



تخمینی از مدل رشد اقتصادی سولو-کاب-داگلاس^۱ با استفاده از فیلترهای کالمن^۲: روشی بر مبنای مشاهده پذیری

اقتصاد کلان دوره‌ی فرعی
جناب آقای دکتر بخشی‌آنی

گروه اول
ارشیا اکبری
فاطمه توحیدیان
امین کشیری
ساحل مس فروش

بهار ۱۴۰۰

¹Solow-Cobb-Douglas

²Kalman

در این مقاله از یک رویکرد جدید برای تخمین مدل رشد اقتصادی سولو-کاب-داگلاس استفاده شده است. برای تخمین زدن پارامترهای متغیر خود سیستم و حالات داخلی سیستم، از یک فیلتر کالمان توسعه یافته^۳ یا EKF استفاده شده است. برخلاف تکنیک‌های سنتی، در این روش تمامی پارامترها متغیر (در زمان) در نظر گرفته می‌شوند. در نهایت توانستیم همروندی خوبی در برخی از متغیرها به دست آوریم و تا حدی روند رشد متغیرها را در آینده پیش بینی کنیم. روند تغییر پارامترهای کلان برای ایران خطی نیست، اما به دلیل این که مدل ما تغییرات پارامترها را خطی در نظر می‌گیرد، توانسته است روند تغییرات را پیش بینی کند.

۱. مقدمه

فرض می‌شوند، در نمایش ارائه داده شده تمام پارامترهای مدل به عنوان متغیر حالت در نظر گرفته شده‌اند.

در مقاله‌ی [۴] با استفاده از یک آنالیز گسترده‌ی مشاهده‌پذیری، مشاهده‌پذیری مدل سولو-کاب-داگلاس بررسی شده است. با استفاده از این آنالیز، شرایط ضروری برای مشاهده‌پذیر بودن به دست آمده‌اند. این شرایط برای تخمین حالت کل سیستم با استفاده از زیرمجموعه‌ای از اندازه‌ها نیاز هستند. در نهایت با استفاده از EKF و داده‌های واقعی، این نتایج صحت‌سنجی شده‌اند.

۲. مدل

مدل استفاده شده در مقاله‌ی ما مدل اقتصادی سولو است که مراحل به دست آوردن آن را می‌توانید در مقاله‌ی [۴] به صورت کامل مشاهده کنید. در این مدل، فرض‌هایی وجود دارند که به صورت خلاصه آن‌ها را بیان می‌کنیم:

- فرض می‌کنیم تمام سرمایه‌گذاری روی سرمایه‌ی فیزیکی مصرف می‌شود. در این صورت تغییرات سرمایه‌ی فیزیکی برابر است با کل سرمایه‌گذاری منهای میزان سرمایه از دست رفته به دلیل استهلاک.
- تمام پسرانداز مردم روی سرمایه‌ی فیزیکی سرمایه‌گذاری می‌شود.
- فرض می‌کنیم که تولید به دو عامل نیروی کار L و سرمایه‌ی کل K بستگی دارد.
- فرض می‌کنیم که تابع تولید خاصیت برگشت به مقیاس ثابت

یکی از مدل‌های مهم رشد درون‌زا مدل سولو-سوان^۴ است. این مدل دینامیک بلندمدت رشد اقتصادی را بر اساس انباشت سرمایه، نیروی کار و جمعیت و افزایش بهره‌وری (همان سطح تکنولوژی) توضیح می‌دهد.

تخمین پارامترها در توضیح دقیق رفتار سیستم مدل‌های دینامیکی مثل مدل سولو-سوان نقشی حیاتی بازی می‌کند. در مقاله‌ی [۴] یکی از روش‌های این تخمین با استفاده از فیلترهایی مثل فیلتر کالمان^۵ نشان داده شده است.

فیلتر کالمان الگوریتمی است که توسط رودولف کالمان^۶ توسعه داده شد، که از آن برای تخمین حالات یک سیستم دینامیکی با استفاده از اندازه‌گیری‌هایی در طول زمان استفاده می‌شود.

