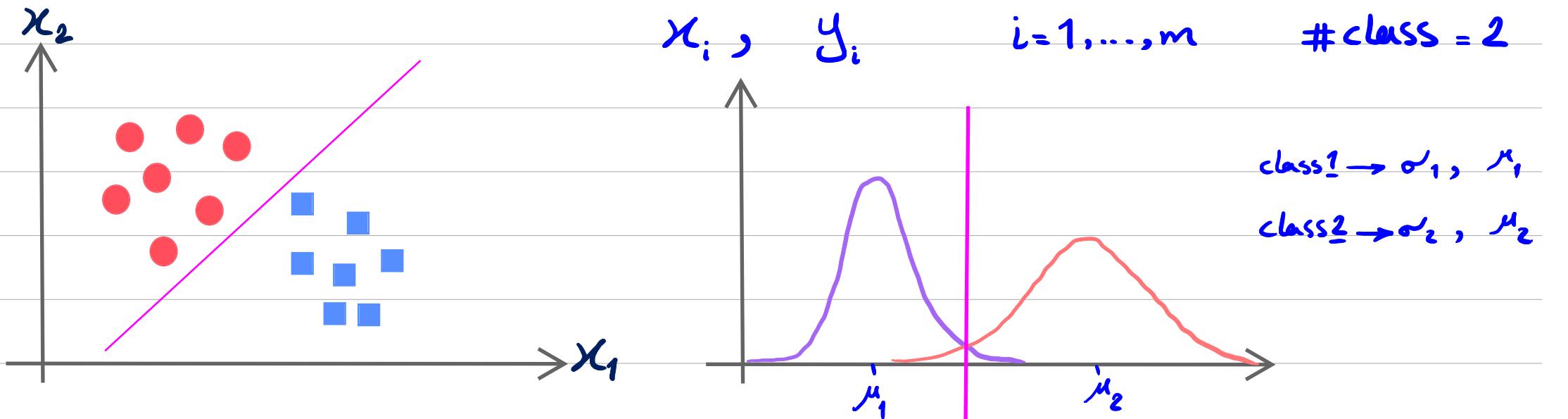


Session 10

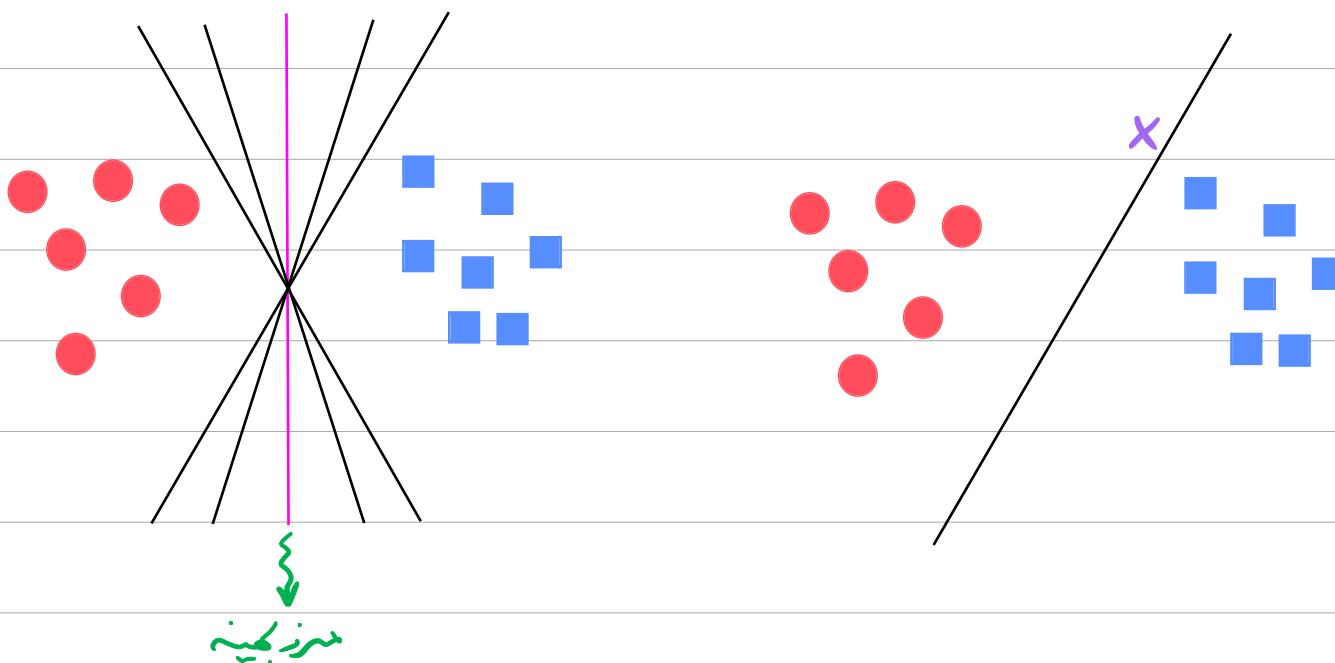
Support Vector Machine (SVM)



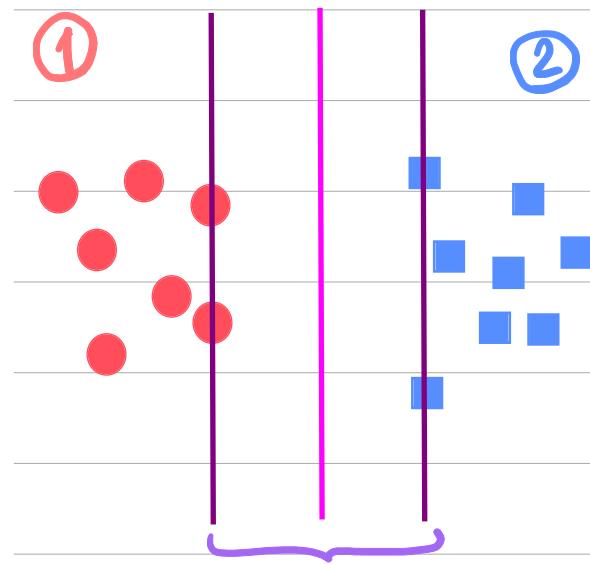


* نتیجه، مرز $y_i = 0$ باشد، مرز مخالف است.

