# Session 01

## Mathematical Foundations

**Machine Learning | Zahra Amini**

Telegram: @zahraamini_ai & Instagram:@zahraamini_ai & LinkedIn: @zahraamini-ai

https://zil.ink/zahraamini

# مفاهیم پایه‌ای بردارها

## ① تعریف بردار و نمادگذاری

بردار مجموعه‌ای از عناصر عددی (اسکالرها) است که می‌تواند نشان‌دهنده جهت و بزرگی باشد

نام‌گذاری بردارها در ریاضیات و جبر خطی معمولاً با حروف کوچک انگلیسی انجام می‌شود، مانند w یا $v, u$

که $v_1, v_2, \dots, v_n$ مولفه‌های بردار در فضای n-بعدی هستند

Vector

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$v = (0.2, -0.7, 0.5, 1.2)$$

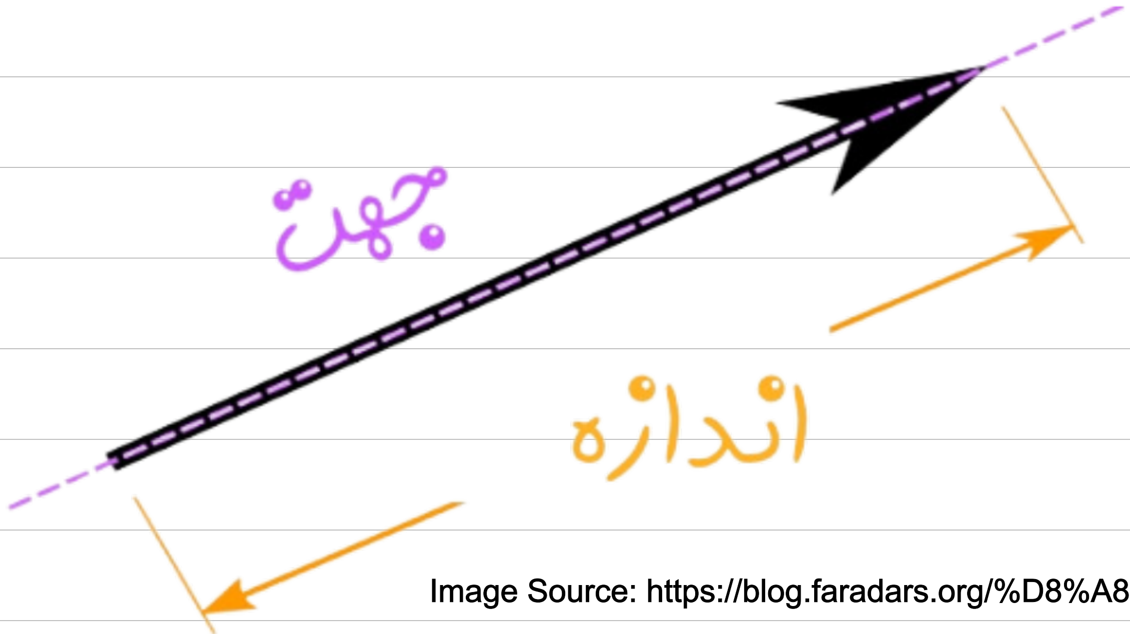



Image Source: https://blog.faradars.org/%D8%A8%D8%B1%D8%AF%D8%A7%D8%B1-vector/

## ② بردارهای تک‌واحدی (Unit Vectors)

بردارهای تک‌واحدی، بردارهایی با طول واحد (۱) هستند که تنها جهت دارند و از نظر بزرگی نرمال‌سازی شده‌اند

برای نرمال‌سازی هر بردار v به بردار تک‌واحدی u کافی است بردار را بر طول آن تقسیم کنیم:

$$u = \frac{v}{||v||} \qquad ||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

: $v=(3,-4,5)$ $\quad u=?$

1. $||v|| = \sqrt{3^2+(-4)^2+5^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50} = 7.07$

2. $u = \frac{1}{7.07} \cdot (3,-4,5) \simeq (0.42, -0.57, 0.71)$

## ③ جمع و تفریق بردارها

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \qquad a - b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

: a=(2,3,1) and b=(5,−1,4)    a + b =?    a - b =?

