Session 03

Linear Regression | Part01

Machine Learning | Zahra Amini

یادگیری ماشین یا Machine Learning

ML چیست؟ یکی از زیر مجموعه های هوش مصنوعی است که به کامپیوتر (سیستم) این امکان را می دهد که به صورت خودکار یاد بگیرد و پیشرفت کند بدون اینکه به برنامه نویسی صریحی نیاز داشته باشد. Arthur Samuel

ML → Supervised نظارتی ⟶ داده‌های label دارند.

سیب

① → مدل ما ⟶ ؟ سیب

②

ML → Unsupervised غیرنظارتی داده‌های بدون label

→ مدل ما →

Supervised Learning

$X \rightarrow y$

input — output label

- Email Spam (0,1)
- House Price

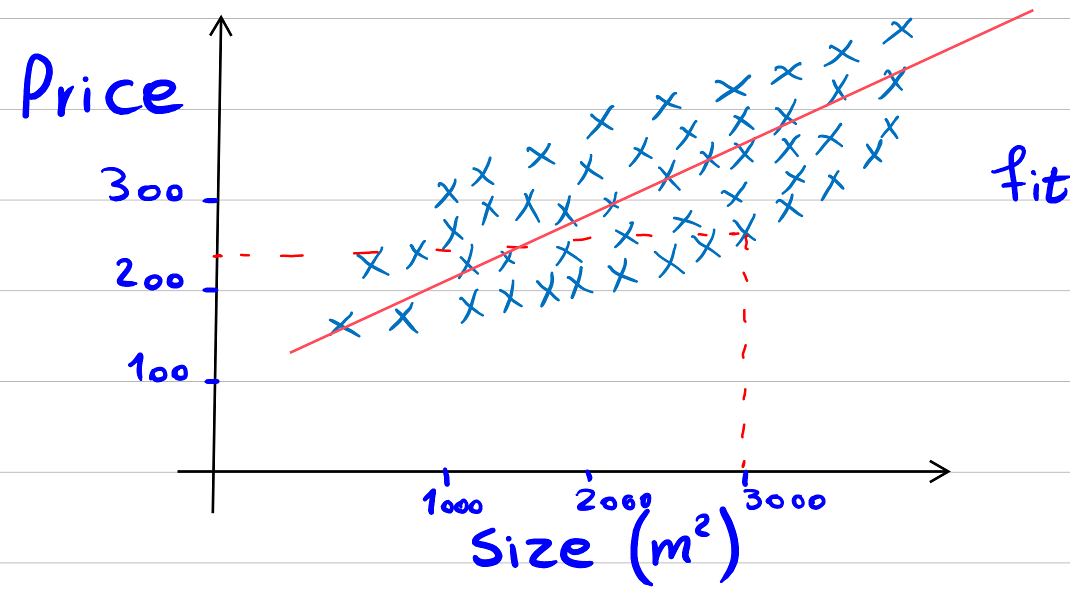
Supervised

- Regression
- Classification

Linear Regression ⟶ Housing Price Prediction

می‌خواهیم با توجه به متراژ خانه قیمتش را پیش‌بینی کنیم:

Size (m^2)	Price
180	1000
200	1200
300	2000
⋮	⋮



نکته مهم: در خروجی ها بی نهایت عدد می توانیم داشته باشیم، بنابراین از رگرسیون برای پیش بینی متغیرهای پیوسته می توان استفاده کرد.

