دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکدهٔ مهندسی برق - گروه مهندسی کنترل

# کنترل خطی

# پاسخ تمرین ۵

| | |
|---|---|
| نام و نام خانوادگی | محمدامین حری فراهانی |
| شمارهٔ دانشجویی | ۴۰۲۱۶۶۷۳ |
| تاریخ | آذر ۱۴۰۴ |

# فهرست مطالب

۱ سوال ۱ ۳
۱.۱ الف ) کشیدن نمودار بودی . . . . . ۳
۲.۱ رسم با استفاده از متلب . . . . . ۳
۳.۱ ج ) نایکوئیست و بررسی پایداری . . . . . ۴
۲ سوال ۲ ۶
۳ سوال ۳ ۸
۴ سوال ۴ ۱۱
۵ ضمیمه ۱۴

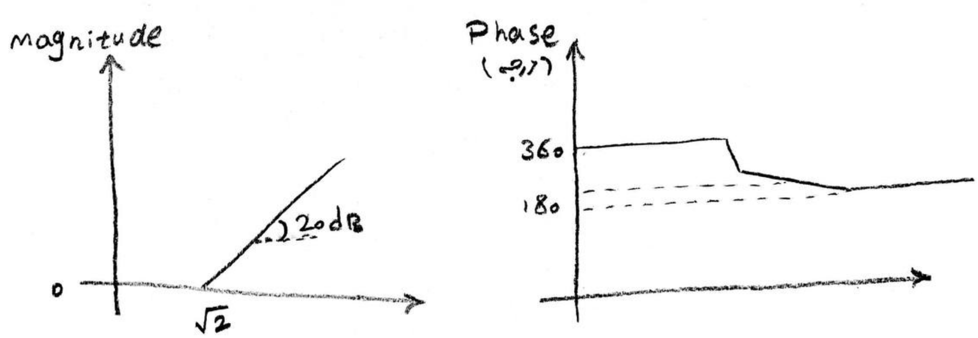
# فهرست تصاویر

۱ رسم دستی . . . . . ۳
۲ Magnitude . . . . . ۳
۳ Phase . . . . . ۴
۴ نمودار نایکوئیست سیستم . . . . . ۵
۵ نمودار نایکوئیست . . . . . ۱۰
۶ نمودار نایکوئیست . . . . . ۱۱
۷ نمودار نایکوئیست . . . . . ۱۲
۸ نمودار نایکوئیست . . . . . ۱۳

# ۱ سوال ۱

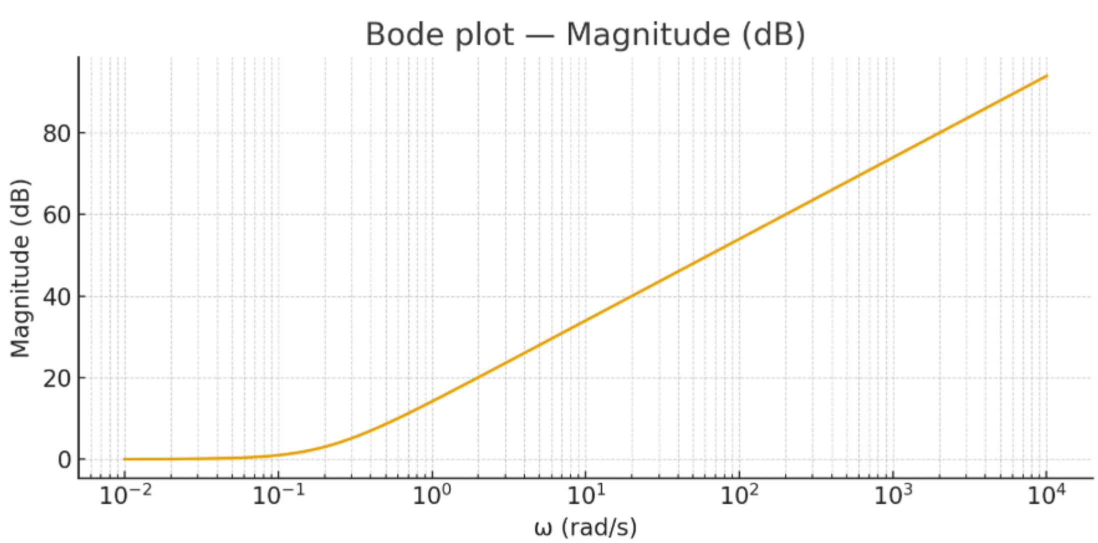
$$G(s) = \frac{(s^2 - 2s + 2)(5s + 1)}{s^2 + 2s + 2} \tag{۱}$$

