

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی  
دانشکده مهندسی برق - کروه مهندسی کنترل

## کنترل خطی

### پاسخ تمرین ۳

نام و نام خانوادگی	محمدامین حری فراهانی
شماره دانشجویی	۴۰۲۱۶۶۷۳
تاریخ	۱۴۰۴ آبان



## فهرست مطالب

۳	۱ سوال
۵	۲ سوال
۵	۱.۲ استفاده از فرمول میسون
۶	۳ سوال
۶	۱.۳ تابع تبدیل حلقه باز و بسته
۶	۲.۳ مدل شبیه سازی شده
۷	۳.۳ پاسخ پله
۱۰	۴ ضمیمه



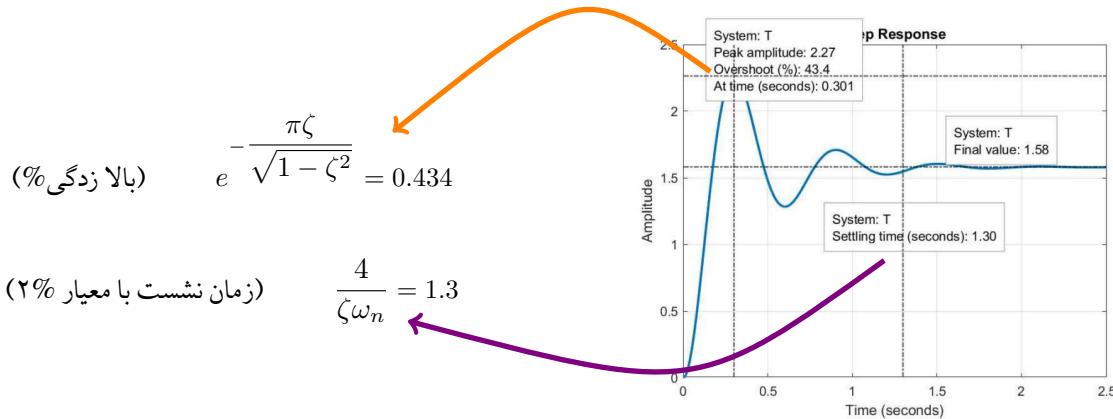
## فهرست تصاویر

۴	.....	خروجی متاب	۱
۶	.....	بلوک دیاگرام سیستم کنترل وضعیت موتور DC	۲
۷	.....	میرایی مرزی	۴
۷	.....	فرامیرایی	۳
۸	.....	ناپایدار	۶
۸	.....	ناپایدار	۵



## ۱ سوال ۱

با توجه به شکل میتوان فهمید که :



خب با توجه به رابطه (۱) و چون تنها  $\zeta$  در آن مجهول است، می‌توان مقدار  $\zeta$  را محاسبه کرد که مقدار تقریبی آن برابر است با :

$$\zeta \approx 0.256$$

حال می‌توانیم مقدار  $\zeta$  را در رابطه (۲) (زمان نشست) قرار دهیم تا  $\omega_n$  بدست آید. با قرار دادن مقدار  $0.256 \approx \zeta$  در رابطه (۲) داریم:

$$\frac{4}{\zeta\omega_n} = 1.3$$

$$\frac{4}{0.256\omega_n} = 1.3$$

$$\omega_n \approx 12.02$$

$$T(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{144.48k}{s^2 + 6.15s + 144.48}$$