خانواده‌های دیگری از الگوریتم‌ها برای حل مسائل فیلتر کردن و تخمین زدن نیز وجود دارند. نمونه‌هایی از این روش‌ها، روش‌های فیلتر ذره‌ای^۷ یا روش‌های توسعه یافته‌تری از فیلتر کالمان مانند فیلتر کالمان توسعه یافته^۸ (EKF) و یا فیلتر کالمان بدون رایحه^۹ (UKF) هستند.

در مقاله‌ی [۴]، از یک فیلتر کالمان توسعه یافته یا EKF برای تخمین حالت یک مدل رشد اقتصادی سولو-کاب-داگلاس استفاده شده است. به این دلیل از این روش استفاده شده است که بتوانیم به صورت همزمان پارامترهای خود مدل و حالات داخلی سیستم را همزمان تخمین بزنیم. دقت کنید که برخلاف روش‌های سنتی مثل رگرسیون خطی، که پارامترهای سیستم ثابت

³Extended Kalman Filter

⁴Solow-swan

⁵Kalman Filter

⁶Rudolf E. Kalam

⁷Particle Filters

⁸Extended Kalman filter

⁹Unscented Kalman filter

¹⁰Constant return to scale

$$F(\lambda L, \lambda K) = \lambda F(L, K)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{k} = sAk^{(1-\alpha)} - (\delta + n)k & \\ \dot{A} = v_A & v_A = 0 \\ \dot{a} = v_a & v_a = 0 \\ \dot{s} = v_s & v_s = 0 \\ \dot{\delta} = v_\delta & v_\delta = 0 \\ \dot{n} = v_n & v_n = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

یکی از توابع تولیدی که شرایط تابع تولید سولو را ارضا می‌کند تابع کاب-داگلاس است:

$$F(K, L) = AL^\alpha K^{(1-\alpha)} \quad (1)$$

که v_i نشان دهنده‌ی سرعت تغییرات متغیر i است. در این فضا سرعت تغییرات ثابت در نظر گرفته شده است که بتوانیم در عین سادگی، تغییرات آن‌ها با زمان را نیز در نظر بگیریم.

۳. آنالیز

که در اینجا A ضریب بهره‌وری^{۱۱} (سطح تکنولوژی) و α کشش نیروی کار است.

یک سیستم را مشاهده‌پذیر می‌گوییم اگر برای هر زمانی مثل t_0 با استفاده از مدل سولو و تابع تولید کاب-داگلاس، در نهایت به رابطه‌ی زیر برای تغییرات سرمایه به ازای هر فرد می‌رسیم:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

مدل مشاهده^{۱۲} (تابع h):

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$$

$$\dot{k} = sAK^{(1-\alpha)} - (\delta + n)k \quad (2)$$

و مشاهدات در بازه‌ی t_0 تا t یعنی $\mathbf{z}[t_0, t]$ بتوانیم حالت اولیه یا x_0 را به دست آوریم. در واقع اگر سیستمی مشاهده پذیر باشد، ما می‌توانیم در مدت زمانی متناهی با اندازه گیری خروجی‌های سیستم، تمام حالات درونی‌اش را تخمین بزنیم.

در مقاله‌ی ما، بردار حالت به صورت زیر است:

$$\mathbf{x} = [k \ A \ v_A \ \alpha \ v_\alpha \ s \ v_s \ \delta \ v_\delta \ n \ v_n]^T \quad (4)$$

همچنین فرض می‌کنیم که اندازه‌های زیر از داده‌های اقتصاد کلان وجود دارند:

$$\mathbf{z} = [k \ s \ \delta \ n \ Y_L]^T$$

با در نظر گرفتن تمامی فرض‌های بالا، نمایش حالت-فضا برای

که در آن $n = \frac{\dot{L}}{L}$ نرخ رشد جمعیت، $k = \frac{K}{L}$ سرمایه به ازای هر فرد، δ نرخ استهلاک سرمایه موجود و $f(k) = F(\frac{K}{L}, 1)$ معمولاً فرض می‌شود که $f(k)$ یک تابع صعودی و اکیدا مقعر است.