Continous

	x → feature	y → target
	Size (m^2)	Price
(1)	2104	460
(2)	1416	232
(3)	1534	315
(4)	852	178
⋮	⋮	⋮

$x^{(1)} = 2104 \qquad y^{(1)} = 460$

$(x^{(1)}, y^{(1)}) = (2104, 460)$

Training Set

$x \rightarrow \boxed{\text{مدل}} \rightarrow y$

Notation:

x : Input

y : output

m : # training examples   4

n : # features   1

(x, y)

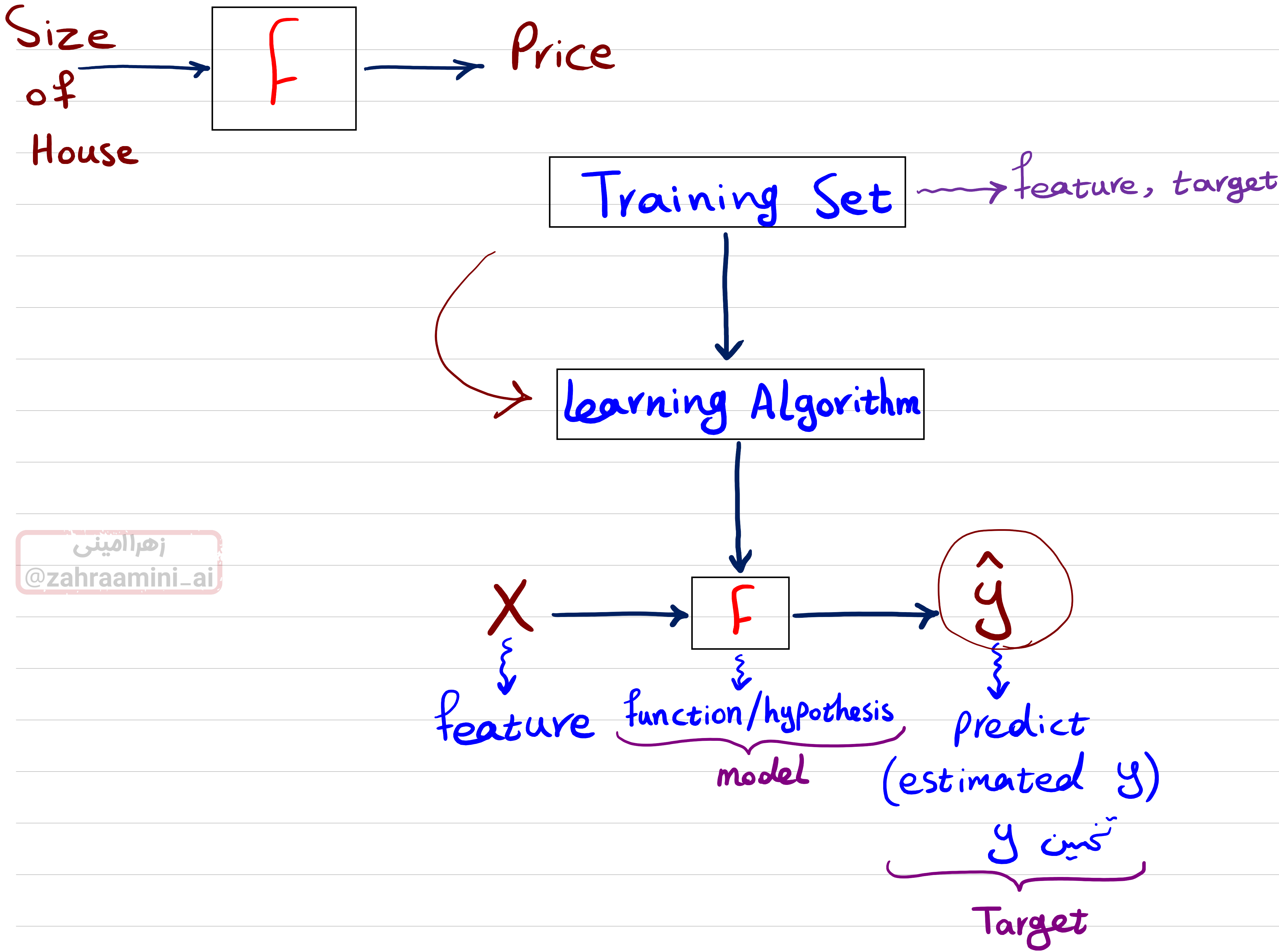
→ $(x^{(i)}, y^{(i)})$: i^{th} training example