$a + b = (2 + 5, 3 + (-1), 1 + 4) = (7, 2, 5)$    $a - b = (2 - 5, 3 - (-1), 1 - 4) = (-3, 4, -3)$

## ④ ضرب عدد(اسکالر) در بردار

$$c \cdot v = c \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + v_1 \\ c_2 + v_2 \\ \vdots \\ c_n + v_n \end{pmatrix}$$

: v=(1.5, −3, 4) and c=2.5    c . v =?

$2.5 \cdot v = (2.5 \times 1.5, 2.5 \times (-3), 2.5 \times 4) = (3.75, -7.5, 10)$

## ⑤ طول یا نرم بردار (Norm of a Vector)

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{p=2} \underbrace{\|v\|_2}_{\text{Euclidean norm}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

: $v = (1, -2, 2, -3)$, Euclidean norm =?

$$\|v\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+4+4+9} = \sqrt{18} = 4.24$$

## 6 ضرب داخلی (Dot Product)

ضرب داخلی (Dot Product) دو بردار یک معیار کلیدی برای سنجش هم‌ترازی است. اگر دو بردار a و b داشته باشیم

ضرب داخلی آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i . b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

: $a = (2, 3, -1)$ and $b = (4, -1, 5)$

$a \cdot b = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 5 = 8 - 3 - 5 = 0$ چون نتیجه صفر است، این دو بردار عمود بر هم هستند

## 7 زاویه بین دو بردار و کاربردهای آن در یادگیری ماشین

زاویه بین دو بردار می‌تواند معیاری از شباهت آن‌ها باشد. برای محاسبه زاویه بین دو بردار aوb داریم:

اگر زاویه کوچک باشد، بردارها مشابه‌اند و اگر زاویه نزدیک به ۹۰ درجه باشد، بردارها تقریباً ناهمراستا هستند

