

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی  
دانشکده مهندسی برق - کروه کنترل و سیستم

## پروژ و ارزشیابی پایانی سیستم های کنترل خطی

اعضاي گروه:

نام و نام خانوادگی شماره دانشجویی

محمدامین حری فراهانی ۴۰۲۱۶۶۷۳

امیرعلی جولایی مقدم ۴۰۲۱۶۴۳۳



## فهرست مطالب

۴	استخراج داده های Simulink و معادله حالت	۱	
۴	.....	۱.۱ استخراج مدل فضای حالت (State-Space) سیستم	
۶	بررسی بلوک های سیستم	۲	
۷	طراحی سیستم در سیمولینک	۳	
۷	.....	۱.۲ نتایج مدل شبیه سازی شده	
۹	استخراج تابع تبدیل	۴	
۹	.....	۱.۴ بررسی معادلات	
۱۰	.....	۲.۴ با استفاده از Simulink	
۱۱	تحلیل حلقه باز	۵	
۱۱	.....	۱.۵ پاسخ پله	
۱۳	.....	۲.۵ پاسخ ضربه	
۱۴	.....	۳.۵ پاسخ شبیب	
۱۵	.....	۴.۵ تحلیل پاسخ ها	
۱۵	.....	۵.۵ ساختار سیستم	
۱۶	تحلیل در حوزه فرکانس	۶	
۱۶	.....	Bode ۱.۶	
۱۷	.....	Nyquist ۲.۶	
۱۸	.....	Chart Nichols ۳.۶	
۱۹	تحلیل بودی و نایکوئیست سیستم	۴.۶	
۱۹	.....	تحلیل پایداری و رفتار غیرخطی ۵۵	۷
۱۹	.....	معیار راث هرویتز ۱.۷	
۲۰	.....	محل قطب ها و صفرها ۲.۷	
۲۰	.....	پایداری BIBO ۳.۷	
۲۱	.....	تحلیل غیرخطی سیستم و شرایط منجر به ناپایداری ۴.۷	
۲۲	طراحی جبران ساز و تنظیم پاسخ نوسانی	۸	
۲۲	.....	۱.۸ مدل دینامیکی و تابع تبدیل	
۲۳	.....	۲.۸ پارامتر های $\zeta$ و $\omega_n$ و فراجهش	
۲۳	.....	۳.۸ کنترل کننده تناسبی (P)	
۲۳	.....	۱.۳.۸ تابع تبدیل حلقه بسته و معادله مشخصه	



۲۴	.....	زمان نشست .....	۲.۳.۸
۲۴	.....	خطای حالت ماندگار .....	۳.۳.۸
۲۴	.....	بررسی شرایط کنترول .....	۴.۳.۸
۲۴	.....	کنترل کننده تابعی-مشتقی (PD) .....	۴.۸
۲۴	.....	معادله مشخصه حلقه بسته .....	۱.۴.۸
۲۶	.....	کنترل کننده تابعی-انتگرالی (PI) .....	۵.۸
۲۶	.....	حلقه باز و معادله مشخصه .....	۱.۵.۸
۲۶	.....	مقایسه با سیستم مرتبه دوم .....	۲.۵.۸
۲۶	.....	انتخاب $\zeta$ و $\omega_n$ مطابق شرایط .....	۳.۵.۸
۲۶	.....	محاسبه ضرایب PI .....	۴.۵.۸
۲۷	.....	کنترل کننده PID .....	۶.۸
۲۷	.....	تعريف .....	۱.۶.۸
۲۷	.....	معادله مشخصه حلقه بسته .....	۲.۶.۸
۲۸	.....	انتخاب $K_d$ .....	۳.۶.۸
۲۸	.....	محاسبه ضرایب PID .....	۴.۶.۸
۳۰		PID تحلیل فرکانسی سیستم با کنترلر	۹
۳۲		(PD / PID) ملاحظات استفاده از کنترل کننده های دارای مشتق گیر	۱۰
۳۳		تحلیل اثر نویز و اغتشاش	۱۱
۳۵	.....	تحلیل سیستم در حضور نویز گاوی و اغتشاش .....	۱.۱۱
۳۵	.....	راهکارهای کاهش اثر اغتشاش .....	۲.۱۱
۳۶		بررسی ثابت زمانی	۱۲
۳۶	.....	ثبت زمانی فیزیکی معادله دینامیکی مخزن .....	۱.۱۲
۳۷		مخزن گیت هاب	۱۳



## فهرست تصاویر

۴	.....	پارامتر های مدل	۱
۶	.....	نتایج معادله حالت خطی و سیستم واقعی به همراه پارامتر ها ماتریس	۲
۷	.....	..... Model	۳
۸	.....	..... $A_{tt} = 99.5$	۵
۸	.....	..... $A_{tt} = 100$	۴
۸	.....	..... $A_{tt} = 20$	۷
۸	.....	..... $A_{tt} = 80$	۶
۹	.....	..... $A_{tt} = 200$	۹
۹	.....	..... $A_{tt} = 150$	۸
۹	.....	..... $A_{tt} = 900$	۱۱
۹	.....	..... $A_{tt} = 500$	۱۰
۱۰	.....	..... SubSystem	۱۲
۱۰	.....	..... TransferFunc	۱۳
۱۲	.....	..... $Area = 100 \& A_{tt} = 99$	۱۴
۱۳	.....	..... ImpulseResponse for Area = 100 & $A_{tt} = 99$	۱۵
۱۴	.....	..... RampResponse for Area = 100 & $A_{tt} = 99$	۱۶
۱۶	.....	..... Bode plot of the system	۱۷
۱۷	.....	..... Nyquist plot of the system	۱۸
۱۸	.....	..... Nichols plot of the system	۱۹
۲۰	.....	..... Pole-Zero Map	۲۰
۲۲	.....	..... ControllerModel	۲۱
۲۷	.....	..... خروجی سیستم	۲۳
۲۷	.....	..... Setting	۲۲
۲۹	.....	..... خروجی سیستم	۲۵
۲۹	.....	..... Setting	۲۴
۳۰	.....	..... Bode	۲۶
۳۰	.....	..... Nyquist	۲۷
۳۳	.....	..... NoiseModel	۲۸
۳۳	.....	..... Output in the presence of Gaussian noise	۲۹
۳۴	.....	..... DisturbanceModel	۳۰
۳۴	.....	..... Output in the presence of disturbance	۳۱



## ۱ استخراج داده های Simulink و معادله حالت

برای پیدا کردن پارامتر های سیستم میتوانیم به بخش Model Properties رفته و از بخش intFcn پارامتر ها را مشاهده کنیم . می توانیم از بخش Variable هم پارامتر ها را همراه با ابعادشان بینیم :

Workspace	
Name	Value
area	100
flushpulse	341x1 double
hilim	10
inflow	10
invalve	341x1 double
lolim	2
outflow	50
Outvalve	341x1 double
setpoint	1x1 double timeseries
tankheight	341x1 double
tout	341x1 double

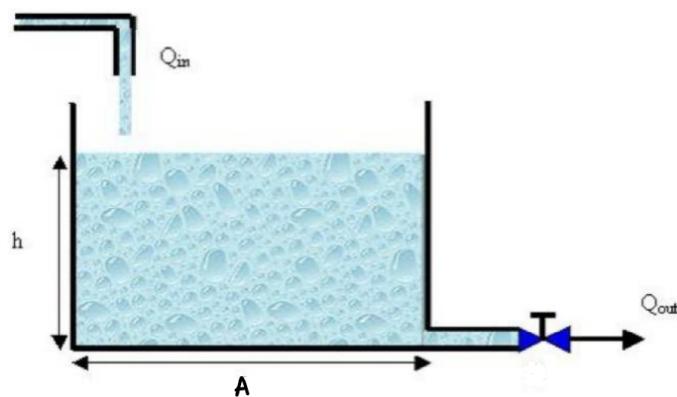
```
>> whos
  Name          Size            Bytes  Class
outvalve      341x1           2728  double
area           1x1              8   double
flushpulse    341x1           2728  double
hilim          1x1              8   double
inflow         1x1              8   double
invalve        341x1           2728  double
lolim          1x1              8   double
outflow        1x1              8   double
setpoint       1x1            3130  timeseries
tankheight     341x1           2728  double
tout           341x1           2728  double
>>
```

شکل ۱: پارامتر های مدل

### ۱.۱ استخراج مدل فضای حالت (State-Space) سیستم

می توان سیستم دینامیکی را به این شکل در نظر گرفت :

Design criteria





$$\dot{h}(t) = \frac{1}{\text{Area}} (q_{in}(t) - q_{out}(t))$$

ارتفاع سطح آب  $h(t)$

دبی شیر ورودی  $q_{in}(t)$

دبی شیر خروجی  $q_{out}(t)$

مساحت سطح مقطع تانک  $\text{Area}$

که دبی شیر ورودی و خروجی در پارامتر ها  $\text{inFlow}$  و  $\text{outFlow}$  اسم گذاری شده است.  
می توان رابطه بین ارتفاع آب و دبی شیر خروجی را بصورت زیر نشان داد :

$$q_{out}(t) = k h(t)$$

پس فرم معادلات حالت به شکل زیر است :

$$\dot{h}(t) = -\frac{k}{\text{Area}} h(t) + \frac{1}{\text{Area}} q_{in}(t)$$

$$y(t) = \beta h(t)$$

ماتریس حالت :

$$A = -\frac{k}{\text{Area}}, \quad B = \frac{1}{\text{Area}}, \quad C = \beta, \quad D = 0$$

در متلب می توان با استفاده از دستور `sys_ss` معادله حالت را پیاده سازی کرد.

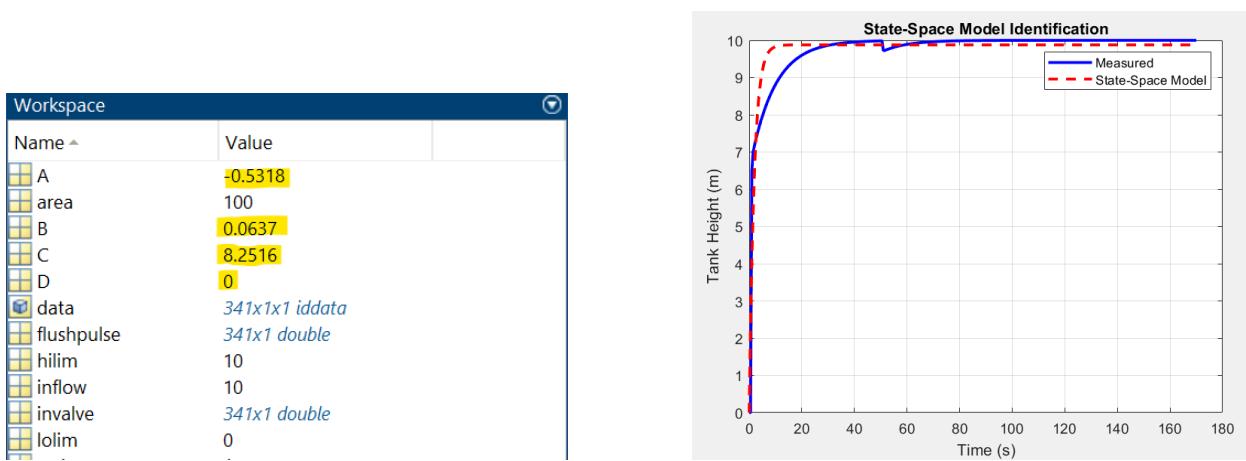
```

1
2 % load('mydata.mat');
3
4 data = iddata(y, u, Ts);
5
6 sys_ss = sssest(data, order);
7 %% -----
8 A = sys_ss.A
9 B = sys_ss.B
10 C = sys_ss.C
11 D = sys_ss.D

```

Code 1: State-Space

فایل mydata.mat در فolder MATLAB پروژه قابل مشاهده است



شکل ۲: نتایج معادله حالت خطی و سیستم واقعی به همراه پارامتر ها ماتریس

## ۲ بررسی بلوک های سیستم

- **شیر ورودی (In Valve):** با استفاده از فیدبک ارتفاع فعلی مخزن و مقایسه آن با مقدار مرجع (hilim)، میزان بازشدگی شیر ورودی تنظیم می شود. هرچه سطح آب پایین تر باشد، شیر ورودی بازتر شده و دبی ورودی افزایش می یابد.
- **شیر خروجی (Out Valve) :** این بلوک دارای منطق رویدادی است و با شدن سیگنال پالسی Flush، در صورتی که ارتفاع آب بالاتر از حد پایین مجاز (lolim) باشد، فرآیند تخلیه آغاز می شود. تخلیه تا رسیدن سطح آب به حد پایین ادامه می یابد.
- **دینامیک مخزن (Tank Dynamics) :** این بلوک رفتار فیزیکی مخزن را مدل می کند. اختلاف دبی ورودی و خروجی انگرال گیری شده و با تقسیم حجم بر مساحت مقطع مخزن، ارتفاع آب محاسبه می شود. همچنین یک تأخیر زمانی برابر با ۰.۵ s برای مدل سازی تأخیر اندازه گیری در نظر گرفته شده است.
- **انیمیشن (Animation) :** صرفاً جهت نمایش گرافیکی سطح آب مخزن استفاده می شود و نقشی در کنترل یا دینامیک سیستم ندارد.

