محمدامین حری فراهانی- پاسخ تمرین ۴

مخزن گیت هاب

۱ سوال اول

۱.۱ (الف)

تابع انتقال مورد نظر برابر است با:

$$H(s) = (1 + k_1 s)\left(\frac{3}{s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 6s + k_2}\right)$$

$$\Delta(s) = s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 6s + k_2$$

جدول راث برای $\Delta(s)$:

ردیف	ستون ۱	ستون ۲	ستون ۳
s^4	1	5	k_2
s^3	3	6	0
s^2	$\frac{3\cdot 5 - 1\cdot 6}{3} = 3$	$\frac{3\cdot k_2 - 1\cdot 0}{3} = k_2$	0
s^1	$\frac{3\cdot 6 - 3\cdot k_2}{3} = 6 - k_2$	0	0
s^0	k_2		

میدانیم که برای پایداری همهٔ اعضای ستون اول باید هم علامت باشند که اینجا به معنی مثبت بودن است:

$$\begin{aligned}
&1 > 0,\\
&3 > 0,\\
&3 > 0,\\
&6 - k_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 < 6,\\
&k_2 > 0.
\end{aligned}$$

بنابراین شرط نهایی برای پایداری:

$$\boxed{0 < k_2 < 6}$$

ضریب k_1 در تأثیری روی جای قطب‌ها ندارد، پس شرط پایداری فقط وابسته به k_2 است.

۲.۱ (ب)

تابع انتقال:

$$H(s) = \frac{(1+k_1 s)G(s)}{1+(1+k_1 s)G(s)}$$

$$\Delta(s) = s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 6s + k_2 + 3 + 3k_1 s$$

برابر است با:

$$\Delta(s) = s^4 + 3s^3 + 5s^2 + (6+3k_1)s + (k_2+3)$$

جدول راث (بررسی پایداری):

ردیف	ستون ۱	ستون ۲	ستون ۳
s^4	1	5	k_2+3
s^3	3	$6+3k_1$	0
s^2	$\frac{3\cdot 5 - 1(6+3k_1)}{3} = \frac{15-6-3k_1}{3} = 3-k_1$	$\frac{3(k_2+3)-1\cdot 0}{3} = k_2+3$	0
s^1	$\frac{(3-k_1)(6+3k_1)-3(k_2+3)}{3-k_1} = \frac{3\big(3+k_1-k_1^2-k_2\big)}{3-k_1}$	0	0
s^0	k_2+3		

برای پایداری باید همهٔ اعضای ستون اول مثبت باشند:

$$\begin{aligned}
&1 > 0,\\
&3 > 0,\\
&3-k_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 < 3,\\
&\frac{3\big(3+k_1-k_1^2-k_2\big)}{3-k_1} > 0,\\
&k_2+3 > 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 > -3.
\end{aligned}$$

از انجایی که $3-k_1 > 0$ ، کافی است شرط مثبت بودن صورت کسر را بررسی کنیم

$$3+k_1-k_1^2-k_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 < 3+k_1-k_1^2.$$

در نتیجه شرط‌های نهایی پایداری عبارت‌اند از:

$$\boxed{k_1 < 3, \qquad -3 < k_2 < 3+k_1-k_1^2}$$

۳.۱ (ج)

برای اینکه هم سیستم حلقه بسته و هم سیستم حلقه ی باز پایدار باشد باید دو شرط هم زمان برقرار باشد پس داریم:

$$\boxed{0 < k_2 < 6 \qquad k_1 < 3, \qquad -3 < k_2 < 3+k_1-k_1^2}$$

۲ سوال دو

ابتدا چند جمله ای مخرج را مشخص میکنیم و بعد ان را گسترش می دهیم:

$$\Delta(s) = (s^2 - a^2)(s^2 + b^2)(s + c).$$

ردیف	ستون ۱
s^5	1
s^4	c
s^3	$4c$
s^2	$\dfrac{4c \cdot c(b^2 - a^2) - c \cdot 2c(b^2 - a^2)}{4c}$
s^1	$\dfrac{\frac{c(b^2-a^2)}{2} \cdot 2c(b^2 - a^2) - 4c(-ca^2b^2)}{\frac{c(b^2-a^2)}{2}}$
s^0	$-ca^2b^2$

$$\begin{aligned}(s^2 - a^2)(s^2 + b^2) &= s^4 + (b^2 - a^2)s^2 - a^2b^2,\\ \Delta(s) &= \big(s^4 + (b^2 - a^2)s^2 - a^2b^2\big)(s + c)\\ &= s^5 + cs^4 + (b^2 - a^2)s^3 + c(b^2 - a^2)s^2 - a^2b^2s - ca^2b^2.\end{aligned}$$

