

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی برق - گروه مهندسی کنترل

کنترل خطی

پاسخ تمرین ۲

نام و نام خانوادگی	محمد امین حری فراهانی
شماره دانشجویی	۴۰۲۱۶۶۷۳
تاریخ	آبان ۱۴۰۴



فهرست مطالب

۳	۱	قاعده میسون
۳	۱.۱	رسم شماتیک SFG
۴	۲.۱	مراحل استفاده از فرمول میسون
۵	۲	رفع اغتشاش سوال ۲
۵	۱.۲	استفاده از فرمول میسون
۶	۳	نمودار بلوکی
۶	۱.۳	بخش اول
۶	۲.۳	بخش دوم
۷	۳.۳	بخش سوم
۷	۴	بررسی موتور DC
۸	۱.۴	معادلات حاکم بر سیستم
۹	۲.۴	طراحی مدل ماشین DC در سیمولینک متلب
۱۰	۵	ضمیمه



فهرست تصاویر

۳	SFG سوال ۱	۱
۵	SFG سیستم	۲
۶	نمودار بلوکی	۳
۶	نمودار بلوکی	۴
۷	نمودار بلوکی	۵
۷	ماشین DC	۶
۹	Step Response	۷
۹	DC Machine Model	۸
۱۰	فایل متلب داده شده	۱۰
۱۰	ورودی پله به سیستم مدل شده	۹



۱ قاعده میسون

قاعده میسون (Mason's Gain Formula) روشی برای محاسبه تابع انتقال در Signal Flow Graph (نمودار جریان سیگنال) است. این قاعده با در نظر گرفتن تمام مسیرهای پیشرو، حلقه‌ها و حلقه‌های غیرهمبند، مقدار کلی بهره سیستم را بدون نیاز به حل معادلات جبری به دست می‌آورد.

فرمول کلی میسون به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T = \frac{\sum_{k=1}^N P_k \Delta_k}{\Delta} \quad (1)$$

که در آن:

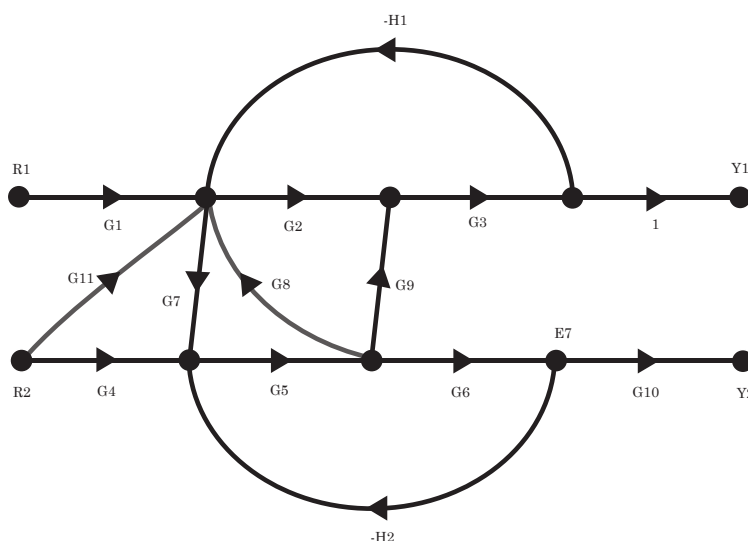
- T : تابع انتقال کل سیستم
- P_k : بهره مسیر پیشرو k ام
- Δ : تعیین کننده کلی سیستم، برابر است با

$$\Delta = 1 - (\text{Sum of individual loop gains}) + (\text{Sum of gain products of two non-touching loops}) - \dots$$

- Δ_k : همان Δ است ولی با حذف حلقه‌هایی که با مسیر پیشرو k ام همبستگی دارند.

۱

۱.۱ رسم شماتیک SFG



شکل ۱: SFG سوال ۱

¹ SFG : Signal Flow Graph



۲.۱ مراحل استفاده از فرمول میسون

در ابتدا تعداد حلقه‌ها و بهره‌های مربوط به آن‌ها را می‌نویسیم:

$$-G_2G_3H_1, \quad -G_5G_6H_2, \quad G_7G_5G_8, \quad -G_7G_5G_9G_3H_1$$

از بین این چهار حلقه موجود در نمودار، فقط دو حلقه $-G_2G_3H_1$ و $-G_5G_6H_2$ دو به دو اشتراکی با یکدیگر ندارند.