### ورودی ها، خروجی ها و فیدبک

- خروجی اصلی سیستم: ارتفاع آب مخزن (Tank Height)
- ورودی های مؤثر: دبی ورودی (Tank inflow) و دبی خروجی (Tank outflow)
- نوع فیدبک: فیدبک منفی، به طوری که ارتفاع مخزن به بلوک های شیر ورودی و خروجی بازگردانده می شود.

### فرآیند پر و خالی شدن مخزن

عملکرد سیستم به صورت چرخه ای انجام می شود:

- زمانی که سطح آب کمتر از مقدار مرجع باشد، شیر ورودی باز شده و مخزن شروع به پر شدن می کند.



- با نزدیک شدن سطح آب به مقدار مرجع، بازشدگی شیر ورودی کاهش می‌یابد.
- با فعال شدن سیگنال Flush، شیر خروجی باز شده و مخزن تخلیه می‌شود.
- پس از رسیدن سطح آب به حد پایین مجاز، تخلیه متوقف شده و چرخه پر شدن مجدداً آغاز می‌گردد.

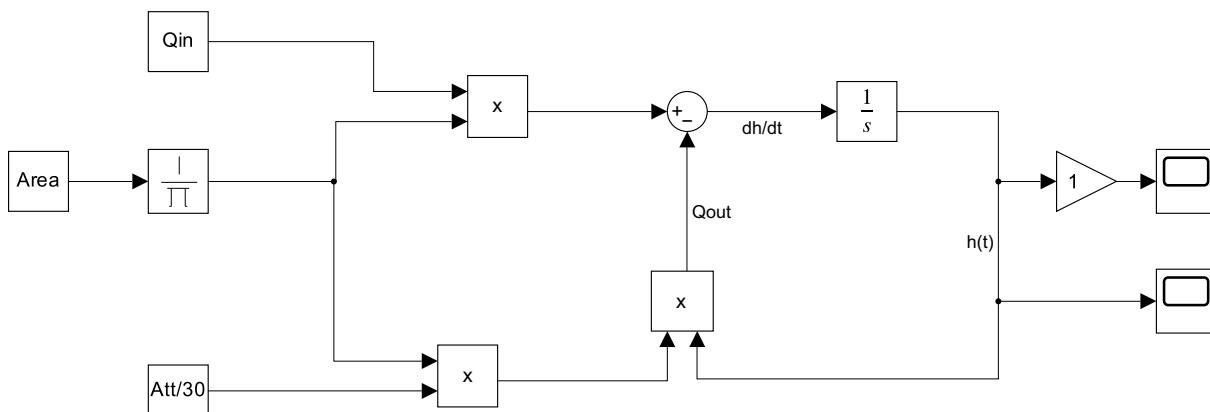
در نتیجه، سیستم به صورت خودکار و پایدار بین دو حالت پر شدن و تخلیه عمل کرده و از سرریز یا خالی شدن کامل مخزن جلوگیری می‌کند.

### ۳ طراحی سیستم در سیمولینک

با بررسی معادلات حاکم بر سیستم، می‌توان معادله دینامیکی آن را اندکی اصلاح کرده و پارامتری تحت عنوان درصد بازشدگی شیر خروجی را وارد مدل نمود که در فرآیند طراحی با نماد  $A_{tt}$  نمایش داده می‌شود:

$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{1}{Area}Q_{in}(t) - \frac{A_{tt}}{Area} h(t)$$

مدل طراحی شده به شکل زیر است :

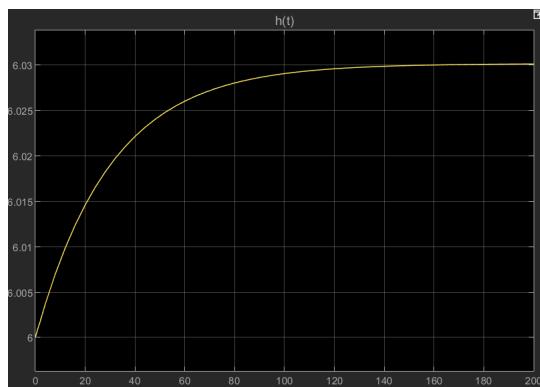


شکل ۳: Model

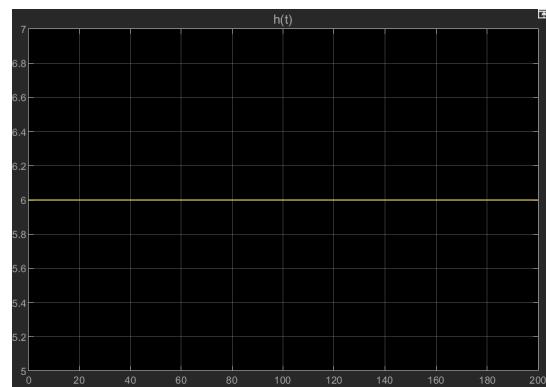
که در این مدل  $Q_{in}$  دبی شیر ورودی،  $Area$  مساحت سطح تانک و  $A_{tt}$  درصد بازشدگی شیر خروجی است که اگر مقدار آن برابر با 100 باشد، به این معناست که شیر به طور کامل باز می‌باشد. (میزان مقدار آب اولیه برابر ۶ است)

#### ۱.۳ نتایج مدل شبیه سازی شده

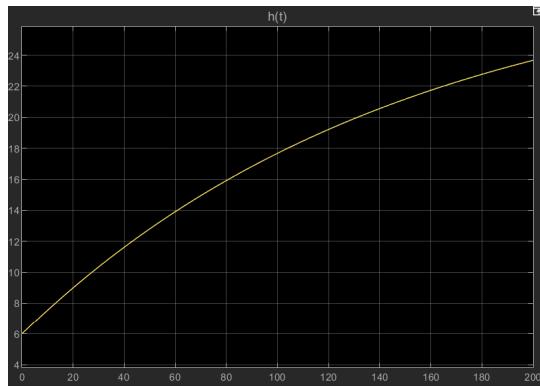
در تمام نمودارها  $Q_{in}$  و  $Area$  به ترتیب ۲۰ و ۱۰۰ فرض شده است.



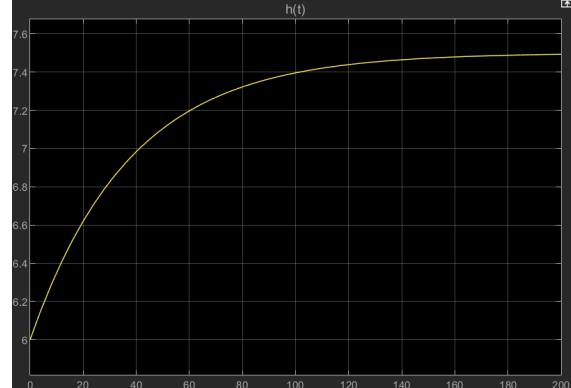
شکل ۵:  $A_{tt} = 99.5$



شکل ۴:  $A_{tt} = 100$

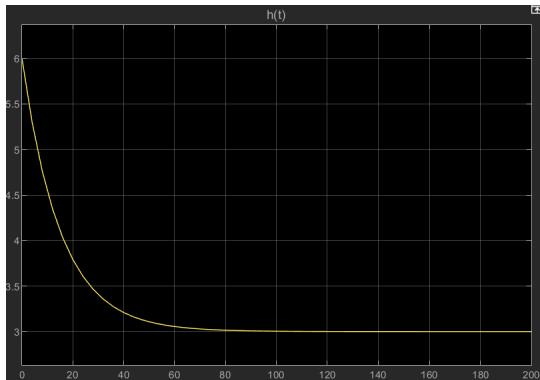
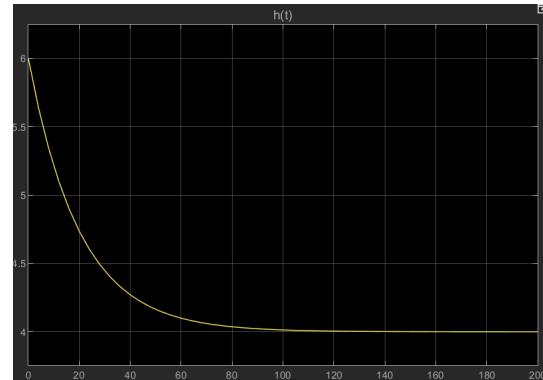
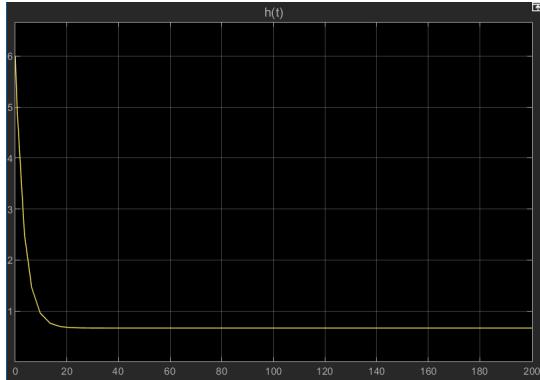
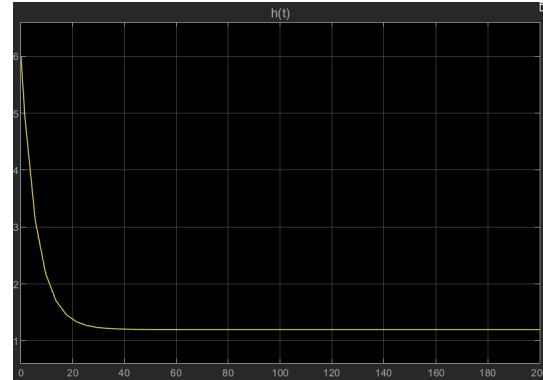


شکل ۷:  $A_{tt} = 20$



شکل ۶:  $A_{tt} = 80$

مشاهده می شود با بسته شدن شیر خروجی ارتفاع آب داخل مخزن به طور صعودی افزایش یافته و کنترلی روی آب مخزن نیست! در حالت  $A_{tt} = 100$  یعنی باز شدن کامل ، چون میزان آب ورودی با میزان آب خروجی برابر است پس عمل تغییر اتفاق نداریم و مقدار آب درون مخزن برابر با مقدار اولیه خواهد شد.