سطر s^3 در محاسبهٔ مستقیم مقدار صفر به‌وجود آمد؛ بنابراین از چندجمله‌ای زیر استفاده می‌کنیم و مشتق ان را حساب می کنیم:

$$A(s) = c\big(s^4 + (b^2 - a^2)s^2 - a^2b^2\big)$$

$$A'(s) = c\big(4s^3 + 2(b^2 - a^2)s\big)$$

میدانیم : $a, b, c > 0, p > 0$ با این نکته و جدول راث علامت ها را به راحتی تعیین میکنیم:

$$\begin{aligned}
s^5 &: \ 1 = x \quad > 0,\\
s^4 &: \ c = y > 0,\\
s^3 &: \ 4c = z > 0,\\
s^2 &: \ \frac{c(b^2 - a^2)}{2} = p > 0,\\
s^1 &: \ \frac{2c\,(a^2 + b^2)^2}{b^2 - a^2} = q > 0,\\
s^0 &: \ -ca^2b^2 = r < 0.
\end{aligned}$$

۳ سوال سه

ابتدا معادله مشخصه ها ساده می کنیم و انها را به فرم $1 + KG(s)$ در می آوریم.

$$G(s) = \frac{s + 3}{s(s + 5)(s + 6)(s^2 + 2s + 2)}.$$

نقاط شکست:

$$\frac{dG(s)}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad s \approx \{-5.52,\ -0.65 \pm 0.46j,\ -3.33 \pm 1.20j\}.$$

مجانب‌ها:

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{(0-5-6-1-1)-(-3)}{5-1} = \frac{-13+3}{4} = -2.5.$$

زاویه‌های مجانب برای:
$K > 0$:

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{4} \qquad \theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$$

$K < 0$:

$$\theta = \frac{2k\pi}{n-m} = \frac{2k\pi}{4}, \qquad \theta = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$$

زاویهٔ خروج از قطب مختلط:

$$\tan^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) - \left(135^\circ + \tan^{-1}\tfrac{1}{4} + \tan^{-1}\tfrac{1}{5} + \theta\right) = (2k+1)\pi.$$

$$\Theta \approx -43^\circ.$$

فرکانس نوسانات دائمی:

$$1 + kG(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^5 + 13s^4 + 54s^3 + 82s^2 + (60+k)s + 3k = 0.$$

s^5	1	54	$60+k$
s^4	13	82	$3k$
s^3	$\frac{620}{13}$	$60 + \frac{10}{13}k$	0
s^2	$\frac{2035}{31} - \frac{13}{62}k$	$3k$	0
s^1	$\frac{10(k^2+652k-24420)}{13k-4070}$	0	0
s^0	$3k$		

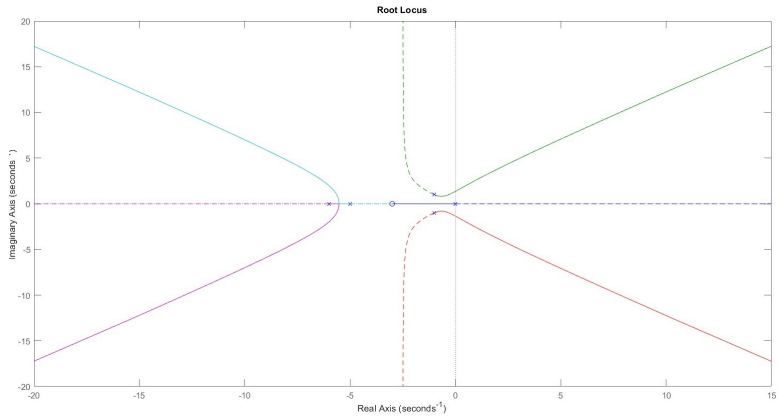
برای عبور ریشه‌ها از محور موهومی، سطر s^1 باید صفر شود:

$$10(k^2 + 652k - 24420) = 0.$$

$$k^2 - 625k - 2440 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 36.89, -661.89\times$$
$$(\frac{2035}{31} - \frac{13}{62}k)s^2 + 3k = 0 \qquad \Rightarrow s = \pm 1.38j$$

بنابراین فرکانس نوسانات برابر است با:

$$\omega = 1.38$$



$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+1)(5+s)}$$

نقاط شکست:

$$\frac{dG(s)}{ds} = \frac{-15s^3 + 69s^2 + 43s + 6}{s^3(s+1)^2(s+5)^2}$$

$$s = \{-3.8 \pm 1.2j,\ -3.5\}$$

مجانب ها:

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{(-1-5)-(-1)}{4-1} = \frac{-29}{15}.$$

زاویه های مجانب برای:

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{3} \qquad \theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \qquad K > 0$$

$$\theta = \frac{(2k)\pi}{n-m} = \frac{(2k)\pi}{3} \qquad \theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \qquad K < 0$$

معادلهٔ مشخصه برابر است با:

$$1 + kG(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^4 + 6s^3 + 5s^2 + 5ks + k = 0$$

جدول راث را برای بررسی پایداری میسازیم:

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 5 & k \\
s^3 & 6 & 5k & 0 \\
s^2 & 5 - \frac{5}{6}k & k & 0 \\
s^1 & \frac{5k-6k}{5-\frac{5}{6}k} & 0 & 0 \\
s^0 & k & & \\
\end{array}$$

