Session 02

Mathematical Foundations

Machine Learning | Zahra Amini

Telegram: @zahraamini_ai & Instagram:@zahraamini_ai & LinkedIn: @zahraamini-ai

https://zil.ink/zahraamini

Ower-Upper (LU) Decomposition or Factorization

تجزیه LU یکی از تکنیک‌های مهم برای تجزیه یک ماتریس مربعی به دو ماتریس مثلثی است که

یکی پایین‌مثلثی (L) و دیگری بالامثلثی (U) است. این روش به‌ویژه در حل دستگاه‌های معادلات خطی و

محاسبات ماتریسی کاربرد دارد. ماتریس A با ابعاد n x n را می‌توان به شکل زیر درنظر گرفت:

$A = L\,U$ ماتریس بالامثلثی است (همه عناصر پایین قطر صفر هستند)

ماتریس پایین‌مثلثی است (همه عناصر بالای قطر صفر هستند)

:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Step 1: Compute the elements of matrix U

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = a_{11} = 2$$
$$u_{12} = a_{12} = 1$$
$$u_{13} = a_{13} = 1$$

$$\longrightarrow U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Step 2: Compute the elements of matrix L

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{j-1}^{k=1} l_{ik}\, u_{kj}}{u_{jj}} \rightsquigarrow \ell_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \ell_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{-2}{2} = -1 \longrightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Step 3: Compute the remaining elements of U

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12} = -6 - (2 \cdot 1) = -8$$
$$u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13} = 0 - (2 \cdot 1) = -2$$
$$u_{33} = a_{33} - l_{31} \cdot u_{13} = 2 - (-1 \cdot 1) = 3$$

$$\longrightarrow U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Step 4: Compute the remaining elements of L

$$\ell_{32} = \frac{a_{32} - \ell_{31}\, u_{12}}{u_{22}} = \frac{7-(-1\ 1)}{-8} = \frac{8}{-8} = -1 \longrightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \overset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{U}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از تجزیه LU

: در این مثال، می‌خواهیم یک دستگاه معادلات خطی را با استفاده از تجزیه LU حل کنیم

دستگاه معادلات خطی داده شده به صورت ماتریسی است:

$$Ax = b \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Step 1: LU Decomposition

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \overset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{U}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Step 2: Solve Ly = b

$$\overset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Equations:

1. $y_1 = 5$ ✓

2. $2y_1 + y_2 = -2 \xrightarrow{y_1=5} \overset{+10}{\cancel{2\cdot 5}} + y_2 = -2 \Rightarrow y_2 = -2-10 \Rightarrow y_2 = -12$ ✓

3. $-y_1 - y_2 + y_3 = 9 \xrightarrow[y_2=-12]{y_1=5} \overset{7}{\cancel{-5-(-12)}} + y_3 = 9 \Rightarrow 7 + y_3 = 9 \Rightarrow y_3 = 9-7 \Rightarrow y_3 = -2$ ✓

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Step 3: Solve $Ux = y$

$$\overset{U}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Equations:

1. $2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \xrightarrow{x_2, x_3} 2x_1 + 1 + 2 = 5 \Rightarrow 2x_1 + 3 = 5 \Rightarrow 2x_1 = \overset{2}{\cancel{5-3}} \Rightarrow x_1 = 1$ ✓

2. $-8x_2 - 2x_3 = -12 \xrightarrow{x_3=2} -8x_2 - 2\cdot(2) = -12 \Rightarrow -8x_2 = -12+4 \Rightarrow -8x_2 = -8 \Rightarrow x_2 = 1$ ✓

3. $x_3 = 2 \rightsquigarrow x_3 = 2$ ✓

$Ax = b \longrightarrow x_1 = 1 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

QR Decomposition

تجزیه QR به این معنی است که یک ماتریس A را به حاصل‌ضرب دو ماتریس Q و R تجزیه می‌کنیم، به طوری که:

$$A = QR$$

Q یک ماتریس اورتوگونال است (یعنی ستون‌های آن عمود بر هم و نرمال شده‌اند،به این معنی که $Q^T Q = I$ است)

R یک ماتریس بالامثلثی است (یعنی تمام عناصر زیر قطر اصلی آن صفر هستند)

کاربردها ---> کاهش بعد: در تحلیل داده‌های با ابعاد بالا، تجزیه QR می‌تواند به فشرده‌سازی داده‌ها کمک کند.

