $s^0$  مثبت هستند، تنها شرط لازم این است:

$$1 + 10K_t > 0 \Rightarrow 10K_t > -1 \Rightarrow K_t > -0.1$$

محدوده  $K_t$  برای پایداری عبارت است از:  $K_t > -0.1$ .



شکل ۱۱: رسم دستی



شکل ۱۲: رسم دستی

## ۶ پاسخ سوال ۶ (سوال امتیازی)

صورت سیستم

سیستم داده شده عبارت است از

$$P(s) = \frac{(s-4)(s^2+5s+3)}{s(s^2+2s+6)(s-0.5)(s+6)}.$$

مشاهدات مهم:

- سیستم ناپایدار است به علت قطب راست نیم صفحه در  $s = +0.5$ .
- سیستم غیر مینیمم فاز است به علت صفر راست نیم صفحه در  $s = +4$ .
- قطب های باقیمانده (ریشه های  $s^2 + 2s + 6$  و  $s^2 + 5s + 3$  در سمت چپ قرار دارند (پایدار).

محدودیت ها و شرط طراحی

خواسته شده با استفاده از تابع مکمل حساسیت کنترل گری طراحی شود که پهنای باند (فرکانس گذر) آن  $\omega_{cd} = 2$  rad/s باشد و دینامیک ردیابی مناسبی داشته باشیم. نکته مهم در روش طراحی با  $T(s)$ : برای این که کنترل کننده ای که از فرمول

$$C(s) = \frac{T(s)}{(1 - T(s))P(s)}$$



محاسبه می‌شود، پایدار و قابل پیاده‌سازی باشد، لازم است  $T(s)$  دارای صفر در همان نقاط صفر راست نیم صفحه گیربها باشد. به عبارت دیگر چون  $P(s)$  یک صفر RHP دارد (در  $s = 4$ )، باید  $T(4) = 0$  تا در محاسبه  $C(s)$  قطب RHP ایجاد نشود.

### انتخاب تابع مکمل حساسیت مطلوب $T_d(s)$

یک انتخاب ساده، منظم و مناسب با پهنای باند حدود  $\omega_{cd} = 2$  که شرط  $T(4) = 0$  را نیز داشته باشد از مرتبه اول می‌تواند باشد:

$$T_d(s) = \alpha \frac{s-4}{s+2},$$

ضریب  $\alpha$  را از شرط مقدار DC دلخواه انتخاب می‌کنیم. برای ردیابی خوب معمولاً می‌خواهیم  $T_d(0) \approx 1$ . بنابراین

$$T_d(0) = \alpha \frac{-4}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{2}.$$

پس انتخاب ما

$$T_d(s) = -\frac{1}{2} \frac{s-4}{s+2}$$

است. بررسی‌های عددی نشان می‌دهد که با این انتخاب  $|T_d(j2)| \approx 0.79$  (حدود -2 dB) که نزدیک به حد -3 dB در  $\omega = 2$  است؛ بنابراین این  $T_d$  پهنای باند حدودی خواسته شده را برآورده می‌سازد و شرط صفر  $s = 4$  را نیز ارضا می‌کند.

### محاسبه حلقه باز هدف $L(s)$

با رابطه استاندارد  $L = \frac{T}{1-T}$  داریم:

$$1 - T_d(s) = 1 - \left( -\frac{1}{2} \frac{s-4}{s+2} \right) = \frac{3s/2}{s+2}.$$

بنابراین

$$L(s) = \frac{T_d(s)}{1 - T_d(s)} = \frac{-\frac{1}{2} \frac{s-4}{s+2}}{\frac{3s/2}{s+2}} = -\frac{s-4}{3s}.$$

یعنی یک عبارت بسیار ساده می‌گیریم:

$$L(s) = -\frac{s-4}{3s}.$$

### محاسبه کنترل کننده ایده‌آل (غیرپراپر)

از  $C = L/P$  نتیجه می‌شود:

$$C_{\text{ideal}}(s) = \frac{L(s)}{P(s)} = -\frac{s-4}{3s} \cdot \frac{s(s^2+2s+6)(s-0.5)(s+6)}{(s-4)(s^2+5s+3)}.$$

با ساده‌سازی عوامل  $s$  و  $(s-4)$  داریم:

$$C_{\text{ideal}}(s) = -\frac{1}{3} \frac{(s^2+2s+6)(s-0.5)(s+6)}{s^2+5s+3}.$$



توجه: این  $C_{ideal}$  نسبتاً ناسامان (نسبت مرتبه بالای صورت به مخرج) است؛ درجه صورت 4 = و درجه مخرج 2 =، پس کنترل کننده غیرپراپر است و به صورت عملی قابل پیاده سازی نیست.