Test Set

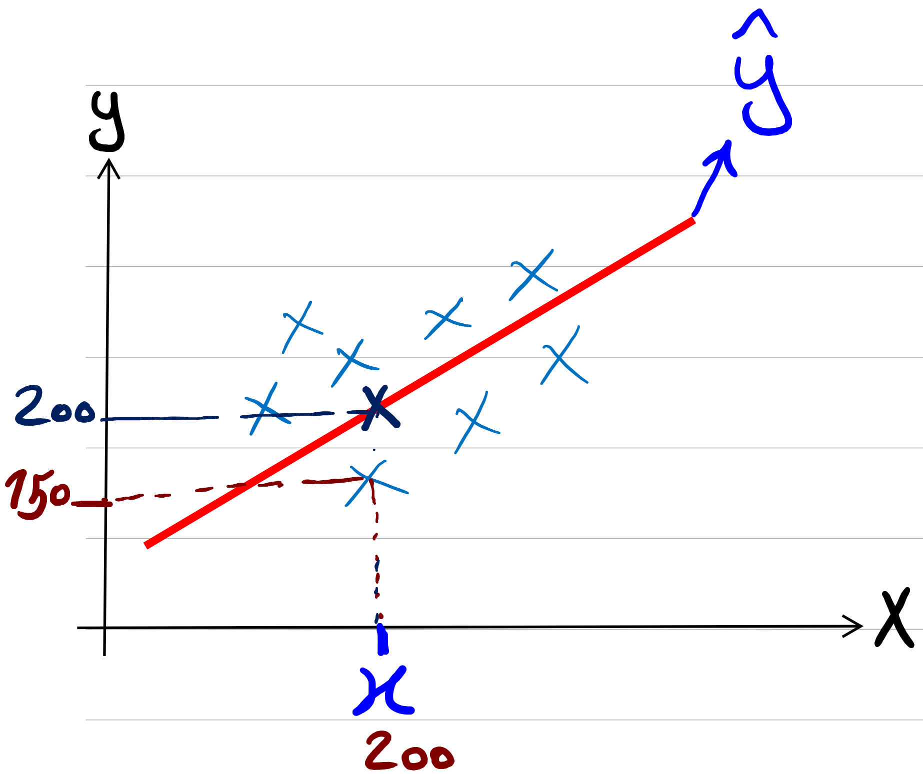
X

Size (m^2)
350
2100
833
120
⋮

$\hat{y}$
?
?
?
?
?


Size of House
F
Price
Training Set
feature, target
learning Algorithm
X
F
ŷ
feature
function/hypothesis
model
predict
(estimated y)
تخمین y
Target