## ۱.۱ الف ) کشیدن نمودار بودی

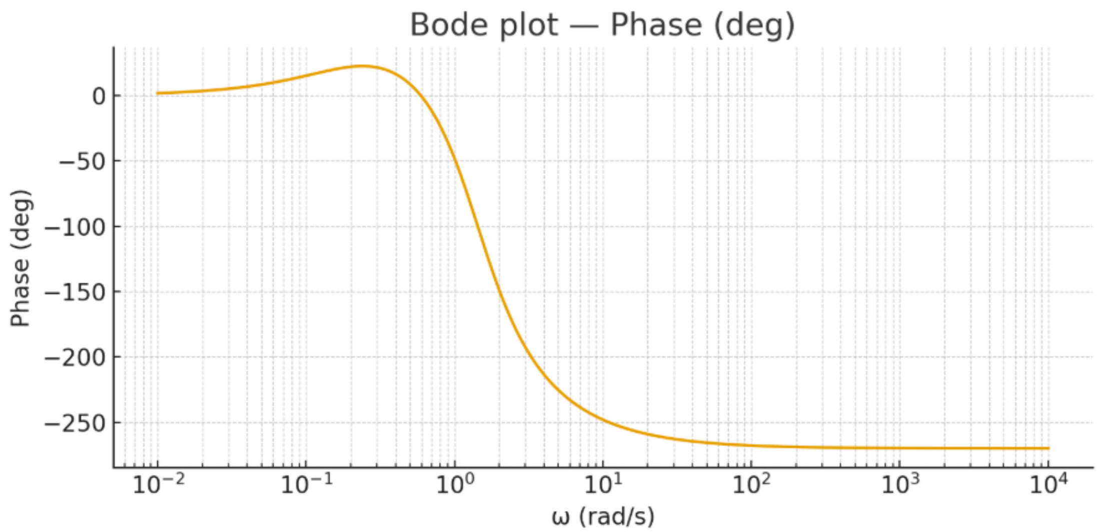



شکل ۱: رسم دستی

## ۲.۱ رسم با استفاده از متلب




شکل ۲: Magnitude




شکل ۳: Phase

مقایسه با رسم دستی نشان داد که شکل‌ها تقریباً مشابه هستند .