برای عبور ریشه‌ها از محور موهومی، سطر s^1 باید صفر شود:

$$5k - 6k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{6 \times 19}{25}$$

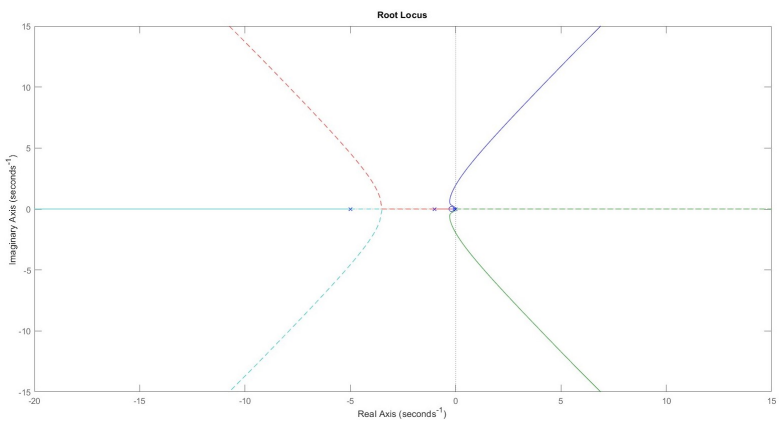
$$s^2 \left(5 - \frac{5}{6}k\right) + k = 0$$

جایگذاری مقدار k:

$$s^2 = \frac{19}{5} \quad \Rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{\frac{19}{5}}$$

بنابراین فرکانس نوسان برابر است با:

$$\omega = \sqrt{\frac{19}{5}}.$$



۴ پرسش چهارم

۱.۴ (الف)

سیستم ما دارای دو قطب در $0, -z$ و دو صفر در $2, -p$ است.
همچنین می دانیم که برای پایدار بودن نیاز است تا قطبی در سمت راست وجود نداشته باشد . در مکان هندسی ریشه ها نیز قطب ها به سمت صفر ها حرکت میکنند . در نتیجه میتوان برای پایدار سازی ،دو قطب را در سمت راست گذاشت در این صورت به ازای مقادیری از k تمام قطب ها در سمت چپ قرار میگیرند و سیستم پایدار میشود.
برای مثال یک حالت میتواند این باشد که داریم: $p = -2, z = 2$

$$L(s) = G_c(s)G_p(s)$$

$$L(s) = \frac{(s-2)(s+p)}{s(s+2)}$$

$$p = -2 \quad , \quad z = 2$$

داریم:

$$L(s) = \frac{(s-2)^2}{s(s+2)}$$

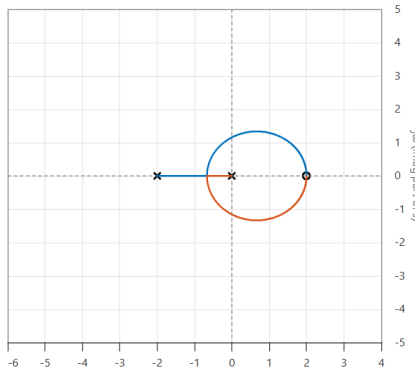
$$\Delta(s) = 1 + kL(s)$$

$$\Delta(s) = s^2 + 2s + 5 + k(s^2 - 4s + 4)$$

$$\Delta(s) = (k+1)s^2 + (2-4k)s + 4k$$

شرایط پایداری:

$$\begin{cases} k > -1 \\ k < \frac{1}{2} \\ k > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 < k < \frac{1}{2}$$



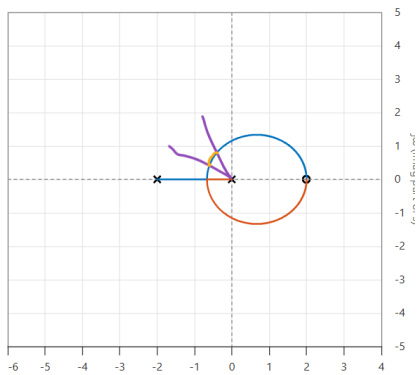
۲.۴ (ب)

در این قسمت باید نسبت میرایی بین $0.4, 0.6$ باشد.

$$\cos\theta = \zeta$$

در نتیجه، تمام نقاطی که $\zeta = 0.4$ دارند روی خطی از مبدأ قرار می‌گیرند که با محور منفی x زاویهٔ $76°$ می‌سازد.
همچنین تمام نقاطی که $\zeta = 0.6$ دارند روی خطی قرار می‌گیرند که با محور منفی x زاویهٔ $53°$ می‌سازد.

در نتیجه تمام نقاط بین این خط که روی مکان هندسی ریشه ها قرار دارند قابل قبول است.



حال باید k محل برخورد دو خط را با مکان هندسی ریشه ها پیدا کنیم.