؟: f چیست؟

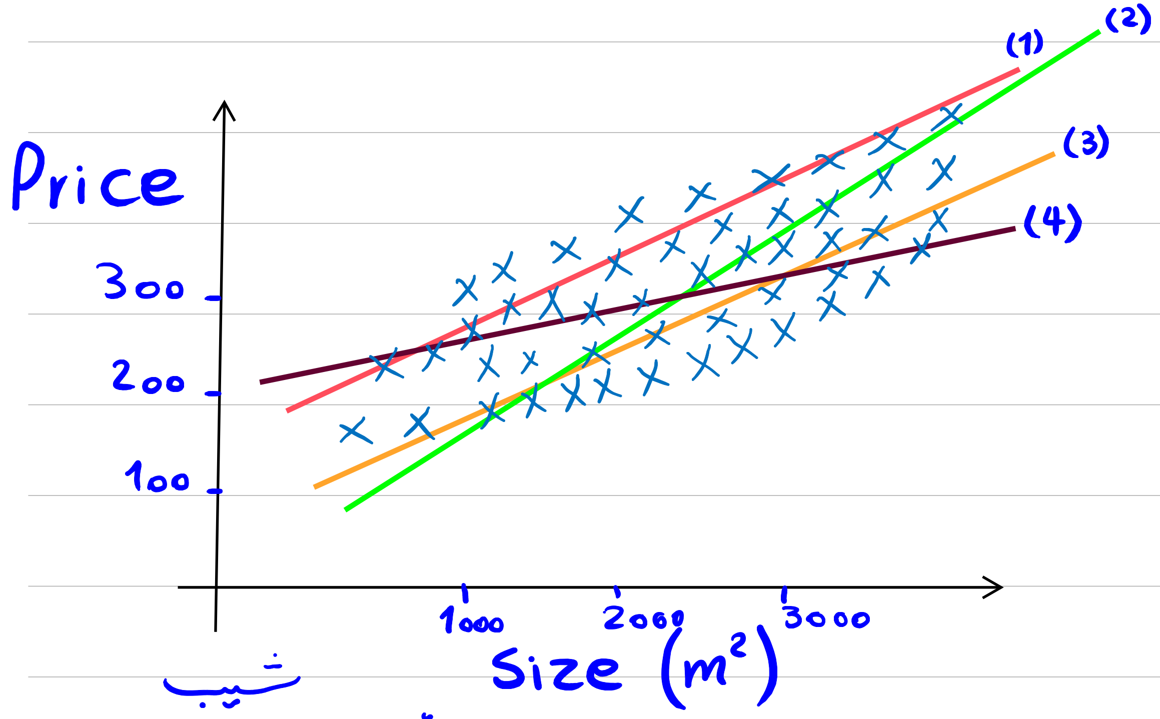


$y = ax + b$ ⟶ Line

$f_{w,b}(x) = WX + b$ ⟶ Linear function

$f(x) = WX + b$

ج: کدام f بهتر است؟ از کجا بفهمیم؟



model: $f_{w,b}(x) = wx + b$

parameters: w, b

شیب

$f = wx + b$ → عرض از مبدأ

: Cost Function

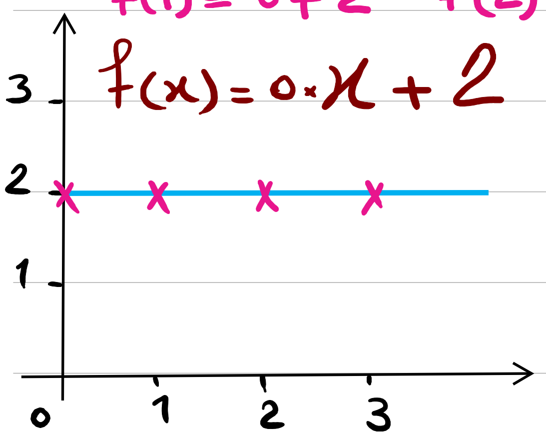
$f(1) = 0 + 2 \quad f(2) = 2$

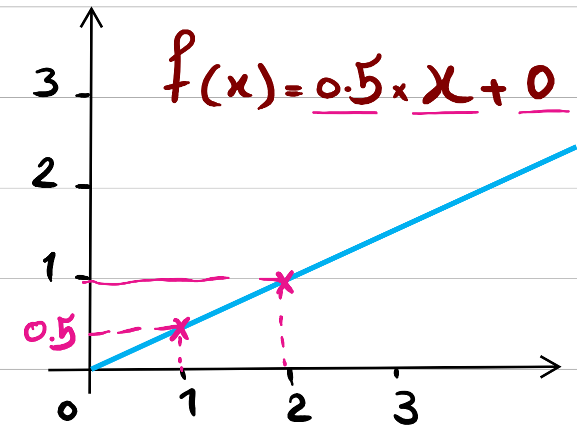
$f(x) = 0 \times x + 2$

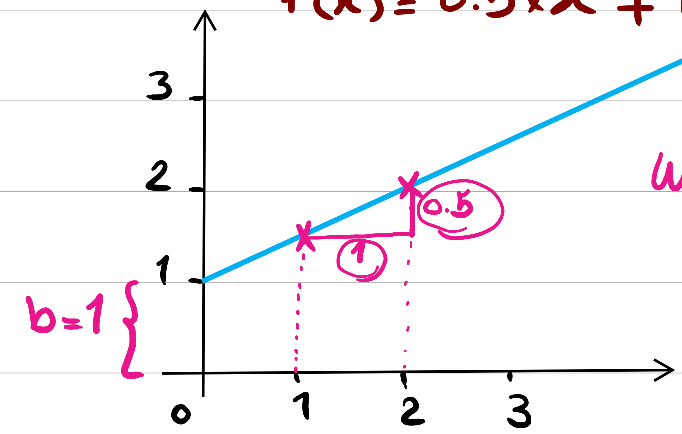
$f(1) = 0.5 \quad f(2) = 1$

$f(x) = 0.5 \times x + 0$

$f(x) = 0.5 \times x + 1 \quad f(1) = 1.5 \quad f(2) = 2$







$W = \frac{0.5}{1} = 0.5$

$\frac{2 - 1.5}{2 - 1} = \frac{0.5}{1}$

$W = 0, \quad b = 2$

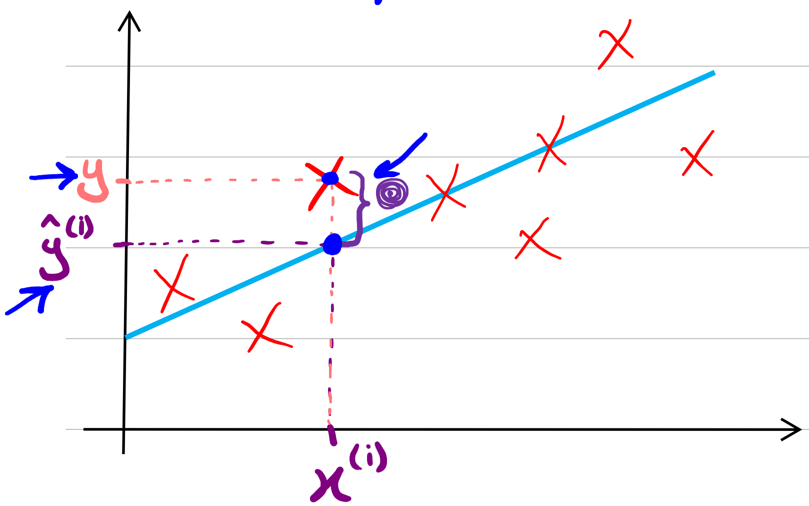
$W = 0.5, \quad b = 0$

$W = 0.5, \quad b = 1$

→ Slope

شیب

؟: w و b مناسب کدام هستند؟ با Linear Reg. می‌خواهیم مقادیری برای w و b پیدا کنیم.



چه w و b خوب هست؟

w و b خوب است که $\hat{y}$ به ما بدهد که به y نزدیک‌تر باشد.

$$\hat{y}^{(i)} \simeq y^{(i)} \rightsquigarrow (x^{(i)}, y^{(i)})$$

◎ خطا ← error

Cost function: $$J(w,b) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\underbrace{\left(\hat{y}^{(i)} - y^{(i)}\right)^2}_{\text{error}}$$

m: # training examples

یکی از معروف‌ترین cost function ها برای Reg. مجذور خطا است.

Mean Square Error

$$J(w,b)=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\left(\hat{y}^{(i)}-y^{(i)}\right)^2$$

خب حالا بریم تنظیم پارامترهای w, b برای بهبود عملکرد مدل:

$$J(w,b)=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\left(f_{w,b}(x^{(i)})-y^{(i)}\right)^2$$

$$\hat{y}=f(x)=wx+b$$

Ex:

Model $\longrightarrow f_{w,b}(x)$

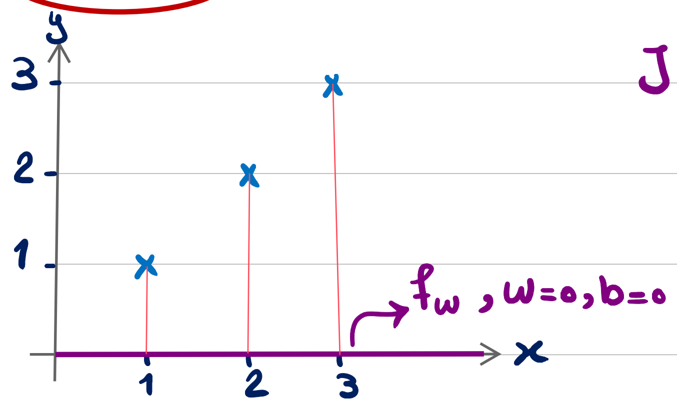
Parameters: w , $b=0$

x	y
1	1
2	2
3	3

Cost function $\longrightarrow J(w)=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\left(f_w(x^{(i)})-y^{(i)}\right)^2$

Goal $\longrightarrow \underset{w,b}{\text{minimize}}\ J(w,b)$

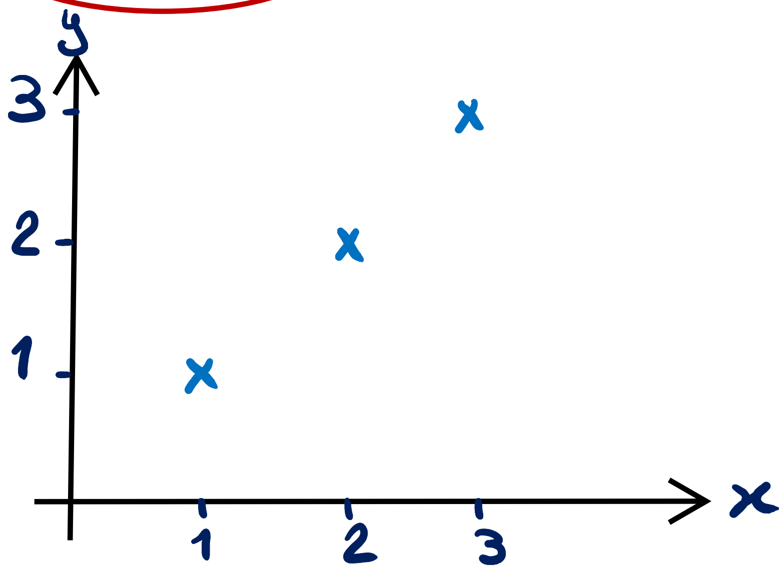
$w=0$



$$J(0)=\frac{1}{2\times 3}\left[\cancelto{1}{(0-1)^2}+\cancelto{4}{(0-2)^2}+\cancelto{9}{(0-3)^2}\right]=\frac{1}{6}\left[1+4+9\right]=\frac{13}{6}=2.3$$

$$\rightarrow \hat{y}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$W = 0.5$



(x, y)

x	y
1	1
2	2
3	3

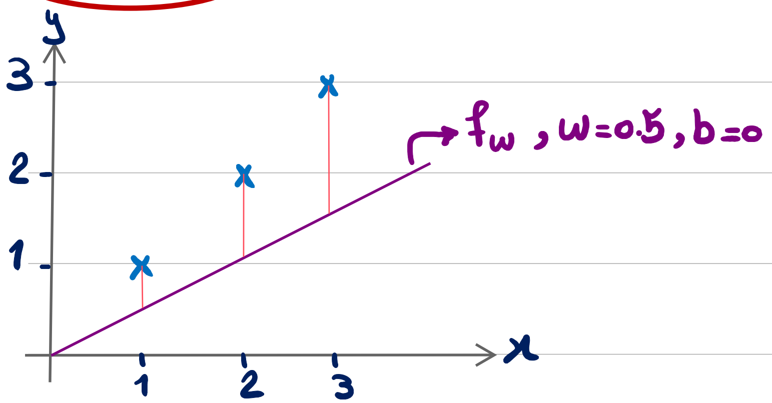
$m = 3$

$$J(w) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \left(f_w(x^{(i)}) - y^{(i)}\right)^2$$

