Множества. Комбинаторика.

Множества

Буквами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ обозначают соответственно множества натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел

Если $\boldsymbol{x}$ – элемент множества $\boldsymbol{A}$, то пишут $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, а если $\boldsymbol{x}$ не является элементом множества $\boldsymbol{A}$, то пишут $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}$

Если каждый элемент множества $\boldsymbol{A}$ является элементом множества $\boldsymbol{B}$, то пишут $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ или $\boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A}$ и говорят, что множество $\boldsymbol{A}$ является подмножеством множества $\boldsymbol{B}$. В этом случае говорят также, что $\boldsymbol{A}$ содержится в $\boldsymbol{B}$ или что $\boldsymbol{B}$ содержит $\boldsymbol{A}$.

Если $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$, то $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

Для удобства вводится понятие пустого множества (его обозначают $\emptyset$), которое по определению не содержит элементов и содержится в любом множестве.

Операции над множествами

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, называется объединением множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и обозначается $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ или $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству $\boldsymbol{A}$, так и множеству $\boldsymbol{B}$, называется пересечением множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и обозначается $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ или $\boldsymbol{AB}$. Если $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$, то говорят, что множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ не пересекаются.

Множество, состоящее из всех элементов множества $\boldsymbol{A}$, не принадлежащих множеству $\boldsymbol{B}$, называется разностью множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и обозначается $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$.

Если $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$, то разность $\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}$ называют дополнением множества $\boldsymbol{A}$ до множества $\boldsymbol{B}$ и обозначают $\boldsymbol{A}'_B$. В тех случаях, когда рассматриваются только подмножества некоторого основного множества $\boldsymbol{U}$, дополнение множества $\boldsymbol{M}$ до множества $\boldsymbol{U}$ называют просто дополнением $\boldsymbol{M}$ и вместо $\boldsymbol{M}'_U$ пишут просто $\boldsymbol{A}'$,

Непосредственно из определения дополнения множества следуют равенства (1):

$$\boldsymbol{M} \cup \boldsymbol{M}' = \boldsymbol{U}, \boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{M}' = \emptyset, (\boldsymbol{M}')' = \boldsymbol{M}, \tag{1}$$

Для любых подмножеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ множества $\boldsymbol{U}$ справедливы также следующие равенства, которые называют законами двойственности или законами де Моргана (2):

$$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' \cap \boldsymbol{B}', (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' \cup \boldsymbol{B}' \tag{2}$$

т. е. дополнение объединения двух множеств равно пересечению их дополнений, а дополнение пересечения двух множеств равно объединению их дополнений.

Эквивалентные и неэквивалентные множества

Говорят, что между множествами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ установлено взаимно однозначное соответствие, если каждому элементу множеста $\boldsymbol{A}$ сопоставлен один и только один элемент множества $\boldsymbol{B}$, так что различным элементам множества $\boldsymbol{A}$ сопоставлены различные элементы множества $\boldsymbol{B}$ и каждый элемент множества $\boldsymbol{B}$ оказывается сопоставленным некоторому элементу множества $\boldsymbol{A}$.

Множества, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, называются эквивалентными. Если множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ эквивалентны, то пишут $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$; если они не эквивалентны, то пишут $\boldsymbol{A} \nsim \boldsymbol{B}$.

Если $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, то говорят, что множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ имеют одинаковую мощность.

Множество $\boldsymbol{A} \neq \emptyset$ называется конечным, если существует такое число $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$ (3)

$$\boldsymbol{A} \sim \{1, 2, 3, ..., n\}. \tag{3}$$

В этом случае говорят, что множество $\boldsymbol{A}$ содержит $\boldsymbol{n}$ элементов или что множество $\boldsymbol{A}$ имеет мощность $\boldsymbol{n}$.

Пустое множество $\emptyset$ также считается конечным, его мощность принимается равной нулю

Множество, не являющееся конечным, называется бесконечным

Множество $\boldsymbol{A}$ называется счетным, если $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{N}$. Говорят, что счетное множество имеет счетную мощность. Если множество конечно или счетно, то его называют не более чем счетным.

Множество называется несчетным, если оно имеет мощность, большую, чем мощность множества $\boldsymbol{N}$.

`Теоремы Кантора.`

1. Множество всех рациональных чисел счет.
2. Множество всех действительных чисел несчет.

Множество $\boldsymbol{A}$ называется множеством мощности континуума, если $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{R}$.

Система множеств.

Пусть дано множество $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\{s\}}$, называемое множеством индексов, и каждому индексу $\boldsymbol{s}$ сопоставлено множество A_s. Множество $\{A_s\}$, элементами которого являются множества A_s, $s \in S$ называют системой или семейством множеств. Понятия объединения и пересечения двух множеств обобщаются на случай произвольной конечной или бесконечной системы множеств следующим образом.

Объединением системы множеств A_s, $s \in S$, называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств системы.

Пересечением системы множеств A_s, $s \in S$, называется множество всех элементов, содержащихся в каждом множестве системы.

Объединение и пересечение системы множеств A_s, $s \in S$, обозначают соответственно (4)

$$\bigcup_{s \in S} A_s, \bigcap_{s \in S} A_s. \tag{4}$$

В частных случаях, когда система множеств конечна или счетна, пишут (5)

$$\bigcup_{s\in S}^{n} A_s, \bigcap_{s\in S}^{n} A_s, n\in N, \bigcup_{s\in S}^{\infty} A_s, \bigcap_{s\in S}^{\infty} A_s \tag{5}$$

Упорядоченные множества.