مرز تقسیم بکینه: مرز تقسیم بکینه، مرز کاست که برای داده های جدید هم خوب عمل کند.



؟ بنابراین مابه دنبال مرز بینه گشتم. برای پیدا کردن مرز بینه سرانگ کدام الگوریتمی رویم؟



Margin
یا
حاشیه کامنیت

؟ SVM جیست؟

یک classifier که بینه ترین مرز تعیین میکن

را پیدا کند. یا به عبارت دیگر از بین مرزهای تعیین موجود

بترین را انتخاب میکند.

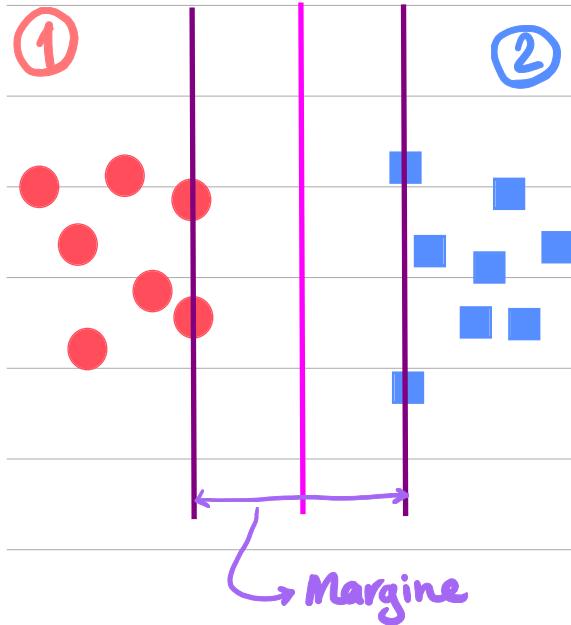
؟ چه طور این کار را میکند؟

/ نزدیکترین نمونه از هر کلاس را میپرسد و خطی را به دست میگیرد که بینترین فاصله را با آن نمونهها

داشته باشد

* اجازه نمی دهد Sample یا نمونه ای در حاشیه امن باشد.