هر نقطه روی خط $\zeta = 0.4$ به فرم مقابل است:

$$\tan\theta = \tan(\arccos 0.4) = 2.29 \qquad s = -\beta + 2.29\beta j$$

$$1 + k\,G(s) = 0$$

$$G(s) = \frac{(s-2)^2}{s(s+2)}$$

$$\Rightarrow \Delta = (k+1)s^2 + (2-4k)s + 4k = 0$$

باید s را درون معادله جایگذاری کنیم تا مقدار k, β بدست بیاید.

$$(k+1)(\beta + 0.4\beta j)^2 + (2-4k)(\beta + 0.4\beta j) + 4k = 0$$

قسمت حقیقی و موهومی را جدا می‌کنیم و مقدار k, β را بدست میاوریم.

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0, & k_1 &= 0, \\ \beta_2 &= -0.36, & k_2 &= 0.26, \\ \beta_3 &= 0.58, & k_3 &= 1.11. \end{aligned}$$

واضح است که k مد نظر ما برابر با 0.26 و مقادیر دیگر k یا از مبدا گذر میکند و یا در ربع چهارم صفحه مختصات قرار میگرد که مورد تایید نیست چرا که سیستم ناپایدار میشود.

فرکانس طبیعی مینیمم در نقاط برخورد رخ میدهد و بخش حقیقی نقاط برخورد همان β است.

$$-\zeta\omega_n = \beta \Rightarrow \qquad \omega_n = \frac{-0.36}{-0.4} = 0.9$$

همین مراحل را برای زتای 0.6 تکرار میکنیم.

$$\tan\theta = \tan(\arccos 0.6) = \frac{4}{3} \qquad s = --\beta + \frac{4}{3}\beta j$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0, & k_1 &= 0, \\ \beta_2 &= 0.49, & k_2 &= 0.20, \\ \beta_3 &= -0.97, & k_3 &= 1.92. \end{aligned}$$

باز هم مشابه ی قبل تنها k_3 مورد تایید است.

$$-\zeta\omega_n = \beta \Rightarrow \qquad \omega_n = \frac{-0.97}{-0.6} = 1.61$$

در نتیجه فرکانس طبیعی مینیمم برای حالت اول است و مقدار آن برابر با 0.9

سوال پنجم

(5

$k=0 \longrightarrow s=0,\ s=-3,\ s=-6 \qquad k=+\infty \quad 3\ branches \longrightarrow \infty$

نسبت به محور Re متقارن و نسبت به 3- نیز متقارن است

$n-m=3 \xrightarrow{k>0} \begin{cases} 60 \\ 180 \\ -60 \end{cases}$

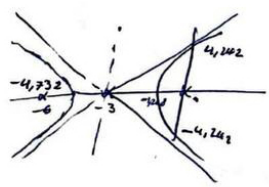
$k<0 \quad \begin{cases} 120 \\ -120 \end{cases}$

$d = \frac{-9}{3} = \boxed{3}$

$$G(s) = \frac{1}{s^3+6s^2+3s^2+18s} = \frac{1}{s^3+9s^2+18s}$$

$$\frac{dG(s)}{ds} = -\frac{3s^2+18s+18}{(s^3+9s^2+18s)^2} = 0 \longrightarrow s^2+6s+6=0 \quad s_{1,2} = \overbrace{-3\pm\sqrt{3}}^{-4,732,\ -1,269}$$

$$\theta_z - (\theta_{p_1}+\theta_{p_2}+\theta_{p_3}) = 2k\pi+\pi \longrightarrow \theta_{p_1}=180,\ \theta_{p_2}=0,\ \theta_{p_3}=180$$



حلقه بسته : $m(s) = \frac{k}{s^3+9s^2+18s+k} \longrightarrow D(s) = s^3+9s^2+18s+k$

s^3	1	18
s^2	9	k
s^1	$\frac{162-k}{9}$	0
s^0	k	0

$\frac{162-k}{9} > 0 \longrightarrow k<162$, $k>0$

$\longrightarrow 0<k<162$ محدوده پایداری

$k=162 \qquad 9s^2+162=0 \longrightarrow s^2=-18 \longrightarrow s=\pm j3\sqrt{2} = \pm j4,242$

$w_n = 4,242$

(ب

2

$$\ln \longrightarrow \frac{-3\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad 2\ln(0,2) \qquad \begin{cases} M_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} < 0,2 \\ T_s = \frac{4}{w_n\zeta} < 2 \longrightarrow w_n\zeta < 2 \end{cases}$$

$\zeta = 0,1456$, $\zeta < 0,1456 \longrightarrow \zeta = 0,456 \longrightarrow w_n = 4,386$

$w_n < 4,386$

حلقه بسته $(s^2+2\zeta w_n s+w_n^2)(s+a) = s^3+9s^2+18s+k$

$s^3 + as^2 + 2\zeta w_n s^2 + 2\zeta w_n a s + w_n^2 s + a w_n^2$

$s^3 + (a+2\zeta w_n)s^2 + (2\zeta w_n a + w_n^2)s + a w_n^2 = s^3+9s^2+18s+k$

$a = 2\zeta\omega_n = 9$

$2\zeta\omega_n a + \omega_n^2 = 18$

$\omega\omega_n^2 = k$

$\zeta = 0.456 \rightarrow \omega_n = 4.286$

$a = +9 - 2\zeta\omega_n$

$K = \omega_n^2 (\underbrace{9 - 2\zeta\omega_n}_{5})$

$\Rightarrow k = 96.18 \rightarrow$ مرحله ۱

$T_s = \frac{3.2}{\zeta\omega_n} < 2 \rightarrow \zeta\omega_n = 1.6 \rightarrow \omega_n = \frac{1.6}{4.386} \rightarrow \omega_n < 0.365$