شکل ۹:  $A_{tt} = 200$ شکل ۸:  $A_{tt} = 150$ شکل ۱۱:  $A_{tt} = 900$ شکل ۱۰:  $A_{tt} = 500$ 

مشاهده می شود اگر پارامتر  $A_{tt}$  را بیشتر از  $100$  بگذاریم آب درون مخزن شروع به تخلیه شدن میکند و آب درون مخزن از مقدار اولیه به صفر میل خواهد کرد.

## ۴ استخراج تابع تبدیل

### ۱.۴ بررسی معادلات

با توجه به معادله دینامیکی که برای سیستم نوشتم میتوانیم از رابطه لاپلاس بگیریم و تابع تبدیل را حساب کنیم:

$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{1}{Area} Q_{in}(t) - \frac{A_{tt}}{Area} h(t)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف معادله (با فرض شرایط اولیه صفر):

$$sH(s) = \frac{1}{Area} Q_{in}(s) - \frac{A_{tt}}{Area} H(s)$$

جملات شامل  $H(s)$  را یک طرفه می کنیم:



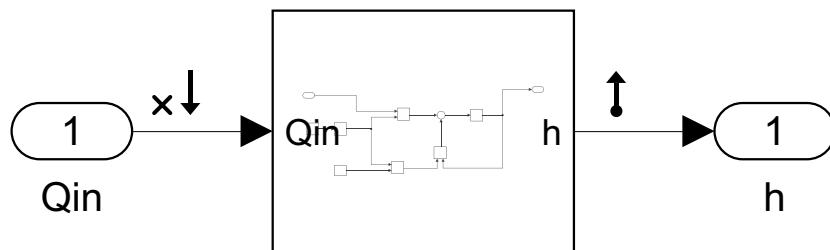
$$\left( s + \frac{A_{tt}}{Area} \right) H(s) = \frac{1}{Area} Q_{in}(s)$$

تابع تبدیل سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_{in}(s)} = \frac{\frac{1}{Area}}{s + \frac{A_{tt}}{Area}}$$

## ۲.۴ با استفاده از Simulink

میتوانیم سیستم را به شکل یک SubSystem طراحی کرده که یک ورودی  $Q_{in}$  و یک خروجی  $h(t)$  دارد :



شکل ۱۲: SubSystem

حال در تپ App سیمولینک میتوانیم Model Linearizer را انتخاب کرده و با دستور `tf` تابع تبدیل سیستم را نمایش دهیم :

```

transfer_func =
From input "MyModel/Qin" to output "Subsystem":
    0.01
    -----
    s + 0.033

Name: Linearization at model initial condition
Continuous-time transfer function.
Model Properties
fx >> |

```

شکل ۱۳: TransferFunc

تابع تبدیل به دست آمده همواره معتبر نیست، زیرا این مدل بر اساس فرض خطی بودن سیستم استخراج شده است. در حالی که در مدل واقعی تانک، دبی خروجی معمولاً رابطه‌ای غیرخطی با ارتفاع سطح آب دارد. بنابراین تابع تبدیل فقط در اطراف یک نقطه کار مشخص



و برای تغییرات کوچک متغیرها معتبر است. همچنین در فرآیند تبدیل لاپلاس، شرایط اولیه صفر و ثابت بودن پارامترهای سیستم فرض شده‌اند. در نتیجه، این تابع تبدیل صرفاً یک تقریب خطی از رفتار واقعی سیستم محسوب می‌شود و برای تحلیل و طراحی کنترل‌کننده در محدوده کاری مشخص قابل استفاده است.

## ۵ تحلیل حلقه باز

### ۱.۵ پاسخ پله

برای ورودی پله واحد:

$$Q_{in}(s) = \frac{1}{s}$$

خروجی سیستم برابر است با:

$$H(s) = \frac{1}{Area} \frac{1}{s(s + \frac{A_{tt}}{Area})}$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس معکوس:

$$h(t) = \frac{1}{A_{tt}} \left( 1 - e^{-\frac{A_{tt}}{Area} t} \right)$$

پارامترهای پاسخ زمانی

• مقدار نهایی

$$h(\infty) = \frac{1}{A_{tt}}$$

• ثابت زمانی:

$$\tau = \frac{Area}{A_{tt}}$$

• زمان صعود (۱۰٪ تا ۹۰٪):

$$t_r \approx 2.2 \tau = 2.2 \frac{Area}{A_{tt}}$$

• زمان نشست (۲٪):

$$t_s \approx 4 \tau = 4 \frac{Area}{A_{tt}}$$

• درصد فراجهش:

$$M_p = 0$$

(چون سیستم مرتبه اول است)

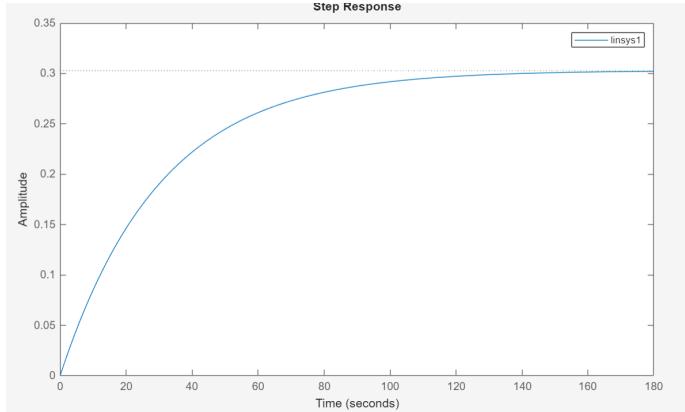
• خطای حالت ماندگار برای پله واحد:

$$e_{ss} = 0$$



## اثر دامنه پله در سیستم غیرخطی

برای پله با دامنه کوچک، پاسخ سیستم غیرخطی تقریباً منطبق با پاسخ نمایی زیر است. اما برای دامنه های بزرگ، به دلیل غیرخطی بودن رابطه دبی خروجی با ارتفاع، ثابت زمانی مؤثر تغییر کرده و پاسخ واقعی از مدل خطی فاصله میگیرد و ممکن است محدودیت های فیزیکی مانند اشباع یا سرریز مخزن ظاهر شوند.



```

info =
struct with fields:
    RiseTime: 66.5760
    TransientTime: 118.5477
    SettlingTime: 118.5477
    SettlingMin: 0.2741
    SettlingMax: 0.3028
    Overshoot: 0
    Undershoot: 0
    Peak: 0.3028
    PeakTime: 221.8855

```

شکل ۱۴ :  $A_{tt} = 99$  &  $Area = 100$

&gt;&gt;

```

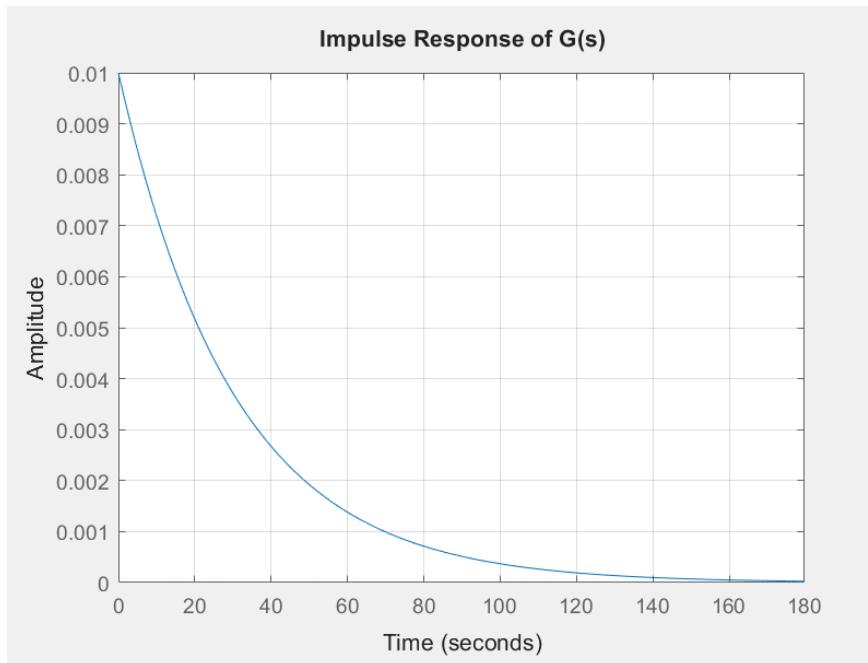
1 num = 0.01;
2 den = [1 0.033];
3
4 G = tf(num, den);
5 % step Response
6 figure;
7 step(G);
8 grid on;
9 title('Step Response of G(s)');
10 xlabel('Time (seconds)');
11 ylabel('Amplitude');
12
13
14 info = stepinfo(G)

```

Code 2: StepResponse



پاسخ ضربه ۲.۵

شکل ۱۵: ImpulseResponse for Area = 100 &  $A_{tt} = 99$ 

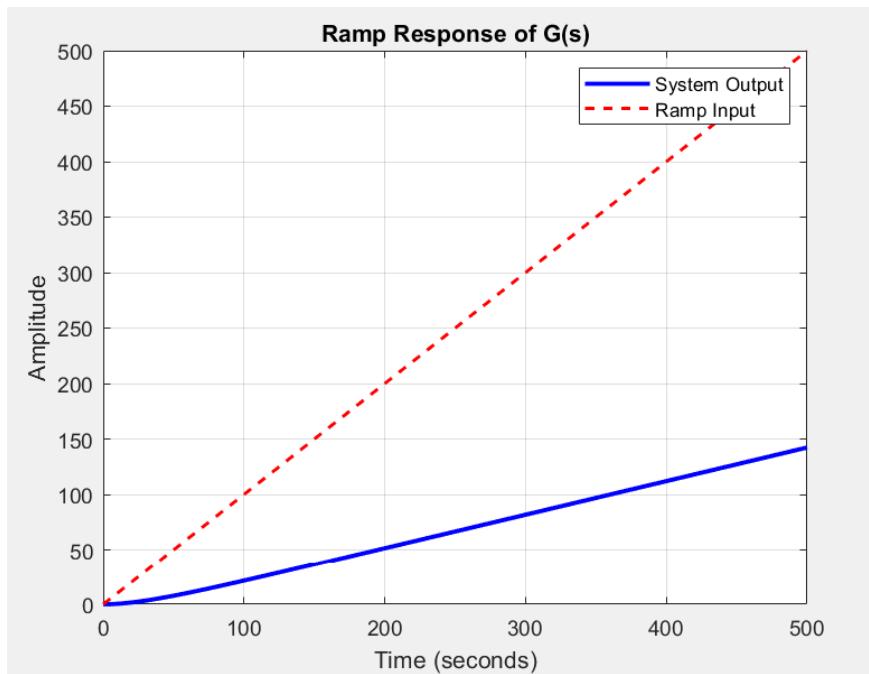
```

1
2 num = 0.01;
3 den = [1 0.033];
4
5 G = tf(num, den);
6
7
8 figure;
9 impulse(G);
10 grid on;
11 title('Impulse Response of G(s)');
12 xlabel('Time');
13 ylabel('Amplitude');
```

Code 3: ImpulseResponse



## ۳.۵ پاسخ شب

شکل ۱۶: RampResponse for Area = 100 &  $A_{tt} = 99$ 

```

1
2 num = 0.01;
3 den = [1 0.033];
4 G = tf(num, den);
5 t = 0:1:500;
6 r = t;
7
8 y = lsim(G, r, t);
9 figure;
10 plot(t, y, 'b', 'LineWidth', 2); hold on;
11 plot(t, r, 'r--', 'LineWidth', 1.5);
12 grid on;
13
14 title('Ramp Response of G(s)');
15 xlabel('Time (seconds)');
16 ylabel('Amplitude');
17 legend('System Output', 'Ramp Input');

```

Code 4: RampResponse

## ۴.۵ تحلیل پاسخ ها

پاسخ ضربه:

$$h_{\text{imp}}(t) = 0.01 e^{-0.033t} u(t),$$

- مقدار اولیه در  $t = 0^+$

$$\int_0^\infty h_{\text{imp}}(t) dt = 0.303 \quad \bullet \text{ مساحت زیر منحنی برابر بهره دیسی:}$$

پاسخ شیب:

- شیب خروجی در بلندمدت به  $0.303 \approx K_{DC}$  می‌رسد.

$$e(t) \approx (1 - K_{DC})t \approx 0.697t \quad \bullet \text{ خطای حالت پایا به صورت خطی رشد می‌کند:}$$

- خروجی نسبت به ورودی شیب عقب می‌ماند به دلیل بهره محدود و دینامیک کند سیستم.