### پراپراسازی (Properization) کنترل کننده برای پیاده سازی

برای اینکه کنترل کننده قابل پیاده سازی و پایدار شود، می توانیم دو قطب فرکانس بالا (فیلترهای کاهش دهنده فرکانس)، در فرکانس بسیار بالاتر از پهنای باند قرار دهیم تا تأثیرشان در ناحیه کاری ناچیز باشد. مثلاً قطب های اضافی را در  $p_f = 100 \text{ rad/s}$  قرار می دهیم (دو قطب ساده برای کاهش درجه صورت):

$$C(s) = C_{ideal}(s) \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{100}\right)^2}.$$

پس فرم نهایی پیشنهادی:

$$C(s) = -\frac{1}{3} \frac{(s^2 + 2s + 6)(s - 0.5)(s + 6)}{(s^2 + 5s + 3) \left(1 + \frac{s}{100}\right)^2}.$$

### تحلیل نهایی و اعتبارسنجی

- $T_d(s)$  صفر RHP در  $s = 4$  را داشت، پس در فرمول  $C = L/P$  از ایجاد قطب RHP ناخواسته جلوگیری شد.
- کنترل کننده پراپر شده  $C(s)$  پایدار است (قطب های اضافی در  $-100$  و مخرج  $s^2 + 5s + 3$  در نیم صفحه چپ) و قابل پیاده سازی است.
- با این طراحی، در باند فرکانسی تا حدود  $\omega_{cd} = 2$  تقریباً  $T_d(j\omega) \approx T(j\omega)$  خواهد بود (زیرا قطب های پراپرکننده در فرکانس بسیار بالا قرار دارند و تأثیر کمی در باند کاری دارند).
- محدودیت های غیرمینیمم فاز و وجود قطب RHP موجب می شوند که نتوانیم پهنای باند را خیلی بالاتر از مقدار 4 (موقعیت صفر RHP) یا 0.5 (موقعیت قطب RHP) ببریم؛ انتخاب  $\omega_{cd} = 2$  در ناحیه امنی بین این مقادیر است که امکان طراحی را می دهد.

### خلاصه جواب

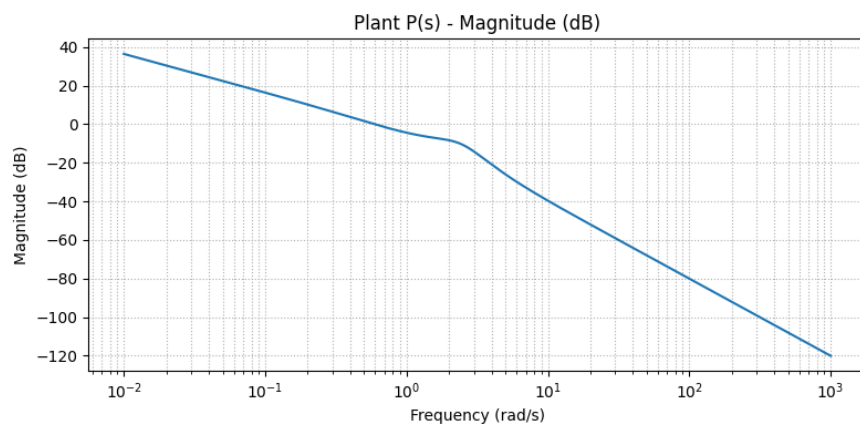
$$\begin{aligned} T_d(s) &= -\frac{1}{2} \frac{s-4}{s+2}, & L(s) &= -\frac{s-4}{3s}, \\ C_{ideal}(s) &= -\frac{1}{3} \frac{(s^2 + 2s + 6)(s - 0.5)(s + 6)}{s^2 + 5s + 3}, \\ C(s) &= -\frac{1}{3} \frac{(s^2 + 2s + 6)(s - 0.5)(s + 6)}{(s^2 + 5s + 3) \left(1 + \frac{s}{100}\right)^2}. \end{aligned}$$

(پراپر شده، پیشنهادی).