همچنین هیچ سه حلقه‌ای وجود ندارد که هیچ‌گونه اشتراکی با هم نداشته باشند.

در این بخش تابع تبدیل ورودی R_2 به خروجی Y_1 را با استفاده از قاعده میسون محاسبه می‌کنیم. برای این منظور ابتدا مسیرهای پیشرو و تعیین‌کننده‌ها (حلقه‌ها) را مشخص می‌کنیم. فرض کنیم حلقه‌ها را به صورت زیر نام‌گذاری کنیم:

$$L_1 = -G_2G_3H_1,$$

$$L_2 = -G_5G_6H_2,$$

$$L_3 = G_7G_5G_8,$$

$$L_4 = -G_7G_5G_9G_3H_1,$$

مسیرهای پیشرو از R_2 به Y_1 را به صورت:

$$P_1 = G_{11}G_2G_3, \quad P_2 = G_4G_5G_9G_3, \quad P_3 = G_{11}G_7G_5G_9G_3, \quad P_4 = G_4G_5G_8G_2G_3$$

است.

با توجه به مسئله: تنها زوج حلقه‌های غیرهم‌اشتراکی، L_1 و L_2 هستند و هیچ مجموعه سه‌تایی غیرهم‌اشتراکی‌ای وجود ندارد. بنابراین تعیین‌کننده کلی Δ برابر است با:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1L_2),$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 - G_7G_5G_8 + G_2G_3H_1 + G_5G_6H_2 + G_7G_5G_9G_3H_2 + G_2G_3G_5G_6H_1H_2$$

جملات حاصل ضرب سه‌تایی یا بیشتر صفرند.

برای هر مسیر پیشرو P_k نیز Δ_k را به صورت Δ اما با حذف حلقه‌هایی که با مسیر P_k اشتراک دارند تعریف می‌کنیم. (در عمل برای هر k باید حلقه‌هایی که با P_k تماسی ندارند برداشته و جمع/حاصل ضرب متناظر محاسبه شود.) در نهایت با قاعده میسون تابع تبدیل مورد نظر خواهد بود:

$$\frac{Y_1}{R_2} = \frac{\sum_{k=1}^4 P_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{(G_{11}G_2G_3)(-G_5G_6H_2) + (G_4G_5G_9G_3)(1) + (G_{11}G_7G_5G_9G_3)(1) + (G_4G_5G_8G_2G_3)(1)}{1 - G_7G_5G_8 + G_2G_3H_1 + G_5G_6H_2 + G_7G_5G_9G_3H_2 + G_2G_3G_5G_6H_1H_2}$$

حال مسیرهای پیشرو از E_7 به E_4 را مشخص می‌کنیم:

$$P_1 = -G_5G_9G_3H_2, \quad P_2 = -G_5G_8G_2G_3H_2,$$

لذا مانند قسمت الف داریم:

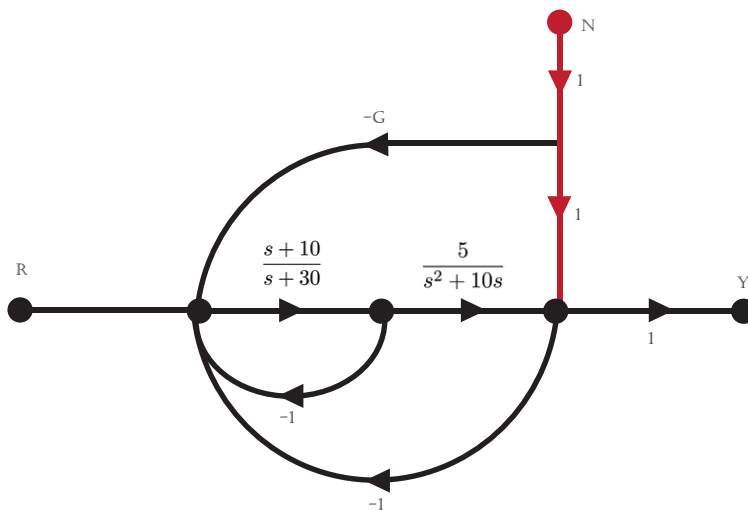


$$\frac{E_4}{E_7} = \frac{\sum_{k=1}^2 P_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{(-G_5 G_9 G_3 H_2)(1) + (-G_5 G_8 G_2 G_3 H_2)(1)}{1 - G_7 G_5 G_8 + G_2 G_3 H_1 + G_5 G_6 H_2 + G_7 G_5 G_9 G_3 H_2 + G_2 G_3 G_5 G_6 H_1 H_2}$$

۲ رفع اغتشاش سوال ۲

۱.۲ استفاده از فرمول میسون

هدف کم کردن یا حذف اثر اغتشاش $N(s)$ روی خروجی $Y(s)$ با کمینه یا صفر کردن تابع انتقال $T_{yn}(s) = \frac{Y(s)}{N(s)}$ است. میتوانیم SFG شکل را رسم نموده و از طریق فرمول میسون $T_{yn}(s) = \frac{Y(s)}{N(s)}$ را بدست آورده:



شکل ۲: SFG سیستم

برای اینکه نویز در خروجی حذف شود باید $T_{yn}(s) = \frac{Y(s)}{N(s)}$ کمینه یا صفر شود لذا نیازی به محاسبه Δ نیست و درواقع باید حاصل ضرب P_k در فرمول میسون برابر صفر شود. مسیره‌های پیشرو از Noise به Y به صورت زیر است:

$$P_1 = 1 \times 1, P_2 = -G \times \frac{s+10}{s+30} \times \frac{5}{s^2+10s}$$

$$P_1 K_1 + P_2 K_2 = 0 = 1 \times \left(1 + \frac{s+10}{s+30}\right) + \left(-G \times \frac{s+10}{s+30} \times \frac{5}{s^2+10s}\right)(1)$$

$$\Rightarrow G = \frac{2s}{5}(s+20)$$



۳ نمودار بلوکی

۱.۳ بخش اول

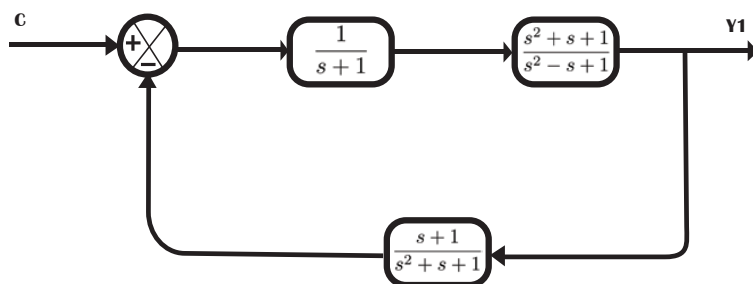
الف) با توجه به شکل ۴ داریم:

$$[-Y_1(\frac{s+1}{s^2+s+1}) + C]G_1 = Y_1$$

$$\Rightarrow \frac{Y_1}{C} = \frac{G_1}{1 + G_1(\frac{s+1}{s^2+s+1})} = \frac{s^2+s+1}{s^3+s+2} \Rightarrow G_1 = \frac{s^2+s+1}{s^3+1}$$

که حالا میتوانیم به دلخواه تابع G_1 را به دو تابع تبدیل جدا از هم تبدیل کنیم:

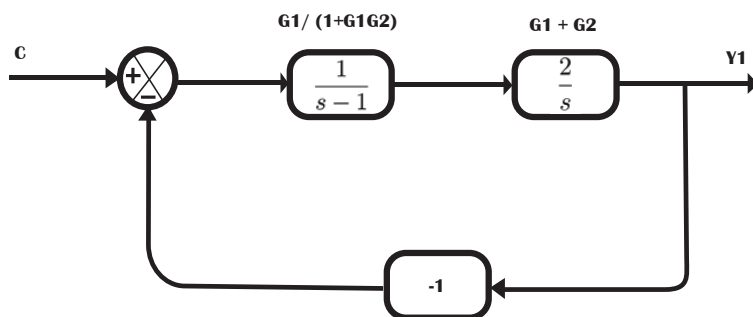
$$G_2 = \frac{1}{s+1}, \quad G_3 = \frac{s^2+s+1}{s^2-s+1}$$