حال می‌توانیم  $k$  را از مقدار پیک محاسبه کنیم. اگر  $\zeta$  را در رابطه (۱) قرار دهیم، داریم:

$$1 + e^{-\frac{\pi(0.256)}{\sqrt{1-(0.256)^2}}} \approx 1 + 0.435 = 1.435$$

با توجه به اینکه مقدار پیک در شکل ۲.۲۷ است، مقدار  $k$  برابر است با:

$$k = \frac{2.27}{1.435} \approx 1.58$$



پس در نتیجه  $T(s)$  می‌شود:

$$T(s) = \frac{228.27}{s^2 + 6.15s + 144.48}$$

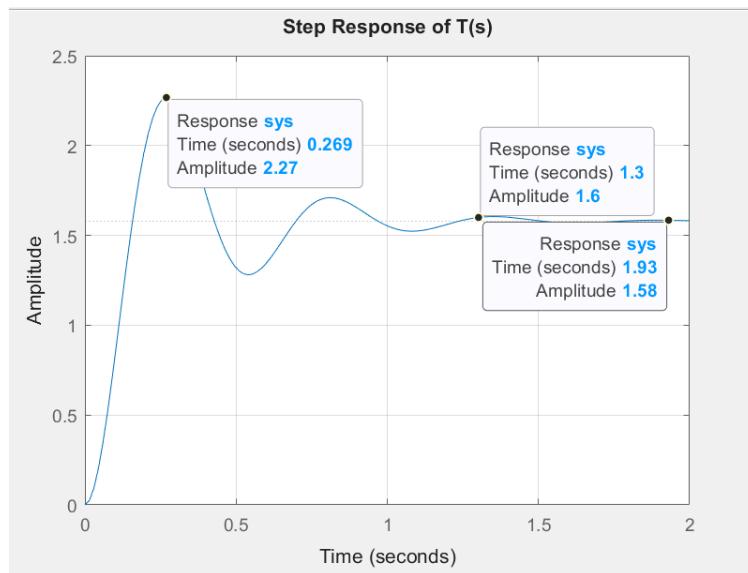
میتوانیم در متلب پاسخ پله این تابع تبدیل را بدست بیاریم و با نتیجه مقایسه کنیم :

کد متلب:

```

1 clc
2 clear
3
4 zeta = 0.256;
5 wn = 12.02;
6 k = 1.58;
7 num = k * wn^2;
8 den = [1 2*zeta*wn wn^2];
9
10 sys = tf(num, den);
11
12 figure;
13 step(sys)
14 grid on
15 title('Step Response of T(s)')

```



شکل ۱: خروجی متلب



حالا می‌توانیم  $G(s)$  را حساب کنیم. داریم:

$$T(s) = \frac{G(s)}{G(s) + 1} \Rightarrow G(s) = \frac{T(s)}{1 - T(s)}$$

$$T(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad H(s) = 1$$

$$G(s) = \frac{T(s)}{1 - T(s)} = \frac{\frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}{1 - \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 - k\omega_n^2}.$$

با جایگذاری مقادیر

$$\zeta = 0.256, \quad \omega_n = 12.02, \quad k = 1.58$$

$$\omega_n^2 = (12.02)^2 = 144.4804, \quad k\omega_n^2 = 1.58 \times 144.4804 = 228.279032,$$

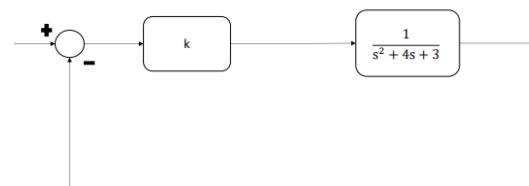
$$2\zeta\omega_n = 2 \times 0.256 \times 12.02 = 6.15424, \quad \omega_n^2 - k\omega_n^2 = 144.4804 - 228.279032 = -83.798632.$$

$$G(s) = \frac{228.279032}{s^2 + 6.15424 s - 83.798632}$$

## ۲ سوال ۲

### ۱.۲ استفاده از فرمول میسون

$$T(s) = \frac{KG(s)}{KG(s) + 1}$$



$$\Rightarrow T(s) = \frac{k}{s^2 + 4s + 3 + k}$$

$$2\zeta\omega_n = 4 \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \omega_n = 2\sqrt{2}$$