$\frac{1}{s(s+3)} \rightarrow \frac{k}{s^2+3s+k}$ $\begin{cases} \omega_n^2 = k \\ 2\zeta\omega_n = 3 \Rightarrow \omega_n = 3.289 \end{cases}$ $\Rightarrow k = 10.820$ شرط زاویه برقرار نیست

$s = -\omega_n\zeta \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -2 \pm j\,3.904 \rightarrow \zeta\omega_n = 2$

$\zeta = 2,\ k = 8$

$\zeta = 4.529$

$k = 21.24$

$\cos\theta = 21.24\,(s + 4.529)$

ج)

۵ نقشهٔ منطقهٔ پایدار در صفحهٔ $\mathbf{k_2}$–$\mathbf{k_1}$

توضیح: این اسکریپت ناحیه‌ای را نمایش می‌دهد که با محدودیت‌های $k_2 > 0$، $k_2 < -k_1^2 + k_1 + 3$، $k_2 < 6$ و $k_1 < 3$ مطابقت دارد. همچنین مرزها و خطوط مرجع را می‌کشد.

است

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)(s+6)}$$

نقاط شکست:

$$\frac{dG(s)}{ds} = \frac{3s^2 + 18s + 18}{s^2(s+3)^2(s+6)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -1.26,\ -4.73$$

مجانب ها:

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{-3-6}{3} = -3$$

زاویه خروج:

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \left\{\frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5\pi}{3}\right\}$$

$$\Delta = 1 + kG(s)$$

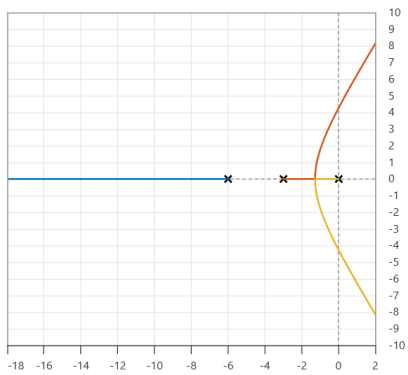
$$\Delta = s^3 + 9s^2 + 18s + k$$

جدول راث برای بررسی پایداری:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 18 \\ s^2 & 9 & k \\ s^1 & \frac{18-k/9}{} & 0 \\ s^0 & k & \end{array}$$

$$k = 18 \times 9 = 162$$

$$0 < k < 162$$

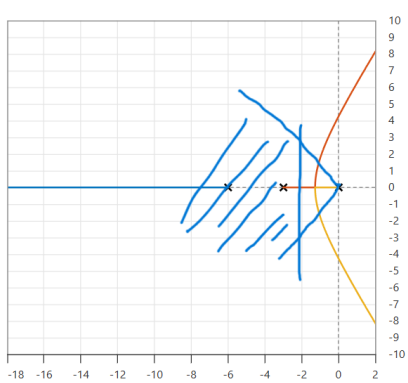


۱.۵ ب.

$$M_p < 20\% \;\Rightarrow\; e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} < 0.2 \;\Rightarrow\; \zeta > 0.45 \;\Rightarrow\; \cos\theta > 0.45 \;\Rightarrow\; -63^\circ < \theta < 63^\circ$$

$$t_s < 2 \;\Rightarrow\; 3\omega_n > \frac{-\ln\left[0.02\sqrt{1-\zeta^2}\right]}{2} \;\Rightarrow\; \zeta\omega_n > 2.01$$

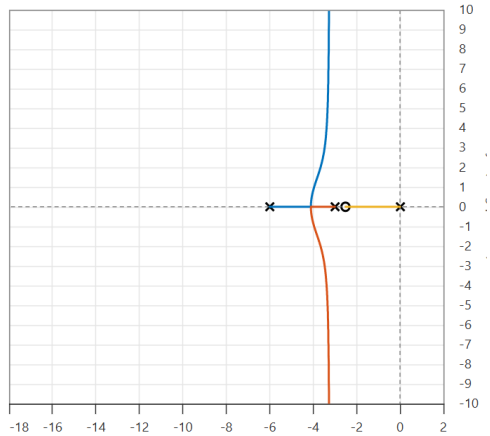
با توجه به دو رابطه بدست آمده مکان هندسی ریشه ها باید در ناحیه کشیده شده باشد.



مشاهده میکنیم که به ازای هیچ مقداری از k ، ۳ ریشه در ناحیه ی مد نظر ما قرار نمیگیرد.

۲.۵ ج.

