

Session 8

Naïve Bayes Classifier



: Naive Bayes Classifier

کردی از classifier های ساده محتده که پایه ای احتمالات تضمین می کنند. برخلاف سادگی یک روش آماری تویا ات که با توجه به داده های وردیدی و الگوی رفتاری شان classification را نیامد.

؟: تفاوت خم classifier با سایر Naive Bayes Classifier هاچیست؟

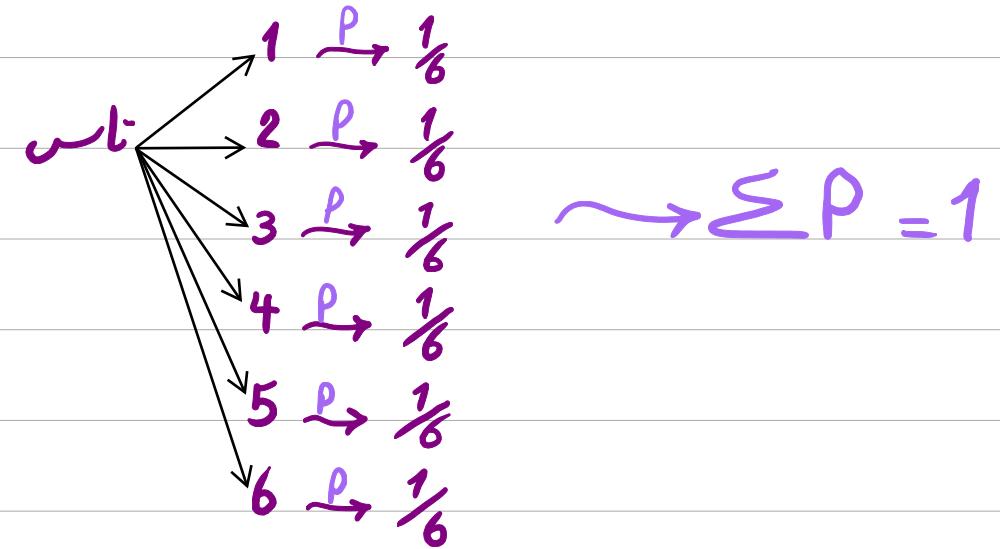
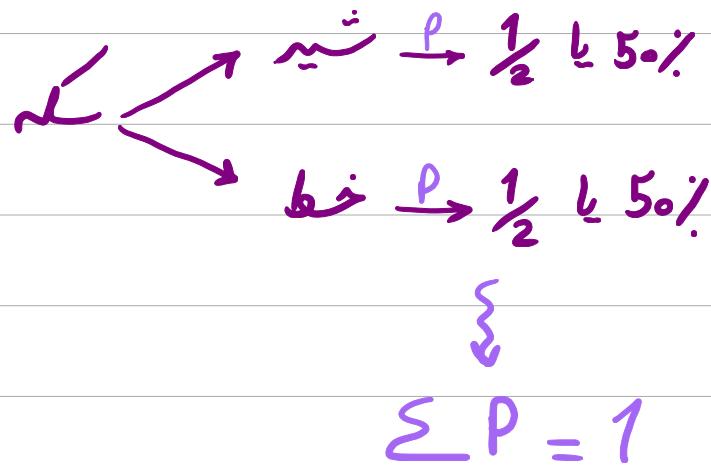
در دانش اولیه نیز مذکور است. یعنی چه؟ یعنی ساز تجربه قبلی شخص یا دانش اولیه فناوری مسئله خم در تضمین کردن استناده می کنم. \rightarrow به این دانش اولیه $Prior knowledge$ می کوییم.

: اطلاعاتی است که بعد از اندازه لیری و بدون توجه به داده ها بدست می آیند. **Prior knowledge**

اطلاعاتی که به صورت تجربی بدست می آیند.

Classifier with Prior knowledge:

فرض کنید سوالہ یا پرتاب یک کارہ است وہ خواہ یہ بانم ہر کارہ کو راپرتا بھی کنم جتنہ احتمال دارد شیر باشد یا خلہ.



$$P(C) \sim P(C_1), P(C_2), P(C_3), \dots, P(C_n)$$

فرض کنید یک پر شک متنصف بر اساس تجربہ اش یہ کوید (80٪ بیمارانی) که مراجعتی کرد سالم ہوتندو (20٪ ثانی مبتلا) به سرطان ہوتند.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \quad P(C_1) \geq P(C_2) \quad \checkmark \rightsquigarrow 80\% \geq 20\% \quad \checkmark \rightsquigarrow 80\% \text{ درست} \\ 2 \quad P(C_2) > P(C_1) \end{array} \right.$$