## ۵.۵ ساختار سیستم

$$G(s) = \frac{0.01}{s + 0.033}$$

تعیین تایپ سیستم (System Type)

تایپ سیستم بر اساس تعداد قطب‌های واقع در مبدأ ( $s = 0$ ) مشخص می‌شود. - در این سیستم هیچ قطب در  $s = 0$  وجود ندارد. - بنابراین **System Type = 0**

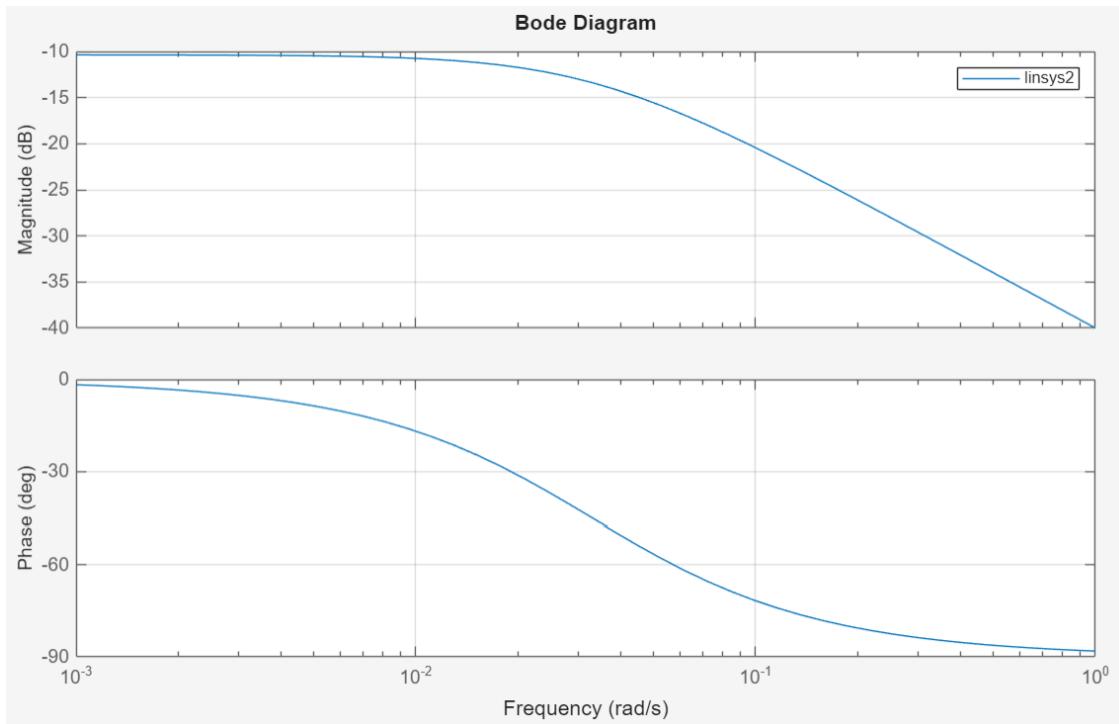
مرتبه کلی سیستم (Order):

مرتبه سیستم برابر تعداد کل قطب‌هاست. - ( $G(s)$  دارای یک قطب در  $s = -0.033$  است مرتبه ۱ (سیستم مرتبه اول پایدار).



## ۶ تحلیل در حوزه فرکانس

Bode ۱.۶



شکل ۱۷: Bode plot of the system

```

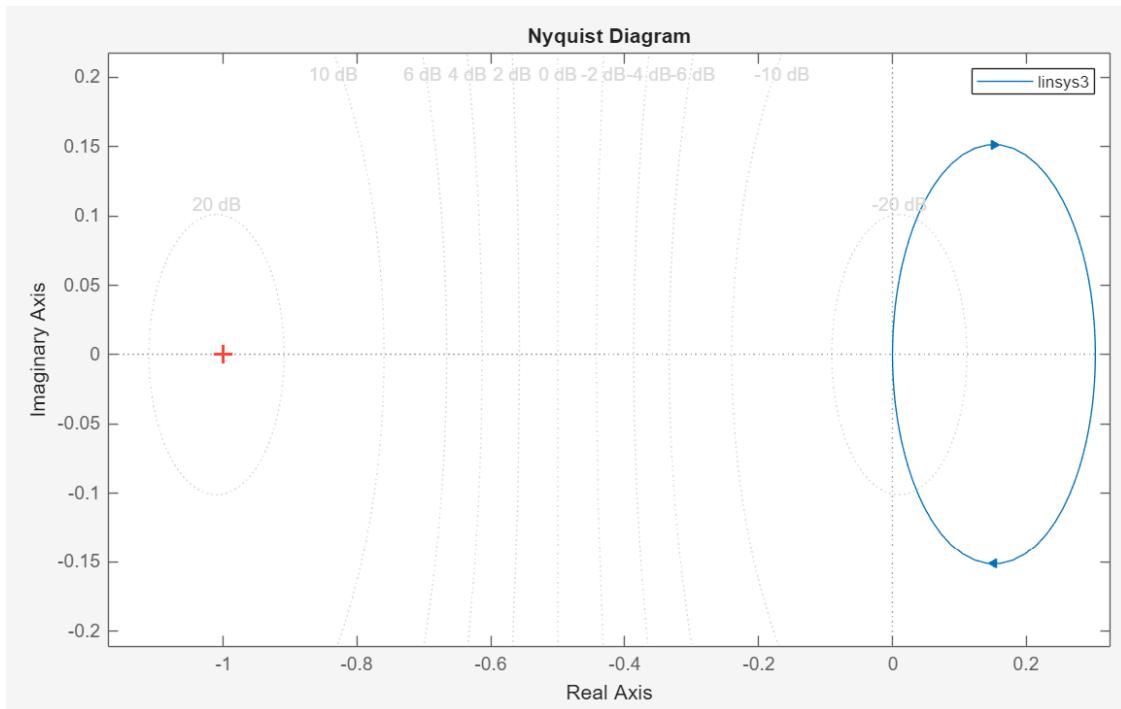
1
2 num = 0.01;
3 den = [1 0.033];
4
5 G = tf(num, den);
6
7 bode(G)
8 grid on

```

Code 5: Bode



## Nyquist ۲.۶



شکل ۱۸ Nyquist plot of the system

```

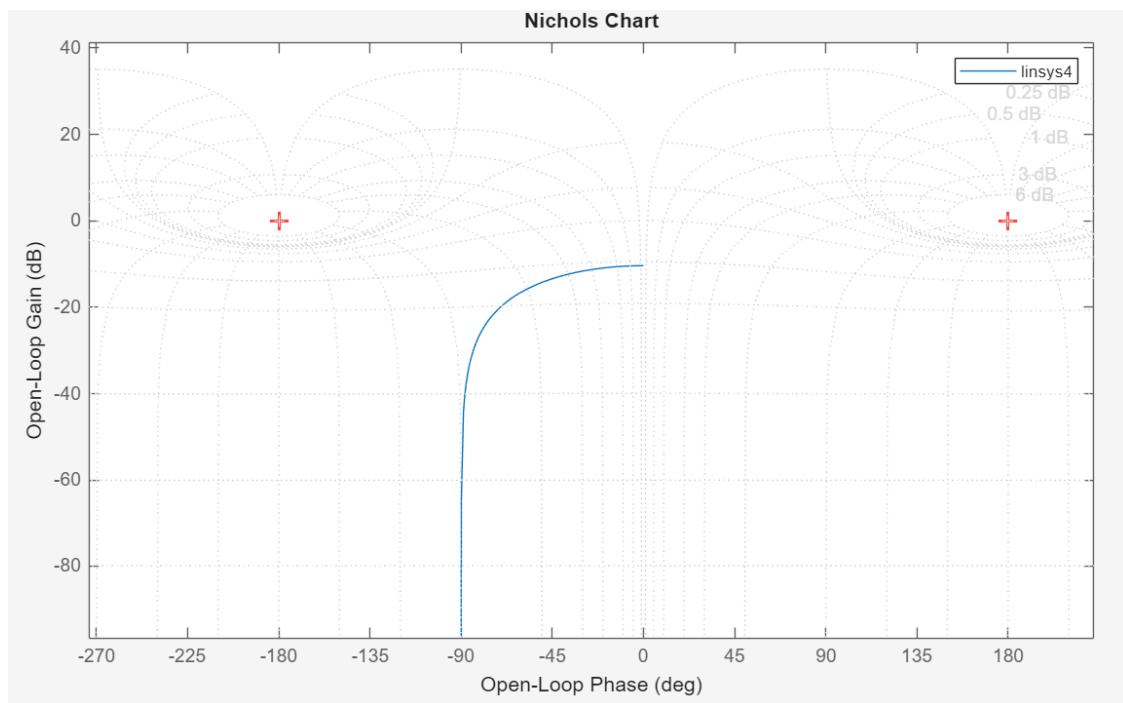
1
2 num = 0.01;
3 den = [1 0.033];
4
5 G = tf(num, den);
6
7 nyquist(G)
8 grid on

```

Code 6: Nyquist



## Chart Nichols ۳.۶



شکل ۱۹: Nichols plot of the system

```

1 num = 0.01;
2 den = [1 0.033];
3 G = tf(num, den);
4
5
6 figure;
7 nichols(G);
8 grid on;
9 title('Nichols Chart of G(s)');

```

Code 7: Nichols



## ۴.۶ تحلیل بودی و نایکوئیست سیستم

$$|G(j\omega)| = \frac{0.01}{\sqrt{\omega^2 + 0.033^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{0.033}\right).$$

نمای پارامتریکی  $G(j\omega)$  را می‌توان به صورت قسمت‌های حقیقی و موهومی نوشت:

$$G(j\omega) = \frac{0.01(0.033 - j\omega)}{\omega^2 + 0.033^2} = \underbrace{\frac{0.01 \cdot 0.033}{\omega^2 + 0.033^2}}_{\Re\{G\}} - j \underbrace{\frac{0.01 \cdot \omega}{\omega^2 + 0.033^2}}_{\Im\{G\}}.$$

تحلیل بودی:

در فرکانس‌های پایین، بهره سیستم برابر بهره DC بوده و مقدار آن کمتر از واحد است؛ بنابراین سیستم خاصیت تقویتی ندارد. با افزایش فرکانس، بهره با شیب  $-20$  دسی‌بل بر دهه کاهش می‌یابد که مشخصه یک سیستم مرتبه‌اول است. فاز سیستم از صفر درجه در فرکانس‌های پایین شروع شده و به تدریج به سمت  $-90$  درجه میل می‌کند. به دلیل کوچک بودن بهره، نمودار بودی هرگز به سطح  $0$  dB نمی‌رسد و در نتیجه فرکانس تقاطع بهره وجود ندارد؛ بنابراین حاشیه فاز عملاً بسیار بزرگ در نظر گرفته می‌شود.