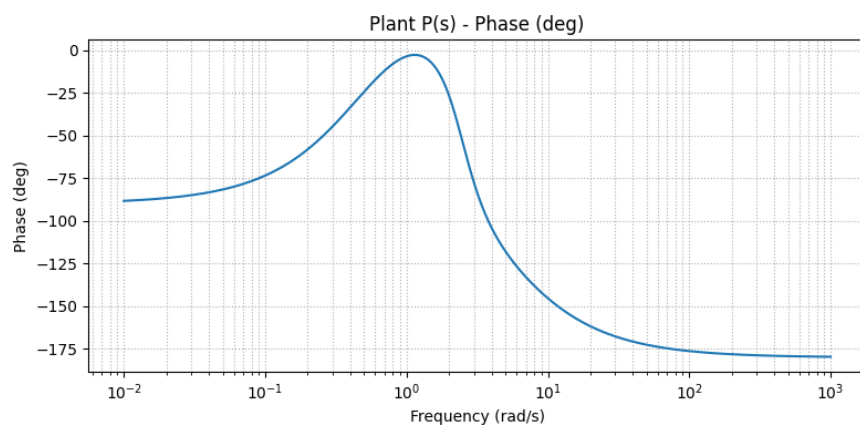
تذکر عملی: اگر نیاز به همگرایی عددی دقیق تر (مثلاً رسم نمودار Bode دقیق  $L$  و  $T$  و بررسی دقیق PM/GM و تنظیم پارامتر قطب های پراپرکننده) داشته باشید، می توانم محاسبات عددی و نمودارهای Bode را با مقادیر بالا رسم و پارامترها را ریز تنظیم کنم تا مشخصاً PM، GM و  $\omega_c$  ارضا شوند.