$$\cos(\theta) = \frac{a \cdot b}{||a||\ ||b||}$$

: $a=(3,-5)$ and $b=(7,1)$

$$a \cdot b = 3 \cdot 7 + (-5) \cdot 1 = 21 - 5 = 16$$

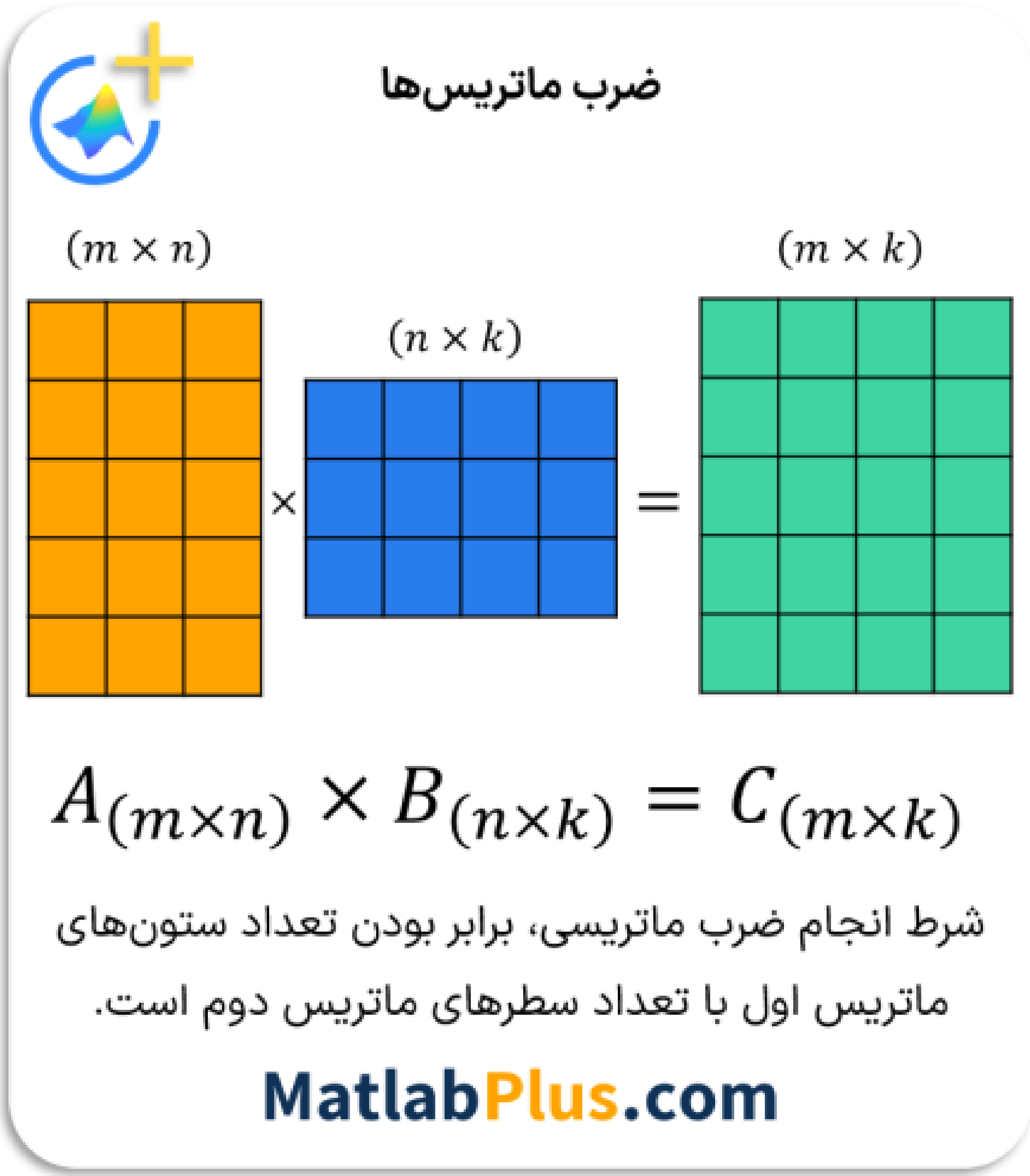
$$\|a\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$\|b\| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$$

$$\cos(\theta) = \frac{16}{\sqrt{34} \times \sqrt{50}} \approx 0.388$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.388) \approx 67.84^\circ$$

# ضرب ماتریس‌ها



$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*5+7*4+10*8 & \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*5+7*4+10*8 & 1*8+7*2+10*5 \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*5+7*4+10*8 & 1*8+7*2+10*5 \\ 9*5+4*4+1*8 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*5+7*4+10*8 & 1*8+7*2+10*5 \\ 9*5+4*4+1*8 & 9*8+4*2+1*5 \end{bmatrix}$$



Image Source: https://howsam.org/array-calculations/

انواع ماتریس‌ها

1. ماتریس واحد (Identity Matrix)
2. ماتریس ناصفر (Non-Zero Matrix)
3. ماتریس اسپارس (Sparse Matrix)
4. ماتریس تکین (Singular Matrix)
5. ماتریس غیرتکین (Non-Singular Matrix)
6. ماتریس معکوس (Inverse Matrix)
7. ماتریس قطری (Diagonal Matrix)
8. ماتریس متقارن (Symmetric Matrix)

## 1 ماتریس واحد (Identity Matrix)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A \cdot I = A$$

## 2 ماتریس ناصفر (Non-Zero Matrix)

ماتریس ناصفر هر ماتریسی است که حداقل یکی از درایه‌های آن غیر صفر باشد

چنین ماتریسی الزاماً هیچ ویژگی خاصی ندارد جز اینکه تمام درایه‌های آن صفر نیستند

## 3 ماتریس اسپارس (Sparse Matrix)

ماتریس اسپارس ماتریسی است که بیشتر درایه‌های آن صفر باشند. این ماتریس‌ها در الگوریتم‌های مختلف یادگیری ماشین و محاسبات بزرگ مقیاس مورد استفاده قرار می‌گیرند، زیرا می‌توانند به صرفه‌جویی در فضای حافظه کمک کنند.