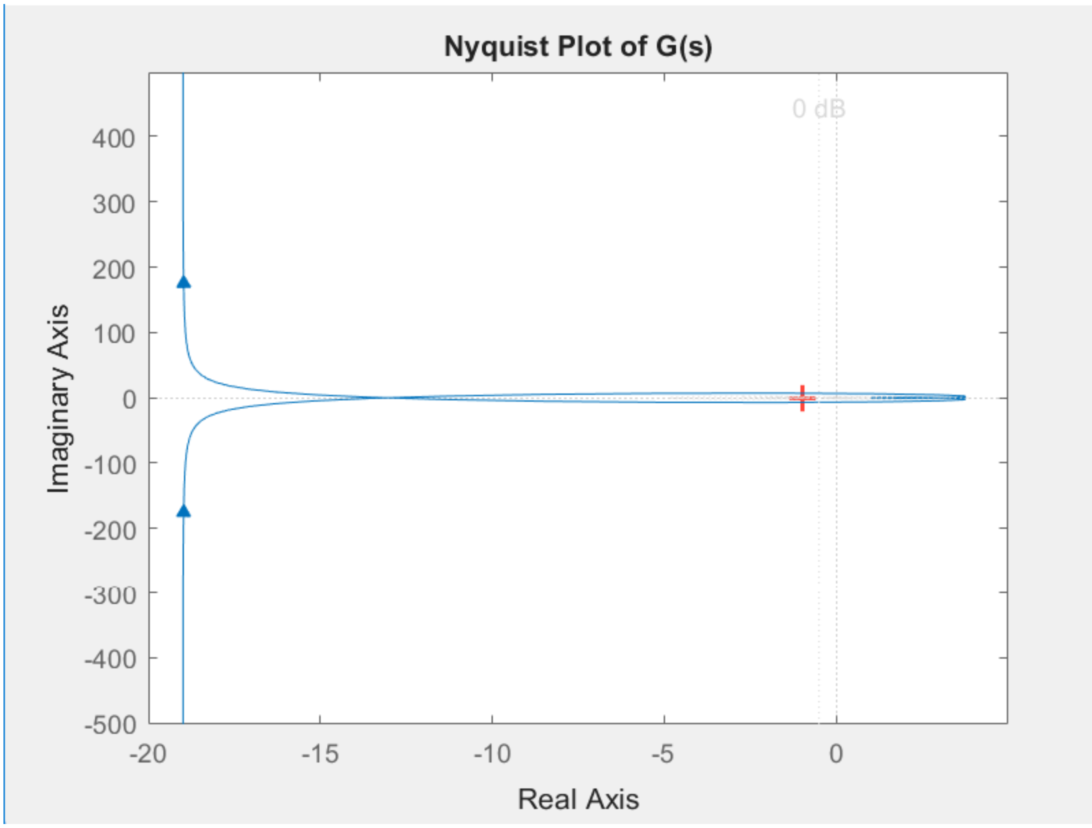
## ۳.۱ ج ) نایکوئیست و بررسی پایداری

کد متلب :

```
%
num = vnoc([1 -2 2], [5 1]); %   : (s2^ - 2s + )25(s + )1
den = [1 2 2];               %   : s2^ + 2s + 2

%
G = tf(num, den);

%
erugif;
nyquist(G);
dirg on;
eltit('tsiuqyN tolP fo G(s)');
```




شکل ۴: نمودار نایکوئیست سیستم

## تحلیل نایکوییست و پایداری سیستم

تابع تبدیل حلقه باز:

$$G(s) = \frac{(s^2 - 2s + 2)(5s + 1)}{s^2 + 2s + 2}$$

### قطب‌ها و صفرها

صورت و مخرج را جدا می‌کنیم:

$$\text{num}(s) = (s^2 - 2s + 2)(5s + 1), \quad \text{den}(s) = s^2 + 2s + 2$$

ریشه‌های مخرج (قطب‌های باز) با حل $s^2 + 2s + 2 = 0$ به‌دست می‌آیند:

$$s = -1 \pm j1 \quad \text{(هر دو در نیم‌صفحهٔ چپ)}$$

ریشه‌های صورت:

$$s^2 - 2s + 2 = 0 \Rightarrow s = 1 \pm j1 \quad \text{(دو صفر در نیم‌صفحهٔ راست)},$$

و همچنین از $5s + 1 = 0$ داریم:

$$s = -0.2 \quad \text{(صفر در نیم‌صفحهٔ چپ)}$$

بنابراین تابع باز $G(s)$ دارای $P = 0$ قطب در نیم‌صفحهٔ راست و ۲ صفر در RHP است (سیستم غیرمینیمم‌فاز).

### تحلیل نایکوییست

برای تعیین نقاط تقاطع نمودار نایکوییست با محور حقیقی، بخش موهومی $Im\{G(j\omega)\} = 0$ قرار داده می‌شود:

$$5\omega^5 - 40\omega^3 + 20\omega = 0$$

حل معادله فوق نتایج زیر را می‌دهد:

$$\omega = 0, \quad \omega = \pm 0.7, \quad \omega = \pm 2.73$$

تابع تبدیل سیستم قطب ناپایدار ندارد، بنابراین:

$$P = 0$$

طبق معیار نایکوییست:

$$Z = N + P$$

که در آن $Z$ تعداد صفرهای حلقه بسته در RHP (داخل منحنی نایکوییست) و $N$ تعداد دورانی‌های نمودار حول نقطه $-1/K$ است.

### نتیجه‌گیری برای بهره‌های مختلف $K$

با توجه به نمودار نایکوییست:

- به ازای $K < 0.36$، نمودار نقطه $-1/K$ را دور نمی‌زند، بنابراین سیستم حلقه بسته پایدار است.
- به ازای $K > 0.36$، نمودار حول نقطه $-1/K$ دوران می‌کند و سیستم وارد ناپایداری می‌شود.