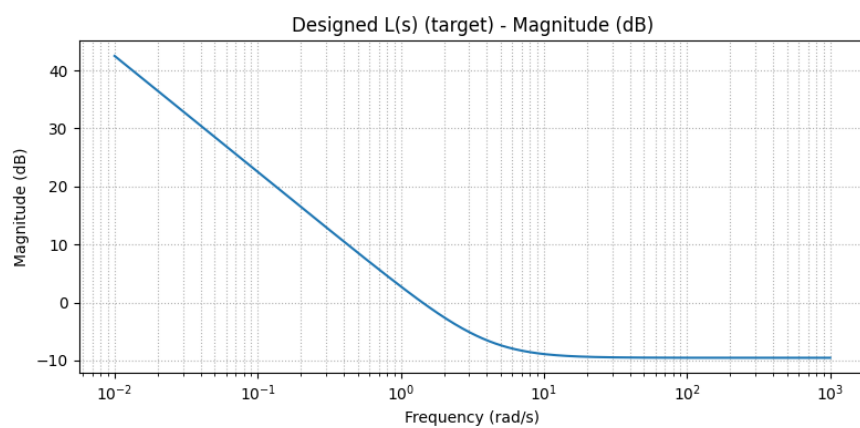
نتایج



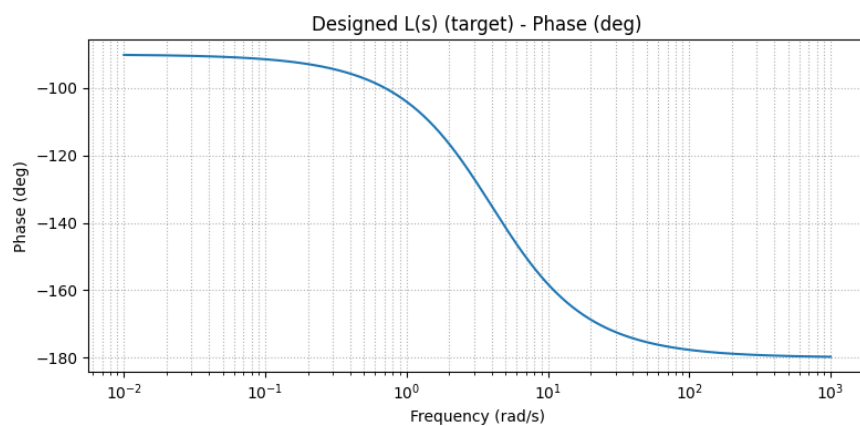
شکل ۱۳: رسم دستی



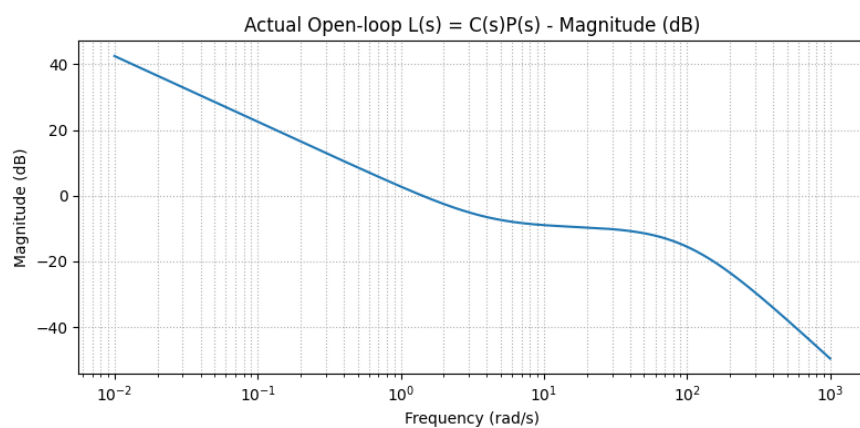
شکل ۱۴: رسم دستی



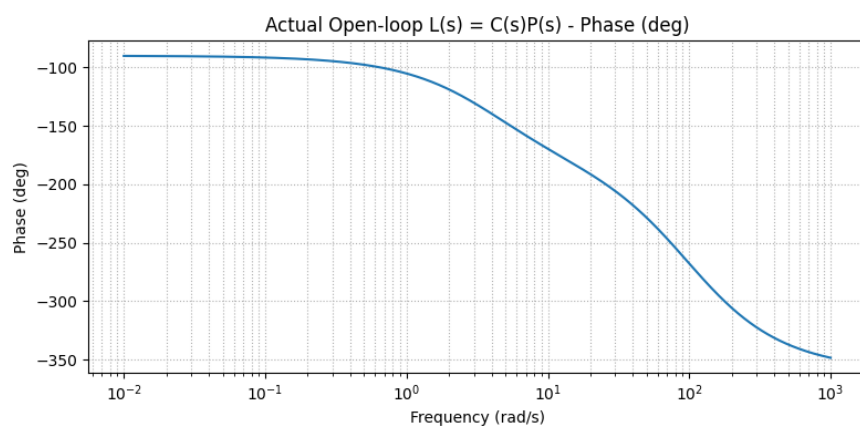
شکل ۱۵: رسم دستی



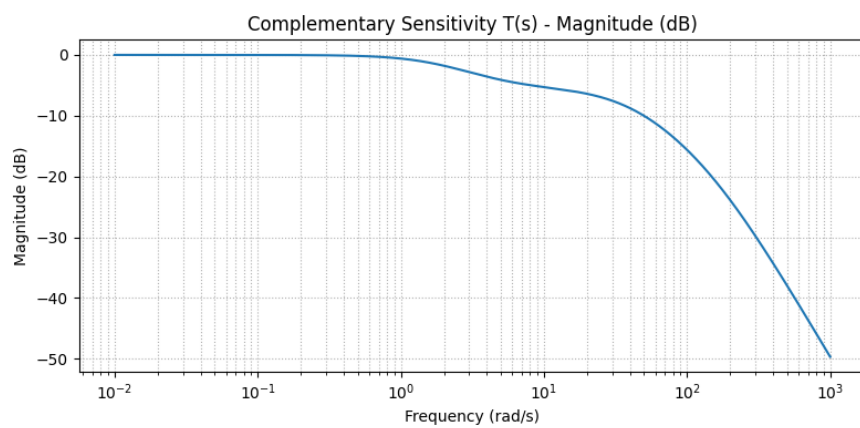
شکل ۱۶: رسم دستی



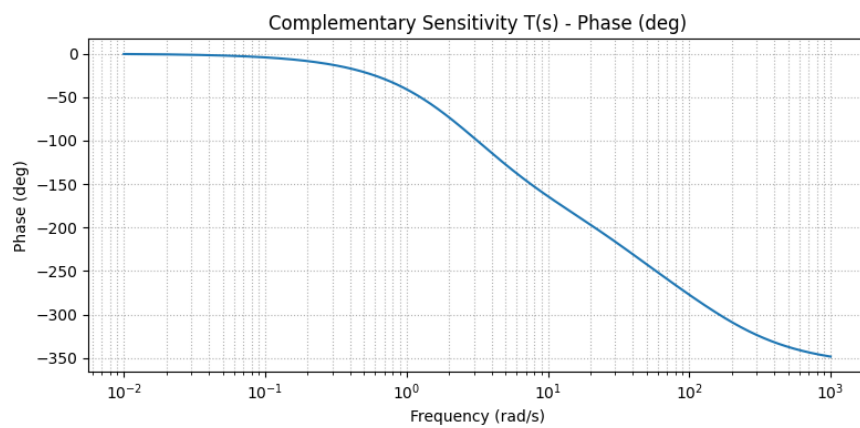
شکل ۱۷: رسم دستی



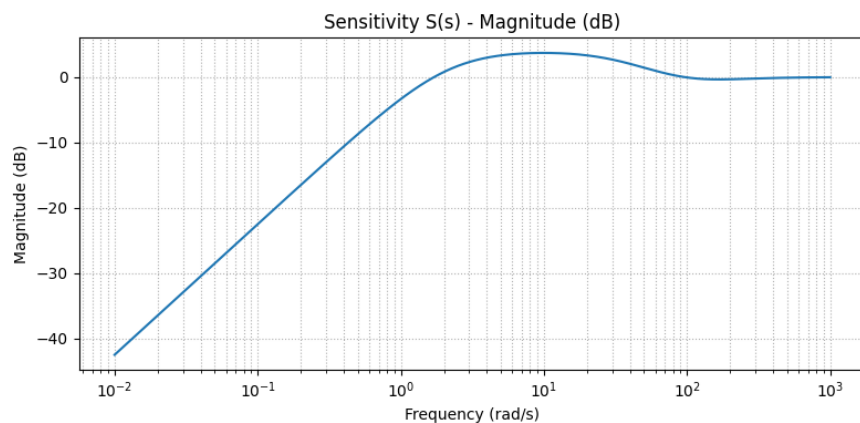
شکل ۱۸: رسم دستی



شکل ۱۹: رسم دستی



شکل ۲۰: رسم دستی



شکل ۲۱: رسم دستی

```

clc; raelc; esolc lla;

%% tnalP P(s)
numP = vnoc([1 -4],[1 5 3]);
denP = vnoc(vnoc(vnoc([1 0],[1 2 6]),[1 -0.5]),[1 6]);
P = tf(numP,denP);

%% derised nepo-pool L(s)
L_des = tf([-1 4],[3 0]);

%% laedI rellortnoc
C_ideal = minreal(L_des / P);

%% reporP rellortnoc
pf = vnoc([1 100],[1 100]);
C = minreal(10000 * C_ideal / tf(1,pf));

%% nep0-pool dna desolc-pool smetsys
L = minreal(C * P);
T = feedback(L,1);
S = feedback(1,L);

%% edoB stolp
erugif; bode(P); dirg on;
erugif; bode(L_des); dirg on;
erugif; bode(L); dirg on;
erugif; bode(T); dirg on;
erugif; bode(S); dirg on;
erugif; bode(C); dirg on;

```

```
%% ytilibatS snigram
erugif; margin(L); dirg on;
[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(L);
```

۳۴

```
%% |T(2j)|
[magT,~] = bode(T,2);
magT = squeeze(magT);
20*log10(magT)
```