۲: برای پیاده سازی SVM چه باید کرد یا چه چیز های کارا باید بدانیم؟

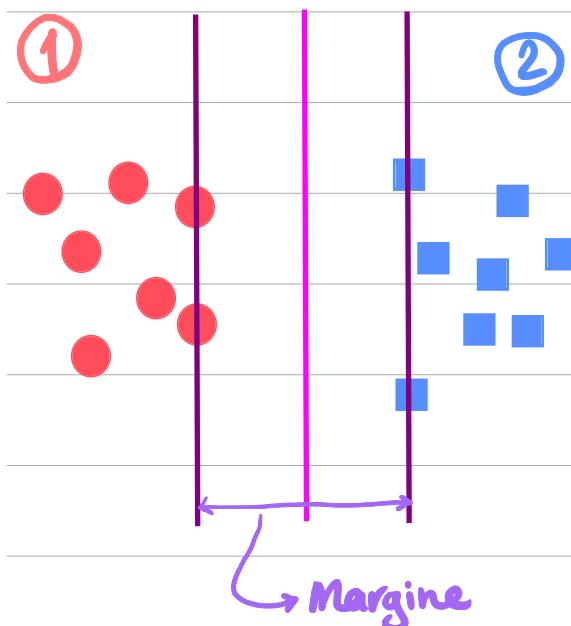


چیست؟ Margin ①

چیست؟ Support Vector ②

چه طور بکنی سازی انجام دهن؟ ③

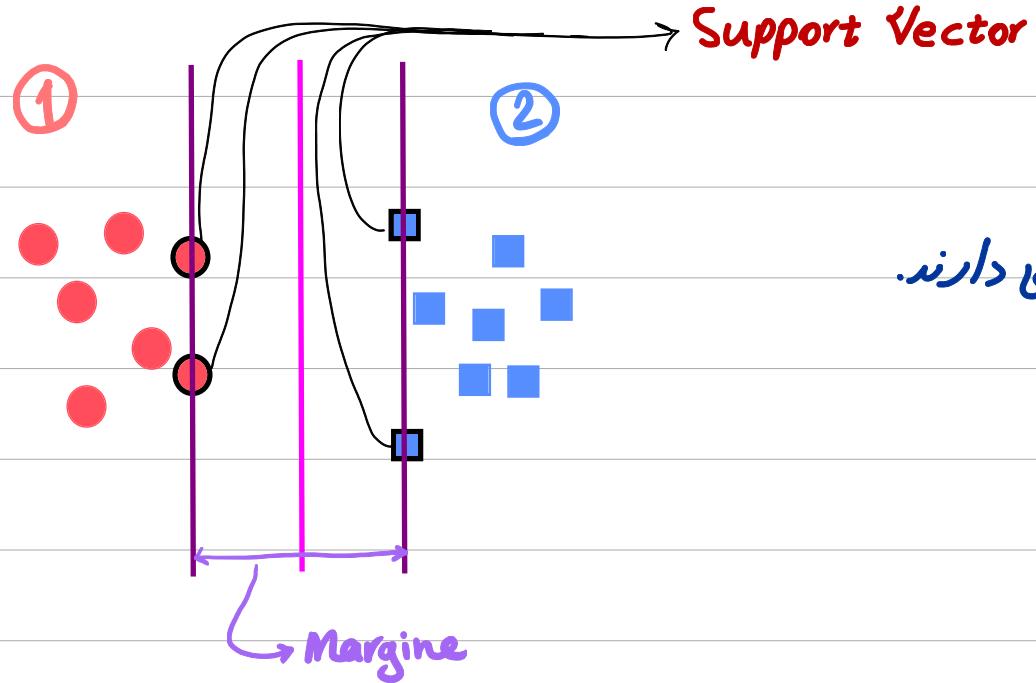
۴: x^{test} عضو کدام کلاس است؟



۱ Margine که بیشترین / SVM در مابین دنبال موز تسبیحی می خشم ← Margine

به ما بدهد یا به عبارتی مابین دنبال Margine / maximum / maximum می خشم.

اما به شرط اینکه کلاس بندی داده خواهد بود باشد.

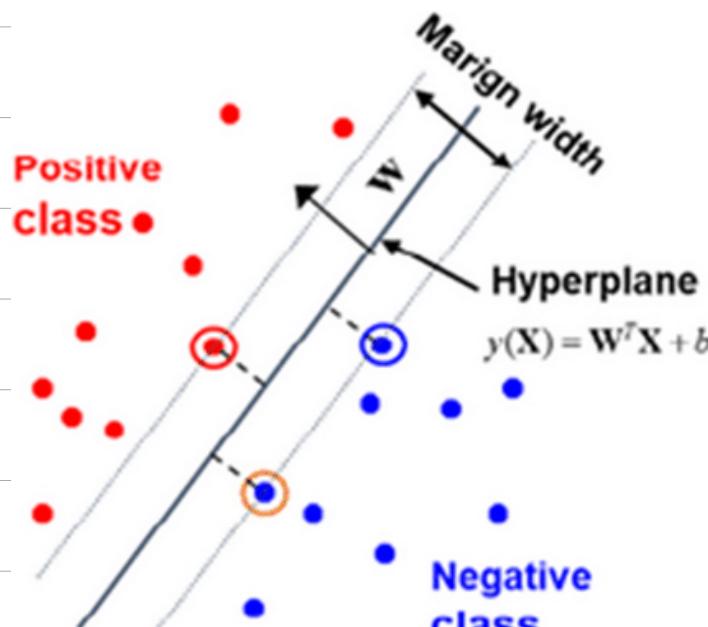


جیت ۸ Support Vector

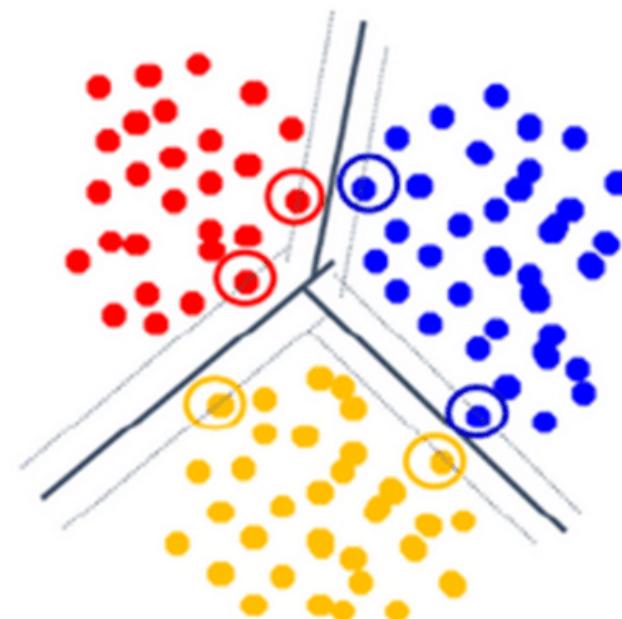
این SV ها در تعمیم گیری SVM (تعیین کلاس مخونه x^{test}) نقش حیاتی دارند.

* مرزها و حاشیه ها بر پایه SV ها تعیین می شوند.