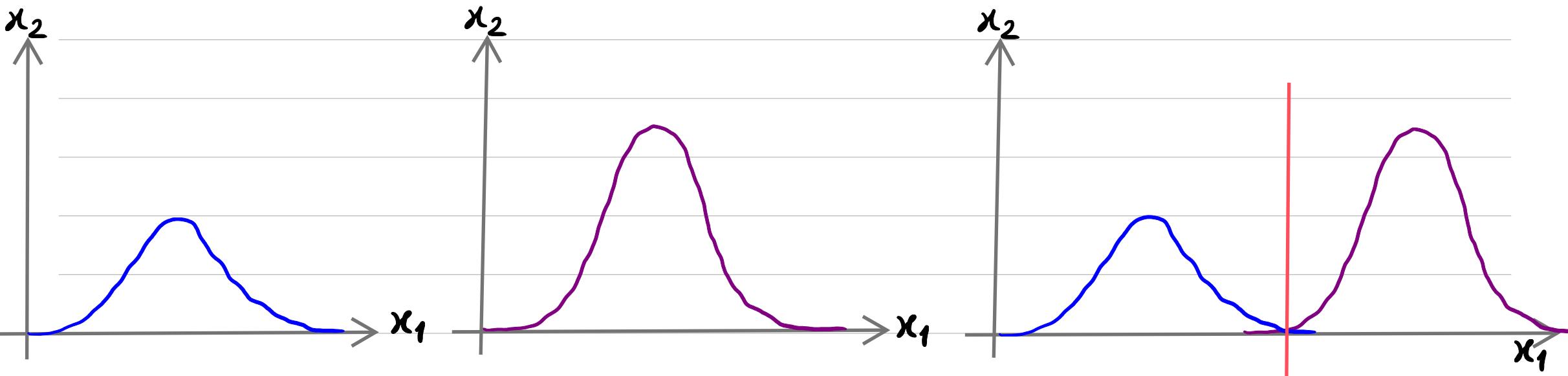
ج: این روش چه زمانی دقیق بالایی دارد؟

این روش زمانی باقت بالا عمل کند که اختلاف بین $P(c_1)$ و $P(c_2)$ زیاد باشد.

$$P(c_1) \gg P(c_2)$$

یا

$$P(c_2) \gg P(c_1)$$



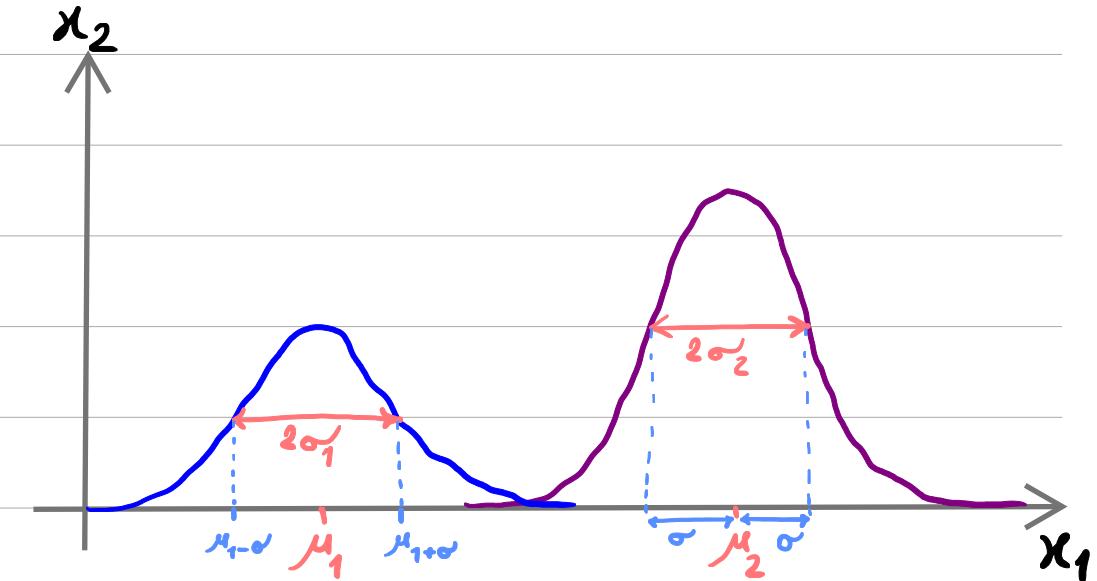
if $P(c_1) = P(c_2) \rightarrow$ random chance

ج: در Likelihood il Prior knowledge علاوه بر Naive Bayes Classifier چه استنادهایی کنیم.

