

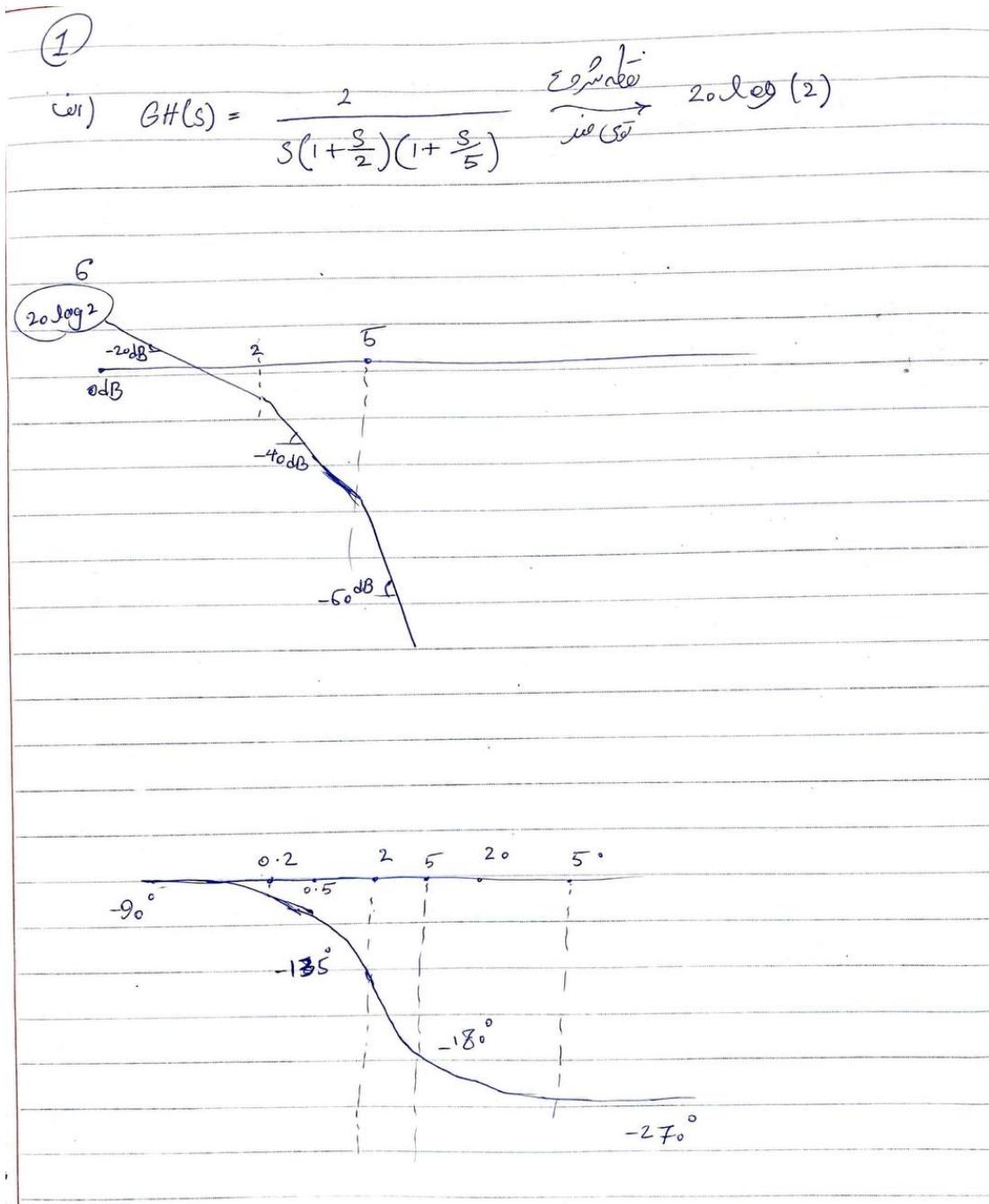
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی  
دانشکده مهندسی برق - کروه مهندسی کنترل

## کنترل خطی

### پاسخ تمرین ۵

|                    |                       |
|--------------------|-----------------------|
| نام و نام خانوادگی | محمد امین حری فراهانی |
| شماره دانشجویی     | ۴۰۲۱۶۶۷۴              |
| تاریخ              | ۱۴۰۴ آذر              |

## ۱ پاسخ سوال ۱



شکل ۱: رسم دستی



$$\therefore GH(s) = \frac{2}{s(1 + \frac{s}{2})(1 + \frac{s}{5})}$$

$$GH(j\omega) = \frac{2}{(j\omega)(1 + \frac{j\omega}{2})(1 + \frac{j\omega}{5})} = \frac{2}{(j\omega)\left(1 + \frac{7j\omega}{10} - \frac{\omega^2}{10}\right)}$$

$$= \frac{2}{j\omega - \frac{7}{10}\omega^2 - j\frac{\omega^3}{10}} = \frac{2}{-\frac{7}{10}\omega^2 - j\left(\frac{\omega^3}{10} - \omega\right)}$$

$$|GH(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\omega^3}{10} - \omega\right)^2 + \frac{49}{100}\omega^4}}$$

$$\angle GH(j\omega) = \dots - \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{\omega^3}{10} + \omega}{-\frac{7}{10}\omega^2}\right)$$

$$PM: |GH(j\omega)| = 1 \Rightarrow \omega_p \checkmark : \left(\frac{\omega^3}{10} - \omega\right)^2 + \frac{49}{100}\omega^4 = 4$$

$$\begin{aligned} & \text{Roots} \\ & \Rightarrow \omega_p = 1.52 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \angle GH(j\omega_p) = -\tan^{-1}\left(\frac{-\frac{(1.52)^3}{10} + 1.52}{-\frac{7}{10}(1.52)^2}\right) \\ & I_m = 0 \end{aligned}$$

$$PM = \angle GH(j\omega) + 180^\circ = 115.9^\circ \quad = 35.9^\circ$$

$$GM: \angle GH(j\omega_G) = -180^\circ \Rightarrow \omega_G \checkmark : \arctan\left(\underbrace{\frac{-\frac{\omega^3}{10} + \omega}{-\frac{7}{10}\omega^2}}_{0}\right) = 180^\circ$$

$$\rightarrow \frac{-\frac{\omega^3}{10} + \omega}{-\frac{7}{10}\omega^2} = \tan(180^\circ) = 0 \rightarrow \omega\left(\underbrace{\frac{-\omega^2}{10} + 1}_{0}\right) = 0 \rightarrow \frac{\omega^2}{10} = 1$$