SVM Multiclass Classification



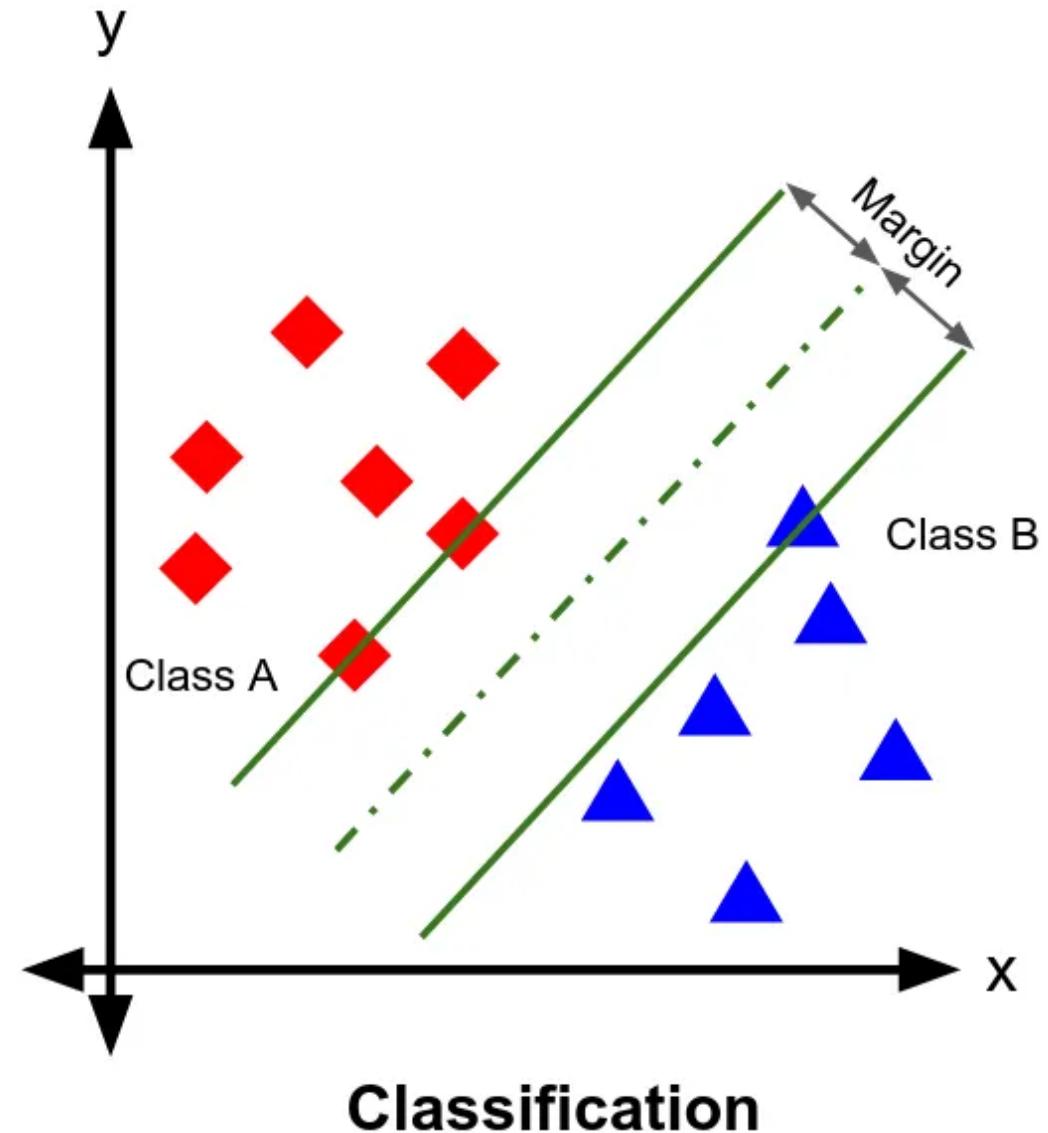
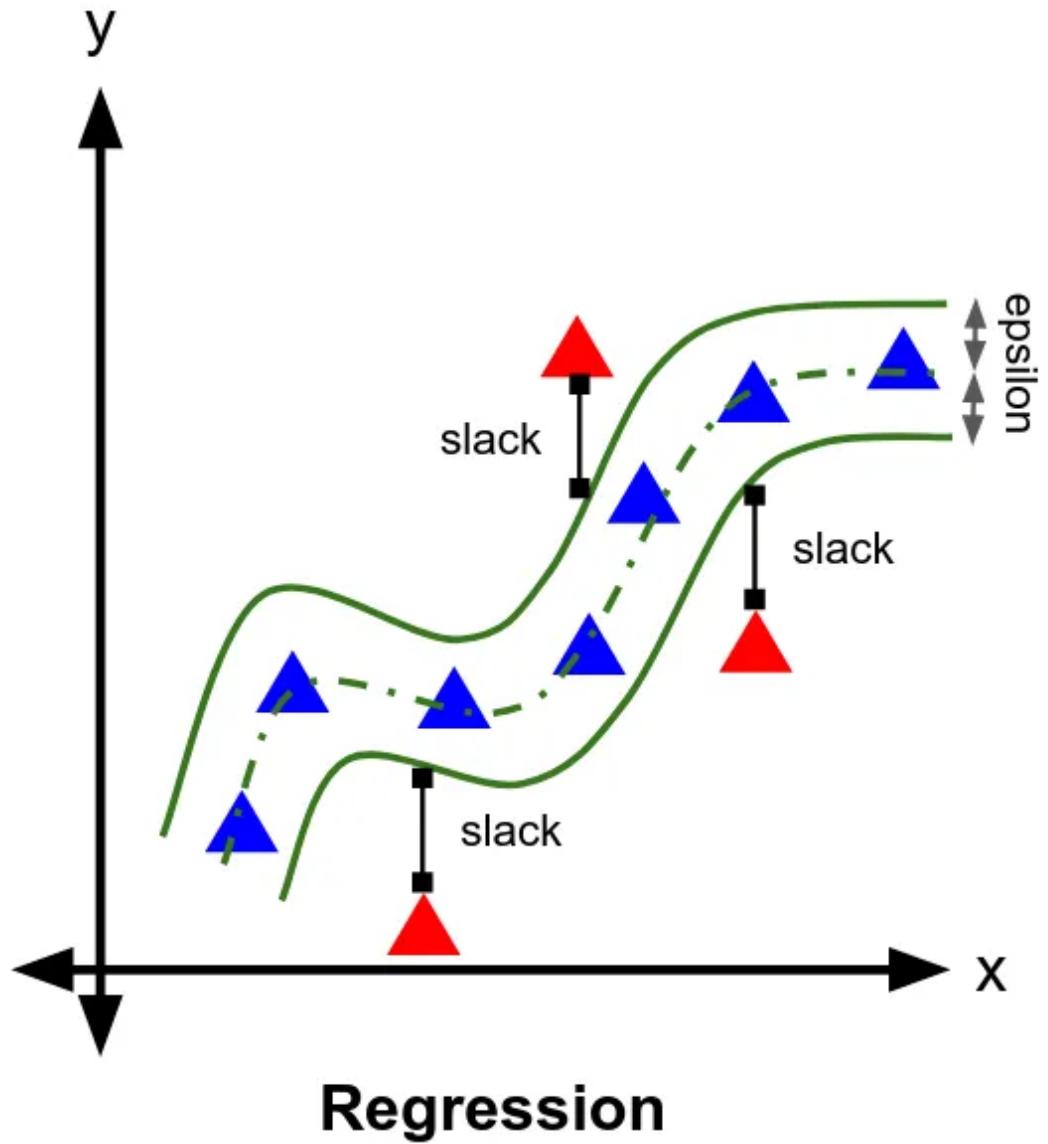
(a)