تحلیل نایکوئیست:

نمودار نایکوئیست از یک نقطه مثبت روی محور حقیقی آغاز شده و با افزایش فرکانس به سمت مبدأ همگرا می‌شود، بدون آنکه نقطه  $-1$  را قطع یا احاطه کند. از آنجا که سیستم در حلقه باز هیچ قطب ناپایداری ندارد و مسیر نایکوئیست نقطه  $-1$  را دور نمی‌زند، سیستم حلقه‌بسته با فیدبک واحد پایدار خواهد بود.

## ۷ تحلیل پایداری و رفتار غیرخطی ۵۰

### ۱.۷ معیار راث هرویتز

تابع تبدیل سیستم:

$$G(s) = \frac{0.01}{s + 0.033}$$

برای بررسی پایداری حلقه‌بسته، فیدبک واحد منفی در نظر گرفته می‌شود. معادله مشخصه حلقه‌بسته از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$1 + G(s) = 0$$

در نتیجه:

$$1 + \frac{0.01}{s + 0.033} = 0 \quad \Rightarrow \quad s + 0.033 + 0.01 = 0$$

معادله مشخصه سیستم حلقه‌بسته:

$$s + 0.043 = 0$$

تشکیل جدول راث-هرویتز:

$s^1$	1
$s^0$	0.043



بررسی شرط پایداری:

طبق معیار راث-هرویتز، شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم آن است که تمامی ضرایب ستون اول جدول راث مثبت باشند.

- ضریب سطر  $s^1$ : ۱

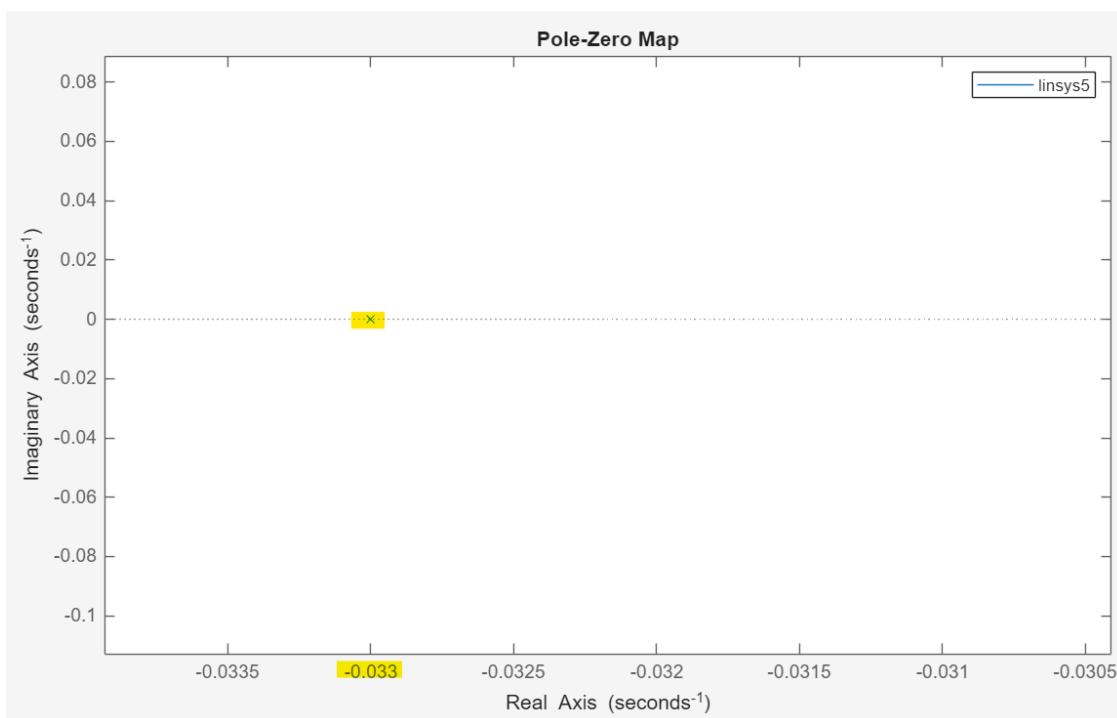
- ضریب سطر  $s^0$ : ۰.۰۴۳

از آنجا که هیچ تغییر علامتی در ستون اول جدول راث وجود ندارد، هیچ ریشه‌ای از معادله مشخصه در نیم صفحه راست صفحه مختلط قرار نمی‌گیرد.

نتیجه‌گیری پایداری:

سیستم حلقه‌بسته فاقد قطب در نیم صفحه راست بوده و تمامی ریشه‌های معادله مشخصه در نیم صفحه چپ قرار دارند. بنابراین، بر اساس معیار راث-هرویتز، سیستم حلقه‌بسته پایدار است.

## ۲.۷ محل قطب‌ها و صفرها



شکل ۲۰ Pole-Zero Map :

## ۳.۷ پایداری BIBO

یک سیستم BIBO Stable است اگر و تنها اگر به ازای هر ورودی کراندار

$$|u(t)| < Q < \infty$$

خروجی سیستم نیز کراندار باقی بماند:

$$|y(t)| < H < \infty$$

در سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) شرط لازم و کافی برای پایداری BIBO آن است که تمام قطب‌های تابع تبدیل در نیم‌صفحه چپ صفحه مختلط قرار داشته باشند.

تابع تبدیل سیستم ( $G(s)$ ) دارای یک قطب در:

$$s = -0.033$$

می‌باشد که در نیم‌صفحه چپ قرار دارد. بنابراین: سیستم از دیدگاه BIBO پایدار است.

عملکرد سیستم در شرایط زیر می‌تواند ناپایدار شود:

- اگر قطب سیستم به نیم‌صفحه راست منتقل شود ( $s > 0$ ), پاسخ ضربه نمایی افزایشی خواهد شد و خروجی به ازای ورودی کراندار نامتناهی می‌شود.
- اگر قطب سیستم دقیقاً روی محور موهومی یا مبدأ ( $s = 0$ ) قرار گیرد، پاسخ ضربه تضعیف نمی‌شود و انتگرال آن همگرا نخواهد بود؛ در این حالت سیستم BIBO ناپایدار است.
- افزایش بیش از حد بهره حلقه (مثلًاً در حضور فیدبک) می‌تواند باعث جابه‌جایی قطب به نیم‌صفحه راست شده و ناپایداری BIBO را ایجاد کند.

#### ۴.۷ تحلیل غیرخطی سیستم و شرایط منجر به ناپایداری

$$G(s) = \frac{0.01}{s + 0.033}$$

نتیجهٔ خطی سازی سیستم غیرخطی تانک آب حول یک نقطهٔ کار مشخص است. این مدل تنها برای تغییرات کوچک اطراف نقطهٔ کار معتبر می‌باشد. در شرایطی که دامنهٔ تغییرات ورودی یا حالت‌ها بزرگ شود، فرض خطی بودن دیگر برقرار نبوده و دینامیک واقعی سیستم می‌تواند به طور قابل توجهی متفاوت باشد.

در مدل غیرخطی، روابطی مانند وابستگی دبی خروجی به شتاب گرانش، ضریب نفوذ و...

$$q_{out}(t) \propto \sqrt{h(t)}$$

وجود دارند که در تابع تبدیل خطی شده حذف یا تقریب زده شده‌اند. در ارتفاع‌های بسیار زیاد، این تقریب خطی باعث خطای مدل شده و ممکن است تحلیل پایداری خطی دیگر معتبر نباشد. در چنین شرایطی، قطب مؤثر سیستم می‌تواند به صورت عملی به محور موهومی نزدیک شده و رفتار ناپایدار یا نوسانی ایجاد کند، هرچند مدل خطی پایدار به نظر برسد.

• اشباع عملگر: شیر ورودی دارای حداقل دبی است. افزایش بیش از حد فرمان کنترلی باعث اشباع شده و کنترل مؤثر از بین می‌رود؛ در نتیجهٔ ممکن است سطح آب به طور کنترل‌نشده افزایش یابد.

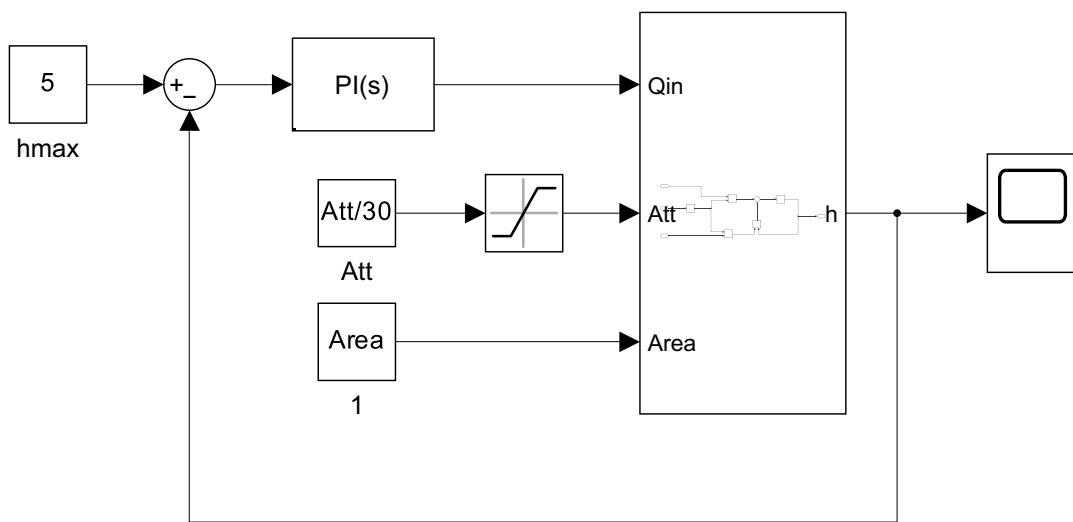
• محدودیت ارتفاع: ارتفاع آب نمی‌تواند منفی باشد و دارای حد بالای فیزیکی (لبریز شدن تانک) است. نزدیک شدن به این حدود باعث تغییر شدید دینامیک و خروج از ناحیهٔ خطی می‌شود.



- وابستگی غیرخطی خروجی: با افزایش ارتفاع آب، دبی خروجی به صورت غیرخطی افزایش می‌یابد. در ارتفاع‌های بالا، تخلیه شدیدتر شده و می‌تواند باعث نوسان سطح آب شود.
- تغییر نقطه کار: هر تغییر قابل توجه در ارتفاع مرجع یا دبی ورودی، نقطه کار سیستم را جابه‌جا می‌کند و مدل خطی قبلی دیگر معتبر نخواهد بود.