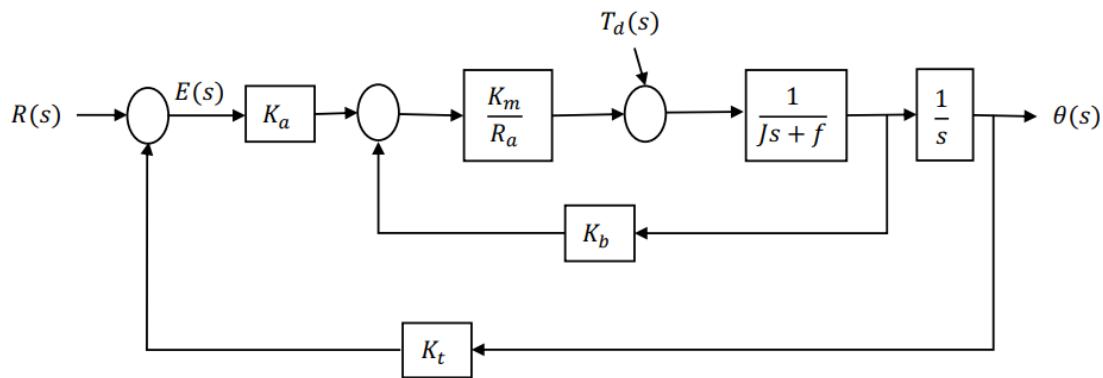


پس باید:

$$(3 + k) = \omega_n^2 = 8$$

$$k = 5$$

### سوال ۳ ۳



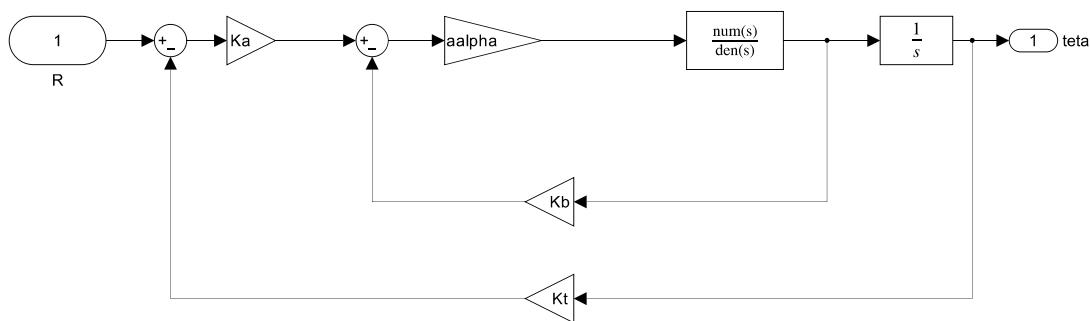
شکل ۲: بلوک دیاگرام سیستم کنترل وضعیت موتور DC

تابع تبدیل حلقه باز و بسته ۱.۳

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} \text{ (حلقه بسته)} = \frac{K_a \frac{K_m}{R_a} \frac{1}{Js+f} \frac{1}{s}}{1 - (\frac{K_m}{R_a} \cdot \frac{-1}{Js+f} \cdot k_b + K_a \cdot \frac{K_m}{R_a} \cdot \frac{-1}{Js+f} \cdot \frac{1}{s} \cdot k_t)} = \frac{0.02}{s^2 + 0.4s + 0.02}$$

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} \text{ (حلقه باز)} = \frac{K_a \frac{K_m}{R_a} \frac{1}{Js+f} \frac{1}{s}}{1 - (\frac{K_m}{R_a} \cdot \frac{-1}{Js+f} \cdot k_b)} = \frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{0.02}{s(s + 0.4)}$$