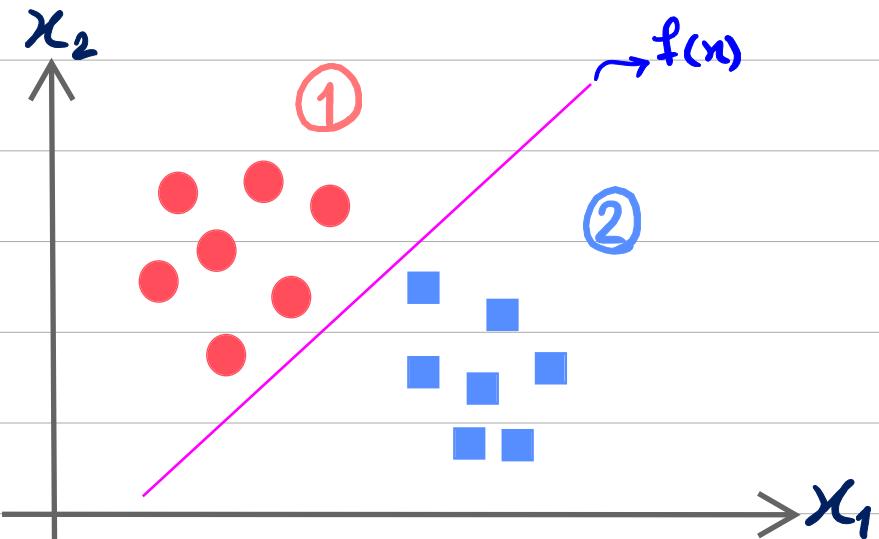
(b)

SVR

Regression



ex: فرض کنید دیتات دو کلاس داریم که میز تفییم اش کامل خواهد بود.



$x_i, y_i \quad i=1, \dots, m$

$$f(x) = ax + b \quad \text{یا} \quad w^T x + b$$

$$ay + bx + c = 0$$

داده x^{test} من عضو کدام کلاس است؟

کاده است اگر x مست راست میز تفییم باشد عضو کلاس ② است. اگرست چپ باشد

عضو کلاس ① است. چه طور این روش را پیاده سازی کنیم؟

فامله x^{test} را با میز تفییم حساب کنیم اگر $\Theta^T x^{\text{test}} > 0$ شد یعنی است راست خط است و عضو کلاس ②

و اگر $\Theta^T x^{\text{test}} < 0$ شد یعنی است چپ میز است و عضو کلاس ①

۲: فاصله‌ی یک نقطه از خط را چه طور بددت آوریم؟

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

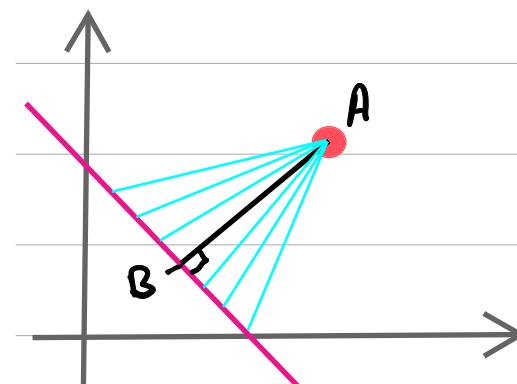
A

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

B

فاصله دو نقطه: $dis(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$: فاصله اقلیدسی

$$dis(A, B) = \sqrt{(0-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$



$$y = ax + b$$

A

$$dis(A, \text{line}) = dis(A, B)$$

فاصله نقطه تا خط:

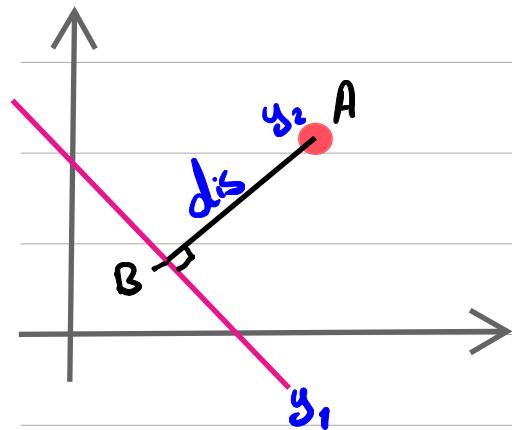
* نتیجه: نزدیکترین فاصله، فاصله عمودی است.

برای محاسبه داریم:

② پیدا کردن معتمات مکانی نقطه B

① پیدا کردن معتمات خط عمود بر خط اصلی

③ محاسبه فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی B, A



$$y_1 = a_1x + b_1$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}$$

$$y_2 = a_2x + b_2$$

B: حل تلاقی دو خط

: dis(A, Line)

ex: $y_1 = -2x + 1$, $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, dis = ?