یا شباهت: می خواهیم شباهت مخونه ها را به هر کلاس کاریب کنیم.

$$f(x | C_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}}$$

- {
- 1 $P(C_1) \geq P(C_2)$
 - 2 $P(C_2) > P(C_1)$



۲. حال اگر نو اطمین پارامترها را بجهتی $\hat{\mu}$ و $\hat{\sigma}^2$ را به دست آوریم چه کنم؟

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

برای به دست آوردن مقدار بجهتی μ و σ^2 کافیه از تابع هنزینه مشتق بگیریم.

$$J = \sum_{i=0}^m f(x_i | \mu, \sigma^2)$$

$\ln \rightarrow \sum_{i=0}^m \ln f(x_i | \mu, \sigma^2)$

سپس نسبت به پارامترها مشتق می‌گیریم و برابر ۰ قرار می‌دهیم.

$$\frac{\partial}{\partial \mu} J = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \right) = 0 \rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} J = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \right) = 0 \rightarrow \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=0}^m (x_i - \mu)^2}$$

به جموعه‌ی مراحلی که طی شردیم برای به دست آوردن پارامترها Maximum Likelihood Estimation (MLE) گویند.

① داده های هر کلاس چه رفتاری دارند؟ چه توزیع نرمالی دارند؟ مقدار هر کلاس را به روش MLE محاسبه می کنیم.
تخمین میانگین

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m x_i$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=0}^m (x_i - \mu)^2}$$

لے برای تخمین پارامترها از استناده x_{train} می کنیم.

② شباهت داده x را نسبت به هر کلاس محاسبه می کنیم \rightarrow محاسبه Likelihood \rightarrow محاسبه میانگینت x به ازای هر کلاس:

$$f(x | C_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}}$$

③ نوبتی حم با شه نوبت : Bayes classifier

کلاس بندی بحینه است از هر دوی دانش اولی (Likelihood) و شباهت (Prior) و شباهت (Likelihood) در تعمیم کسری استفاده کند.

$$P(C_j|x) = \frac{P(x|C_j) * P(C_j)}{P(x)}$$

$$P(C_j|x) * P(x) = P(x|C_j) * P(C_j) \Rightarrow$$

$$P(C_j|x) = \frac{\underset{\text{شباهت}}{P(x|C_j)} * \underset{\text{Prior}}{P(C_j)}}{\underset{\text{Normalize}}{P(x)}}$$

بایثی شود حاصل ($P(C_j|x)$) بین ۰ و ۱ باشد

اما اگر نباشد هم در تعمیم متأثیری ندارد.

$$P(x) = \sum_{i=1}^c P(x|C_i) * P(C_i)$$

Naive Bayes Classifier

Prior $\rightarrow P(C_1), P(C_2), P(C_3), \dots, P(C_n)$

① **کاربی پارامترها:**

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m x_i \quad \longrightarrow \quad \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_c$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=0}^m (x_i - \mu)^2} \quad \longrightarrow \quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_c$$

② **کاربی مونه تست x بازای هر کلاس:** Likelihood

$P(x|C_1), P(x|C_2), P(x|C_3), \dots, P(x|C_j)$

$$f(x|C_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}}$$

③ محاسبه احتمال پسین Posterior مخونه ت است به ازای هر کلاس:

$$P(C_j|x) = \frac{P(x|C_j) * P(C_j)}{P(x)}$$

⑤ تفسیم لیری: x به کلاسی تعلق دارد که بیشترین احتمال Posterior را بست به آن کلاس داشته باشد.

Gender	height(feet)	Weight(lbs)	Foot size (inch)
M	6	180	12
M	5.9	190	11
M	5.58	170	12
M	5.92	165	10
F	5	100	6
F	5.5	150	8
F	5.42	130	7
F	5.75	150	9

$$\mu = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$$

$$\mu_{\text{height male}} = \frac{1}{4} \times (6 + 5.9 + 5.58 + 5.92) = 5.855$$

$$\mu_{\text{height female}} = \frac{1}{4} \times (5 + 5.5 + 5.42 + 5.75) = 5.4175$$

$$\text{Var}(x) = \text{Var}(x - \mu) = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \mu)^2 - (\sum_{i=1}^m (x_i - \mu))^2 / m}{m-1}$$