## ۸ طراحی جبران‌ساز و تنظیم پاسخ نوسانی

سیستم کنترلی را به شکل زیر طراحی می‌کنیم:



شکل ۲۱: ControllerModel

که در این سیستم دبی ورودی توسط کنترلر طراحی شده تایین می‌شود بطوری که سیستم سعی می‌کند دبی را طوری انتخاب کند (با توجه به ارتفاع فعلی آب و ماکزیمم ارتفاع آب) که همیشه بیشترین سطح آب داخل مخزن باشد

### ۱.۸ مدل دینامیکی و تابع تبدیل

دینامیک سیستم به صورت زیر بود:

$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{1}{Area}Q_{in}(t) - \frac{A_{tt}}{Area}h(t)$$

و تابع تبدیل سیستم:

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_{in}(s)} = \frac{0.01}{s + 0.033}$$

ساختار حلقه‌بسته با فیدبک واحد و منفی:

$$e(t) = r(t) - y(t), \quad r(t) = h(t), \quad u(t) = C(s)e(t)$$



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

شرابط طراحی کنترلر:

• بین 10% تا 20% Overshoot

• زمان نشست (معیار 2%) کمتر از 5 ثانیه

• خطای حالت ماندگار برای ورودی پله

## ۲.۸ پارامتر های $\zeta$ و $\omega_n$ و فراجهش

برای سیستم مرتبه دوم استاندارد:

$$M_p = \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

و زمان نشست (معیار 2%):

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

برای داشتن فراجهش بین 10% تا 20%， میرایی در بازه زیر است:

$$0.45 \lesssim \zeta \lesssim 0.60$$

یک انتخاب مناسب در میانه بازه:

$$\boxed{\zeta = 0.5} \quad \Rightarrow \quad M_p \approx 16\%$$

برای شرط زمان نشست:

$$\frac{4}{\zeta\omega_n} < 5 \Rightarrow \omega_n > \frac{4}{5\zeta}$$

:  $\zeta = 0.5$  با

$$\omega_n > \frac{4}{2.5} = 1.6$$

$$\boxed{\omega_n = 1.6 \text{ rad/s}}$$

## ۳.۸ کنترل کننده تناسبی (P)

$$C(s) = K_p$$

تابع تبدیل حلقه بسته و معادله مشخصه ۱.۳.۸

$$T(s) = \frac{K_p \frac{0.01}{s+0.033}}{1 + K_p \frac{0.01}{s+0.033}} = \frac{0.01K_p}{s + 0.033 + 0.01K_p}$$

معادله مشخصه:

$$s + 0.033 + 0.01K_p = 0 \Rightarrow s_p = -(0.033 + 0.01K_p)$$



### ۲.۳.۸ زمان نشست

برای سیستم مرتبه اول:

$$T_s(2\%) \approx \frac{4}{|s_p|} = \frac{4}{0.033 + 0.01K_p}$$

شرط:  $T_s < 5$

$$\frac{4}{0.033 + 0.01K_p} < 5 \Rightarrow 0.033 + 0.01K_p > 0.8 \Rightarrow K_p > 76.7$$

### ۳.۳.۸ خطای حالت ماندگار

برای فیدبک واحد و ورودی پله:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p G(0)}, \quad G(0) = \frac{0.01}{0.033} = 0.30303$$

پس:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + 0.30303K_p} \neq 0$$

### ۴.۳.۸ بررسی شرایط کنترولر

$\Rightarrow M_p = 0\%$ : سیستم حلقه بسته مرتبه اول است و پاسخ پله‌ی آن فراجهش ندارد •

• خطای ماندگار: صفر نمی‌شود چون انتگرال گیر ندارد.

نتیجه: کنترل کننده P قادر به برآورده کردن شرایط فراجهش ۲۰%-۱۰% و خطای ماندگار صفر نیست؛

### ۴.۸ کنترل کننده تناوبی-مشتقی (PD)

$$C(s) = K_p + K_d s$$

### ۱.۴.۸ معادله مشخصه حلقه بسته

$$1 + C(s)G(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{0.01(K_p + K_d s)}{s + 0.033} = 0$$

$$(s + 0.033) + 0.01(K_p + K_d s) = 0 \Rightarrow (1 + 0.01K_d)s + (0.033 + 0.01K_p) = 0$$

پس قطب حلقه بسته:

$$s_p = -\frac{0.033 + 0.01K_p}{1 + 0.01K_d}$$

• سیستم حلقه بسته همچنان مرتبه اول است .



• پاسخ پله برای سیستم مرتبه اول فراجهش ندارد  $\Rightarrow M_p = 0\%$ .

• مانند P به علت نبود انتگرال‌گیر، خطای حالت ماندگار صفر نمی‌شود.

نتیجه: کنترل کننده PD نیز قادر به تحقق قیود فراجهش ۱۰-۲۰٪ و خطای حالت ماندگار صفر نیست.

### ۵.۸ کنترل کننده تناسبی-انتگرالی (PI)

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s}$$

حلقه باز و معادله مشخصه ۱.۵.۸

$$L(s) = C(s)G(s) = \frac{K_p s + K_i}{s} \cdot \frac{0.01}{s + 0.033} = \frac{0.01(K_p s + K_i)}{s(s + 0.033)}$$

معادله مشخصه:

$$1 + L(s) = 0 \Rightarrow s(s + 0.033) + 0.01(K_p s + K_i) = 0$$

$$s^2 + 0.033s + 0.01K_p s + 0.01K_i = 0$$

$$s^2 + (0.033 + 0.01K_p)s + 0.01K_i = 0$$

مقایسه با سیستم مرتبه دوم ۲.۵.۸

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

در نتیجه:

$$2\zeta\omega_n = 0.033 + 0.01K_p$$

$$\omega_n^2 = 0.01K_i \Rightarrow K_i = 100\omega_n^2$$

۳.۵.۸ انتخاب  $\zeta$  و  $\omega_n$  مطابق شرایط

از فراجهش و زمان نشست نتیجه گرفتیم که:

$$\boxed{\zeta = 0.5}$$

$$\boxed{\omega_n = 1.6}$$

۴.۵.۸ محاسبه ضرایب PI

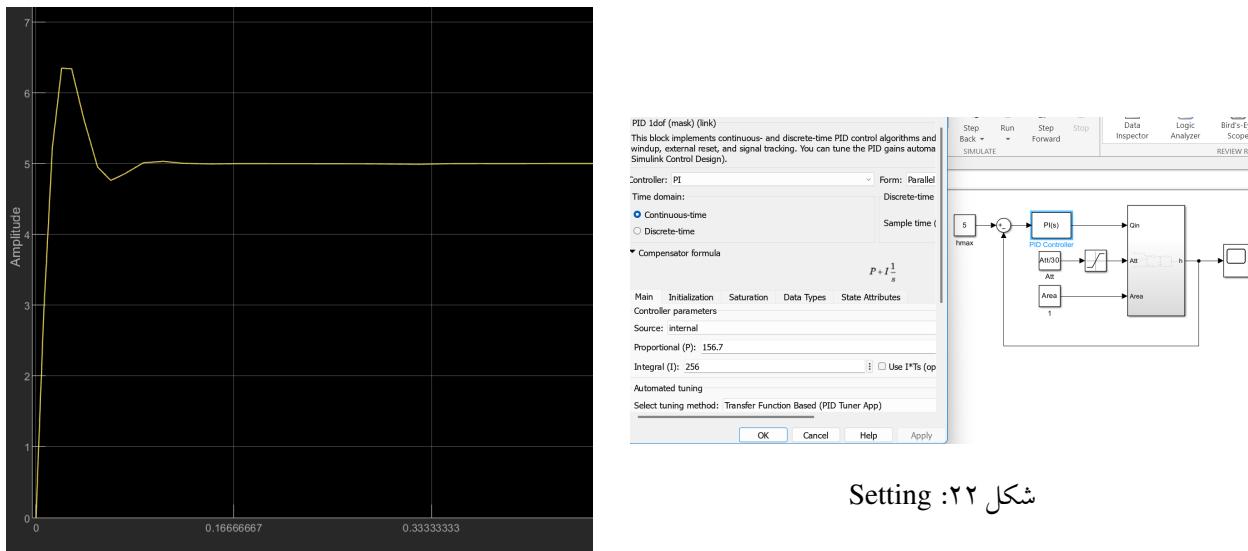
$$K_i = 100(1.6)^2 = 100(2.56) = 256$$

$$0.033 + 0.01K_p = 2\zeta\omega_n = 2(0.5)(1.6) = 1.6$$

$$0.01K_p = 1.6 - 0.033 = 1.567 \Rightarrow K_p = 156.7$$



$$PI : \quad K_p = 156.7, \quad K_i = 256$$



شکل : ۲۲ Setting

### شکل ۲۳: خروجی سیستم

همانطور که مشخص است زمان نشست سیستم در حدود ۰.۱ دقیقه یعنی حدود ۶ ثانیه می باشد که قابل قبول بوده و مقدار پیک آن حدود ۶.۲ است که در نتیجه فرآجهش حدودا ۲۴ درصد می شود. میتوان با تیون کردن به روش های زیگلر-نیکولز و تغییر جزئی در مقادیر کنترلر سیستم را به حالت مورد نظر رساند

## ۶.۸ کنترل کننده PID

### ۱.۶.۸ تعریف

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

معادله مشخصه حلقه بسته ۲.۶.۸

$$\begin{aligned} 1 + C(s)G(s) &= 0 \Rightarrow 1 + \left( K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) \frac{0.01}{s + 0.033} = 0 \\ s(s + 0.033) + 0.01(K_d s^2 + K_p s + K_i) &= 0 \\ (1 + 0.01K_d)s^2 + (0.033 + 0.01K_p)s + 0.01K_i &= 0 \end{aligned}$$

برای مقایسه با فرم استاندارد مرتبه دوم، ابتدا دو طرف را بر ضریب  $s^2$  تقسیم می کنیم:

$$s^2 + \frac{0.033 + 0.01K_p}{1 + 0.01K_d} s + \frac{0.01K_i}{1 + 0.01K_d} = 0$$



فرم استاندارد مرتبه دوم:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

پس داریم:

$$2\zeta\omega_n = \frac{0.033 + 0.01K_p}{1 + 0.01K_d}$$

$$\omega_n^2 = \frac{0.01K_i}{1 + 0.01K_d}$$

از رابطه دوم:

$$K_i = 100\omega_n^2(1 + 0.01K_d)$$

و از رابطه اول:

$$K_p = \frac{(1 + 0.01K_d)2\zeta\omega_n - 0.033}{0.01}$$

انتخاب  $\zeta$  بر اساس فراجهش

$$\boxed{\zeta = 0.5} \quad \Rightarrow \quad M_p \approx 16\%$$

انتخاب  $\omega_n$  بر اساس زمان نشست

$$T_s(2\%) \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} < 5 \Rightarrow \omega_n > \frac{4}{5\zeta}$$

: $\zeta = 0.5$

$$\omega_n > 1.6$$

میتوانیم این مقدار را انتخاب کنیم :

$$\boxed{\omega_n = 1.7 \text{ rad/s}}$$

انتخاب  $K_d$  ۳.۶.۸

در سیستم، افزودن مشتق‌گیر باعث افزایش مرتبه سیستم نمی‌شود و تنها ضرایب معادله مشخصه را از طریق عامل  $(1 + 0.01K_d)$  مقیاس می‌کند. بنابراین:

• آزادی مقیاس‌دهی به  $K_d$  و  $K_p$  می‌دهد،

• اما اگر  $K_d$  خیلی بزرگ انتخاب شود، سیگنال کنترلی  $Q_{in}$  می‌تواند تیز و حساس به نویز گردد،

پس یک مقدار ملایم انتخاب می‌کنیم تا هم قابل پیاده‌سازی باشد و هم باعث افزایش تیزی نشود:

$$\boxed{K_d = 10} \Rightarrow (1 + 0.01K_d) = 1.1$$

۴.۶.۸ محاسبه ضرایب PID

با  $K_d = 10$ ,  $\omega_n = 1.7$ ,  $\zeta = 0.5$



$K_i$  محاسبه (۱)

$$K_i = 100 \omega_n^2 (1 + 0.01 K_d) = 100(1.7)^2(1.1)$$

$$(1.7)^2 = 2.89 \Rightarrow K_i = 100(2.89)(1.1) = 317.9$$

$$K_i = 317.9$$

$K_p$  محاسبه (۲)

$$K_p = \frac{(1 + 0.01 K_d) 2\zeta\omega_n - 0.033}{0.01} = \frac{(1.1) 2(0.5)(1.7) - 0.033}{0.01}$$