## ۲ سوال ۲

خلاصهٔ مسئله:

یک نمودار Bode داده‌شده است که سه نقطهٔ مشخص روی آن عبارت‌اند از:

- $\omega_1 \approx 0.117\,\mathrm{rad/s},\ M(\omega_1) = 61.4\,\mathrm{dB}$

- $\omega_2 \approx 3.93\,\mathrm{rad/s},\ M(\omega_2) = 1.14\,\mathrm{dB}$
- $\omega_3 \approx 258\,\mathrm{rad/s},\ M(\omega_3) = -70.4\,\mathrm{dB}$

و فاز در نقاط:

$$\angle G(0.108) \approx -2.79^\circ, \quad \angle G(4.43) \approx -89.4^\circ, \quad \angle G(255) \approx -178^\circ.$$

## ۱. نقاط استفاده‌شده و تبدیل دسی‌بل به قدر مطلق

برای تبدیل مقدار دسی‌بل به قدر مطلقِ فرکانسی از رابطهٔ

$$|G(j\omega)| = 10^{M(\omega)/20}$$

استفاده شده است:

$$\begin{aligned}|G(j0.117)| &\approx 10^{61.4/20} \approx 1174.9,\\ |G(j3.93)| &\approx 10^{1.14/20} \approx 1.1403,\\ |G(j258)| &\approx 10^{-70.4/20} \approx 3.0199 \times 10^{-4}.\end{aligned}$$

## آ) وجود صفر و مینیمم‌فاز بودن

- رفتار فاز: فاز از تقریباً $0^\circ$ در فرکانس پایین تا حدود $-180^\circ$ در فرکانس بالا به‌صورت یکنواخت نزول می‌کند؛ این الگو شبیه رفتار دو قطب منفرد در نیم‌صفحهٔ چپ است.
- اگر صفرِ RHP (نیم‌صفحهٔ راست) وجود داشت، معمولاً در فاز افزایشِ مثبت یا تغییر نامعمول مشاهده می‌شد. چنین چیزی در نمودار نیست.
- نتیجه: هیچ نشانهٔ آشکاری از صفر RHP وجود ندارد. سیستم به‌صورت محتاطانه مینیمم‌فاز در نظر گرفته می‌شود.

## ب) خطای حالت ماندگار (با فرض حلقهٔ بسته unity feedback)

ابتدا نوع سیستم (System Type) را تعیین می‌کنیم:

- فاز در فرکانس پایین تقریباً $0^\circ$ است؛ بنابراین هیچ انتگراتور (pole at origin) دیده نمی‌شود $\Rightarrow$ سیستم از نوع Type-۰.

برای سیستم Type-۰ در حلقهٔ بسته unity:

- ثبات موقعیت: $K_p = \lim_{s\to 0} G(s) \approx |G(j0.117)| \approx 1174.9$ (برآورد از مقدار فرکانس پایین)

- خطای پله:

$$e_{ss,\text{step}} = \frac{1}{1+K_p} \approx \frac{1}{1+1174.9} \approx 0.00085 \ (\approx 0.085\%).$$

- خطای شیب (ramp) و سهموی (parabolic) برای Type-۰ نامتناهی است:

$$e_{ss,\text{ramp}} = \infty, \qquad e_{ss,\text{parabolic}} = \infty.$$

## ج) تقریب تابع تبدیل $G(s)$

با توجه به شیب تقریباً $-40\ \text{dB/dec}$ و فازِ نهایی $\approx -180^\circ$، فرض می‌کنیم مدل ساده دو قطب LHP و بدون صفر مؤثر باشد:

$$G(s) \approx \frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)}.$$

از نقطهٔ فرکانس بالا تقریب می‌زنیم که برای $\omega \gg p_i$ داریم $|G(j\omega)| \approx \frac{K}{\omega^2}$. بنابراین با استفاده از نقطه $\omega = 258$:

$$K \approx |G(j258)| \cdot 258^2 \approx 3.02 \times 10^{-4} \cdot 258^2 \approx 20.1.$$

سپس با برازش عددی ساده روی سه نقطهٔ داده‌شده، یک تقریب مناسب برای بازتولید مگنی‌تود به‌دست آمد:

$$\boxed{G(s) \approx \frac{19.3}{(s+0.0518)^2}}.$$

# ۳ سوال ۳

## ۱. قطب‌ها و صفرها

مخرج تابع برابر است با $s(0.1s+1)(0.5s+1)$، لذا قطب‌ها:

$$s = 0, \qquad s = -10, \qquad s = -2.$$

تابع حلقهٔ باز صفر ندارد.