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

این ماتریس اسپارس است زیرا بیشتر عناصر آن صفر هستند

## ④ ماتریس قطری (Diagonal Matrix)

ماتریس قطری یک ماتریس مربعی است که عناصر غیرقطری آن (عناصری که در قطر اصلی قرار ندارند) برابر با صفر هستند. به عبارتی، تنها درایه‌های روی قطر اصلی (از بالا چپ تا پایین راست) می‌توانند مقادیر غیر صفر داشته باشند. یک ماتریس $D$ به صورت زیر، ماتریس قطری است:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

## 5 ماتریس متقارن (Symmetric Matrix)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A = A^T \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

### عملیات ترانهاده (Transpose)

یک فرآیند ریاضی است که در آن سطرها و ستون‌های یک ماتریس با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند. به عبارتی دیگر، در

ترانهاده‌ی یک ماتریس، هر سطر ماتریس اصلی به یک ستون در ماتریس ترانهاده تبدیل می‌شود و

هر ستون به یک سطر

$$A_{ij} = A^T_{ji}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$$

$$(c \cdot B)^T = c \cdot B^T$$

## 6 ماتریس تکین (Singular Matrix)

یک ماتریس تکین ماتریسی مربعی است که معکوس ندارد. به عبارت دیگر، ماتریس تکین نمی‌تواند به‌وسیله‌ی هیچ ماتریسی ضرب شود تا نتیجه‌ی آن ماتریس همانی یا واحد I باشد

- دترمینان صفر: اگر دترمینان یک ماتریس برابر صفر باشد، آن ماتریس تکین است. دترمینان صفر به این معنی است که سطرها یا ستون‌های ماتریس به صورت خطی وابسته هستند (یعنی یکی از سطرها یا ستون‌ها را می‌توان به عنوان ترکیبی خطی از سطرها یا ستون‌های دیگر نوشت)

- معکوس ندارد: اگر ماتریسی تکین باشد، معکوس آن وجود ندارد

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (1 \times 4) - (2 \times 2) = 4 - 4 = 0$$

چون دترمینان ماتریس صفر است، نتیجه می‌گیریم که این ماتریس تکین است

وابستگی خطی در این مثال، مشاهده می‌کنید که سطر دوم برابر با دو برابر:

$$\text{Row2} = 2 \times \text{Row1}$$

## 7 ماتریس غیرتکین (Non-Singular Matrix)

یک ماتریس غیرتکین، یا معکوس‌پذیر، ماتریسی است که معکوس دارد. این بدان معناست که ماتریس غیرتکین می‌تواند با ضرب در معکوس خود نتیجه‌ی ماتریس همانی یا واحد $I$ را بدهد

- دترمینان غیر صفر: اگر دترمینان یک ماتریس غیر صفر باشد، آن ماتریس غیرتکین است. دترمینان غیر صفر نشان‌دهنده این است که سطرها یا ستون‌های ماتریس خطی مستقل هستند

- معکوس دارد: ماتریس غیرتکین دارای معکوس است و می‌توان آن را به شکل زیر تعریف کرد

## 8 ماتریس معکوس (Inverse Matrix)

ماتریس معکوس ماتریسی است که در ضرب با ماتریس اولیه، ماتریس همانی یا واحد $I$ را نتیجه دهد

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

ماتریس باید مربعی و غیر تکین باشد تا معکوس آن وجود داشته باشد.