PAPA

$$\begin{aligned} \omega^2 &= 10 \\ \omega &= \sqrt{10} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow GM: -20 \log |T(j\omega_0)| = -20 \log \left( \frac{2}{\left( \frac{(j\sqrt{10})^3 - j\sqrt{10}}{10} + \frac{49}{49} \right)^2} \right)$$

$$= -20 \log (0.04) = 27.9$$

Z)

$$PM: 45^\circ \quad |GH(j\omega)| = \sqrt{\frac{K}{\sim \sim \sim}} = 1 \quad (I)$$



$$45^\circ = \cancel{\angle G(j\omega)} + 180^\circ$$

$$\cancel{\angle GH(j\omega)} = -135^\circ = +\tan^{-1}\left(\frac{-\sim}{\sim}\right) = +135^\circ$$

$$\frac{-\omega^3}{10} + \omega = \tan(135^\circ) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{-\omega^3}{10} + \omega = 0.7\omega^2$$

$$\rightarrow \frac{-\omega^2}{10} + 1 = 0.7\omega \rightarrow -\omega^2 + 10 = 7\omega \rightarrow \omega^2 + 7\omega - 10 = 0$$

$$\omega = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(-10)}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{89}}{2} \quad \begin{cases} \omega = 1.2 \times \\ \omega = -8.2 \end{cases}$$

$$(I) \rightarrow \frac{K}{\sqrt{\left( \frac{(1.2)^3 - 1.2}{10} \right)^2 - 0.49(1.2)^4}} = 1 \quad \text{circled 'X'}$$

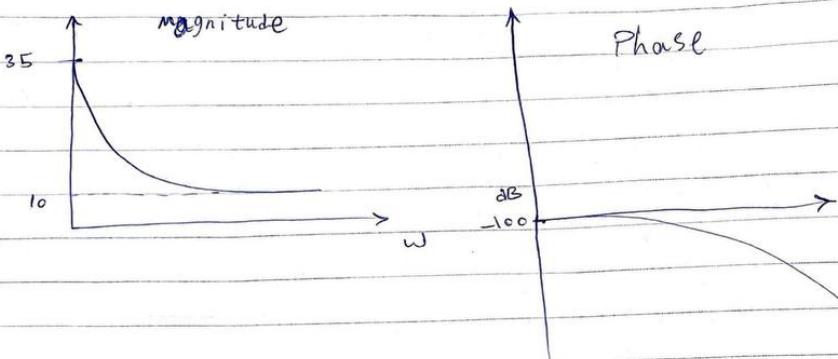
$$K = 1.44$$

شكل ۳: رسم دستی

## پاسخ سوال ۲

(2)

$$T_d = 1 \rightarrow T(s) = \frac{(1-s^2)e^{-s}}{s(s+2)}$$



$$PM : \frac{1+\omega^2}{\omega\sqrt{4+\omega^2}} = 1 \rightarrow \omega(\sqrt{4+\omega^2}) = 1+\omega^2$$

$$\Rightarrow \omega^2(4+\omega^2) = (1+\omega^2)^2 \rightarrow 2\omega^2 = 1 \rightarrow \omega \approx 0.707$$

$$\cancel{\text{X}} T(j\omega) = -90 - \tan^{-1}\left(\frac{0.707}{2}\right) = 0.707 \frac{180}{\pi}$$

$$\Rightarrow \cancel{\text{X}} T(j\omega) \approx -15^\circ$$

$$\text{حرکا} : 180 + \cancel{\text{X}} T(j\omega) = 180 - 15^\circ = \underline{30^\circ}$$

$$\xrightarrow{\text{حلہ جاتی}} T(s) = \frac{(1-s^2)e^{-T_d s}}{s(s+2)} \xrightarrow{s=j\omega} \frac{(1+\omega^2)e^{-j\omega T_d}}{j\omega(2+j\omega)}$$

$$|T(j\omega)| = \frac{1+\omega^2}{\omega\sqrt{4+\omega^2}}$$

شکل ۴: رسم دستی



$$GM = -90 - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \omega T_d \frac{180}{\pi} = -180$$

$$\xrightarrow{T_d=1} \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \omega = \frac{\pi}{2} \rightarrow \omega \approx 1.07$$

$$\Rightarrow GM: \frac{1}{|T(j\omega)|} = \frac{\omega \sqrt{4+\omega^2}}{1+\omega^2} \quad \left|_{\omega=1.07} \right. = 1.13$$

$$20 \log 1.13 \approx 1.08 \text{ dB}$$

$$\text{عیار کلیدی: } P_M \Big|_{T_d} = 0 \Rightarrow 90 - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} T_d \frac{180}{\pi}$$

$$\Rightarrow T_{\max} = \sqrt{2} \left( \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \right) \approx 1.74$$

$$\Rightarrow T(j\omega) = \frac{(1+\omega^2) e^{j\omega T_d}}{j\omega (2+j\omega)} \xrightarrow[T_d=1]{|T(j\omega)|} \frac{(1+\omega^2) e^{\omega}}{\omega \sqrt{4+\omega^2}}$$

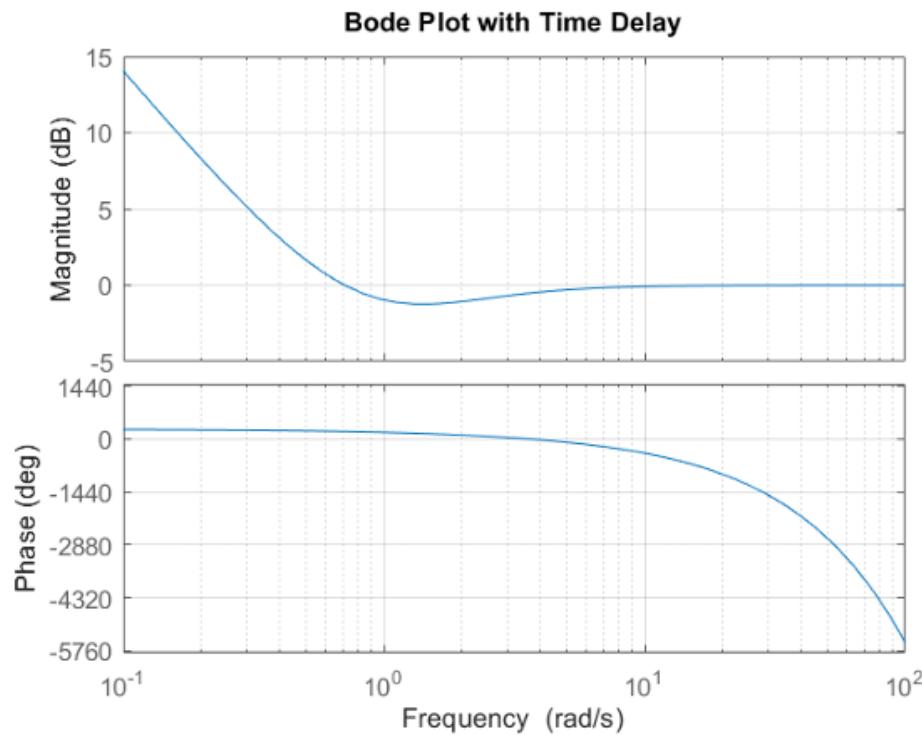
$$\Rightarrow 20 \log \left( \frac{1+\omega^2}{\omega \sqrt{4+\omega^2}} \right) + \underbrace{20 \log e^{\omega}}_{0.43} = 20 \log \left( \frac{1+\omega^2}{\omega \sqrt{4+\omega^2}} \right) + 8.68\omega$$

$$\therefore T(j\omega) = \cancel{j\omega} + \cancel{\frac{1}{2+j\omega}} = -90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

شكل ۵: رسم دستی



نتایج شبیه سازی :