مدل شبیه سازی شده ۲.۳





The screenshot shows the MATLAB Editor and Command Window. The Editor window contains the script file 'untitledyd.m' with the following code:

```

1 Kt = 0;
2 Kb = 0.5;
3 f = 0.2;
4 J = 1;
5 Ra = 2;
6 Km = 0.8;
7 Ka = 0.05;
8 aalpha = Km / Ra;
9
10
11 modelname = 'untitled';
12
13 open_system(modelname);
14
15
16 [A,B,C,D] = linmod(modelname);
17 sys_lin = ss(A,B,C,D);
18 G_tf_all = tf(sys_lin);
19
20 G11 = G_tf_all(1,1);
21
22 [num, den] = tfdata(G11, 'v');
23
24
25 s = sym('s');
26 G_sym = poly2sym(num, s) / poly2sym(den, s);
27 G_sym = simplify(G_sym);
28
29
30 disp('تابع تبدیل (نمادین):');
31 pretty(G_sym)
32

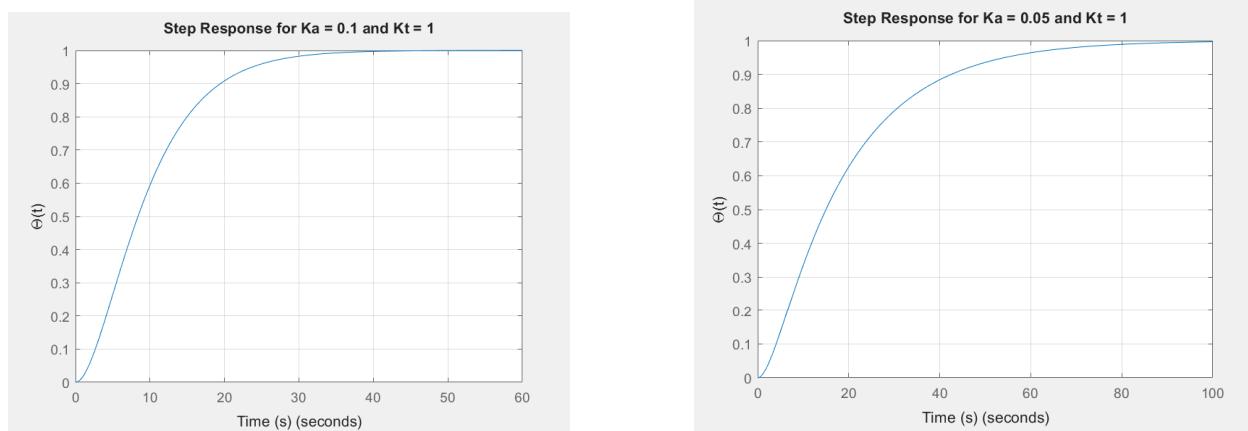
```

The Command Window displays the output of the script, which includes the transfer function and its simplified form. Handwritten annotations in red and blue highlight specific parts of the output:

- A yellow box highlights the transfer function  $\frac{1}{50s + 20s + 1}$  with the text "حله بسته" (closed loop) next to it.
- A blue box highlights the simplified form  $s(5s + 2) / 10$  with the text "حله باز" (open loop) next to it.

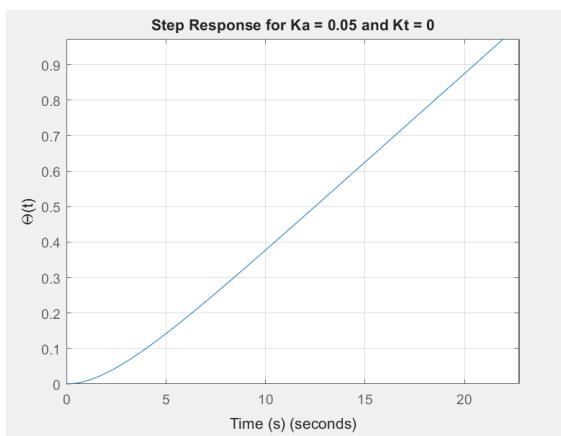
مشاهده میشود که نتایج مطلب با حل دستی یکسان است فقط در مطلب صورت و مخرج هر دو تابع تبدیل در ۵۰ ضرب شده