مسائل بهینه‌سازی: این تجزیه در روش‌های حل بهینه‌سازی برای یافتن راه‌حل‌های تقریباً بهینه به کار می‌رود.

:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Step 1: Compute the Columns of Q

First Column Q_1:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

The first column Q_1 is the normalized version of a_1. First, calculate the norm (magnitude) of a_1:

$$\|a_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Thus, we normalize a_1 to get Q_1:

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Second Column Q_2 :

$$a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اکنون برای محاسبه Q_2، ابتدا باید مؤلفه‌هایی از a_2 که در جهت Q_1 هستند حذف کنیم (یعنی پروجکشن a_2 روی Q_1)

The projection of a_2 onto Q_1 is given by: $\quad \mathrm{Proj}_{Q_1}(a_2) = \left(\dfrac{a_2 \cdot Q_1}{Q_1 \cdot Q_1}\right) Q_1$

$$a_2 \cdot Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \cancel{1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + (-1)\frac{1}{\sqrt{3}}} + 1\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Since $Q_1 \times Q_1 = 1$, the projection becomes: $\quad \mathrm{Proj}_{Q_1}(a_2) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Now subtract this projection from a_2 to get the orthogonal component v_2:

$$v_2 = a - \mathrm{Proj}_{Q_1}(a_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Finally, normalize v_2 to compute Q_2:

$$\|v_2\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$Q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{6}}{3}}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Step 2: Compute the Matrix R

$$\underset{2\times 2}{R} = \underset{2\times 3}{Q^T}\ \underset{3\times 2}{A}$$

$$\underset{3\times 2}{A} = \underset{3\times 2}{Q}\ \underset{2\times 2}{R}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \qquad Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \ \underset{Q^T}{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}} = \underset{R}{\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}}$$

تجزیه ویژه (Eigenvalue and Eigenvector Decomposition)

تجزیه ویژه یا تجزیه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یکی از مفاهیم اساسی در جبر خطی است که ماتریس مربعی A را به مقادیر ویژه و بردارهای ویژه تجزیه می‌کند. این موضوع در کاربردهایی مثل تحلیل مؤلفه‌های اصلی (PCA)، مکانیک کوانتوم و تحلیل ارتعاشات بسیار مهم است.

برای یک ماتریس مربعی A، تجزیه ویژه به ما اجازه می‌دهد تا بردارهای ویژه v و مقادیر ویژه λ را بیابیم که معادله زیر را ارضا کنند:

$$Av = \lambda v$$

که در آن: λ یک مقدار ویژه از ماتریس A است

v بردار ویژه متناظر با λ است

بردارهای ویژه بردارهایی هستند که تحت تآثیر ماتریس فقط کشیده یا فشرده می‌شوند، و مقادیر ویژه نشان‌دهنده ضریب این کشش یا فشردگی هستند

مراحل تجزیه ویژه

Step 1: Find Eigenvalues (λ)

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

حل این معادله به ما مقادیر ویژه را می‌دهد

- A ماتریس مربعی داده شده است.
- λ اسکالر (مقدار ویژه) است.
- I ماتریس همانی (واحد) با همان ابعاد A است.
- $\det()$ نشان‌دهنده دترمینان است.

Step 2: Find Eigenvectors (v)

$$(A - \lambda I)v = 0$$

: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

So the matrix $A-\lambda I$ is:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Now, we calculate the determinant of A−λI:

$$\det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - (2)(1)$$

$$(4 - \lambda)(3 - \lambda) = 12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2$$

$$12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2}$$

$$\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$\lambda = \frac{7 \pm 3}{2}$$

Step 2: Find the Eigenvectors (v)

$$\lambda_1 = \frac{7+3}{2} = 5, \quad \lambda_2 = \frac{7-3}{2} = 2$$

$$(A - 5I)v = 0$$

$$A - 5I = \begin{pmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-1v_1 + v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

For λ_2:

$$(A - 2I)v = 0$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2v_1 + v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = -2v_1$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Final Results ---> The eigenvalues of matrix A are:

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$