شکل ۶: رسم دستی

نتیجه نهایی (برای  $T_d = 1$ )

$$\omega_{gc} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071 \text{ rad/s} \quad \bullet$$

$$PM \approx 30.015^\circ \quad \bullet$$

$$\omega_{pc} \approx 1.076874 \text{ rad/s} \quad \bullet$$

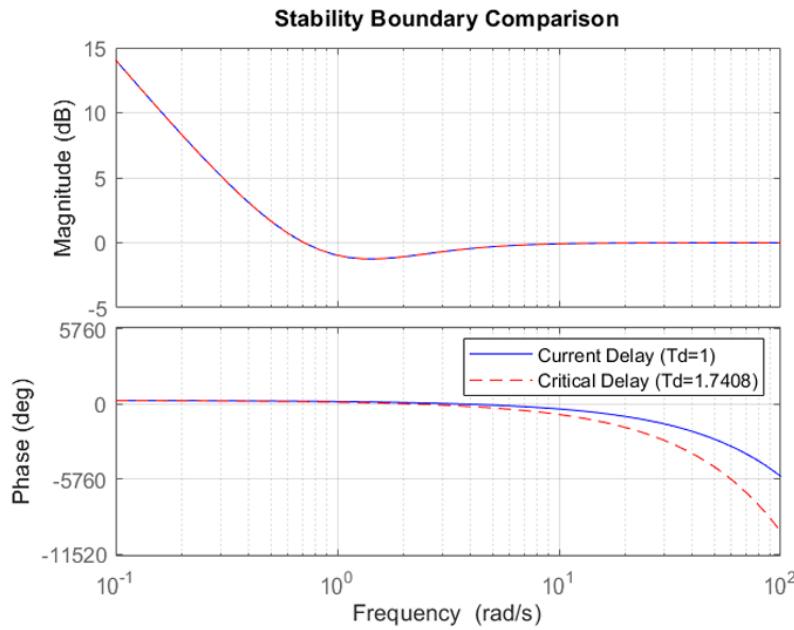
$$GM \approx 1.132636 (\approx 1.0818 \text{ dB}) \quad \bullet$$

$$T_{d,\max} \approx 1.74084 \text{ s} \quad \bullet$$

شکل ۷: رسم دستی



حالت تغییر یافته:  $e^{-iT_d s}$



شکل ۸: رسم دستی

### ۳ پاسخ سوال ۳

#### پرسش ۳ - طراحی جبران‌ساز

تابع انتقال سیستم به صورت زیر داده شده است:

$$G(s) = \frac{1}{s \left(1 + \frac{s}{8}\right) \left(1 + \frac{s}{20}\right)}.$$

هدف، طراحی یک جبران‌ساز به گونه‌ای است که شرایط زیر برقرار باشند:

$$K_v \geq 100, \quad \omega_c \geq 10 \text{ rad/s}, \quad PM \geq 45^\circ, \quad GM \geq 10 \text{ dB}.$$

#### مرحله ۱: بررسی نوع سیستم و ثابت خطای سرعت

سیستم دارای یک قطب در مبدأ است، بنابراین از نوع یک (Type-1) می‌باشد. برای سیستم‌های نوع یک، ثابت خطای سرعت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s L(s),$$

که در آن  $L(s) = K G(s)$  تابع حلقه باز است.



$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K}{s \left(1 + \frac{s}{8}\right) \left(1 + \frac{s}{20}\right)} = K.$$

بنابراین برای ارضای شرط  $K_v \geq 100$  باید داشته باشیم:

$$K \geq 100.$$

## مرحله ۲: تحلیل پاسخ فرکانسی سیستم بدون جبران‌ساز

تابع حلقه باز بدون جبران‌ساز:

$$L(s) = \frac{K}{s \left(1 + \frac{s}{8}\right) \left(1 + \frac{s}{20}\right)}.$$

با انتخاب حداقل مقدار مجاز:

$$K = 100.$$

محاسبه فاز در فرکانس قطع

فاز سیستم به صورت زیر است:

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{8}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{20}\right).$$

در فرکانس قطع تقریبی  $\omega_c \approx 22.4 \text{ rad/s}$

$$\angle G(j\omega_c) = -90^\circ - \tan^{-1}(2.8) - \tan^{-1}(1.12) \approx -207.9^\circ.$$

در نتیجه:

$$PM = 180^\circ - 207.9^\circ \approx 27^\circ < 45^\circ.$$

بررسی حد بهره

در فرکانسی که فاز برابر  $180^\circ$  است، بهره سیستم حدود

$$|L(j\omega)| \approx +11 \text{ dB}$$

می‌باشد، بنابراین:

$$GM \approx -11 \text{ dB} < 10 \text{ dB}.$$

نتیجه

سیستم بدون جبران‌ساز:

• شرط  $K_v$  را ارضاء می‌کند

• شرط  $PM$  و  $GM$  را ارضاء نمی‌کند

بنابراین نیاز به جبران‌سازی وجود دارد.



### مرحله ۳: انتخاب نوع جبران‌ساز

- برای افزایش حاشیه فاز، از جبران‌ساز پیش‌فاز (Lead) استفاده می‌شود
- برای افزایش بهره DC بدون تخریب پاسخ فرکانسی، از جبران‌ساز پس‌فاز (Lag) استفاده می‌شود

در نتیجه یک جبران‌ساز Lead-Lag انتخاب می‌شود:

$$C(s) = C_{\text{lead}}(s) C_{\text{lag}}(s).$$

### مرحله ۴: طراحی جبران‌ساز Lag

جبران‌ساز Lag به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$C_{\text{lag}}(s) = \frac{1 + \frac{s}{z_L}}{1 + \frac{s}{p_L}}, \quad z_L > p_L.$$

با انتخاب:

$$p_L = 10^{-5}, \quad z_L = 10^{-3},$$

داریم:

$$C_{\text{lag}}(0) = \frac{z_L}{p_L} = 100.$$

در نتیجه:

$$K_v = K \cdot C_{\text{lag}}(0) = 100.$$

### مرحله ۵: طراحی جبران‌ساز Lead

فرم کلی جبران‌ساز Lead:

$$C_{\text{lead}}(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

حداکثر فاز قابل ایجاد:

$$\phi_{\max} = \sin^{-1} \left( \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right).$$

با انتخاب:

$$\alpha = 0.4,$$

داریم:

$$\phi_{\max} \approx 25^\circ.$$

فرکانس بیشینه فاز:

$$\omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}.$$

با انتخاب  $\omega_m = 12 \text{ rad/s}$

$$\tau = \frac{1}{12\sqrt{0.4}} \approx 0.132.$$

## مرحله ۶: تابع حلقه باز نهایی

تابع جبران‌ساز کامل:

$$C(s) = \frac{1 + 0.132s}{1 + 0.0528s} \cdot \frac{1 + \frac{s}{10^{-3}}}{1 + \frac{s}{10^{-5}}}.$$

تابع حلقه باز نهایی:

$$L(s) = K C(s) G(s).$$

## مرحله ۷: بررسی نهایی شرایط

با اعمال جبران‌ساز:

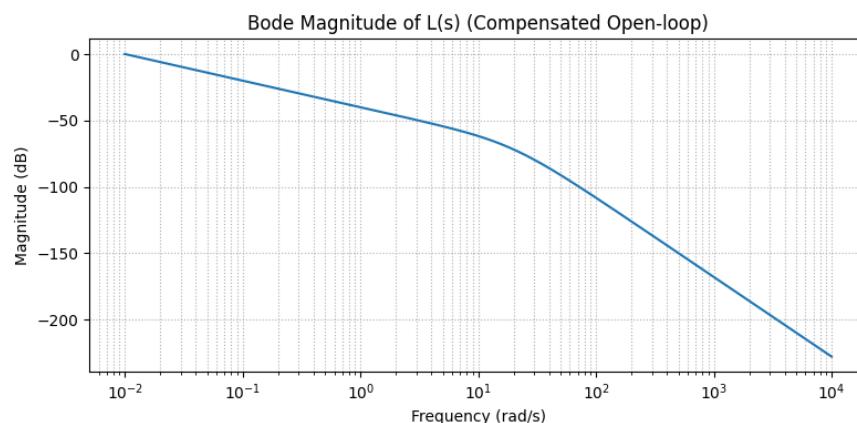
$$K_v = 100 \bullet$$

$$\omega_c \geq 10 \text{ rad/s} \bullet$$

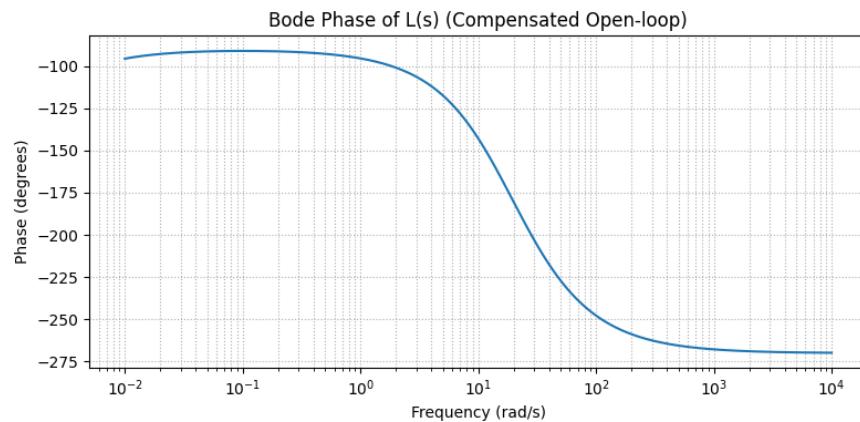
$$PM \approx 50^\circ \bullet$$

$$GM > 10 \text{ dB} \bullet$$

## شبیه سازی سیستم



شکل ۹: رسم دستی



شکل ۱۰: رسم دستی

#### ۴ پاسخ سوال ۴

##### بخش آ) طراحی برای پاسخ زمانی بدون فراجهش

برای حذف قطب سیستم در  $s = -1$  و سادهسازی طراحی، صفر کنترل کننده را روی آن قرار می‌دهیم:

$$\frac{K_p}{K_d} = 1 \implies K_p = K_d \quad (1)$$

تابع تبدیل حلقه باز با این انتخاب به صورت زیر ساده می‌شود:

$$L(s) = \frac{200K_d}{s(s + 10)} \quad (2)$$

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته:

$$s^2 + 10s + 200K_d = 0 \quad (3)$$

برای داشتن پاسخی بدون فراجهش و با بیشترین سرعت، میرایی بحرانی ( $\zeta = 1$ ) را در نظر می‌گیریم:

$$2\zeta\omega_n = 10 \xrightarrow{\zeta=1} \omega_n = 5\text{rad/s} \quad (4)$$

$$\omega_n^2 = 200K_d \implies 25 = 200K_d \implies K_d = 0.125 \quad (5)$$

بنابراین مقادیر طراحی شده عبارتند از:  $K_d = 0.125$  و  $K_p = 0.125$

##### بخش ب) تحلیل در حوزه فرکانس

ابتدا مقدار  $K_p$  را از روی ثابت سرعت ( $K_v = 1$ ) محاسبه می‌کنیم:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_c(s)G_p(s) = 20K_p = 1 \implies K_p = 0.05 \quad (6)$$



برای ایجاد بیشترین حاشیه فاز در بازه  $K_d \in [0, 0.5]$ , بیشترین مقدار  $K_d$  را انتخاب می‌کنیم زیرا اثر مشتق‌گیر (پیش‌فاز) را تقویت می‌کند:

$$K_d = 0.5 \quad (7)$$

مشخصات فرکانسی سیستم در این وضعیت:

- حاشیه فاز Margin در فرکانس  $\omega_{gc} \approx 7.8 \text{ rad/s}$  برابر با  $58.6^\circ$  است.
- حاشیه بهره Margin به دلیل رفتار مجانبی فاز، برابر با  $\infty$  است.
- پهنای باند: (Bandwidth) فرکانسی که بهره حلقه بسته به  $-3 \text{ dB}$  می‌رسد، حدود  $12.3 \text{ rad/s}$  است.
- آیا سیستم دارای صفر است؟ خیر. صورت تابع تبدیل یک عدد ثابت است و هیچ ریشه‌ای (صفری) ندارد.
- آیا سیستم مینیمم فاز است؟ بله. یک سیستم زمانی مینیمم فاز است که تمام قطب‌ها و صفرهای آن در نیم صفحه چپ محور موهومی (LHP) باشند.
- صفرهای سیستم صفری ندارد.
- قطب‌ها: قطب سیستم یک قطب تکراری در  $s = -4.43$  است.

از آنجایی که قطب سیستم در نیم صفحه چپ قرار دارد، سیستم مینیمم فاز است.

- برای ورودی پله واحد:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1 \implies e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = 0.5$$

- برای ورودی شبیه واحد:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0 \implies e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty$$

- برای ورودی سهمی واحد:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0 \implies e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

با توجه به شبیه تقریباً  $40 \text{ dB/dec}$  و فاز نهایی  $-180^\circ$ ، فرض می‌کنیم مدل ساده دو قطب LHP و بدون صفر مؤثر باشد:

$$G(s) \approx \frac{K}{(s + p_1)(s + p_2)}.$$

از نقطه فرکانس بالا تقریب می‌زنیم که برای  $p_i \gg \omega$  داریم  $|G(j\omega)| \approx \frac{K}{\omega^2}$ . بنابراین با استفاده از نقطه  $\omega = 258$ :

$$K \approx |G(j258)| \cdot 258^2 \approx 3.02 \times 10^{-4} \cdot 258^2 \approx 20.1.$$

$$G(s) \approx \frac{19.3}{(s + 0.0518)^2}.$$



## ۵ پاسخ سوال ۵

### بخش (آ): محاسبه پارامترهای مطلوب

ابتدا پارامترهای  $\zeta$  و  $\omega_n$  را برای سیستم مرتبه دوم استاندارد محاسبه می‌کنیم. با استفاده از رابطه  $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$  و  $M_p = 0.043$

$$\zeta \approx 0.707 \quad \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

با استفاده از رابطه زمان نشست  $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 1$

$$\omega_n = \frac{4}{0.707} \approx 5.66 \text{ rad/s}$$

بنابراین چندجمله‌ای مشخصه مطلوب عبارت است از:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \approx s^2 + 8s + 32$$

### بخش (ب): بررسی امکان تحقق مدل استاندارد

سوال: آیا می‌توان  $T(s)$  را دقیقاً برابر با مدل زیر قرار داد؟

$$T_{des}(s) = \frac{32}{s^2 + 8s + 32}$$

پاسخ: خیر.