برای این که روی داده‌های واقعی مدل کاب-داگلاس را اعمال کنیم، مقادیر α و A را نیاز داریم. در روش‌های سنتی مثل رگرسیون خطی این پارامترها با کمک داده‌های Y ، K و L به دست می‌آیند. در تمام روش‌های سنتی، α ثابت تخمین زده می‌شوند در صورتی که واقعا متغیرند. ما در این مقاله، تمامی پارامترها را متغیر در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم که نرخ تغییرات هرکدام از آن‌ها ثابت است.

¹¹Total Productivity Factor

¹²State transition model

¹³Observation model

که در آن $Y_L = \frac{Y}{L}$.

۴. روش‌ها

در بخش قبلی مشاهده‌پذیری سیستم خود را بررسی کردیم. مشاهده‌پذیری نشان می‌دهد که با داشتن خروجی‌های یک سیستم (اندازه‌ها) چقدر می‌توانیم حالات درونی سیستم را تخمین بزنیم.

مقاله‌ی [۴] با استفاده از EKF پارامترهای مدل را تخمین زده‌است. دقت کنید نتایج نظری‌ای که در مقاله اصلی به دست آمده است برای روش‌های دیگر تخمین زدن نیز می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. از آنجایی که داده‌های ما گسسته هستند، می‌بایست یک مدل تصادفی گسسته برای معادلات ۳ تعریف کنیم. مقاله‌ی [۴] برای این کار از روش اوایلر استفاده کرده است:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{n}_{k-1}) = (\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})\Delta t) + \mathbf{n}_k \quad (۷)$$

سیستم پیش‌بینی اندازه‌ها نیز به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{r}_k) = [h_1(\mathbf{x}_k) \ h_2(\mathbf{x}_k) \ \dots \ h_n(\mathbf{x}_k)]^T + \mathbf{r}_k \quad (۸)$$

بردارهای \mathbf{n}_k و \mathbf{r}_k را بردارهای اختلالی^{۱۸} در نظر می‌گیریم که روی حالت‌ها و اندازه‌ها تاثیر می‌گذارند. فرض می‌کنیم این بردارها از هم مستقل‌اند. همچنین Δt را به عنوان بازه‌ی زمانی و k را به عنوان گام نمونه در نظر می‌گیریم.

فرمول‌های پایین روشی است که در مقاله‌ی [۴] برای پیاده‌سازی روش EKF استفاده شده است. در این مقاله فاز پیش‌بینی EKF به صورت زیر:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, 0) \quad (۹)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (۱۰)$$

و فاز تصحیح به صورت زیر:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0)) \quad (۱۱)$$

هر کدام از اندازه‌های بردار \mathbf{z} از بردار حالت به دست می‌آید، و در واقع مدل مشاهده به صورت زیر است:

$$\begin{cases} h_1(\mathbf{x}) = k \\ h_2(\mathbf{x}) = s \\ h_3(\mathbf{x}) = \delta \\ h_4(\mathbf{x}) = n \\ h_5(\mathbf{x}) = AK^{(1-\alpha)} \end{cases} \quad (۶)$$

در مقاله‌ی هرمان و کرنر^{۱۴} نشان داده شده است که یک سیستم غیرخطی به صورت ضعیف و محلی مشاهده‌پذیر^{۱۵} است اگر شرط $rank(O) = \dim(\mathbf{x})$ برقرار باشد که در این رابطه O ماتریس مشاهده‌پذیری^{۱۶} است. ماتریس مشاهده‌پذیری را با استفاده از توابع آماده در متلب یا پایتون نیز می‌توانیم محاسبه کنیم.

در مقاله‌ی [۴] تمام ترکیب‌های ممکن مشاهده‌پذیری برای اندازه‌های مختلف محاسبه شده است. نتایج به دست آمده از این مقاله را در جدول ۱ نشان داده‌ایم.

این جدول نشان دهنده‌ی همه‌ی ترکیب‌هایی است که توانستیم یک ماتریس رتبه-تمام^{۱۷} برای ماتریس مشاهده‌پذیری به دست بیاوریم. هرکدام از این ترکیب‌ها، زیر مجموعه‌ای از کل اندازه‌ها هستند که با داشتن آن‌ها سیستم مشاهده‌پذیر می‌ماند.