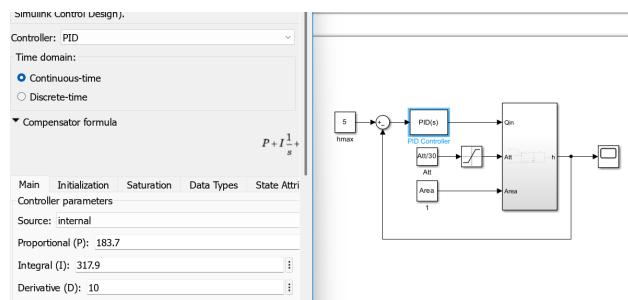
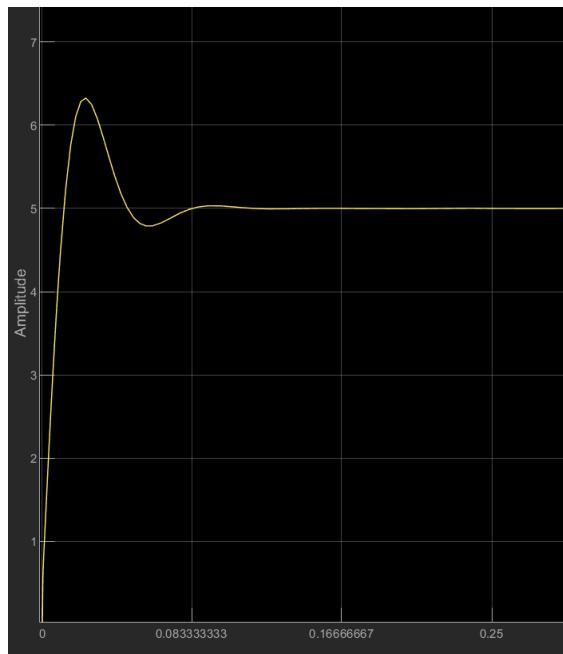
$$2(0.5)(1.7) = 1.7 \Rightarrow (1.1)(1.7) = 1.87$$

$$K_p = \frac{1.87 - 0.033}{0.01} = \frac{1.837}{0.01} = 183.7$$

$$K_p = 183.7$$

بنابراین کنترل کننده PID به صورت زیر به دست می آید:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = 183.7 + \frac{317.9}{s} + 10s$$



شکل ۲۴

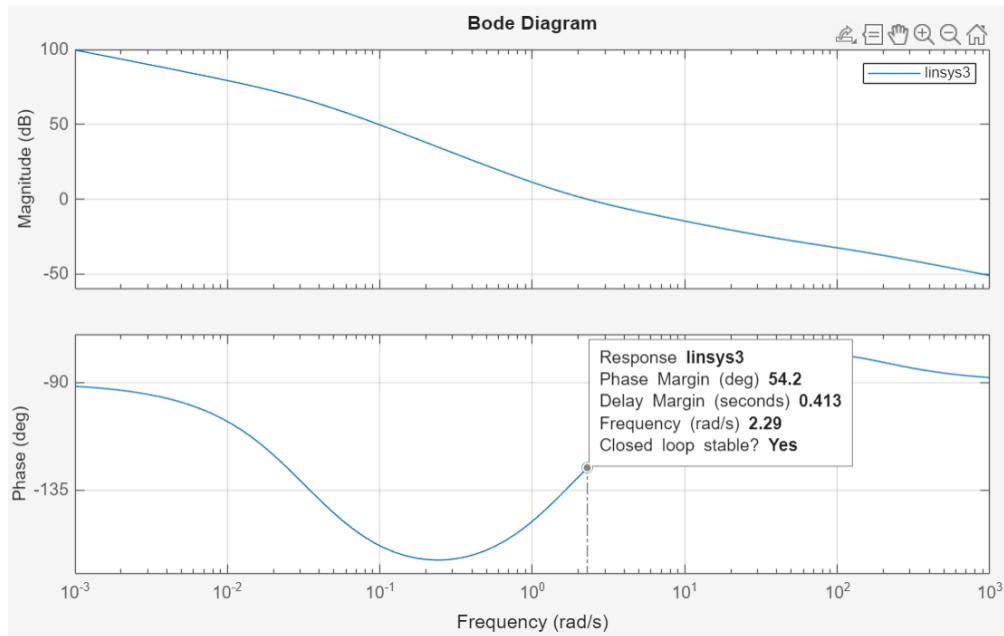
شکل ۲۵: خروجی سیستم

مشخص است زمان نشست سیستم در حدود ۰.۱۲ دقیقه یعنی حدود ۷ ثانیه می باشد که قابل قبول بوده و مقدار پیک آن حدود ۶.۲۵ است که در نتیجه فرآجھش ۲۵ درصد می شود. میتوان با تغییر جزئی در مقادیر کنترلر سیستم را به حالت مورد نظر رساند

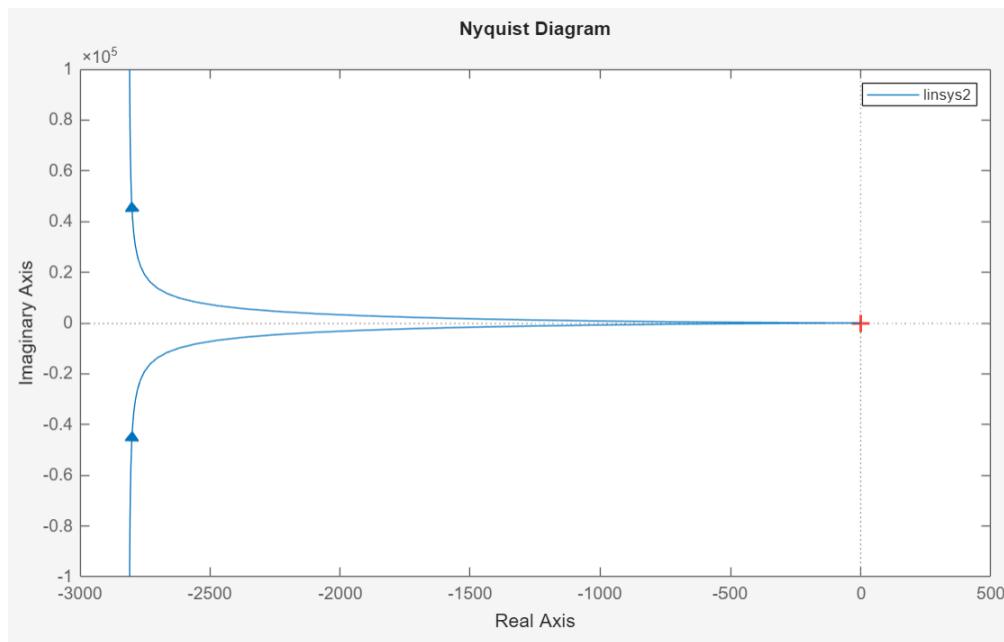
$$M_p \approx \frac{h_{\text{peak}} - h_{\max}}{h_{\max}} \times 100\% \approx \frac{6.25 - 5}{5} \times 100\% \approx 25\%$$



## ۹ تحلیل فرکانسی سیستم با کنترلر PID



شکل ۲۶: Bode



شکل ۲۷: Nyquist

نمودار نایکوئیست سیستم حلقه باز نشان می دهد که مسیر پاسخ فرکانسی سیستم هیچ گونه احاطه ای حول نقطه بحرانی  $(0, -1)$  ندارد. با توجه به اینکه سیستم حلقه باز قادر قطب در نیم صفحه راست است، عدم احاطه نقطه  $(0, -1)$  بر اساس معیار نایکوئیست به این معناست



که سیستم حلقه بسته پایدار می باشد.

در نمودار بودی ، بهره سیستم در فرکانس های پایین بسیار بالا بوده که نشان دهنده توانایی مناسب سیستم در حذف خطای حالت ماندگار و رد اغتشاش های کم فرکانس است. با افزایش فرکانس، بهره به صورت یکنواخت کاهش یافته و سیستم رفتار یک فیلتر پایین گذرا را از خود نشان می دهد که این امر به کاهش اثر نویزهای فرکانس بالا کمک می کند. فرکانس گذرا بهره (Gain Crossover Frequency) سیستم حدود:

$$\omega_c \approx 2.29 \text{ rad/s}$$

می باشد. در این فرکانس، حاشیه فاز سیستم برابر است با:

$$\boxed{\text{Margin Phase} \approx 54.2^\circ}$$

این حاشیه فاز نشان می دهد که سیستم دارای میرایی مناسب بوده و انتظار می رود پاسخ گذرای آن بدون نوسان شدید یا ناپایداری باشد.



## ۱۰ ملاحظات استفاده از کنترل کننده‌های دارای مشتق‌گیر (PD / PID)

کنترل کننده‌های دارای ترم مشتق‌گیر با هدف بهبود پاسخ گذرا و افزایش میرایی سیستم به کار می‌روند، اما پیاده‌سازی نادرست باعث ایجاد سیگنال کنترلی تیز و غیرقابل قبول شود.

در ساختار کلاسیک PID مشتق‌گیر روی خطا اعمال می‌شود:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad e(t) = r(t) - y(t)$$

که در این حالت:

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt}$$

در صورت تغییر ناگهانی مرجع (مانند ورودی پله)، مشتق مرجع باعث ایجاد یک ضربه در سیگنال کنترلی می‌شود.  
برای جلوگیری از این پدیده، در پیاده‌سازی عملی، مشتق‌گیر روی خروجی سیستم اعمال می‌شود:

$$u(t) = K_p(r(t) - y(t)) + K_i \int (r(t) - y(t)) dt - K_d \frac{dy(t)}{dt}$$

که در این ساختار، تغییرات ناگهانی مرجع وارد ترم مشتق نشده و رفتار کنترلی نرم‌تری حاصل می‌شود.  
از سوی دیگر، مشتق‌گیر نسبت به نویز اندازه‌گیری بسیار حساس است، زیرا مؤلفه‌های فرکانسی بالا را تقویت می‌کند. به همین دلیل، مشتق‌گیر در عمل به صورت فیلترشده پیاده‌سازی می‌شود:

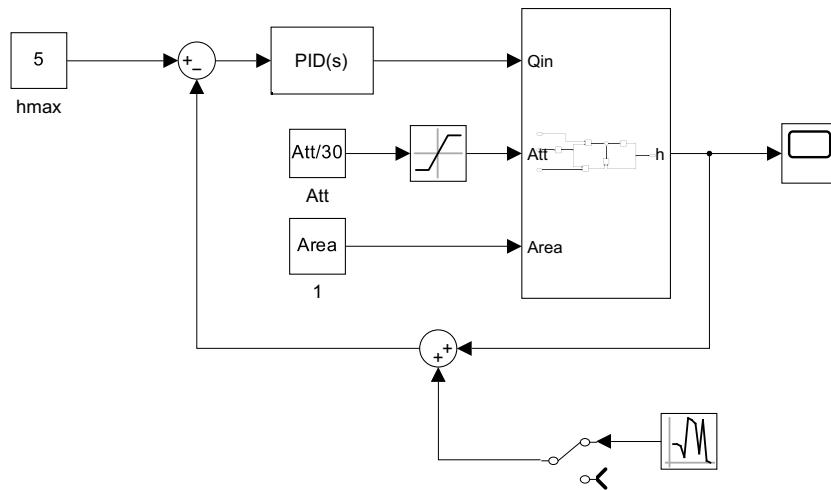
$$K_d s \rightarrow \frac{K_d s}{1 + \frac{s}{N}}, \quad N \approx 10 \text{ تا } 20$$

در سیستم ما که دینامیک سیستم کند است، استفاده از مشتق‌گیر تنها در صورت نیاز به افزایش میرایی توصیه می‌شود و در بسیاری از موارد کنترل کننده PI به تنها بیان عملکرد مناسبی ارائه می‌دهد.