شکل ۳: نمودار بلوکی

۲.۳ بخش دوم

ب) با توجه به قسمت قبلی میتوانیم شکل نمودار را ساده کنیم پس داریم:



شکل ۴: نمودار بلوکی

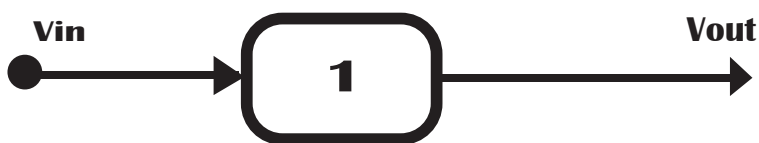
$$\Rightarrow Y_1 = (Y_1.C)(\frac{1}{s-1})(\frac{2}{s})$$



$$\Rightarrow \frac{Y_1}{C} = \frac{2}{s^2 - s - 2}$$

۳.۳ بخش سوم

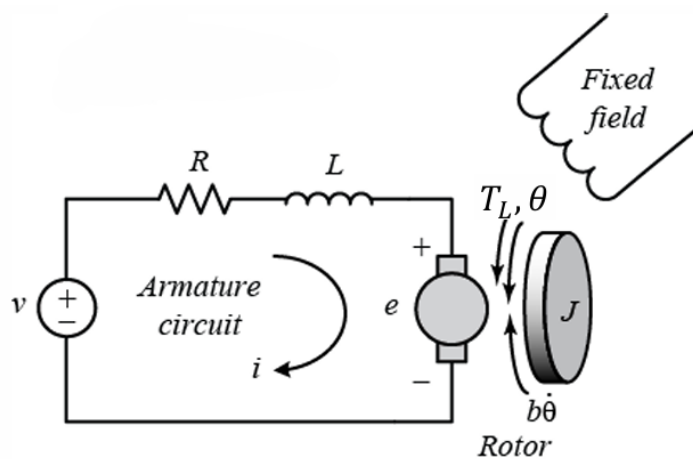
ج) در این قسمت چون ورودی مستقیم به خروجی وصله یعنی سیستم مستقل از عناصره :



شکل ۵: نمودار بلوکی

$$\Rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}} = 1$$

۴ بررسی موتور DC



شکل ۶: ماشین DC



۱.۴ معادلات حاکم بر سیستم

در ابتدا پارامترهایی که در فایل متلب بود رو مورد بررسی قرار میدهیم:

$$J = 0.01 \quad (\text{ممان اینرسی})$$

$$b = 0.1 \quad (\text{ضریب اصطکاک})$$

$$K = 0.01 \quad (\text{ثابت طراحی})$$

$$R = 1 \quad (\text{مقاومت آرمیچر})$$

$$L = 0.5 \quad (\text{اندوکتانس})$$

اکنون معادلات مغناطیسی و الکتریکی حاکم بر سیستم را مینویسیم:

$$\begin{cases} J \frac{d\omega(t)}{dt} + b\omega(t) = K i(t), \\ L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + K \omega(t) = V(t). \end{cases}$$

که با توجه به مقادیر داخل فایل:

$$\begin{cases} 0.01 \frac{d\omega(t)}{dt} + 0.1\omega(t) = 0.01 i(t), \\ 0.5 \frac{di(t)}{dt} + 1 i(t) + 0.01\omega(t) = V(t). \end{cases}$$

حال معادلات را در حوزه لاپلاس میبریم و تابع تبدیل را بدست میاوریم:

$$Js\Omega(s) - J\omega(0) + b\Omega(s) = K I(s),$$

$$Ls I(s) - L i(0) + R I(s) + K \Omega(s) = V(s).$$

$$(Js + b)\Omega(s) = K I(s),$$

$$(Ls + R)I(s) + K \Omega(s) = V(s).$$

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{LJ s^2 + (Lb + RJ)s + (Rb + K^2)}.$$

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{0.01}{0.005 s^2 + 0.06 s + 0.1001} = \frac{100}{50 s^2 + 600 s + 1001}.$$