Configuration	k	s	δ	n	Y_L
(a)	✓	✓	✓	✓	✓
(b)	✓	✓	✓	✓	✗
(c)	✓	✓	✓	✗	✓
(d)	✓	✓	✗	✓	✓
(e)	✓	✗	✓	✓	✓
(f)	✗	✓	✓	✓	✓
(g)	✓	✗	✓	✗	✓
(h)	✓	✗	✗	✓	✓

جدول ۱

¹⁴Herman and Krener

¹⁵locally weakly observable

¹⁶Observability Matrix

¹⁷Full Rank

¹⁸noise

جهانی [۳] برای نیروی کار سال‌های مورد نیاز استفاده شده است و با توجه به تغییرات آن نرخ رشد نیروی کار و همچنین درآمد سرانه اسمی و حقیقی محاسبه شده است. سرمایه کل نیز از طرف مرکز آمار ایران ارائه نمی‌شود و تنها مقدار تشکیل سرمایه سالانه اعلام می‌شود، به همین منظور از اطلاعات بانک جهانی استفاده شد. سپس با استفاده از آن، رشد سالانه سرمایه محاسبه گردید و در ادامه با استفاده از تعریف رشد سالانه‌ی سرمایه که برابر با اختلاف سرمایه‌گذاری سالانه و مقدار استهلاک سرمایه است، مقدار استهلاک سالانه‌ی سرمایه محاسبه و همچنین نرخ استهلاک بدست آمد. برای مدل سازی خود نیازمند پارامتری می‌باشیم که بیانگر نرخ برای نمایش سطح تکنولوژی ایران است به همین منظور از درصد ارزش افزوده - ایی که از ساخت در صنعت high-tech وجود دارد بهره برده‌ایم و آن را معیاری برای نمایش سطح تکنولوژی در ایران در نظر گرفته‌ایم.

۶. نتایج

به منظور انجام آزمایش‌ها، سه بازه‌ی زمانی به صورت زیر تعریف کردیم:

- بازه‌ی همگرایی: در این بازه که بین سال‌های ۱۳۷۰ تا ۱۳۷۹ است نتایج مدل را برای سنجیدن آن استفاده نمی‌کنیم، و تنها برای آموزش و همگرایی متغیرها استفاده می‌کنیم.
- بازه‌ی آزمون: در این بازه که بین سال‌های ۱۳۸۰ تا ۱۳۸۹ است برای آزمون فیلتر به دست آمده استفاده می‌کنیم. نتایج به دست آمده با داده‌های موجود برای اندازه‌ها مقایسه می‌شوند.
- بازه‌ی پیش‌بینی: در این بازه که بین سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۷ است، از مدل برای پیش‌بینی استفاده می‌شود. از این جا و از سال ۱۳۹۰ به بعد، دیگر به فیلتر اطلاعات دیگری نمی‌دهیم (یعنی دیگر مرحله‌ی تصحیحی وجود ندارد). سپس نیز نتایج را با داده‌های واقعی مقایسه می‌کنیم.

-	\hat{k}	\hat{s}	$\hat{\delta}$	\hat{n}
Actual	14.93	0.24	0.41	0.023
Predicted	28.70	0.34	0.64	0.014

جدول ۲

جدول ۲، نتایج داده‌های تجربی برای ترکیب‌های جدول ۱ را نشان می‌دهد. ردیف اول، نشان دهنده‌ی میانگین پارامتر مربوطه

$$P_k = (I - K_k C_k) P_k^- \quad (۱۲)$$

تعیین شده است که در آن

$$K_k = P_k^- C_k^T (C_k P_k^- C_k^T + R_k)^{-1} \quad (۱۳)$$

و

$$A_k = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_{k-1}, 0) \quad C_k = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_{k-1}, 0) \quad (۱۴)$$

و z_k برابر با بردار اندازه‌ی واقعی در گام شماره‌ی k و P ماتریس کوواریانس سیستم و K ماتریس منفعت کالمان^{۱۹} است.