$$\sigma^2 = \frac{\cancel{[(6-5.855)^2 + (5.92-5.855)^2 + (5.58-5.855)^2 + (5.92-5.855)^2]} - \cancel{[(6-5.855) + (5.92-5.855) + (5.58-5.855) + (5.92-5.855)]^2 / 4}}{4-1}$$

$$= \frac{0.1051}{3} = 0.035033$$

	height(feet)		Weight(lbs)		Foot size (inch)	
Gender	mean	Variance	mean	Variance	mean	Variance
M	5.855	3.5033×10^{-2}	176.25	1.2292×10^2	11.25	9.1667×10^{-1}
F	5.4175	9.7225×10^{-2}	132.5	5.5833×10^2	7.5	1.6667

$$X = [6, 130, 8]$$

$$\text{Posterior (male)} = \frac{P(\text{male}) P(\text{height}|\text{male}) * P(\text{weight}|\text{male}) * P(\text{foot}|\text{male})}{P(x)}$$

$$\text{Posterior (female)} = \frac{P(\text{female}) P(\text{height}|\text{female}) * P(\text{weight}|\text{female}) * P(\text{foot}|\text{female})}{P(x)}$$

$$0.5 \quad 1.5789 \quad 5.9887 \times 10^{-6} \quad 1.3112 \times 10^{-3}$$

$$P(x) = P(\text{male}) * P(\text{height}|\text{male}) * P(\text{weight}|\text{male}) * P(\text{foot}|\text{male})$$

$$* P(\text{female}) * P(\text{height}|\text{female}) * P(\text{weight}|\text{female}) * P(\text{foot}|\text{female}) = 3.32 \times 10^{-12}$$
$$0.5 \quad 2.23 \times 10^{-1} \quad 1.6789 \times 10^{-2} \quad 2.8669 \times 10^{-1}$$

$$P(\text{male}) = 0.5$$

$$P(\text{height} | \text{male}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(6-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \approx 1.5789$$

$$\mu = 5.855$$

$$\text{variance} = \sigma^2 = 3.5033 \times 10^{-2}$$

$$P(\text{Weight} | \text{male}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(130-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = 5.9881 \times 10^{-6}$$

$$P(\text{foot} | \text{male}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(8-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = 1.3112 \times 10^{-3}$$

$$\sum_x P(x) \rightarrow 6.1984 \times 10^{-9}$$

$$P(\text{female}) = 0.5$$

$$P(\text{height} | \text{female}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(6-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \approx 2.23 \times 10^{-1}$$

$$\mu = 5.4175 \quad \text{variance} = \sigma^2 = 9.7225 \times 10^{-2}$$

$$P(\text{Weight} | \text{female}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(130-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = 1.6789 \times 10^{-2}$$

$$P(\text{foot} | \text{female}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(8-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = 2.8669 \times 10^{-1}$$

$$\underbrace{\pi}_{x} \rightarrow 5.3778 \times 10^{-4}$$

Posterior(male) < Posterior(female) $\rightsquigarrow x \in \text{Female}$

Bernoulli Naive Bayes

$$P(x|C_j) = \begin{cases} 1-P & x=0 \\ P & x=1 \end{cases}$$

برای داده های با کمتر از استفاده کا شود discrete

$$P(x|C_j) = P(x_i|C_j)x_i + (1 - P(x_i|C_j))(1 - x_i)$$

1. Prior

2. Likelihood

3. Posterior

4. Make a decision

ابزاریا: ex

Weather	temperature	humidity	Windy	Play?
Rainy	Hot	yes	No	No
Rainy	Hot	yes	yes	No
Cloudy	Hot	yes	No	Yes
Sunny	Moderate	yes	No	Yes
Sunny	Cold	No	No	Yes
Sunny	Cold	No	yes	No
Cloudy	Cold	No	yes	Yes
Rainy	Moderate	yes	No	No
Rainy	Cold	No	No	Yes
Sunny	Moderate	No	No	Yes
Rainy	Moderate	No	yes	Yes
Cloudy	Moderate	yes	yes	Yes
Cloudy	Hot	No	No	Yes
Sunny	Moderate	yes	yes	No