### پاسخ پله ۳.۳



شکل ۴: میرایی مرزی

شکل ۳: فرامیرایی



شکل ۶: ناپایدار



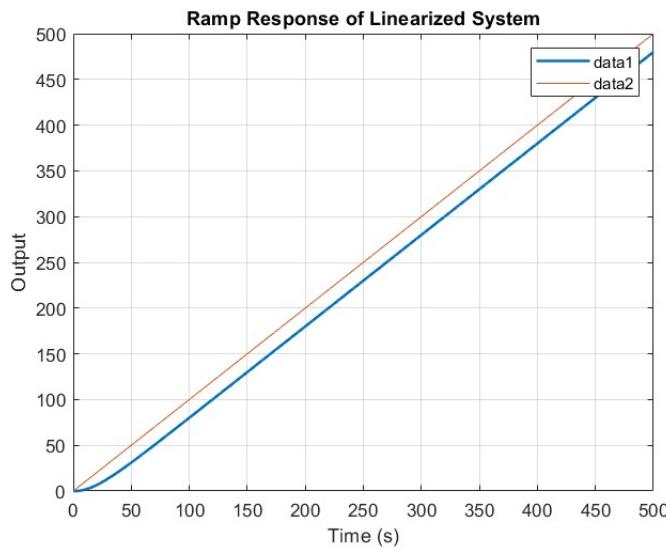
شکل ۵: ناپایدار

(ج)

$$L(s) = \frac{0.02}{s^2 + 0.4s}$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0.02}{s^2 + 0.4s} = \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 20$$

خروجی با تابع شبیه حدود ۲۰ واحد فاصله دارد.



(د)

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

واضح است که مقدار فراجهش تنها به  $\zeta$  وابسته است.

بار دیگر تابع تبدیل کل سیستم را بر حسب پارامتر  $K_a$  مینویسیم.

$$\frac{0.8K_a}{s^2 + 0.4s + 0.4K_a}$$

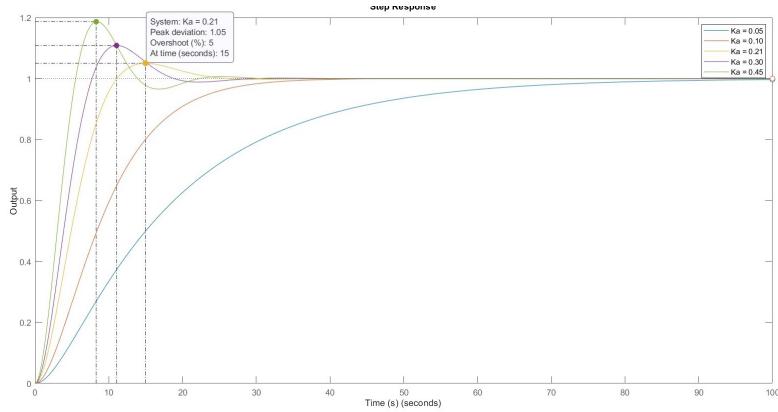
$$\omega_n^2 = 0.4K_a \quad 2\omega_n\zeta = 0.4 \quad \Rightarrow \zeta = \frac{0.2}{\sqrt{0.4K_a}}$$

$$M_p < 5 \quad \rightarrow \quad e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} < 0.05 \quad \rightarrow \quad \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} < \ln 0.05 \quad \Rightarrow \zeta > 0.68$$

$$\Rightarrow \quad \frac{0.2}{\sqrt{0.4K_a}} > 0.68 \Rightarrow K_a < 0.21$$



پاسخ پله را در متلب به ازای مقادیر مختلف  $ka$  مشاهده میکنید.  
همانطور که محاسبه کردیم به ازای  $k_a = 0.21$  بزرگتر از ۵ overshoot درصد خواهد بود.



#### ۴ ضمیمه

ادرس گیت هاب (GitHub).