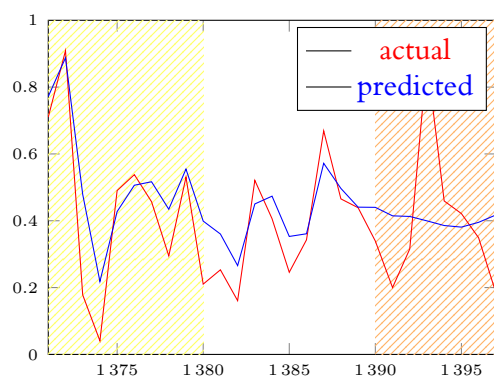
ما برای استفاده از داده‌های ایران، از یکی از پیاده‌سازی‌های EKF در پایتون به نام filterpy استفاده کردیم [۱]. پیاده‌سازی گفته شده در مقاله‌ی اصلی چندان پایدار نبود. به همین دلیل قسمت تصحیح را مقداری تغییر دادیم و در نتیجه فرمول ۲۲ به صورت زیر تغییر کرد:

$$P_k = (I - K_k C_k) P_k^- (I - K_k C_k)^{-1} + K_k R K_k^{-1}$$

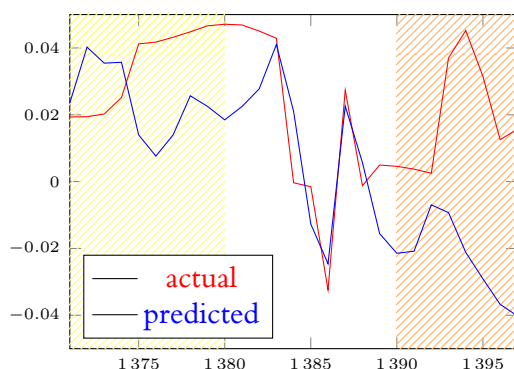
۵. داده‌ها

برای این که نتایج تئوری خود را با داده‌های واقعی به صورت تجربی صحت‌سنجی کنیم، از مقادیر تولید ناخالص داخلی، هزینه مصرف و تشکیل سرمایه سالانه که از سایت مرکز آمار ایران [۲] گرفته شده‌اند، استفاده کردیم همچنین شایان ذکر است که نرخ پس-انداز به صورت مستقل سالانه اعلام نشده است، پس مقدار آن را از طریق روش‌های تئوری محاسبه کردیم. بدین منظور در روش اول با استفاده از تعریف تشکیل سرمایه سالانه که برابر با مقدار پس انداز سالیانه از درآمد کل است، نرخ پس انداز محاسبه شده است و در روش دوم با استفاده از تعریف مقدار پس انداز پس از مصارف و هزینه‌های ناشی از مصرف، نرخ پس انداز محاسبه شده است که با توجه به اینکه در تعریف دوم مالیات نیز تاثیرگذار است و مقدار مالیات سالیانه نیز توسط مرکز آمار ارائه نشده است، پس نرخ پس انداز محاسبه شده در روش اول را استفاده می‌کنیم. اجزای نیروی کار سالانه توسط مرکز آمار ارائه می‌شود ولی نه به این شکل که مقدار نیروی کار ایران برای سال‌های مختلف مشخص شود، به همین منظور از اطلاعات بانک