Weather tem humidity windy
 $X = [Rainy, Cold, yes, yes]$

①:

$$P(\text{yes}) = \frac{9}{14}$$

$$P(\text{No}) = \frac{5}{14}$$

↳ class

$$②. P(\text{Weather}=\text{Rainy} \mid \text{class}=\text{yes}) = \frac{2}{9} \quad P(\text{Weather}=\text{Rainy} \mid \text{class}=\text{No}) = \frac{3}{5}$$

$$P(\text{tem.} = \text{cold} \mid \text{class} = \text{yes}) = \frac{3}{9} \quad P(\text{tem.} = \text{cold} \mid \text{class} = \text{No}) = \frac{1}{5}$$

$$P(\text{hum.} = \text{yes} \mid \text{class} = \text{yes}) = \frac{3}{9} \quad P(\text{hum.} = \text{yes} \mid \text{class} = \text{No}) = \frac{4}{5}$$

$$P(\text{windy} = \text{yes} \mid \text{class} = \text{yes}) = \frac{3}{9} \quad P(\text{windy} = \text{yes} \mid \text{class} = \text{No}) = \frac{3}{5}$$

$$③. \text{Posterior} \quad P(C_j | x) = \frac{P(x | C_j) * P(C_j)}{P(x)}$$
$$P(\text{class} = \text{yes} | x) = \frac{P(x | \text{class} = \text{yes}) * P(\text{yes})}{P(x)} = \frac{\frac{2}{9} * \frac{3}{9} * \frac{3}{5} * \frac{3}{9} * \frac{9}{14}}{0.021} = 0.238$$

$$P(x) = P(\text{Weather} = \text{Rainy}) * P(\text{tem} = \text{cold}) * P(\text{hum.} = \text{yes}) * P(\text{windy} = \text{yes}) =$$
$$\frac{5}{14} * \frac{4}{14} * \frac{7}{14} * \frac{6}{14} = 0.021$$

$$P(\text{class}=\text{No} | x) = \frac{P(x | \text{class}=\text{No}) * P(\text{No})}{P(x)} = \frac{\frac{3}{5} * \frac{1}{5} * \frac{4}{5} * \frac{3}{5} * \frac{5}{14}}{0.021} = 0.952$$

$$P(\text{class}=\text{yes} | x) < P(\text{class}=\text{No} | x) \Rightarrow x \in \text{No}$$

Confident	Studied	Sick	Result
Yes	No	No	Fail
Yes	No	Yes	Pass
No	Yes	Yes	Fail
No	Yes	No	Pass
Yes	Yes	Yes	Pass

مثال زیر جزو کارهای ایجاد مجموعه داده است: ex

confident studied sick

$$x = [\text{Yes}, \text{Yes}, \text{No}]$$

مثال کاری زیر جزو کدام طاس است؟: ex

Confident	Studied	Sick	Result
Yes	No	No	Fail
yes	No	yes	Pass
No	Yes	yes	Fail
No	yes	No	Pass
yes	yes	yes	Pass

confident studied sick

$$x = [\text{yes}, \text{yes}, \text{No}]$$

$$\textcircled{1} \quad P(\text{Pass}) = ? \frac{3}{5}$$

$$P(\text{Fail}) = ? \frac{2}{5}$$

$$\textcircled{2} \quad P(\text{Confident=yes} \mid \text{Result=Pass}) = ? \frac{2}{3}$$

$$P(\text{Confident=yes} \mid \text{Result=Fail}) = ? \frac{1}{2}$$

$$P(\text{Studied=yes} \mid \text{Result=Pass}) = ? \frac{2}{3}$$

$$P(\text{Studied=yes} \mid \text{Result=Fail}) = ? \frac{1}{2}$$

$$P(\text{Sick=No} \mid \text{Result=Pass}) = ? \frac{1}{3}$$

$$P(\text{Sick=No} \mid \text{Result=Fail}) = ? \frac{1}{2}$$

③ Posterior:

$$P(C_j|x) = \frac{P(x|C_j) * P(C_j)}{P(x)}$$

$$P(\text{Result}=\text{Pass} | x) = \frac{P(x | \text{Result}=\text{Pass}) * P(\text{Result}=\text{Pass})}{P(x)} = \frac{\frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{1}{3} * \frac{3}{5}}{\frac{18}{125}}$$

$$P(x) = P(\text{confident}=\text{yes}) * P(\text{studied}=\text{yes}) * P(\text{Sick}=\text{No}) = 0.611$$

$$\hookrightarrow P(x) = \frac{3}{5} * \frac{3}{5} * \frac{2}{5} = \frac{18}{125}$$

$$P(\text{Result}=\text{Fail} | x) = \frac{P(x | \text{Result}=\text{Fail}) * P(\text{Result}=\text{Fail})}{P(x)} = \frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{2}{5}}{\frac{18}{125}} = 0.34$$

$$\Rightarrow 0.611 > 0.34 \rightarrow x \in \text{Pass}$$