معکوس یک ماتریس به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

* ad−bc != 0

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{(2 \times 4) - (3 \times 1)} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8-3} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

## محاسبه رتبه ماتریس (Rank)

رتبه یا رنک یک ماتریس به معنای تعداد سطرها یا ستون‌های خطی مستقل آن است. به عبارت دیگر، رتبه‌ی یک ماتریس برابر است با بیشترین تعداد سطرها یا ستون‌هایی که هیچ‌کدام از آن‌ها را نمی‌توان به صورت ترکیبی خطی از سایر سطرها یا ستون‌ها نوشت. رتبه یک ماتریس نشان‌دهنده بعد فضای برداری تعریف‌شده توسط سطرها یا ستون‌های آن است

## محاسبه رتبه با روش حذف گاوسی

1. انتخاب سطر محوری (Pivot Row)

ابتدا سطر اول (سطر محوری) را انتخاب کرده و از عنصر موجود در اولین ستون به عنوان محور استفاده کنید

هدف این است که تمام عناصر زیر محور را به صفر تبدیل کنید

اگر عنصر محوری صفر باشد، می‌توانید سطر محوری را با یکی از سطرهای زیرین که در همان ستون دارای مقدار غیر صفر است جابجا کنید

2. حذف عناصر زیر محور

از عملیات سطری استفاده کنید تا تمام عناصر زیر محور در ستون اول را صفر کنید. این عملیات به این شکل است که سطرهای زیر محور را با کمک سطر محوری تغییر می‌دهید

فرمول کلی برای این کار:

$$Row_i = Row_i - k \times \text{Pivot Row}$$

Kنسبت مناسب برای حذف عنصر مورد نظر است

$$K = \frac{\text{Element to eliminate}}{\text{Pivot element}}$$

3. تکرار برای ستون‌های بعدی

پس از حذف عناصر ستون اول، به سراغ ستون دوم و سطر دوم بروید و همان عملیات را تکرار کنید. از سطر دوم به عنوان سطر محوری جدید استفاده کنید و عناصر زیر محور جدید را صفر کنید

این مراحل را تا زمانی که به انتهای ماتریس برسید ادامه دهید

4 به دست آوردن شکل پلکانی سطری

پس از اجرای عملیات حذف برای تمام سطرها و ستون‌ها، ماتریس به شکل پلکانی سطری تبدیل خواهد شد
در این شکل، تمامی عناصر زیر محور اصلی (در هر ستون) صفر شده‌اند

5 شمارش سطرهای غیر صفر

اکنون سطرهای غیر صفر در ماتریس پلکانی را بشمارید. تعداد سطرهای غیر صفر برابر با رتبه ماتریس است
سطرهایی که تمام عناصرشان صفر باشند، تاثیری در رتبه نخواهند داشت

6 تعیین رتبه ماتریس

رتبه ماتریس برابر است با تعداد سطرهای غیر صفر در ماتریس پلکانی. این مقدار نشان‌دهنده
تعداد بردارهای خطی مستقل (سطرها یا ستون‌ها) است

## محاسبه رتبه با روش حذف گاوسی

برای محاسبه رتبه یک ماتریس، معمولاً از روش حذف گاوسی استفاده می‌شود که ماتریس را به شکل پلکانی تبدیل می‌کند. تعداد سطرهای غیر صفر در این ماتریس پلکانی، نشان‌دهنده رتبه ماتریس است

Pivot

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$k = \frac{4}{1} = 4$

Row2 = Row2 − 4 × Row1 = (4, 5, 6) − 4 × (1, 2, 3) = (0, −3, −6)

$k = \frac{7}{1} = 7$

Row3 = Row3 − 7 × Row1 = (7, 8, 9) − 7 × (1, 2, 3) = (0, −6, −12)

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{matrix}$$

$k = \frac{-6}{-3} = 2$

Row3 = Row3 − 2 × Row2 = (0, −6, −12) − 2 × (0, −3, −6) = (0, 0, 0)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چون دو سطر غیر صفر داریم، رتبه‌ی این ماتریس ۲ است

# Coding