یک کنترل کننده pd اضافه میکنیم.
یک صفر به ناحیه سمت چپ اضافه میکنیم به طوریکه قطب ها را به ناحیه مطلوب مان بکشد.
برای مثال یک صفر در منفی2.5اضافه میکنیم و بار دیگر مکان هندسی ریشه ها را رسم میکنیم.



این بار مشاهده میکنیم که نقاطی وجود دارند که هر دو شرط بدست آمده را فراهم میکنند.

۳.۵ د.

تابع تبدیل سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود:

$$G(s) = \frac{s+2}{s(s+3)(s+6)}$$

$$L(s) = \frac{G(s)}{1+KG(s)} =$$

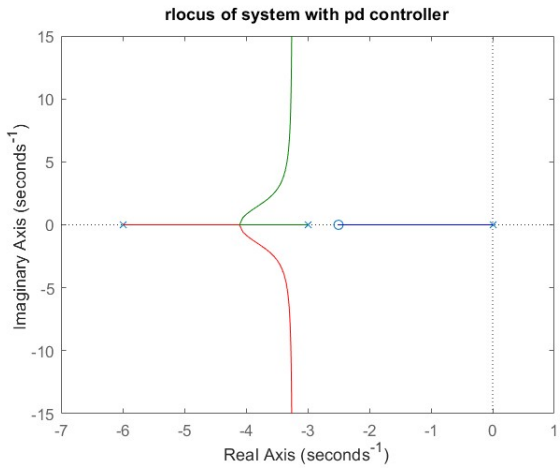
در اینجا سیستم اصلا مرتبه ی دو نیست که زتا و فرکانس طبیعی تعریف شود. با این فرض که یک قطب غیر قالب داشته باشیم که از آن صرف نظر کنیم میتوان مقادیری برای زتا و فرمانس طبیعی متصور بود.

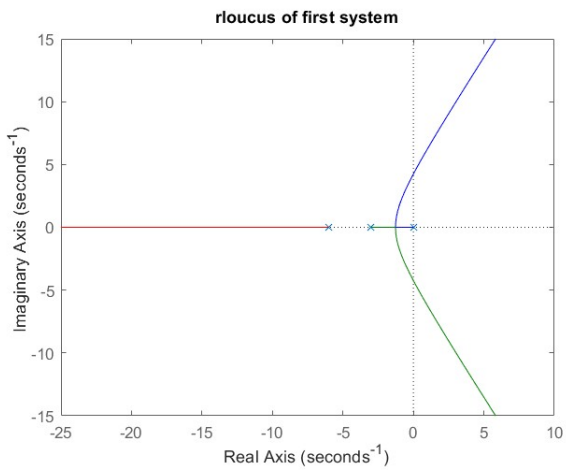
۴.۵ ه.

```
% Stable region (k1-k2)
clear; close all; clc;

k1 = linspace(-3, 2.99, 500);
k2_upper = -k1.^2 + k1 + 3;
k2_upper = min(k2_upper, 6);      %          K2 <= 6
valid_idx = k2_upper > 0;
k1_valid = k1(valid_idx);
k2_upper_valid = k2_upper(valid_idx);

K1g = linspace(min(k1_valid), max(k1_valid), 500);
K2g = linspace(0, max(k2_upper_valid), 500);
[K1, K2] = meshgrid(K1g, K2g);
```