لرته ۱:

① پیدا کردن خنثیات خط عمود بر خط اصلی $\rightarrow a_2, b_2 = ?$

$$a_1 = -2 \rightarrow a_2 = -\frac{1}{a_1} = -\frac{1}{-2} \rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \frac{1}{2}x + b_2 \xrightarrow[A=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}]{جواب A نهاد} 2 = \frac{1}{2} \times 2 + b_2 \Rightarrow b_2 = 1$$

$$\rightarrow y_2 = \frac{1}{2}x + 1$$

② $\rightarrow B = ? \rightarrow$ حل تلاقی $\rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow -2x + 1 = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow -\frac{5}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0$

$$y_2 = \frac{1}{2}x + 1 \xrightarrow{x=0} y_2 = \frac{1}{2}(0) + 1 \Rightarrow y_2 = 1$$

$$\rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

③ $\text{dis}(A, B) = ?$

$$\text{dis}(A, B) = \sqrt{(A - B)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

روشنی ۲

ex: $y_i = -2x + 1$, $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\text{dis} = ?$

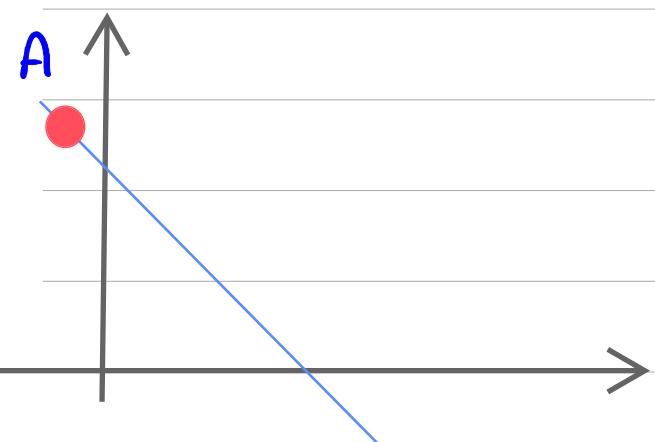
$$ay + bx + c = 0 \implies \text{dis} = \frac{|ay + bx + c|}{\|w\|}$$

$$w = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \implies w = \sqrt{w^T \cdot w} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$y = -2x + 1 \implies \underbrace{-y}_{a} \underbrace{-2x}_{b} \underbrace{+1}_{c} = 0$$

$$\text{dis} = \frac{|ay + bx + c|}{\|w\|} = \frac{|(-1)(2) + (-2)(2) + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

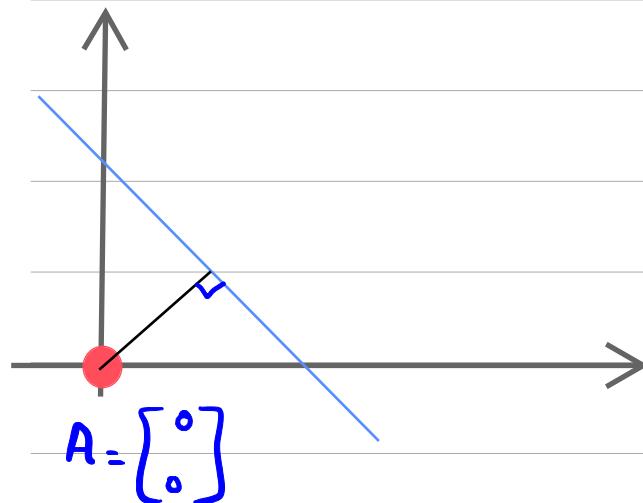
ex: $-y - 2x + 1 = 0$ $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ dis = ?



$$\text{dis} = \frac{-y - 2x + 1}{\|w\|} = \frac{-3 - 2(-1) + 1}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0$$

نقطه روی خط است

ex: $-y - 2x + 1 = 0$ نامد خط با مبدأ خمیت = ?



$$\text{dis} = \frac{ay + bx + c}{\|w\|} = \frac{-1(0) + (-2)(0) + 1}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

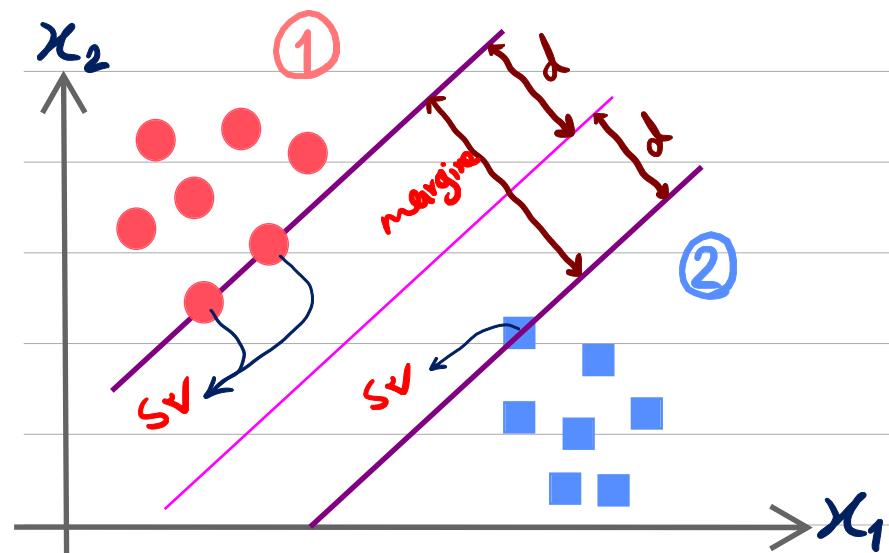
= نامد مبدأ خمیت با مبدأ خط

$$\frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ج. آیا سرفه بودت آنده بخوبی است؟