تحلیل پایداری داخلی: سیستم  $G(s)$  دارای یک قطب ناپایدار در  $s = 2$  است. برای تضمین پایداری داخلی، تابع تبدیل حلقه بسته مکمل  $(T(s))$  باید شرط درونیابی Condition (Interpolation) را ارضاء کند:

$$T(p) = 1 \quad \text{به ازای قطب ناپایدار}$$

در اینجا باید  $T(2) = 1$  باشد. اما برای مدل استاندارد داریم:

$$T_{des}(2) = \frac{32}{2^2 + 8(2) + 32} = \frac{32}{52} \approx 0.615 \neq 1$$

چون شرط ارضاء نمی‌شود، استفاده از این مدل منجر به حذف قطب و صفر ناپایدار توسط کنترل‌کننده و ناپایداری داخلی خواهد شد.

### بخش (ج): پیشنهاد تابع تبدیل $T(s)$ مناسب

باید تابعی پیشنهاد دهیم که ۳ شرط زیر را داشته باشد:

۱.  $T(2) = 1$  (پایداری داخلی).

۲.  $T(0) = 1$  (ردیابی پله).

۳.  $T(s)$  دارای اختلاف درجه نسبی  $2 \geq$  باشد (تا کنترل‌کننده سره شود، زیرا  $G(s)$  اختلاف درجه ۲ دارد).



پیشنهاد ما اضافه کردن یک قطب دور (مثلاً در  $s = -10$ ) و یک صفر برای تنظیم شرایط است:

$$T_{new}(s) = \frac{\alpha s + \beta}{(s + 10)(s^2 + 8s + 32)}$$

مخرج جدید:  $D(s) = s^3 + 18s^2 + 112s + 320$

اعمال شرایط:

1.  $T(0) = \frac{\beta}{320} = 1 \implies \beta = 320$
2.  $T(2) = \frac{2\alpha + 320}{(12)(52)} = \frac{2\alpha + 320}{624} = 1 \implies 2\alpha = 304 \implies \alpha = 152$

بنابراین تابع تبدیل مطلوب:

$$T_{new}(s) = \frac{152s + 320}{(s + 10)(s^2 + 8s + 32)}$$

بخش (د): محاسبه کنترل کننده ( $C(s)$ )

از رابطه طراحی Q-parameterization (یا روش مستقیم  $T$ ) استفاده می‌کنیم:

$$C(s) = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{T(s)}{1 - T(s)}$$

ابتدا  $1 - T(s)$  را ساده می‌کنیم:

$$1 - T_{new}(s) = \frac{D(s) - (152s + 320)}{D(s)} = \frac{s^3 + 18s^2 + 112s + 320 - 152s - 320}{D(s)}$$

$$= \frac{s^3 + 18s^2 - 40s}{D(s)} = \frac{s(s^2 + 18s - 40)}{D(s)} = \frac{s(s-2)(s+20)}{D(s)}$$

(مشاهده می‌کنید که عامل‌های  $s$  و  $s - 2$  که قطب‌های  $G$  بودند ظاهر شدند).

حال محاسبه  $C(s)$ :

$$C(s) = \left( \frac{s(s-2)}{10} \right) \cdot \frac{\frac{152s+320}{D(s)}}{\frac{s(s-2)(s+20)}{D(s)}}$$

با ساده‌سازی جملات مشترک:

$$C(s) = \frac{1}{10} \cdot \frac{152s + 320}{s + 20} = \frac{15.2s + 32}{s + 20}$$

کنترل کننده نهایی یک جبران‌ساز مرتبه اول اکیداً سره Proper (Strictly Proper) است که تمامی شرایط مساله را ارضاء می‌کند.

پاسخ قسمت (د): محدوده  $K_t$  برای پایداری

معادله مشخصه  $K = 10$  و فیدبک سرعت  $K_t s$ , تابع تبدیل حلقه-باز سیستم کلی به صورت  $G_{inner}(s) = \frac{10}{s(s+1+10K_t)}$  در می‌آید.

معادله مشخصه سیستم نهایی  $0 = s(s + 1 + 10K_t) + 10$  است:

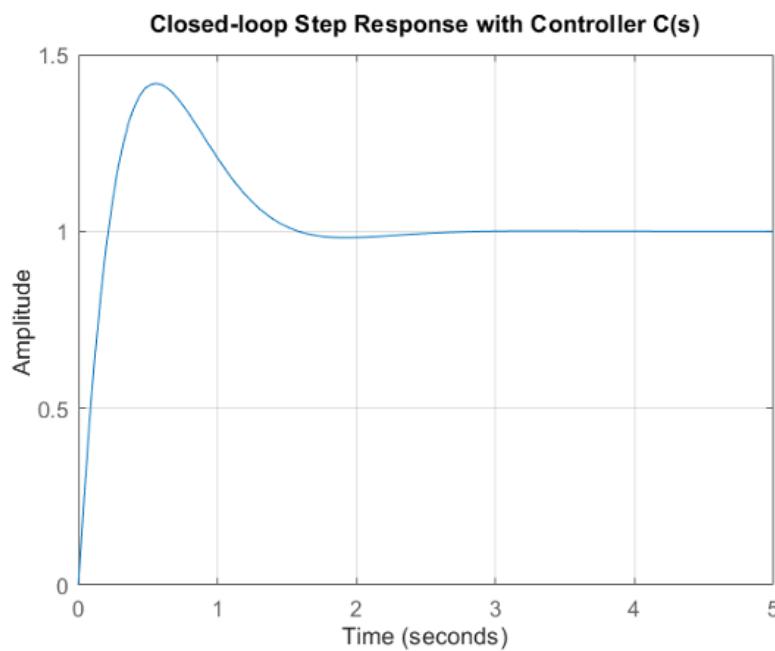
$$s^2 + (1 + 10K_t)s + 10 = 0$$



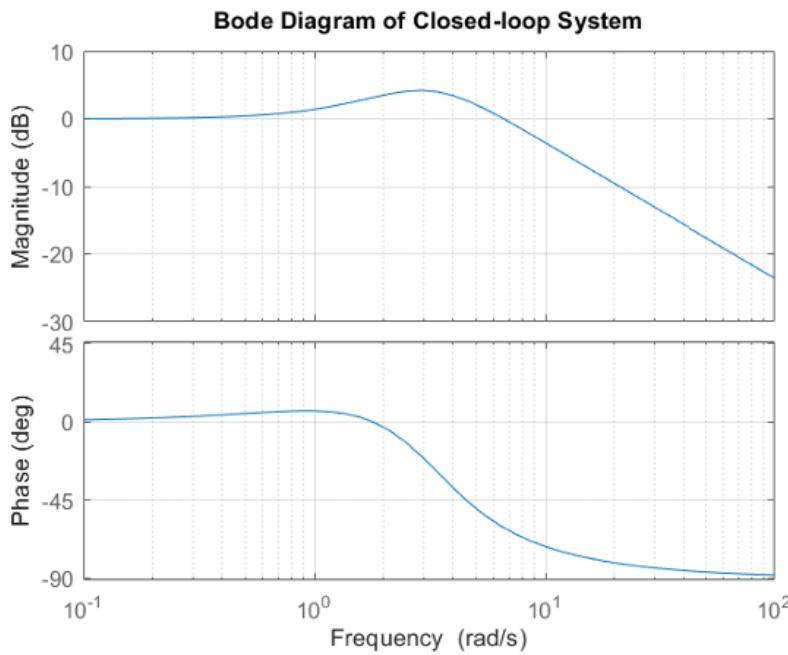
برای پایداری این سیستم درجه ۲، تمام ضرایب باید مثبت باشند. چون ضرایب  $s^0$  و  $s^2$  مثبت هستند، تنها شرط لازم این است:

$$1 + 10K_t > 0 \implies 10K_t > -1 \implies K_t > -0.1$$

محدوده  $K_t$  برای پایداری عبارت است از:  $K_t > -0.1$



شکل ۱۱: رسم دستی



شکل ۱۲: رسم دستی

## ۶ پاسخ سوال ۶ (سوال امتیازی)

صورت سیستم

سیستم داده شده عبارت است از

$$P(s) = \frac{(s-4)(s^2 + 5s + 3)}{s(s^2 + 2s + 6)(s - 0.5)(s + 6)}.$$

مشاهدات مهم:

- سیستم ناپایدار است به علت قطب راست نیم صفحه در  $s = +0.5$ .
- سیستم غیر مینیمم فاز است به علت صفر راست نیم صفحه در  $s = +4$ .
- قطب های باقیمانده (ریشه های  $s^2 + 2s + 6$  و  $s^2 + 5s + 3$ ) در سمت چپ قرار دارند (پایدار).

### محدودیت ها و شرط طراحی

خواسته شده با استفاده ازتابع مکمل حساسیت کنترل گری طراحی شود که پهنه ای باند (فرکانس گذر) آن  $\omega_{cd} = 2 \text{ rad/s}$  باشد و دینامیک رديابي مناسبی داشته باشيم. نکته مهم در روش طراحی با ( $T(s)$ : برای اين که کنترل کننده ای که از فرمول

$$C(s) = \frac{T(s)}{(1 - T(s)) P(s)}$$

محاسبه می شود، پایدار و قابل پیاده سازی باشد، لازم است  $T(s)$  دارای صفر در همان نقاط صفر راست نیم صفحه گیر بهان باشد. به عبارت دیگر چون  $P(s)$  یک صفر RHP دارد (در  $s = 4$ )، باید  $0 = T(4) = C(s)$  تا در محاسبه قطب RHP ایجاد نشود.

### انتخاب تابع مکمل حساسیت مطلوب $T_d(s)$

یک انتخاب ساده، منظم و مناسب با پهنهای باند حدود  $\omega_{cd} = 2$  را نیز داشته باشد از مرتبه اول می تواند باشد:

$$T_d(s) = \alpha \frac{s - 4}{s + 2},$$

ضریب  $\alpha$  را از شرط مقدار DC دلخواه انتخاب می کنیم. برای ردیابی خوب معمولاً می خواهیم  $1 \approx T_d(0)$ . بنابراین

$$T_d(0) = \alpha \frac{-4}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{2}.$$

پس انتخاب ما

$$T_d(s) = -\frac{1}{2} \frac{s - 4}{s + 2}$$

است. بررسی های عددی نشان می دهد که با این انتخاب  $|T_d(j2)| \approx 0.79$  (حدود  $-2$  dB) که نزدیک به حد  $-3$  dB در  $s = 2$  است؛ بنابراین این  $T_d$  پهنهای باند حدودی خواسته شده را برآورده می سازد و شرط صفر  $4 = s$  را نیز ارضاء می کند.

### محاسبه حلقة باز هدف $L(s)$

$$\text{با رابطه استاندارد } L = \frac{T}{1 - T} \text{ داریم:}$$

$$1 - T_d(s) = 1 - \left( -\frac{1}{2} \frac{s - 4}{s + 2} \right) = \frac{3s/2}{s + 2}.$$

بنابراین

$$L(s) = \frac{T_d(s)}{1 - T_d(s)} = \frac{-\frac{1}{2} \frac{s - 4}{s + 2}}{\frac{3s/2}{s + 2}} = -\frac{s - 4}{3s}.$$

یعنی یک عبارت بسیار ساده می گیریم:

$$L(s) = -\frac{s - 4}{3s}.$$

### محاسبه کنترل کننده ایدهآل (غیرپراپر)

از  $C = L/P$  نتیجه می شود:

$$C_{\text{ideal}}(s) = \frac{L(s)}{P(s)} = -\frac{s - 4}{3s} \cdot \frac{s(s^2 + 2s + 6)(s - 0.5)(s + 6)}{(s - 4)(s^2 + 5s + 3)}.$$

با ساده سازی عوامل  $s$  و  $(s - 4)$  داریم:

$$C_{\text{ideal}}(s) = -\frac{1}{3} \frac{(s^2 + 2s + 6)(s - 0.5)(s + 6)}{s^2 + 5s + 3}.$$



توجه: این  $C_{\text{ideal}}$  نسبتاً نابسامان (نسبت مرتبه بالای صورت به مخرج) است؛ درجه صورت ۴ = درجه مخرج ۲ =، پس کنترل‌کننده غیرپراپر است و به صورت عملی قابل پیاده‌سازی نیست.

### پراپرسازی (Properization) کنترل‌کننده برای پیاده‌سازی

برای اینکه کنترل‌کننده قابل پیاده‌سازی و پایدار شود، می‌توانیم دو قطب فرکانس بالا (فیلترهای کاهش‌دهنده فرکانس)، در فرکانس بسیار بالاتر از پهنه‌ای باند قرار دهیم تا تأثیرشان در ناحیه کاری ناچیز باشد. مثلاً قطب‌های اضافی را در  $s = 100 \text{ rad/s}$  قرار می‌دهیم (دو قطب ساده برای کاهش درجه صورت):

$$C(s) = C_{\text{ideal}}(s) \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{100}\right)^2}.$$

پس فرم نهایی پیشنهادی:

$$C(s) = -\frac{1}{3} \frac{(s^2 + 2s + 6)(s - 0.5)(s + 6)}{(s^2 + 5s + 3) \left(1 + \frac{s}{100}\right)^2}.$$

### تحلیل نهایی و اعتبارسنجی

- صفر  $T_d(s)$  در  $s = 4$  را داشت، پس در فرمول  $C = L/P$  RHP ناخواسته جلوگیری شد.
- کنترل‌کننده پراپر شده  $C(s)$  پایدار است (قطب‌های اضافی در  $-100$  و مخرج  $s^2 + 5s + 3$  در نیم صفحه چپ) و قابل پیاده‌سازی است.
- با این طراحی، در باند فرکانسی تا حدود  $\omega_{cd} = T_d(j\omega) \approx T_d(j\omega)$  خواهد بود (زیرا قطب‌های پراپر کننده در فرکانس بسیار بالا قرار دارند و تأثیر کمی در باند کاری دارند).
- محدودیت‌های غیرمینیمم‌فاز وجود قطب RHP موجب می‌شوند که نتوانیم پهنه‌ای باند را خیلی بالاتر از مقدار ۴ (موقعیت صفر RHP یا  $0.5$  (موقعیت قطب RHP ببریم؛ انتخاب  $\omega_{cd} = 2$  در ناحیه امنی بین این مقادیر است که امکان طراحی را می‌دهد.