$$f_w(x) = wx + b$$

$$J(0.5) = ?$$

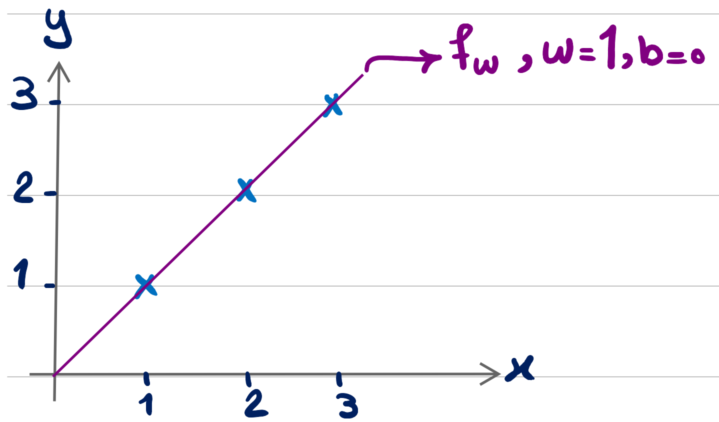
$w=0.5$



$$J(0.5)=\frac{1}{6}\left[\overset{0.25}{\cancel{(0.5-1)^2}}+\overset{1}{\cancel{(1-2)^2}}+\overset{2.25}{\cancel{(1.5-3)^2}}\right]=\frac{1}{6}(3.5)=0.58$$