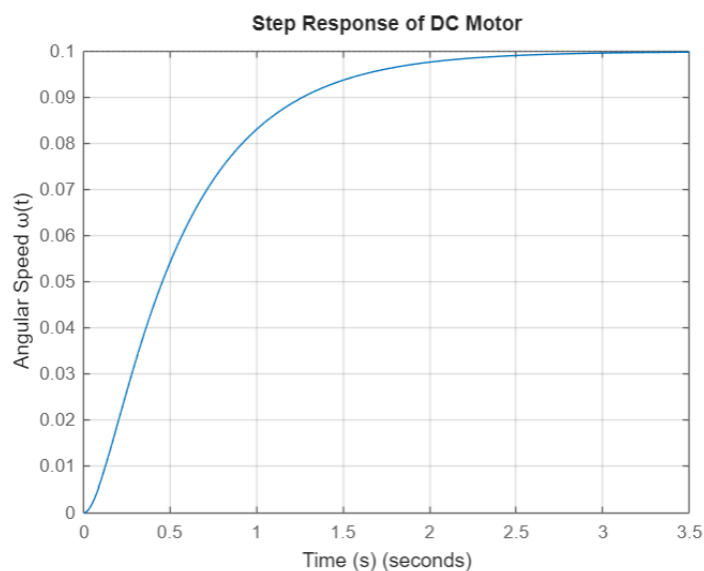
با توجه به تابع تبدیل میتوان مقادیر فرکانس طبیعی نامیرا و نسبت میرایی را حساب کرد:

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{1001}{50}} \approx 4.474, \quad 2\zeta\omega_n = 12, \Rightarrow \zeta \approx 1.34$$

چون $\zeta > 1$ شد، پس می توان فهمید که قطب ها حقیقی هستند و پاسخ پله این سیستم در حالت کلی به صورت زیر است:

$$y(t) = K(1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}))$$

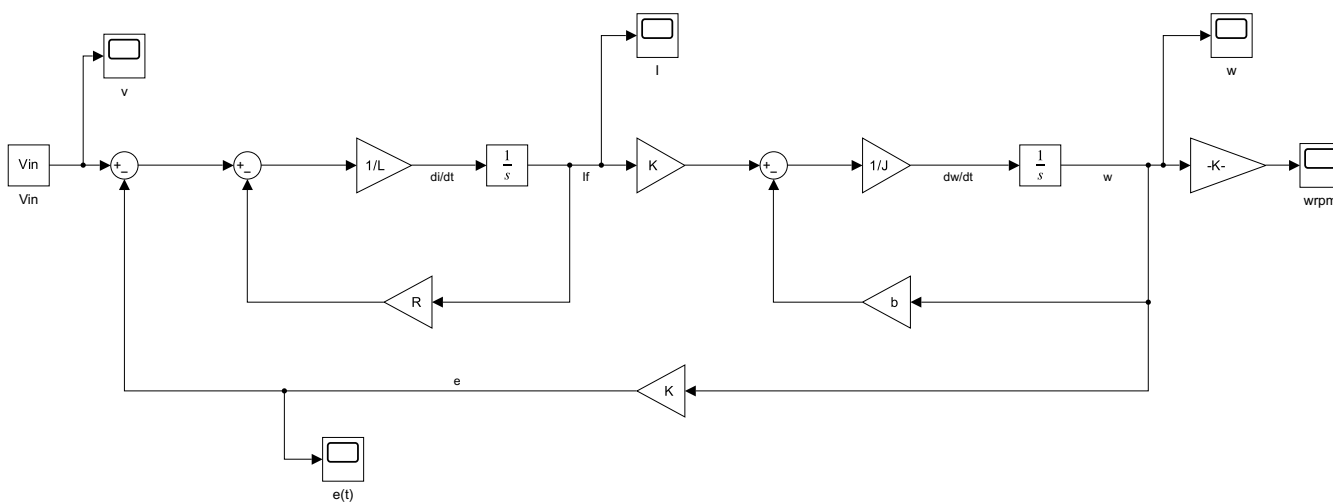
مطابق خروجی متلب در ورودی پله:



شکل ۷: Step Response

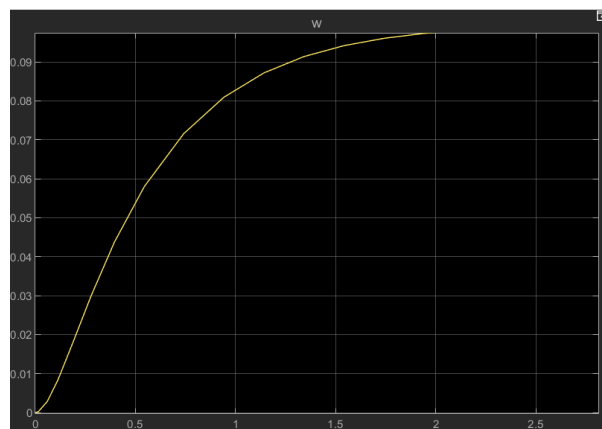
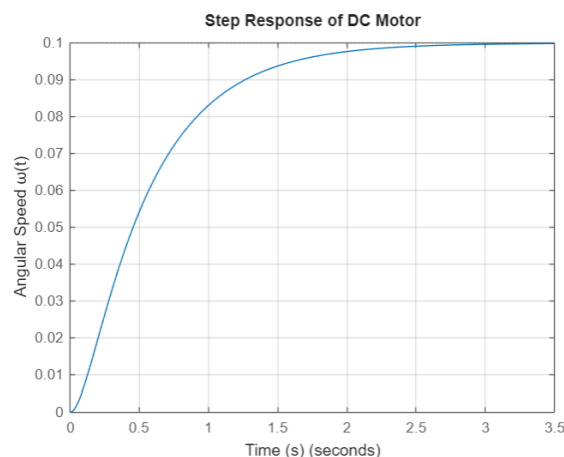
۲.۴ طراحی مدل ماشین DC در سیمولینک متلب

با توجه به معادلات سیستم میتوان چنین سیستمی را برای ماشین DC مدل کرد:



شکل ۸: DC Machine Model

که نیمه اول مدل مربوط به رابطه الکتریکی حاکم بر ماشین DC می شود و بقیه آن مربوط به رابطه مکانیکی و همچنین مشاهده میشود از بلوک های بهره و انتگرال گیر در طراحی استفاده شده است.



شکل ۹: ورودی پله به سیستم مدل شده

شکل ۱۰: فایل متلب داده شده

برای فشرده‌سازی مدل می‌توان بلوک‌ها را به صورت یک Subsystem ایجاد کرد و تنها ورودی‌ها و خروجی‌های اصلی را به آن متصل نمود. در این سیستم، ورودی‌ها شامل $V(t)$ و یا T_l هستند و خروجی‌ها نیز ω و i می‌باشند. همچنین می‌توان بخش‌های الکتریکی یا مکانیکی موتور را به صورت جداگانه در قالب Subsystem قرار داد تا مدار کلی فشرده‌تر و منظم‌تر شود.

۵ ضمیمه

ادرس گیت هاب (GitHub).

مراجع

- [1] S. J. Mason, "Feedback Theory—Further Properties of Signal Flow Graphs," *Proceedings of the I.R.E.*, vol. 44, no. 7, July 1956.
- [2] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5th ed. Prentice Hall, 2010.
- [3] N. S. Nise, *Control Systems Engineering*, 7th ed. Wiley, 2014.
- [4] The MathWorks, "DC Motor Control — MATLAB & Simulink Example," *MathWorks Documentation*. Available: <https://www.mathworks.com/help/control/ug/dc-motor-control.html>
- [5] M. Kuczmanski, "Review of DC Motor Modeling and Linear Control Theory with Laboratory Tests," 2024. (Review article — modeling, identification and control of DC motors.) Available (preprint / repository): https://www.researchgate.net/publication/381246468_Review_of_DC_Motor_Modeling_and_Linear_Control_Theory_with_Laboratory_Tests



-
- [6] R. K. Kraus (or CTMS authors), “DC Motor Speed: System Modeling,” *Control Tutorials for MATLAB and Simulink (CTMS)*, University of Michigan. Available: <https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=MotorSpeed§ion=SystemModeling>
-