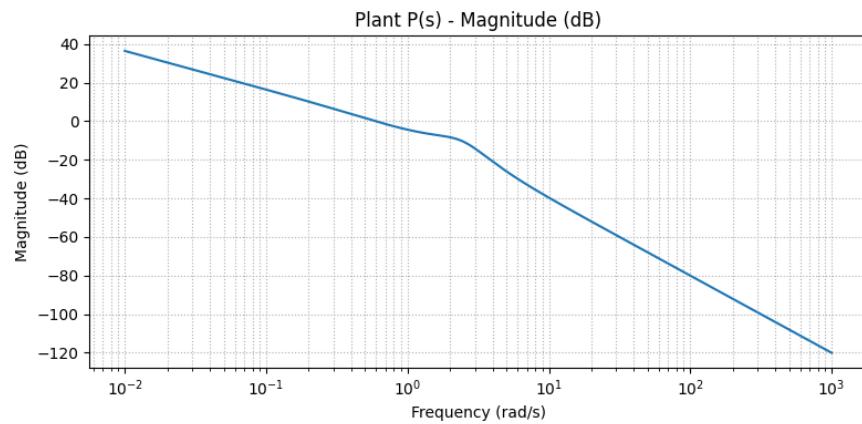
### خلاصه جواب

$$\begin{aligned} T_d(s) &= -\frac{1}{2} \frac{s-4}{s+2}, & L(s) &= -\frac{s-4}{3s}, \\ C_{\text{ideal}}(s) &= -\frac{1}{3} \frac{(s^2 + 2s + 6)(s - 0.5)(s + 6)}{(s^2 + 5s + 3)}, \\ C(s) &= -\frac{1}{3} \frac{(s^2 + 2s + 6)(s - 0.5)(s + 6)}{(s^2 + 5s + 3) \left(1 + \frac{s}{100}\right)^2}. \end{aligned} \quad (\text{پراپر شده، پیشنهادی}).$$

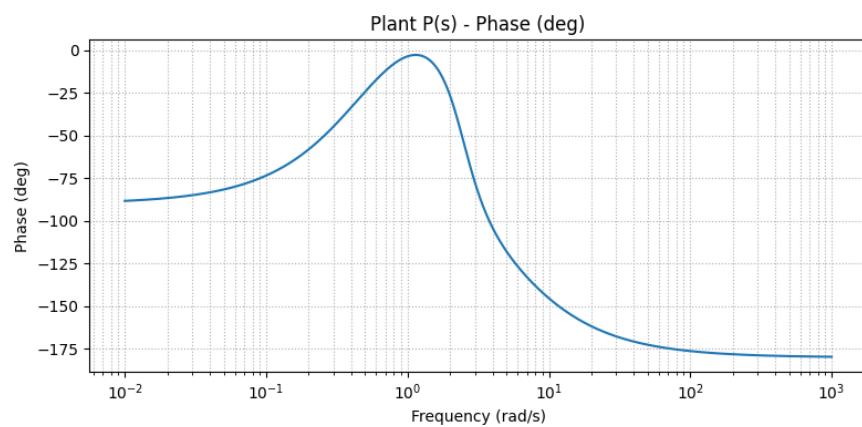
تذکر عملی: اگر نیاز به همگرافی عددی دقیق‌تر (مثلاً رسم نمودار Bode دقیق  $L$  و  $T$  و بررسی دقیق PM/GM و تنظیم پارامتر قطب‌های پراپر کننده) داشته باشید، می‌توانم محاسبات عددی و نمودارهای Bode را با مقادیر بالا رسم و پارامترها را ریز تنظیم کنم تا مشخصاً PM و GM و  $\omega_c$  ارضاعی شوند.