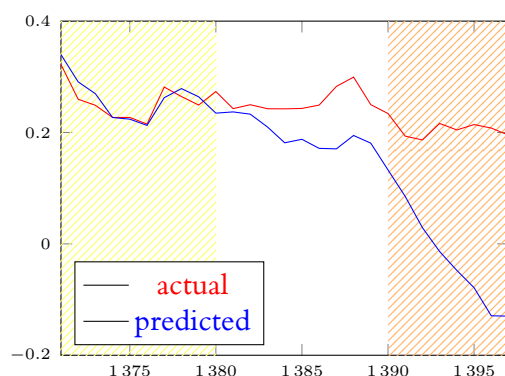
¹⁹Kalman gain



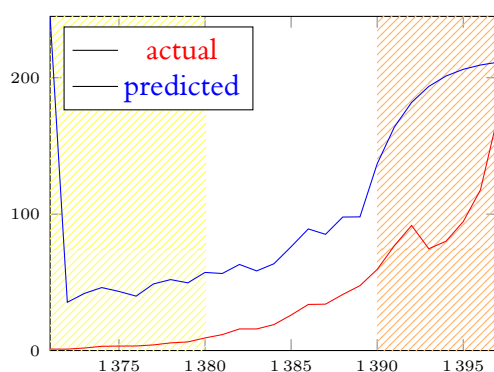
شکل ۱: نرخ استهلاک δ



شکل ۲: نرخ رشد نیروی کار n



شکل ۳: نرخ پس انداز s



شکل ۴: سرمایه به ازای هر فرد k

در بازه‌ی آزمون است (برای داده‌های واقعی). ردیف دوم، میانگین پارامتر به دست آمده از مدل ما است. دقت کنید که میانگین پیش‌بینی شده از مدل، تنها زمانی ملاک قرار گرفته است که جزء اندازه‌ها نبوده باشد.

شکل‌های ۱ تا ۴ مقایسه‌ای بین مقدار تخمین‌زده شده و واقعی برای بقیه پارامترهای مدل ما است. دقت کنید همانطوری که در مقاله‌ی [۴] گفته شده است، s ، δ و n در ابتدای کار صفر هستند. زیرا اطلاعات اولیه‌ای از آن‌ها نداریم. اما بلافاصله پس از شروع محاسبه‌ی مدل تغییر می‌کنند و به سمت داده‌های واقعی پیش می‌رود.

یکی از مشکلاتی که روش ما با آن مواجه شد، این بود که ما تغییرات متغیرها به جز k را خطی در نظر گرفته بودیم (همانند مقاله‌ی اصلی) و گرچه این فرض برای داده‌های جهانی معقول عمل کرده بود، اما برای داده‌های ایران خیلی دور از واقعیت بود، و داده‌ها نه تنها به صورت نسبتاً خطی تغییر نمی‌کردند، بلکه نظم مشخصی نیز در آن‌ها دیده نمی‌شد و به همین دلیل نتایج در حد انتظار نبود (نسبت به داده‌های جهانی).

برای مقابله با مشکل مطرح شده چند ایده‌ی مختلف را پیشنهاد می‌کنیم. یک ایده‌ی ممکن این است که مدل خود را پیچیده‌تر کنیم، و تغییرات متغیرها را آزادتر بگذاریم، که مدل بهتر بتواند خودش را با تغییرات پارامترها در ایران وفق دهد. در صورت پیاده‌سازی این کار، در عین حال که مدل ما پیچیده‌تر می‌شود، اما انتظار داریم نتیجه‌ی بهتری به دست بیاوریم. همچنین، ممکن است در صورتی که داده‌ها را برای بازه‌ی زمانی طولانی‌تری داشته باشیم، بتوانیم الگوی تغییرات را بهتر پیدا کنیم و با استفاده از داده‌های بیشتر برای تخمین در بازه‌ی آزمون یا پیش‌بینی، انتظار داریم نتیجه‌ی بهتری به دست آوریم.

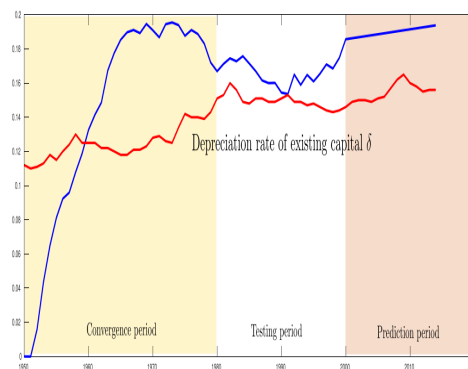
همچنین، فرض خطی بودن خود را در پیش‌بینی متغیری مثل δ نشان داد. همانطور که می‌بینید، دلتا پس از پایان دوره‌ای که به آن داده می‌دهیم، رفتاری کاملاً غیر خطی نشان می‌دهد. اما مدل ما تنها تغییرات خطی را مدل می‌کند، و همانطور که می‌بینید با این که روند میانگین را حفظ کرده است، اما با روند واقعی در کوتاه مدت بسیار تفاوت دارد. همانطور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، خطی بودن δ در کشور آمریکا که علت آن ثبات اقتصادی و تاثیر پیشرفت تکنولوژی بر سرمایه‌گذاری است، تاثیر به‌سزایی در بهتر عمل کردن مدل دارد.