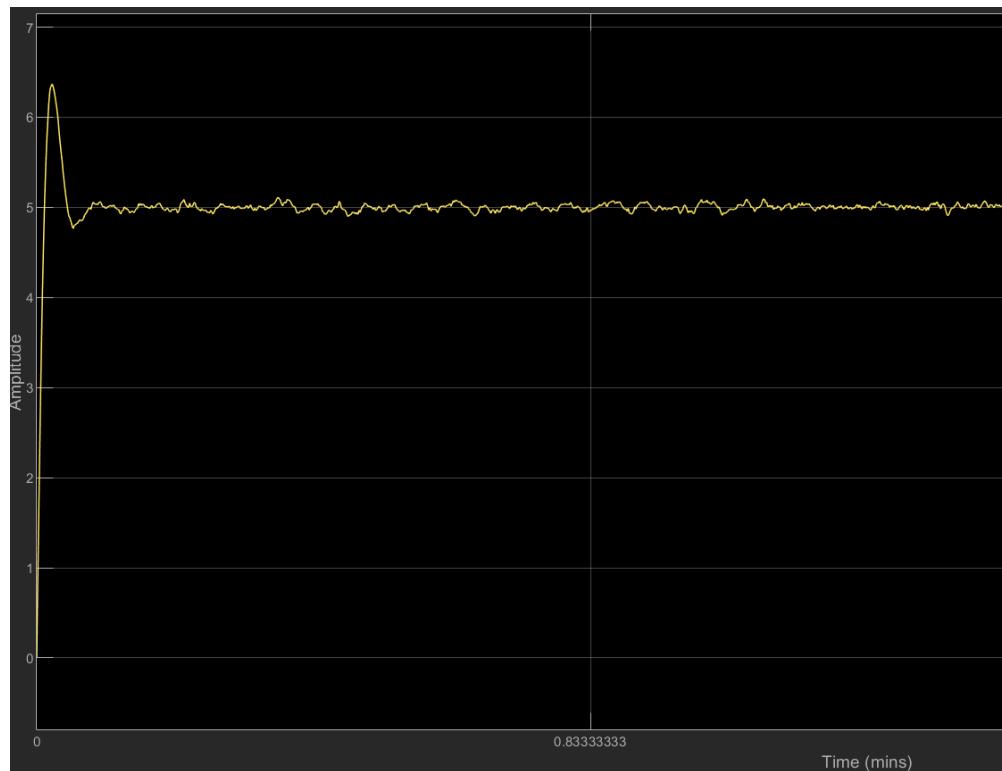
## ۱۱ تحلیل اثر نویز و اغتشاش

می توانیم اثر تلاطم سطح آب را با یک White-Noise Number Random در مسیر فیدبک ارتفاع آب به جمع کننده مدل کنیم:



شکل ۲۸ NoiseModel :

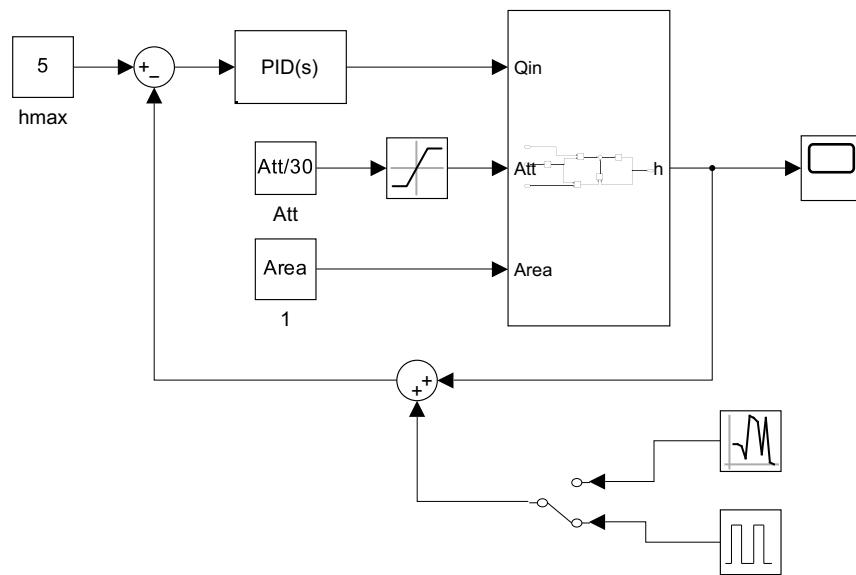
نویز گوسی اضافه شده به سیستم دارای انحراف معیار ۰.۰۱ و میانگین ۰ است



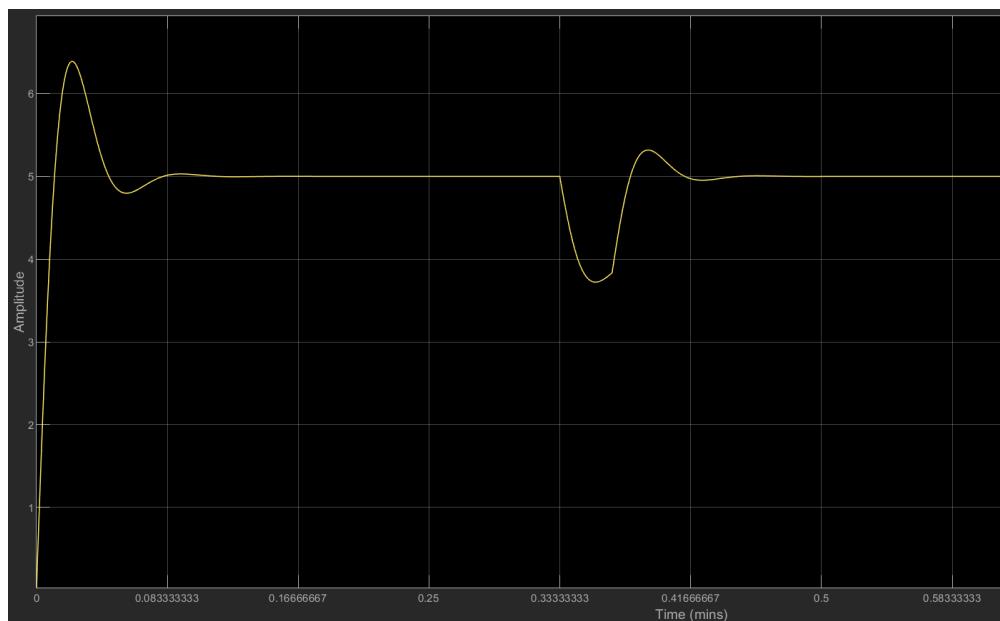
شکل ۲۹ Output in the presence of Gaussian noise :



میتوانیم اثر اغتشاش در خروجی را با یک بلوک پله واحد در نظر بگیریم:



شکل ۳۰: DisturbanceModel



شکل ۳۱: Output in the presence of disturbance



## ۱.۱۱ تحلیل سیستم در حضور نویز گاوی و اغتشاش

همانظور که مشخص است نمودار دارای ریپل هایی پیرامون مقدار ۵ است که ناشی از اثر نویز است. با این حال، میانگین خروجی به مقدار مرجع ( $h_{\max} = 5$ ) نزدیک بوده و نشان می‌دهد سیستم از نظر خطای حالت ماندگار، عملکرد مناسبی دارد.

در هنگام وقوع اغتشاش همانظور که پیدا است بصورت یک افت ناگهانی در خروجی مشاهده می‌شود که ناشی از تفسیر نادرست کنترل‌کننده از مقدار واقعی خروجی است. در پاسخ به این اغتشاش، سیستم واکنش اصلاحی نشان داده و خروجی پس از یک نوسان گذرا مجدداً به مقدار مرجع بازمی‌گردد.

دامنه‌ی نوسان ناشی از اغتشاش محدود بوده و پاسخ سیستم پس از هر پالس دارای رفتار میرا است. این موضوع بیانگر آن است که کنترل‌کننده قادر به رد اغتشاش بوده و اثر اغتشاش پالسی را در مدت زمان نسبتاً کوتاهی جبران کرده است.

## ۲.۱۱ راهکارهای کاهش اثر اغتشاش

برای کاهش اثر اغتشاش و نویز بر خروجی سیستم می‌توان یک فیلتر پایین‌گذر در مسیر فیدبک اضافه کرد:

$$y_f(s) = \frac{1}{\tau_f s + 1} y_m(s)$$

این فیلتر باعث تضعیف مؤلفه‌های فرکانس بالای نویز و اغتشاش‌های سریع می‌شود، اما به طور همزمان یک قطب اضافی به حلقه افزوده و منجر به ایجاد تأخیر فاز می‌گردد. تأخیر فاز ناشی از فیلتر پایین‌گذر در فرکانس گذر حلقه  $\omega_c$  تقریباً برابر است با:

$$\angle F(j\omega_c) = -\tan^{-1}(\omega_c \tau_f)$$

که این مقدار مستقیماً از حاشیه فاز سیستم کاسته می‌شود. کاهش حاشیه فاز می‌تواند باعث افزایش فراجهش، کاهش میرایی و در صورت انتخاب نامناسب پارامتر فیلتر، حتی ناپایداری سیستم گردد. بنابراین، بین حذف نویز و سرعت پاسخ یک مصالحه اجتناب‌ناپذیر وجود دارد؛ به طوری که انتخاب  $\tau_f$  بزرگ‌تر منجر به تضعیف بهتر نویز اما کاهش سرعت پاسخ و حاشیه پایداری می‌شود، در حالی که انتخاب  $\tau_f$  کوچک‌تر اثر نویز را کمتر کاهش داده ولی پاسخ سریع‌تر و پایدارتر باقی می‌ماند.



## ۱۲ بررسی ثابت زمانی

### ۱.۱۲ ثابت زمانی فیزیکی معادله دینامیکی مخزن

مدل خطی شده به صورت زیر بود:

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{Area} Q_{in}(t) - \frac{A_{tt}}{Area} h(t)$$

که به عبارتی:

$$\dot{h}(t) + \underbrace{\left( \frac{A_{tt}}{Area} \right)}_a h(t) = \underbrace{\left( \frac{1}{Area} \right)}_b Q_{in}(t)$$

پس قطب سیستم  $-a$  - بوده و ثابت زمانی فیزیکی (برای پر خالی شدن) برابر است با:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{a} = \frac{Area}{A_{tt}}}$$

طبق تابع تبدیل سیستم :

$$G(s) = \frac{0.01}{s + 0.033}$$

قطب در  $-0.033$  - است، لذا:

$$\boxed{\tau_{\text{فعال}} = \frac{1}{0.033} \approx 30.3 s}$$

بنابراین سیستم فیزیکی فعلی ذاتاً کند است و برای رسیدن به  $1 s$   $\tau = 1$  باید:

$$\boxed{\frac{A_{tt}}{Area} = 1} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{A_{tt} = Area}$$

همچنین از ضرایب تابع تبدیل می‌توان گفت:

$$\frac{1}{Area} = 0.01 \Rightarrow Area \approx 100$$

$$\frac{A_{tt}}{Area} = 0.033 \Rightarrow A_{tt} \approx 3.3$$

یعنی برای رسیدن به  $1 s$  با ثابت ماندن  $100 \approx Area$ ، باید  $A_{tt}$  از  $3.3$  به حدود  $100$  افزایش یابد

موارد دیگر :

(۱) کاهش  $Area$

$$Area_{\text{جدید}} = A_{tt} \approx 3.3$$

یعنی سطح مقطع مخزن باید تقریباً از  $100$  به  $3.3$  کاهش یابد پ این کار باعث افزایش سرعت دینامیک سطح می‌شود، ولی از نظر حجمی امکان پذیر نیست.



## مخزن گیت هاب ۱۳

HorriFarahani

JulaeiMoghadam