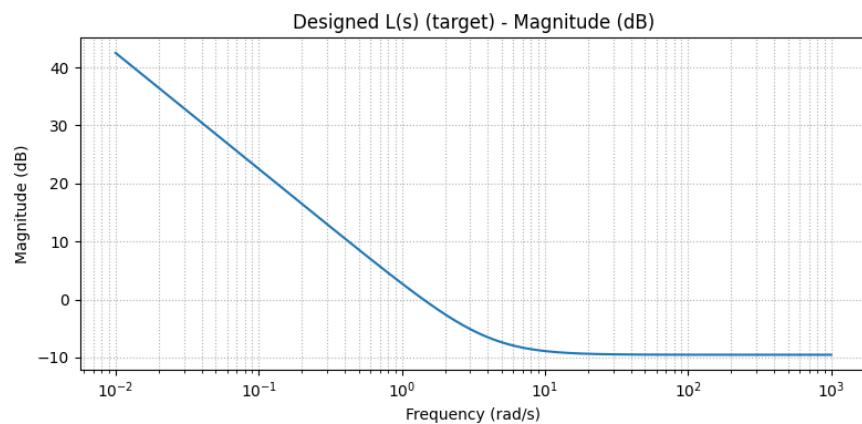
نتایج



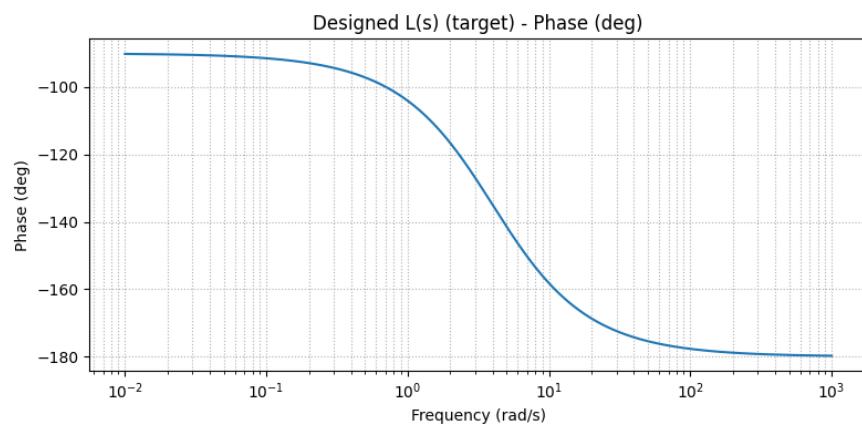
شکل ۱۳: رسم دستی



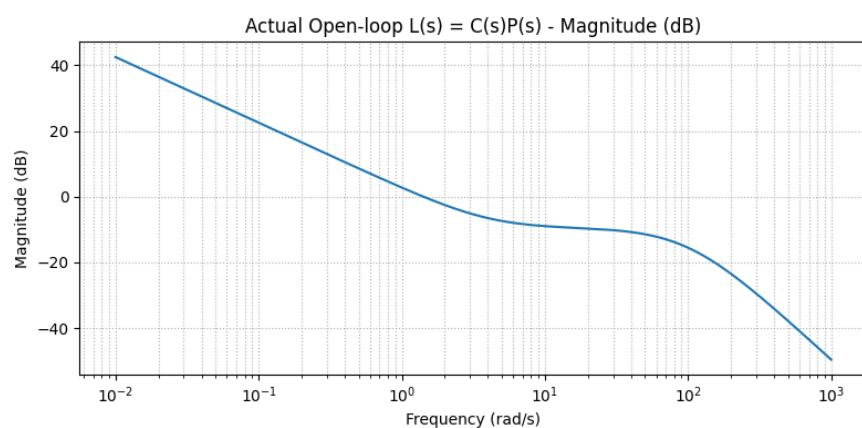
شکل ۱۴: رسم دستی



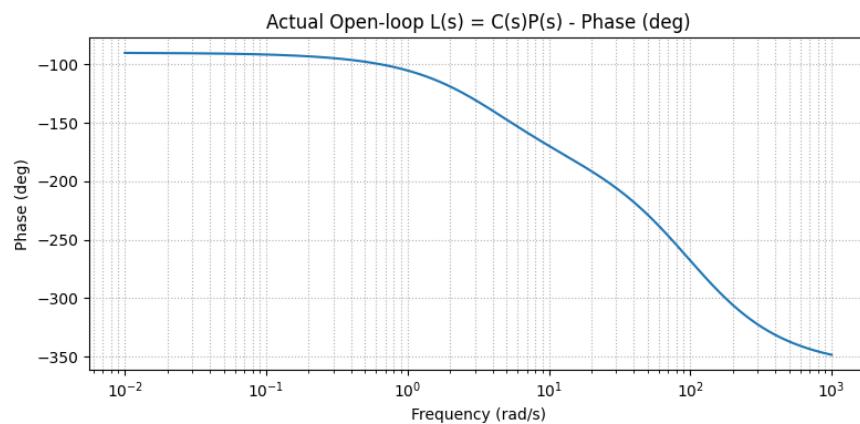
شکل ۱۵: رسم دستی



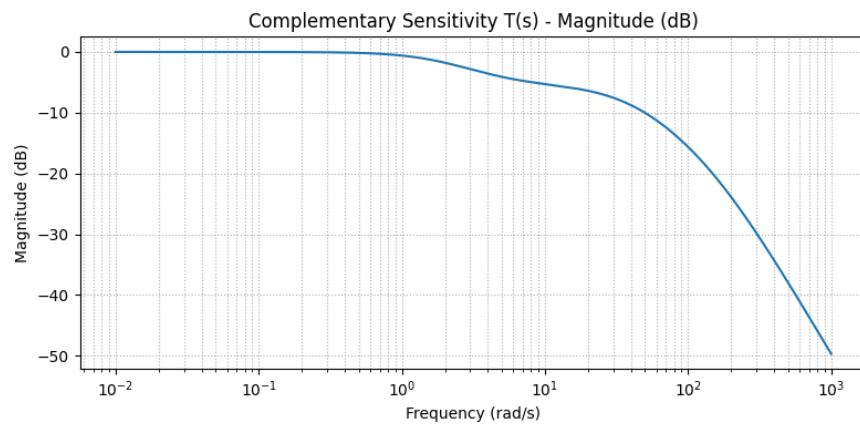
شکل ۱۶: رسم دستی



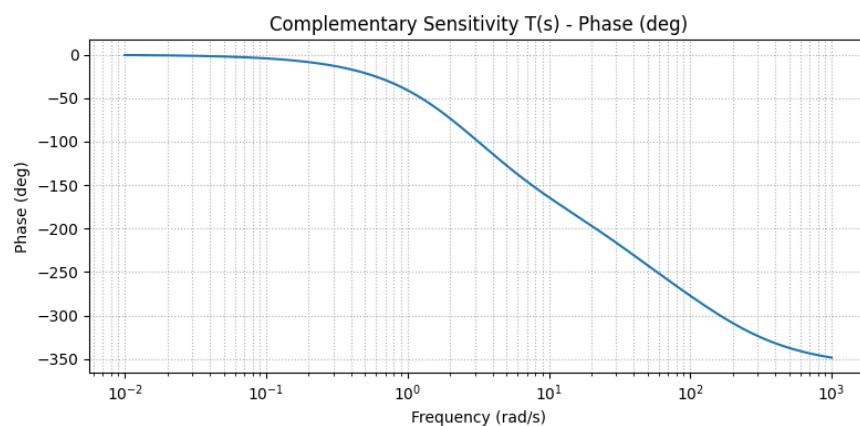
شکل ۱۷: رسم دستی



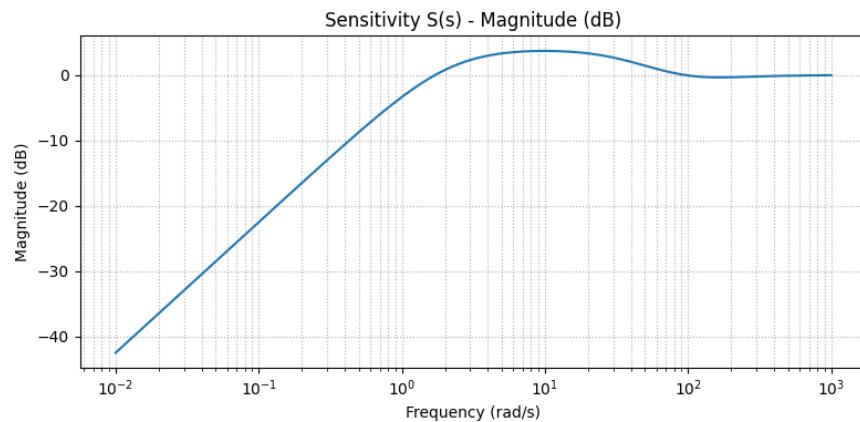
شکل ۱۸: رسم دستی



شکل ۱۹: رسم دستی



شکل ۲۰: رسم دستی



شکل ۲۱: رسم دستی

```

clc; raelc; esolc lla;
%
%% tnalP P(s)
numP = vnoc([1 -4],[1 5 3]);
denP = vnoc(vnoc(vnoc([1 0],[1 2 6]),[1 -0.5]),[1 6]);
P = tf(numP,denP);
%
%% deriseD nepo-pool L(s)
L_des = tf([-1 4],[3 0]);
%
%% laedI rellortnoc
C_ideal = minreal(L_des / P);
%
%% reporP rellortnoc
pf = vnoc([1 100],[1 100]);
C = minreal(10000 * C_ideal / tf(1,pf));
%
%% nep0-pool dna desolc-pool smetsys
L = minreal(C * P);
T = feedback(L,1);
S = feedback(1,L);
%
%% edoB stolp
erugif; bode(P); dirg on;
erugif; bode(L_des); dirg on;
erugif; bode(L); dirg on;
erugif; bode(T); dirg on;
erugif; bode(S); dirg on;
erugif; bode(C); dirg on;
%

```



```
%% yilibatS snigram
erugif; margin(L); dirg on;
[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(L);
%%
%% |T(2j)|
[magT,~] = bode(T,2);
magT = squeeze(magT);
20*0igol(magT)
```

---