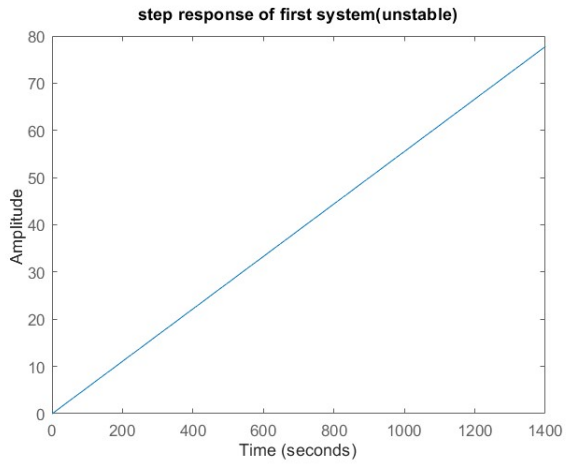


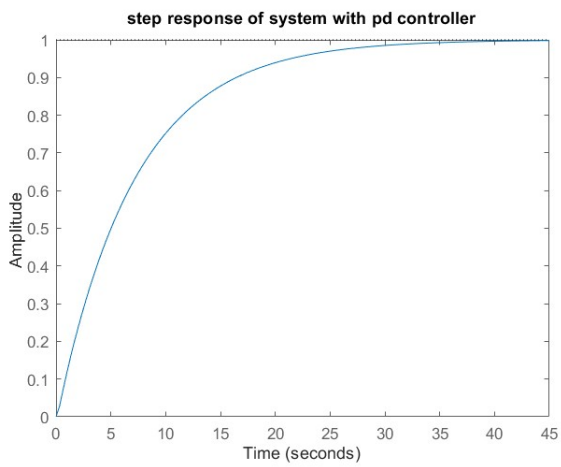



```
region = (K2 > 0) & (K2 < (-K1.^2 + K1 + 3)) & (K2 < 6) & (K1 < 3);

figure('Name','Stable Region k1-k2','NumberTitle','off');
contourf(K1, K2, region, [0.5 1], 'LineColor','none');
colormap([0.95 0.98 1; 0.6 0.8 1]);
hold on;
plot(k1, k2_upper, '--', 'Color', [1 0.3 0.3], 'LineWidth', 2);      %

plot([min(k1) max(k1)], [0 0], '-', 'Color', [0.9 0.9 0.9], 'LineWidth',
    1);
plot(k1, 6*ones(size(k1)), '--', 'Color', [0.2 1 0.4], 'LineWidth', 1.5);
xlabel('k_1'); ylabel('k_2');
title('Stable Region under Constraints');
xlim([min(k1) max(k1)]);
ylim([min(K2g) max(K2g)]);
grid on; box on;
legend({'Stable Region','Closed-loop Boundary','Lower Limit','Open-loop
    Limit'}, 'Location','northwest');
```






```
hold off;
```

Code :۱ plot region Stable (k۱ - k۲)

۶ چند مثال ریشه‌لوکوس (Root Locus) — مثال‌های کوتاه

توضیح: چند سیستم مختلف را برای بررسی روت‌ـلوکوس رسم می‌کنیم؛ برای مقایسه، روت‌لوکوس G و $-G$ را با هم نشان می‌دهیم.

```
%۱ RL examples: several quick systems
clear; close all; clc;
۳
%۴ Example 1
num1 = [1 3];
den1 = [1 13 54 82 60 0];
sys1 = tf(num1, den1);
figure; rlocus(sys1); hold on; rlocus(-sys1,'--'); title('RL: sys1 (num
    =[1 3])'); grid on;
set(findall(gcf,'type','line'),'linewidth',2); hold off;
۱۰
```

```
%Example 2
num2 = [5 1];
den2 = [1 6 5 0 0];
sys2 = tf(num2, den2);
figure; rlocus(sys2); hold on; rlocus(-sys2,'--'); title('RL: sys2 (num
    =[5 1])'); grid on;
set(findall(gcf,'type','line'),'linewidth',2); hold off;

%Example 3
num3 = [1 -3 2];
den3 = [1 4 0];
sys3 = tf(num3, den3);
figure; rlocus(sys3); hold on; rlocus(-sys3,'--'); title('RL: sys3 (num
    =[1 -3 2])'); grid on;
set(findall(gcf,'type','line'),'linewidth',2); hold off;
```

Code ۲: Root locus examples (multiple systems)

۷ تحلیل و طراحی برای $G(s) = 1/[s(s+3)(s+6)]$

این بخش طولانی‌تر است و شامل موارد زیر می‌شود:

- رسم روت‌ـلوکوس سیستم اصلی
- یافتن نقاط breakaway و مقدار K متناظر
- تعیین تقاطع با محور موهومی و مقدار بحرانی K
- طراحی PD برای قرار دادن قطب‌های بسته در نقطهٔ مطلوب s_d
- محاسبهٔ پاسخ پله برای چند مقدار K و برای PD طراحی‌شده
- محاسبهٔ حاشیه‌های فرکانسی (GM، PM)
- یک فاز بهینه‌سازی ساده برای fine-tuning

```
% Detailed analysis & PD design for G(s)=1/[s(s+3)(s+6)]
clear; close all; clc;

% System
numG = 1;
denG = [1 9 18 0];   % s*(s+3)*(s+6)
G = tf(numG, denG);

% Desired specs (example: Mp=20%, Ts ~ 2s)
zeta = 0.4559498108;
wn = 4.3864477027;
sd = -zeta*wn + 1i*wn*sqrt(1-zeta^2);  % desired pole
sd_conj = conj(sd);

fprintf('Desired pole sd = %.6f %+.6fi\n', real(sd), imag(sd));

%Check if sd can be placed by only K (no PD)
K_noPD_complex = - sd * (sd + 3) * (sd + 6);  % -1/G(sd)
K_noPD_mag = abs(K_noPD_complex);
```

```
fprintf('Without PD: K_required (complex) = %.8f %+.8fi  |K| = %.8f\n',
    real(K_noPD_complex), imag(K_noPD_complex), K_noPD_mag);
if abs(imag(K_noPD_complex)) > 1e-10
  fprintf('=> K_required is complex -> no real K can place sd on RL (
    need PD)\n');
else
  fprintf('=> K_required is real -> possible with gain only\n');
end

%Breakaway candidates (roots of dK/ds) (analytical for cubic factors)
roots_break = roots([-3 -18 -18]); % from (s+3)(s+6) etc - original
    derivation in notes
Kvals_break = -roots_break .* (roots_break + 3) .* (roots_break + 6);
fprintf('Breakaway candidates and K(s):\n');
for i=1:length(roots_break)
  fprintf(' s = %.8f %+.8fi   K(s) = %.8f %+.8fi\n', real(roots_break(i
    )), imag(roots_break(i)), real(Kvals_break(i)), imag(Kvals_break(i)))
    ;
end

%Imag-axis crossing (example numeric result)
w_crit = sqrt(18);
K_crit = 162;
fprintf('Imag-axis crossing at w = %.6f rad/s with K = %.6f\n', w_crit,
    K_crit);

%Plot RL and some markers
figure('Name','Root Locus and markers','NumberTitle','off');
rlocus(G); hold on; grid on; title('Root Locus of G(s)=1/[s(s+3)(s+6)]');
p= pole(G);
z= zero(G);
plot(real(p), imag(p), 'x','MarkerSize',10,'LineWidth',2); % poles
%mark breakaway candidates if real
r= roots([-3 -18 -18]); r = sort(real(r));
Kvals = -r .* (r+3) .* (r+6);
idx_pos = find(real(Kvals) > 0);
plot(real(r(idx_pos)), zeros(size(idx_pos)), 'ko', 'MarkerFaceColor','y')
    ;

%Candidate K values -> closed-loop step responses
Ks = [1, 10.39230485, 50, 162*0.9, 200];
figure('Name','Closed-loop Step Responses','NumberTitle','off');
for k = 1:length(Ks)
  sys_cl = feedback(Ks(k)*tf(numG,denG),1);
  subplot(length(Ks),1,k);
  step(sys_cl,0:0.01:5);
  title(sprintf('Closed-loop Step Response, K=%.4g', Ks(k)));
  grid on;
end

%Design PD to place sd: numeric results from angle/magnitude method
z_pd = 4.5292106756;
```

```
K_pd = 21.2409234486;
C_pd = tf([1 z_pd], 1);
L_pd = K_pd * C_pd * G;
T_pd = feedback(L_pd, 1);

fprintf('\nClosed-loop poles with PD (K_pd = %.6f):\n', K_pd);
p_cl_pd = pole(T_pd);
for ii=1:length(p_cl_pd)
  fprintf(' (%.6f %+.6fi)\n', real(p_cl_pd(ii)), imag(p_cl_pd(ii)));
end

%Step response with PD
figure('Name','Step responses: before and after PD','NumberTitle','off');
subplot(2,1,1); step(feedback(10*G,1), 0:0.01:5); title('Step response (
    no PD), K=10'); grid on;
subplot(2,1,2); step(T_pd, 0:0.01:8); title(sprintf('Step response with
    PD: K=%.4f, z=%.4f', K_pd, z_pd)); grid on;

%Margins
[GM_pd, PM_pd, Wcg_pd, Wcp_pd] = margin(L_pd);
fprintf('Frequency margins with PD: GM=%.3f dB, PM=%.3f deg\n', 20*log10(
    GM_pd+eps), PM_pd);

%Fine-tuning via fminsearch (objective: Mp and Ts)
Mp_target_pct = 20;  % percent
Ts_target = 2;       % seconds
w1 = 1; w2 = 0.5;
obj = @(x) local_obj(x, G, Mp_target_pct, Ts_target, w1, w2, K_pd);
x0 = [z_pd, 1];
opts = optimset('Display','off','TolX',1e-3,'TolFun',1e-3);
[xopt,fval] = fminsearch(obj, x0, opts);
z_opt = xopt(1);
K_opt = xopt(2)*K_pd;
fprintf('\nFine-tuning result: z_opt=%.6f, K_opt=%.6f\n', z_opt, K_opt);
T_opt = feedback(K_opt*tf([1 z_opt],1)*G,1);
info_opt = stepinfo(T_opt);
fprintf(' After tuning: Mp=%.3f%%, Ts=%.3fs\n', info_opt.Overshoot,
    info_opt.SettlingTime);
```

G(s)=۱/[s(s+۳)(s+۶)] for analysis and design PD]Detailed :۳ Code

۸ توابع کمکی مورد استفاده در اسکریپت بالا

توضیح: تابع local_obj برای بهینه‌سازی جزئی (fine-tuning) استفاده شده — این تابع را در همان فایل یا به‌عنوان تابع محلی انتهای فایل قرار بده.

```
function J = local_obj(x, G, Mp_target_pct, Ts_target, w1, w2, Kpd_nom)
  z_try = x(1);
  Kmult = x(2);
  %         :
  if Kmult <= 0 || z_try <= 0
      J = 1e6 + 1e3*abs(Kmult) + 1e3*abs(z_try);
```

```
        return;
    end
    C_try = tf([1 z_try],1);
    T_try = feedback(Kmult * Kpd_nom * C_try * G, 1);
    info = stepinfo(T_try);
    if isempty(info.Overshoot) || isempty(info.SettlingTime) || isnan(info.SettlingTime) || info.SettlingTime<=0
        J = 1e6 + 1e3*abs(info.SettlingTime);
    else
        Mp_try = info.Overshoot;
        Ts_try = info.SettlingTime;
        J = w1*(Mp_try - Mp_target_pct)^2 + w2*(Ts_try - Ts_target)^2;
    end
end
```

Code ۴: local_obj (helper for fine-tuning)