## ۲. معادلهٔ مشخصه (حلقهٔ بسته)

معادلهٔ مشخصه:

$$1 + L(s) = 0 \quad \Longrightarrow \quad s(0.1s+1)(0.5s+1) + 100k = 0.$$

با گسترش:

$$0.05s^3 + 0.6s^2 + s + 100k = 0.$$

ضرب در 20:

$$\boxed{s^3 + 12s^2 + 20s + 2000k = 0.} \qquad (*)$$

## ۳. جدول راث

برای چندجمله‌ای (*) جدول راث ستون اول به صورت زیر است:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 20 \\ s^2 & 12 & 2000k \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & 2000k & - \end{array} \qquad \text{که} \qquad b_1 = \frac{12\cdot 20 - 1\cdot 2000k}{12} = 20 - \frac{500}{3}k.$$

شرط پایداری (همهٔ عناصر ستون اول مثبت) حکم می‌کند:

$$2000k > 0 \Rightarrow k > 0, \qquad b_1 > 0 \Rightarrow k < 0.12.$$

بنابراین:

$$\boxed{0 < k < 0.12 \quad \text{(حلقهٔ بسته پایدار).}}$$

در $k = 0.12$ حالت مرزی (دو ریشه موهومی)، برای $k > 0.12$ ناپایدار.

## ۴. نقطهٔ عبور از محور موهومی (ناکوییست / فاز)

برای $s = j\omega$ زاویهٔ $L(j\omega)$ برابر است با:

$$\angle L(j\omega) = -90^\circ - \arctan(0.1\omega) - \arctan(0.5\omega).$$

شرط فازی برای برخورد با $-1$:

$$-90^\circ - \arctan(0.1\omega) - \arctan(0.5\omega) = -180^\circ$$

یعنی

$$\arctan(0.1\omega) + \arctan(0.5\omega) = 90^\circ.$$

با استفاده از فرمول جمع تانژانت می‌یابیم:

$$1 - 0.05\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{20} \approx 4.4721.$$

اندازهٔ $L(j\omega)$ در این فرکانس:

$$|L(j\omega)| = \frac{100k}{\omega\sqrt{1+(0.1\omega)^2}\sqrt{1+(0.5\omega)^2}}.$$

