Множества. Комбинаторика.

Aminjon Shermatov

9 мая 2022 г.

Contents

Определение

Буквами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ обозначают соответственно множества натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел

Если $\boldsymbol{x}$ – элемент множества $\boldsymbol{A}$, то пишут $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, а если $\boldsymbol{x}$ не является элементом множества $\boldsymbol{A}$, то пишут $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}$

Если каждый элемент множества $\boldsymbol{A}$ является элементом множества $\boldsymbol{B}$, то пишут $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ или $\boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A}$ и говорят, что множество $\boldsymbol{A}$ является подмножеством множества $\boldsymbol{B}$. В этом случае говорят также, что $\boldsymbol{A}$ содержится в $\boldsymbol{B}$ или что $\boldsymbol{B}$ содержит $\boldsymbol{A}$.

Если $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$, то $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

Для удобства вводится понятие пустого множества (его обозначают $\emptyset$), которое по определению не содержит элементов и содержится в любом множестве.

Операции над множествами

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, называется объединением множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и обозначается $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ или $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству $\boldsymbol{A}$, так и множеству $\boldsymbol{B}$, называется пересечением множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и обозначается $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ или $\boldsymbol{AB}$. Если $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$, то говорят, что множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ не пересекаются.

Множество, состоящее из всех элементов множества $\boldsymbol{A}$, не принадлежащих множеству $\boldsymbol{B}$, называется разностью множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и обозначается $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$.

Если $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$, то разность $\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}$ называют дополнением множества $\boldsymbol{A}$ до множества $\boldsymbol{B}$ и обозначают $\boldsymbol{A}'_B$. В тех случаях, когда рассматриваются только подмножества некоторого основного множества $\boldsymbol{U}$, дополнение множества $\boldsymbol{M}$ до множества $\boldsymbol{U}$ называют просто дополнением $\boldsymbol{M}$ и вместо $\boldsymbol{M}'_U$ пишут просто $\boldsymbol{A}'$,

Непосредственно из определения дополнения множества следуют равенства (2):

$$\boldsymbol{M} \cup \boldsymbol{M}' = \boldsymbol{U}, \boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{M}' = \emptyset, (\boldsymbol{M}')' = \boldsymbol{M}, \qquad (1)$$

Эквивалентные и неэквивалентные множества

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, называется объединением множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и обозначается $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ или $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству $\boldsymbol{A}$, так и множеству $\boldsymbol{B}$, называется пересечением множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и обозначается $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ или $\boldsymbol{AB}$. Если $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$, то говорят, что множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ не пересекаются.

Множество, состоящее из всех элементов множества $\boldsymbol{A}$, не принадлежащих множеству $\boldsymbol{B}$, называется разностью множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и обозначается $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$.

Если $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$, то разность $\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}$ называют дополнением множества $\boldsymbol{A}$ до множества $\boldsymbol{B}$ и обозначают $\boldsymbol{A}'_B$. В тех случаях, когда рассматриваются только подмножества некоторого основного множества $\boldsymbol{U}$, дополнение множества $\boldsymbol{M}$ до множества $\boldsymbol{U}$ называют просто дополнением $\boldsymbol{M}$ и вместо $\boldsymbol{M}'_U$ пишут просто $\boldsymbol{A}'$,

Непосредственно из определения дополнения множества следуют равенства (2):

$$\boldsymbol{M} \cup \boldsymbol{M}' = \boldsymbol{U}, \boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{M}' = \emptyset, (\boldsymbol{M}')' = \boldsymbol{M}, \tag{2}$$

Система множеств.

Пусть дано множество $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{s}\}$, называемое множеством индексов, и каждому индексу $\boldsymbol{s}$ сопоставлено множество A_s. Множество $\{A_s\}$, элементами которого являются множества A_s, $s \in S$ называют системой или семейством множеств. Понятия объединения и пересечения двух множеств обобщаются на случай произвольной конечной или бесконечной системы множеств следующим образом.

Объединением системы множеств A_s, $s \in S$, называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств системы.

Пересечением системы множеств A_s, $s \in S$, называется множество всех элементов, содержащихся в каждом множестве системы.

Объединение и пересечение системы множеств A_s, $s \in S$, обозначают соответственно (3)

$$\bigcup_{s \in S} A_s, \bigcap_{s \in S} A_s. \tag{3}$$

Упорядоченные множества

Множество называется упорядоченным, если для любых двух его элементов a и b установлено отношение порядка $a \leq b$ или $b \leq a$ a не превосходит b или b не превосходит a, обладающее свойствами:

1. рефлексивности: $a \leq a$, т.е. любой элемент не превосходит самого себя;
2. антисимметричности: если $a \leq b$ и $b \leq a$, то элементы a и b равны;
3. транзитивности: если $a \leq b$, $b \leq c$, то $a \leq c$.

Размещения и перестановки

Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется размещением из n элементов по k элементов.

Число размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k И вычисляется по формуле (4)

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) \tag{4}$$

Размещения из n элементов по n элементов называются перестановками из n элементов. Число перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле (5)

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!. \tag{5}$$

Сочетания

Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется сочетанием из n элементов по k элементов.

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k и вычисляется по формуле (6)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{6}$$

или по формуле (7)

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}. \tag{7}$$

Справедливы равенства (8):

$$C_n^k = C_n^{k-1}, C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k, k < n. \tag{8}$$