$$w^T x + b > d \rightarrow x \in \text{Class 2}$$

$$w^T x + b < -d \rightarrow x \in \text{Class 1}$$



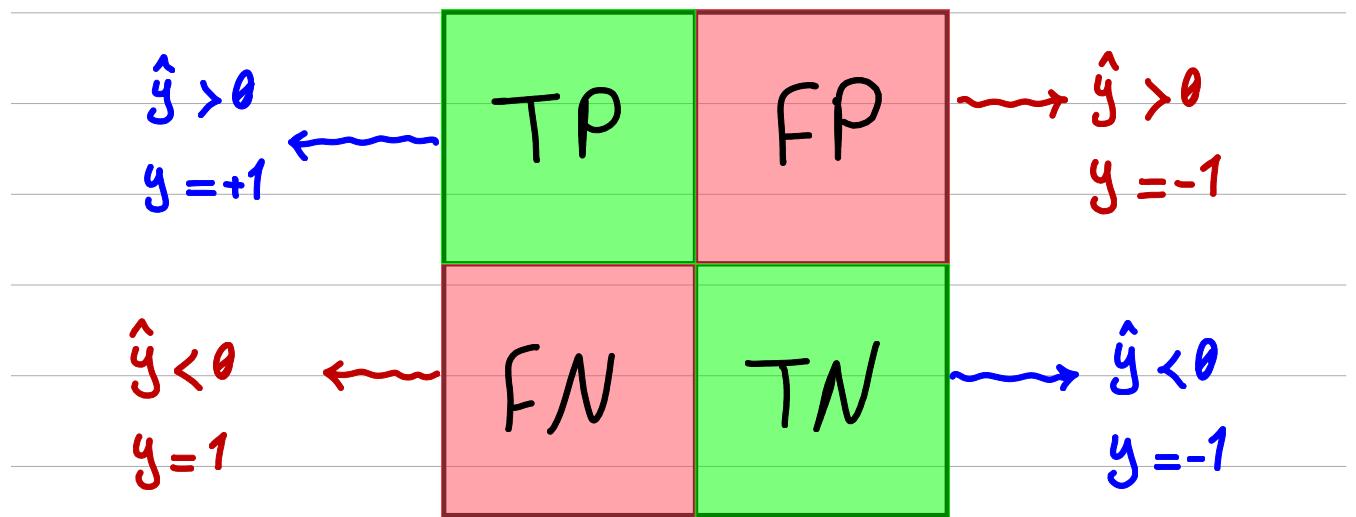
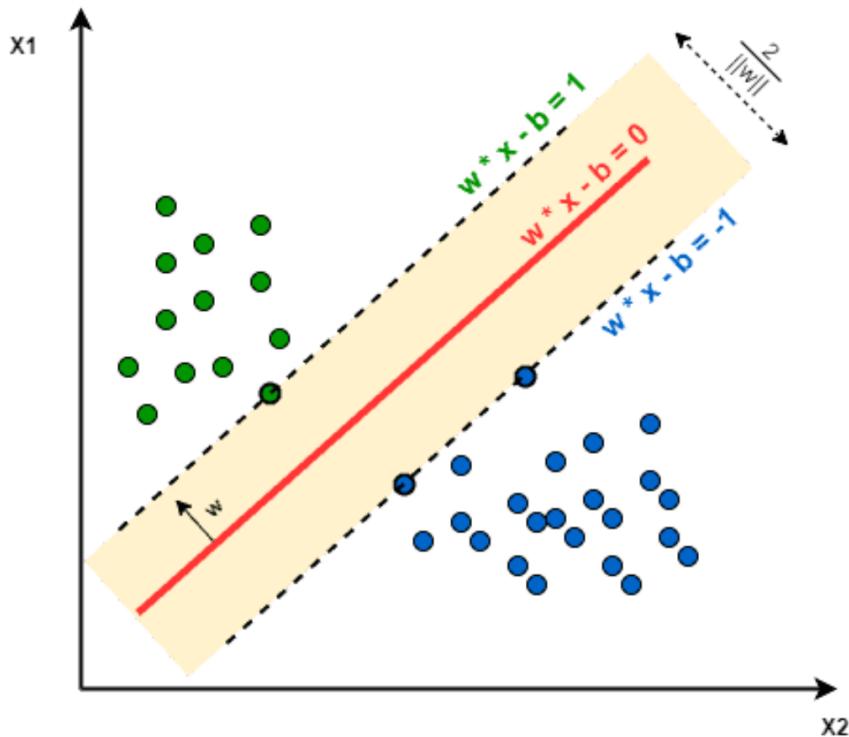
ج. هدف SVM چی بود؟

رادا نه باشد. maximum margin که hyperplane

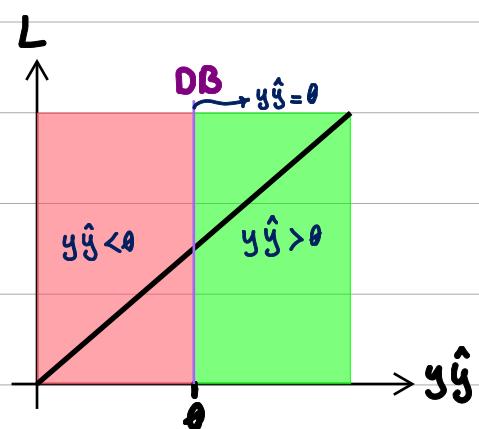
فاصله‌ی بین نزدیکترین مجموعه‌های دو کلاس. Margin

Vector: به مجموعه‌هایی که روی دو خط‌کناری قرار دارند گفته شوند SVM چون هم‌مجموعه در اصل یک است.