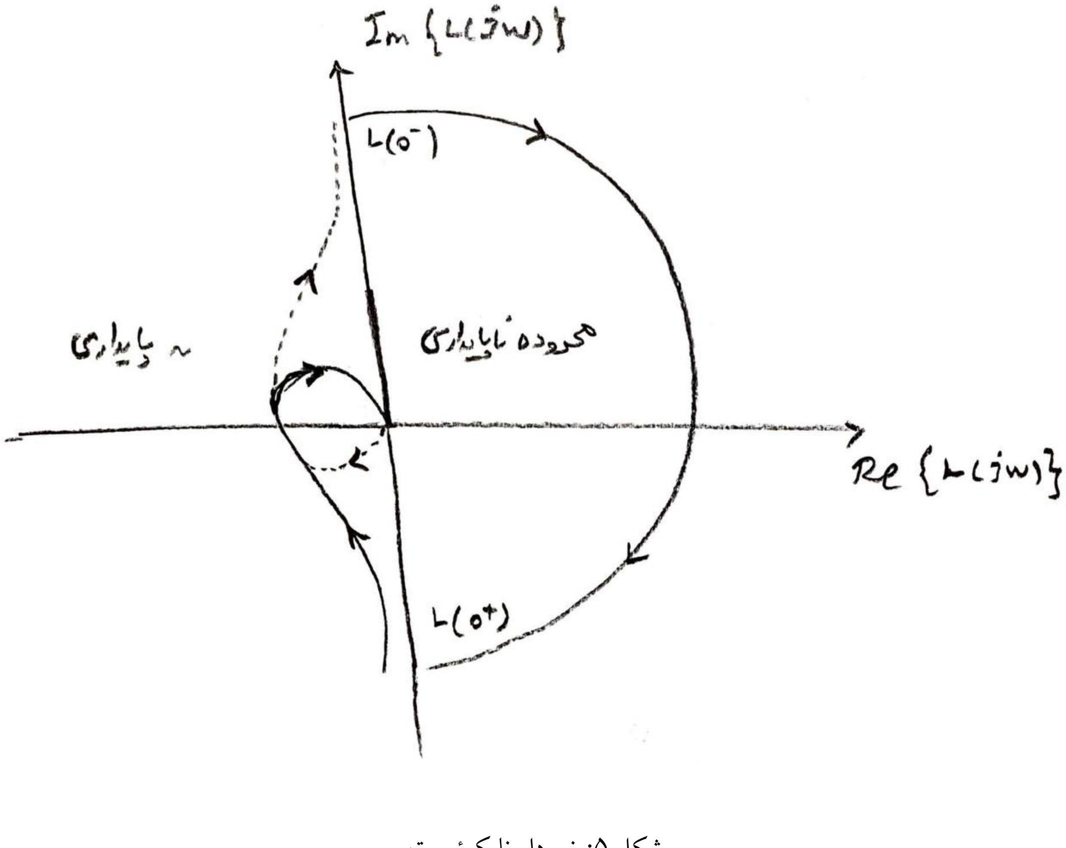
شرط $|L| = 1$ برای برخورد به $-1$ نتیجه می‌دهد:

$$k_{\mathrm{cr}} \approx 0.12.$$

## ۵. نکات روت‌لوکوس

- قطب‌ها: $0, -2, -10$. هیچ صفر باز ندارد.
- مرکز آسمپتوت‌ها: $\sigma_a = (-12)/3 = -4$.
- زوایا: $60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$.
- روت‌لوکوس روی محور حقیقی در $(-\infty, -10)$ و $(-2, 0)$.
- نقطهٔ breakaway در بازهٔ $(-2, 0)$ تقریباً در $s \approx -0.94495$، مقدار متناظر $k \approx 0.0045138$.
- آستانهٔ پایداری: $k = 0.12$ (دو ریشه در $s = \pm j4.472$).