$$\hat{y}=\begin{bmatrix}0.5\\1\\1.5\end{bmatrix}$$

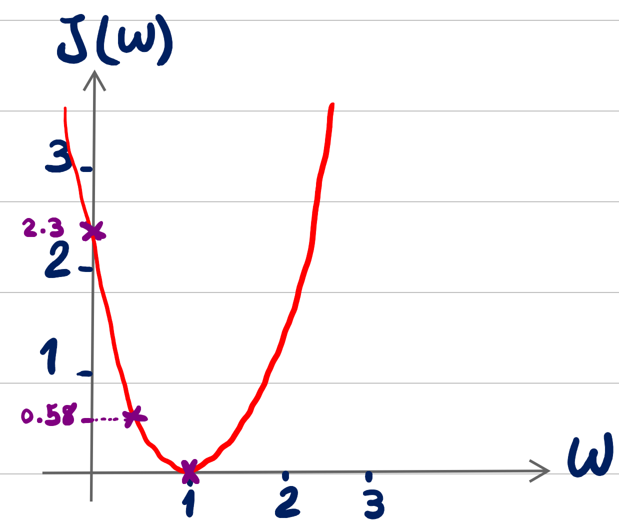
$w=1$



$$J(1)=\frac{1}{6}\left[(1-1)^2+(2-2)^2+(3-3)^2\right]=0$$

ما به دنبال کمترین خطا بودیم، کدام w کمترین خطارا به ما می دهد؟ $w=1$

$$\hat{y}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

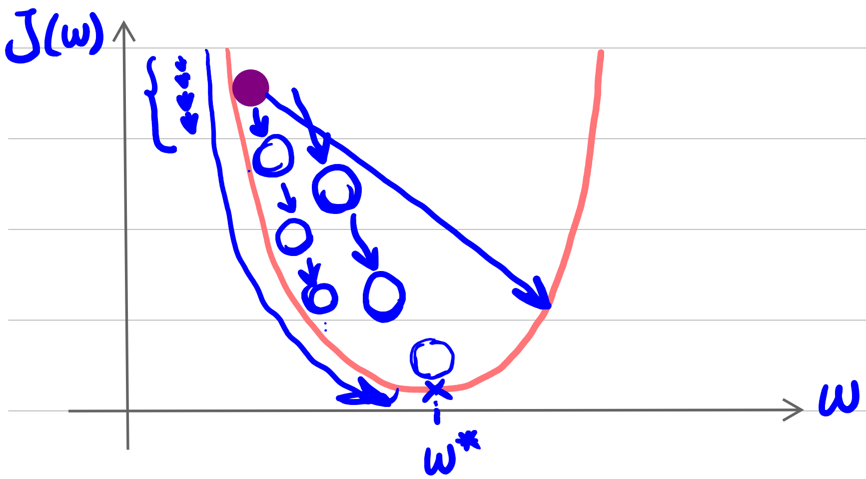


خب حالا می‌خواهیم بریم سراغ الگوریتمی که تابع J را به حداقل برساند. ← Gradient Descent (GD)

از GD برای به حداقل رساندن هر تابعی می‌توان استفاده کرد.

function → $J(w,b)$

Goal → $\min J(w,b)$



$$\rightarrow w = w - \alpha \boxed{\frac{\partial}{\partial w} J(w,b)}$$

$$b = b - \alpha \boxed{\frac{\partial}{\partial b} J(w,b)}$$

$$f_{w,b}(x) = wx + \cancel{b}^{\,0} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial w}} x \qquad * \; {f^2}' = 2f'f$$

$$\frac{\partial}{\partial w} J(w,b) = \frac{\partial}{\partial w} \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \left(f_{w,b}(x^{(i)}) - y^{(i)}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial w} \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \left(wx^{(i)} + b - y^{(i)}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}m} \sum_{i=1}^{m} \left(wx^{(i)} + b - y^{(i)}\right) \times \cancel{2}\, x^{(i)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(f_{w,b}(x^{(i)}) - y^{(i)}\right) x^{(i)}$$

$$f_{w,b}(x) = wx + b \xrightarrow{\partial/\partial b} 1$$

$$\frac{\partial}{\partial b} J(w,b) = \frac{\partial}{\partial b} \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \left(f_{w,b}(x^{(i)}) - y^{(i)}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial b} \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \left(wx^{(i)} + b - y^{(i)}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}m} \sum_{i=1}^{m} \left(wx^{(i)} + b - y^{(i)}\right) \times \cancel{2} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(f_{w,b}(x^{(i)}) - y^{(i)}\right)$$

GD Algorithm:

$w = 0$, $b = 0$

repeat until convergence

$\{$

$$w = w - \alpha \frac{\partial}{\partial w} J(w,b)$$

$$b = b - \alpha \frac{\partial}{\partial b} J(w,b)$$

$\}$

Ex: برای x و y مدل رگرسیون خطی را بعد از 1 بار آپدیت به دست آورید.

$(\alpha = 0.1,\ b = 1,\ w = 0)$

x	y	$\hat{y}$
1	1	1
2	3	1
3	3	1

$$w := w - \alpha \boxed{\frac{\partial}{\partial w} J(w,b)} \longrightarrow w_{new} = 0 - \left(\frac{1}{10}\right) \times \left(-\frac{10}{3}\right) = 0 + \frac{1}{3} = 0.33$$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(f_{w,b}(x^{(i)}) - y^{(i)}\right) x^{(i)} = \frac{1}{3} \times \left[\cancelto{0}{(1-1)\times 1} + \cancelto{-4}{(1-3)\times 2} + \cancelto{-6}{(1-3)\times 3}\right] = -\frac{10}{3}$$

$$b := b - \alpha \frac{\partial}{\partial b} J(w,b) \longrightarrow b_{new} = \underline{1} - \underline{\left(\frac{1}{10}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right)} = 1.13$$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(f_{w,b}(x^{(i)}) - y^{(i)}\right) = \frac{1}{3} \times \left[\cancelto{0}{(1-1)} + \cancelto{-2}{(1-3)} + \cancelto{-2}{(1-3)}\right] = -\frac{4}{3}$$

$\hookrightarrow w_{new} = 0.33$ $\qquad b_{new} = 1.13$ $\qquad f_{w,b}(x) = 0.33x + 1.13$