Множество называется упорядоченным, если для любых двух его элементов a и b установлено отношение порядка $a \le b$ или $b \le a$ a не превосходит b или b не превосходит a, обладающее свойствами:

1. рефлексивности: $a \le a$, т.е. любой элемент не превосходит самого себя;
2. антисимметричности: если $a \le b$ и $b \le a$, то элементы a и b равны;
3. транзитивности: если $a \le b$, $b \le c$, то $a \le c$.

Размещения и перестановки.

Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется размещением из п элементов по k элементов.

Число размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k И вычисляется по формуле (6)

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) \tag{6}$$

Размещения из n элементов по n элементов называются перестановками из n элементов. Число перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле (7)

$$P_n = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n = n!. \tag{7}$$

Сочетания.

Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется сочетанием из n элементов по k элементов.

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k и вычисляется по формуле (8)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{8}$$

или по формуле (9)

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \tag{9}$$

Справедливы равенства (10):

$$C_n^k = C_n^{k-1}, C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k, k < n. \tag{10}$$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ.

Пример 1. *Доказать закон двойственности* $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

▲ Пусть $x \in (A \cap B)'$; тогда $x \notin A \cap B$ и, следовательно, $x \notin A$ или $x \notin B$, т.е. $x \in A'$ или $x \in B'$, а это означает, что $x \in A' \cup B'$. Таким образом, доказано включение (11):

$$(A \cap B)' \subset A' \cap B'. \tag{11}$$

Пусть $x \in A' \cup B'$; тогда $x \in A'$, или $x \in B'$ и, следовательно, $x \notin A$ или $x \notin B$, т.е. $x \notin A \cap B$, а это означает, что $x \in (A \cap B)'$. Таким образом, доказано включение (12):

$$A' \cup B' \subset (A \cap B)' \tag{12}$$

Из включений $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$ и $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$ следует, что множества $(A \cap B)'$ и $A' \cup B'$ состоят из одних и тех же элементов, т.е. равны. ▲

Пример 2. *Группа студентов изучает семь учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если на этот день недели запланированы занятия по четырем дисциплинам?*

▲ Различных способов составления расписания столько, сколько существует четырехэлементных упорядоченных подмножеств у семиэлементного множества, т.е. равно числу размещений из семи элементов по четыре элемента. По формуле (6), полагая в ней $n = 7$, $k = 4$, находим

$$A_4^7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840. \blacktriangle$$

Пример 3. *Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?*

▲ Для того чтобы число, составленное из заданных цифр, делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы цифра 5 стояла на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т.е. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$▲

Пример 4. *В чемпионате страны по футболу (высшая лига) участвуют 18 команд, причем каждые две команды встречаются между собой 2 раза. Сколько матчей играется в течение сезона?*

▲ В первом круге состоится столько матчей, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, содержащего 18 элементов, т.е. их число равно C_18^2. По формуле (10) находим

$$C_{18}^2 = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153.$$

Во втором круге играется столько же матчей, поэтому в течение сезона состоится 306 встреч. ▲

ЗАДАЧИ.

1. Даны множества *A, B, C.* С помощью операций объединения и пересечения записать множество, состоящее из элементов, принадлежащих:
   (a) всем трем множествам;
   (b) хотя бы одному множеству;
   (c) по крайней мере двум из этих множеств;

2. Доказать, что равенства:
   (a) $A \cup B =$ B;
   (b) $A \cap B =$ A;

   верны тогда и только тогда, когда $A \subset B$.

3. Доказать, что равенство $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup C$ верно тогда и только тогда, когда $A \supset C$.

4. Доказать равенство:
   (a) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$;
   (b) $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$;
   (c) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$;
   (d) $(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash (B \cap C)$;

5. Доказать, что включение $A \backslash B \subset C$ верно тогда и только тогда, когда $A \subset B \cup C$.

6. Доказать, что:
   (a) $A \cup (B \backslash C) \supset (A \cap B) \backslash C$;
   (b) $(A \cup C) \backslash B \subset (A \backslash B) \subset C$;

7. Определить, в каком отношении $(X \subset Y, X \supset Y, X = Y)$ находятся множества X и Y, если:
   (a) $X = A \cup (B \backslash C), Y = (A \cup B) \backslash (A \cup C)$;
   (b) $X = (A \cap B) \backslash C, Y = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$;
   (c) $X = A \backslash (B \cup C), Y = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$;

8. Пусть A и B – произвольные подмножества множества U. Доказать равенство:
   (a) $(A \backslash B)' = A' \cup B$;
   (b) $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \cup B$;
   (c) $(A \cup B) \cap (A' \cup B') = A \cup B$;

9. Пусть $A \subset U$, $B \subset U$. Найти множество $X \subset U$, удовлетворяющее уравнению
$$(X \cup A)' \cup (X' \cup A') = B.$$

10. Найти подмножества A и B множества U, если известно, что для любого множества $X \subset U$ верно равенство:
$$X \cap A = X \cup B.$$

11. Пусть $A_s \subset U$, $s \in S$. Доказать:
   (a) $(\bigcup\limits_{s \in S} A_s)' = \bigcap\limits_{s \in S} A'_s$
   (b) $(\bigcap\limits_{s \in S} A_s)' = \bigcup\limits_{s \in S} A'_s$