## ۶. رسم نایکوئیست



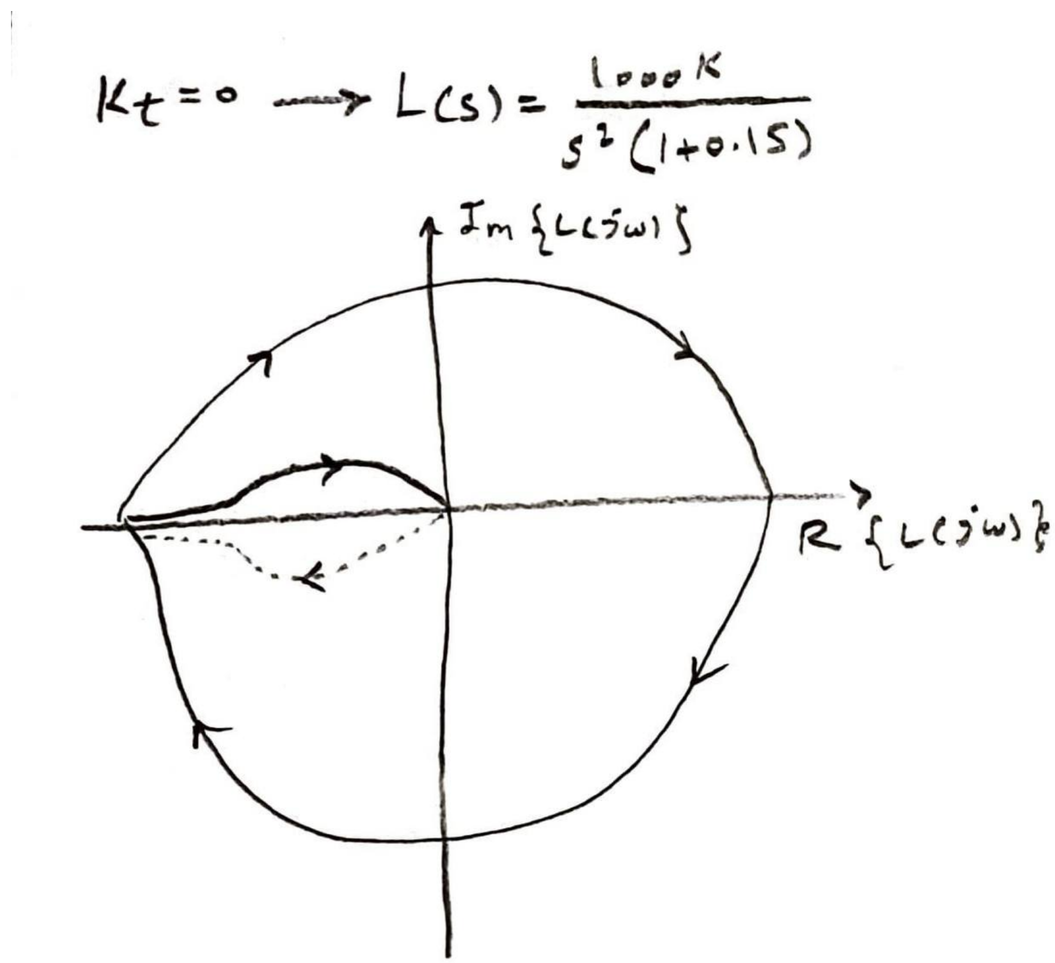

شکل ۵: نمودار نایکوئیست

### ۷. نتیجهٔ

$$\boxed{\text{حلقهٔ بسته پایدار است.} \quad 0 < k < 0.12}$$

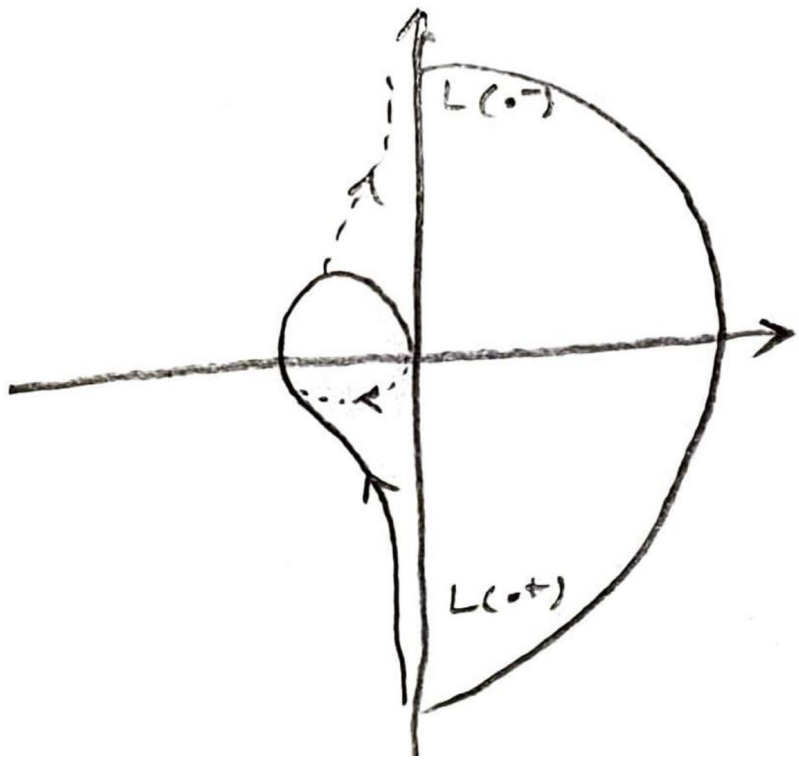
در $k = 0.12$ حالت مرزی با جفت ریشهٔ موهومی در $\pm j4.472$. برای مقدارهای بزرگ‌تر از آن سیستم ناپایدار می‌شود.