:Loss function

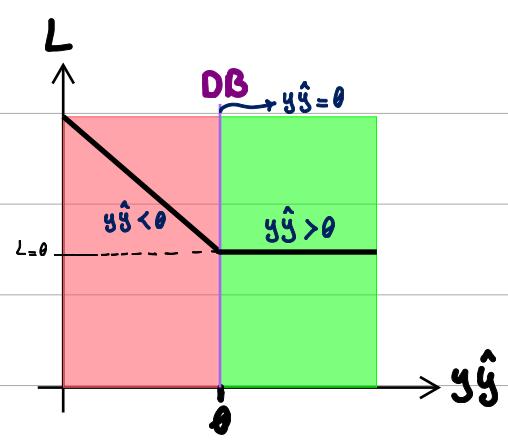
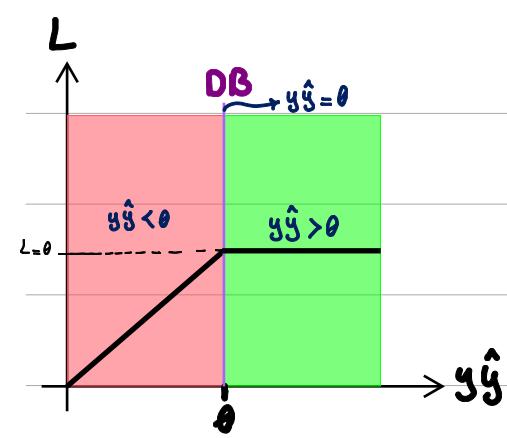


$$y\hat{y} = y(w^T x) \rightarrow \begin{cases} > 0 & \text{True} \\ = 0 & \text{DB} \rightarrow L = y\hat{y} \\ < 0 & \text{False} \end{cases}$$



تابع اتلاف $L = y\hat{y}$ یک مشکل اساسی دارد، این مشکل چیست؟

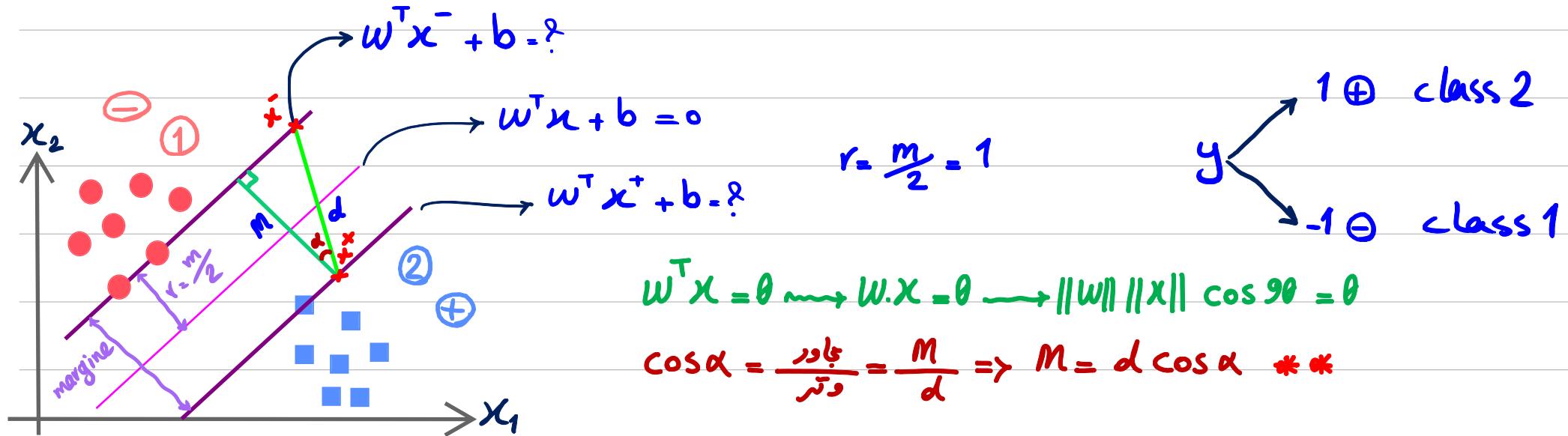
چه طور برطرف شود؟



$$L = \begin{cases} 0 & \hat{y} - y > 0 \\ -\hat{y} + L & \hat{y} - y < 0 \end{cases}$$

\rightsquigarrow $\text{ReLU} : L = \max(0, -\hat{y} + L)$

ویل maximum l, margin $\bar{f} \rightarrow (w, b)$ خطی دنبال کوچک شود ← Margin یعنی



$$w^T x^+ + b = +1 \rightarrow \text{if } x \in \text{class 2} \rightarrow y = 1$$

$$w^T x^- + b = -1 \rightarrow \text{if } x \in \text{class 1} \rightarrow y = -1$$

$$w^T (x^+ - x^-) = 2 \rightarrow \|w\| \|x^+ - x^-\| \cos \alpha = 2 \xrightarrow{*, **} \|w\| \boxed{d \cos \alpha} = 2$$

فاصله اقلیدسی
→

$$d = \|x^+ - x^-\| *$$

$$\hookrightarrow M = \frac{2}{\|w\|}$$

آخر بثبات می توانیم $\|w\|$ را
حداکثر کرد که در $\|w\|$ متن

$$\textcircled{1} \quad \min L = \min \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \max(0, 1 - y_i \hat{y}_i)$$

$$\textcircled{2} \quad \max M = \max \frac{2}{\|w\|} \longrightarrow \min (2 \|w\|) \longrightarrow \min \underbrace{2}_{\substack{\text{مشتى} \\ \text{مشتى}}} \|w\|^2 \longrightarrow \underbrace{\frac{\|w\|^2}{2}}_{\substack{\text{مشتى} \\ \text{مشتى}}} : w$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \min L = \min \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \max(0, 1 - y_i \hat{y}_i) + C \frac{\|w\|^2}{2} \right)$$

kernel { Polynomial Kernel,
Gaussian Kernel,
Radial Basis Function (RBF)