مقاله‌ی [۴] ایده‌های جدیدی را مطرح کرده است. برای مثال، این اولین بار بوده است که از یک روش فیلترینگ غیرخطی برای تخمین مدل سولو-کاب-داگلاس استفاده شده است، و اولین بار بوده است که خاصیت‌های مشاهده‌پذیری این مدل غیرخطی بررسی شده‌اند.

در این مقاله، برای تکنیک تخمین زدن از EKF استفاده کرده‌ایم. دلیل این انتخاب این است که EKF نقطه‌ی شروع مناسبی برای استفاده از تخمین‌هایی با روش فیلترینگ غیرخطی برای این مدل از مسائل است. در عین حال لازم است که دقت کنید که به این منظور می‌توان از روش‌های دیگر تخمین با استفاده از فیلترینگ غیرخطی نیز استفاده کرد.

نتایج تئوری به دست آمده از آنالیز مشاهده‌پذیری نه تنها می‌توانند برای آزمایش قابل استفاده بودن EKF استفاده شوند بلکه می‌توانند برای سایر تکنیک‌های تخمین زدن بر مبنای فضا-حالت^{۲۰} نیز استفاده شوند. اگر آنجایی که مشاهده‌پذیری یک خاصیت ذاتی سیستم است، در صورت استفاده از سایر روش‌ها نیز تمامی روابط و مراحل بالا برقرار هستند، و می‌توانیم از آن‌ها استفاده کنیم.

با توجه به موارد گفته شده، گام بعدی پس از بهینه‌سازی کد استفاده شده (به خصوص روی داده‌های ایران) این است که فیلترهای دیگری مثل PF و UKF استفاده کنیم. انتظار داریم که این فیلترها نتایج بهتری نسبت به EKF به ما بدهند زیرا همانطوری که در مقاله اشاره کردیم، EKF با تمام جزئیاتش از ساده‌ترین و ابتدایی‌ترین روش‌های فیلتر کردن است و به طبع استفاده از روش‌های پیچیده‌تری مثل UKF ما را به نتیجه‌های بهتری می‌رساند.



شکل ۵: نرخ استهلاک δ در مقاله‌ی مبنا

۷. نتیجه‌گیری

در این مقاله، در عین حال که مشکلاتی که برای مدل و داده‌ها وجود داشت، توانستیم به نتایج جالبی برای برخی از پارامترها دست یابیم. همانطور که در نمودارها می‌بینیم، بعضی از پارامترها مثل k و n حتی پس از اینکه دیگر به آن‌ها داده‌ای ندادیم همگرایی خوبی داشتند. اما انحرافات فاحشی نیز در برخی از تخمین‌ها به چشم می‌خورد.

نتیجه‌ای که ما گرفتیم، نتایج مقاله‌ی [۴] را نیز تایید می‌کرد، و هرچه از اندازه‌های بیشتری استفاده کردیم، تخمین‌هایمان به داده‌های واقعی نزدیک‌تر شدند. در قسمت بعد، در رابطه با ایده‌هایی که برای ادامه‌ی کار داشتیم توضیح می‌دهیم. همچنین در فرصت‌های آینده شروع به اعمال فیلترها و روش‌های گفته شده می‌کنیم و امیدواریم که نتایج گرفته شده قابل اطمینان‌تر باشند.

۸. ادامه‌ی مسیر

۹. منابع

[۱] Rger Labbe. Kalman and Bayesian Filter in Python. <https://github.com/rllabbe/Kalman-and-Bayesian-Filters-in-Python.git>

[۲] Statistical Centre of Iran. <http://Amar.org.ir>

[۳] World Bank Data. <http://data.worldbank.ir>

²⁰State-space

[९] Estimation of the Solow-Cobb-Douglas economic growth model with a Kalman filter: An observability-based approach. <https://europepmc.org/backend/ptpmcrender.fcgi?accid=PMC6595187&blobtype=pdf>