Çərşənbə axşamı , 18 iyul, 2017

Məsələ 1. Hər bir $a_0 > 1$ tam ədədi üçün $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ardıcıllığı aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{əgər } \sqrt{a_n} \text{ tam ədəddirsə,} \\ a_n + 3 & \text{digər hallarda,} \end{cases} \qquad \text{hər bir } n \geqslant 0 \text{ üçün.}$$

Bütün elə a_0 qiymətlərini tapın ki, onun üçün elə A ədədi olsun ki, sonsuz sayda n qiyməti üçün $a_n = A$ şərti ödənilsin.

Məsələ 2. $\mathbb{R}$ ilə həqiqi ədədlər çoxluğu işarə edilsin. Bütün elə $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiyalarını tapın ki, istənilən həqiqi x və y ədədləri üçün

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy)$$

şərti ödənilsin.

Məsələ 3. Ovçu və gözəgörünməz dovşan müstəvi üzərində oyun oynayır. Dovşanın başlanğıc nöqtəsi A_0 və ovçunun başlanğıc nöqtəsi B_0 eynidir. Tutaq ki, oyunun $n-1$ mərhələsindən sonra dovşan A_{n-1} nöqtəsindədir və ovçu B_{n-1} nöqtəsindədir. n-ci mərhələdə sıra ilə üç əməliyyat baş verir:

(i) Gözəgörünməz dovşan elə bir A_n nöqtəsinə keçir ki, A_{n-1} ilə A_n arasındakı məsafə dəqiq 1 vahiddir.

(ii) İzləmə cihazı ovçuya P_n nöqtəsini bəyan edir. İzləmə cihazının ovçuya verdiyi tək zəmanət budur ki, bəyan etdiyi P_n nöqtəsi ilə A_n arasındakı məsafə ən çoxu 1 vahiddir.

(iii) Ovçu açıq-aşkar şəkildə elə bir B_n nöqtəsinə keçir ki, B_{n-1} ilə B_n arasındakı məsafə dəqiq 1 vahiddir.

Dovşan necə hərəkət edirsə etsin, izləmə cihazı hansı nöqtələri bəyan edirsə etsin, ovçu həmişə öz hərəkətlərini elə seçə bilərmi ki, 10^9 mərhələdən sonra dovşanla arasındakı məsafənin ən çoxu 100 vahid olmasını əminliklə təmin edə bilsin?

Çərşənbə , 19 iyul, 2017

Məsələ 4. Tutaq ki, R və S fərqli nöqtələri Ω çevrəsi üzərində elə götürülmüşdür ki, RS diametr olmasın. ℓ düz xətti Ω çevrəsinə R nöqtəsində toxunur. T nöqtəsi elə seçilmişdir ki, S nöqtəsi RT parçasının orta nöqtəsidir. J nöqtəsi isə Ω çevrəsinin qısa olan RS qövsü üzərində elə seçilmişdir ki, JST üçbucağının xaricinə çəkilmiş Γ çevrəsi ℓ düz xətti ilə iki fərqli nöqtədə kəsişir. Γ çevrəsi və ℓ xəttinin kəsişmə nöqtələrindən R -ə daha yaxın olanı A nöqtəsi olsun. AJ xətti Ω çevrəsini bir daha K nöqtəsində kəsir. İsbat edin ki, KT düz xətti Γ çevrəsinə toxunur.

Məsələ 5. $N \geqslant 2$ tam ədədi verilmişdir. İxtiyari ikisinin boyu fərqli olan $N(N+1)$ sayda oyunçudan ibarət futbol yığması bir sırada düzülüb. Məşqçi bu sıradan elə $N(N-1)$ sayda oyunçu çıxarmaq istəyir ki, yerdə qalan $2N$ sayda oyunçudan əmələ gələn yeni sırada aşağıdakı N sayda şərt ödənilsin:

(1) ən uzun oyunçu ilə ikinci ən uzun oyunçu arasında heç kim dayanmış olmasın,

(2) üçüncü ən uzun və dördüncü ən uzun oyunçu arasında heç kim dayanmış olmasın,

$\vdots$

(N) ikinci ən qısa oyunçu ilə ən qısa oyunçu arasında heç kim dayanmış olmasın.

İsbat edin ki, bunu etmək həmişə mümkündür.

Məsələ 6. Sıralı (x, y) tam ədədlər cütü o zaman *ibtidai nöqtə* adlanır ki, x və y ədədləri qarşılıqlı sadə olsun. Sonlu sayda ibtidai nöqtədən ibarət S çoxluğu verilmişdir. İsbat edin ki, elə müsbət tam n və tam a_0, a_1, $\ldots$, a_n ədədləri mövcuddur ki, S çoxluğundakı hər bir (x, y) üçün

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1$$

şərti ödənilsin.