## ۴ سوال ۴



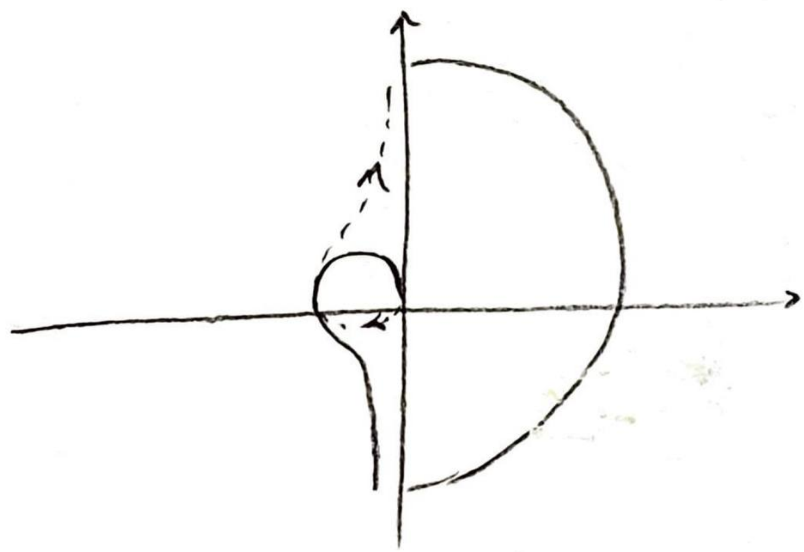

شکل ۶: نمودار نایکوئیست

$$K_t = 0.01 \rightarrow L(s) = \frac{100K}{s(0.01s^2+0.1s+1)}$$




شکل ۷: نمودار نایکوئیست

$$K_t = 0.1 \rightarrow L(s) = \frac{10K}{s(0.005s^2 + 0.01s + 1)}$$



شکل ۸: نمودار نایکوئیست

## ۱. استخراج معادلهٔ مشخصه

اگر $P(s)$ انتقالِ جسم (plant) باشد:

$$P(s) = \frac{10}{1+0.1s} \cdot \frac{1}{0.01s^2} = \frac{1000}{s^2(1+0.1s)}.$$

با نوشتن روابط حلقه (تفاضل‌ها و فیدبک داخلی) معادلهٔ مشخصه به صورت

$$1 + (K + K_t s)\, P(s) = 0$$

به‌دست می‌آید. با ضرب در مخرج این عبارت تبدیل می‌شود به:

$$s^2(1+0.1s) + 1000(K + K_t s) = 0,$$

یا به شکل چندجمله‌ای درجهٔ سه:

$$0.1s^3 + s^2 + 1000K_t s + 1000K = 0.$$

ضرب در 10 برای حذف اعشار:

$$\boxed{s^3 + 10s^2 + 10000K_t s + 10000K = 0.}$$

## ۲. جدول راث

اضلاع: $a_3 = 1,\ a_2 = 10,\ a_1 = 10000K_t,\ a_0 = 10000K$. جدول راث ستون اول:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 10000K_t \\ s^2 & 10 & 10000K \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & 10000K & - \end{array} \qquad b_1 = \frac{10 \cdot 10000K_t - 1 \cdot 10000K}{10} = 10000K_t - 1000K.$$

شرط پایداری: تمامی اعضای ستون اول مثبت، بنابراین:

$$10000K > 0 \Rightarrow K > 0,$$

و

$$10000K_t - 1000K > 0 \Rightarrow 10K_t - K > 0.$$

نتیجهٔ نهایی:

$$\boxed{K > 0 \quad \text{و} \quad K < 10K_t.}$$

## ۳. پاسخ‌های موردی

(الف) $K_t = 0$: آنگاه $K < 0$ از یک سو و $K > 0$ از سوی دیگر مورد نیاز است — تناقض. بنابراین هیچ $K > 0$ای سیستم را پایدار نمی‌کند. ($K = 0$ حالت مرزی است.)

(ب) $K_t = 0.01$: شرط $0 < K < 10K_t$ می‌دهد $0 < K < 0.1$.

(ج) $K_t = 0.1$: شرط $0 < K < 10K_t$ می‌دهد $0 < K < 1$.

(د) اگر $K = 10$ آنگاه شرط $K < 10K_t$ می‌شود $10 < 10K_t$ یا $K_t > 1$. پس برای $K = 10$ باید $K_t > 1$ باشد تا سیستم پایدار شود.

## ۵ ضمیمه

ادرس گیت هاب (GitHub).