

Moteur Physique pour les jeux vidéo

5^{ème} GamiX

Chapitre 2 : Mouvements dans les mondes réel et virtuels

Partie 2 : Corps rigides

2025 – 2026

AHMED AMMAR

- ❑ Être capable de **simuler** le mouvement d'un **objet rigide indéformable** dans le monde virtuel.

Prérequis

- ❑ Notions de base de cinématique.
- ❑ Notions de base de dynamique.

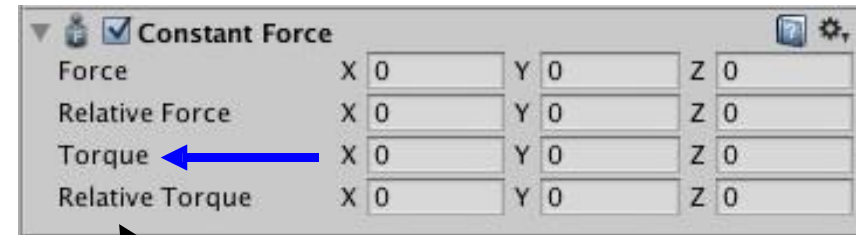
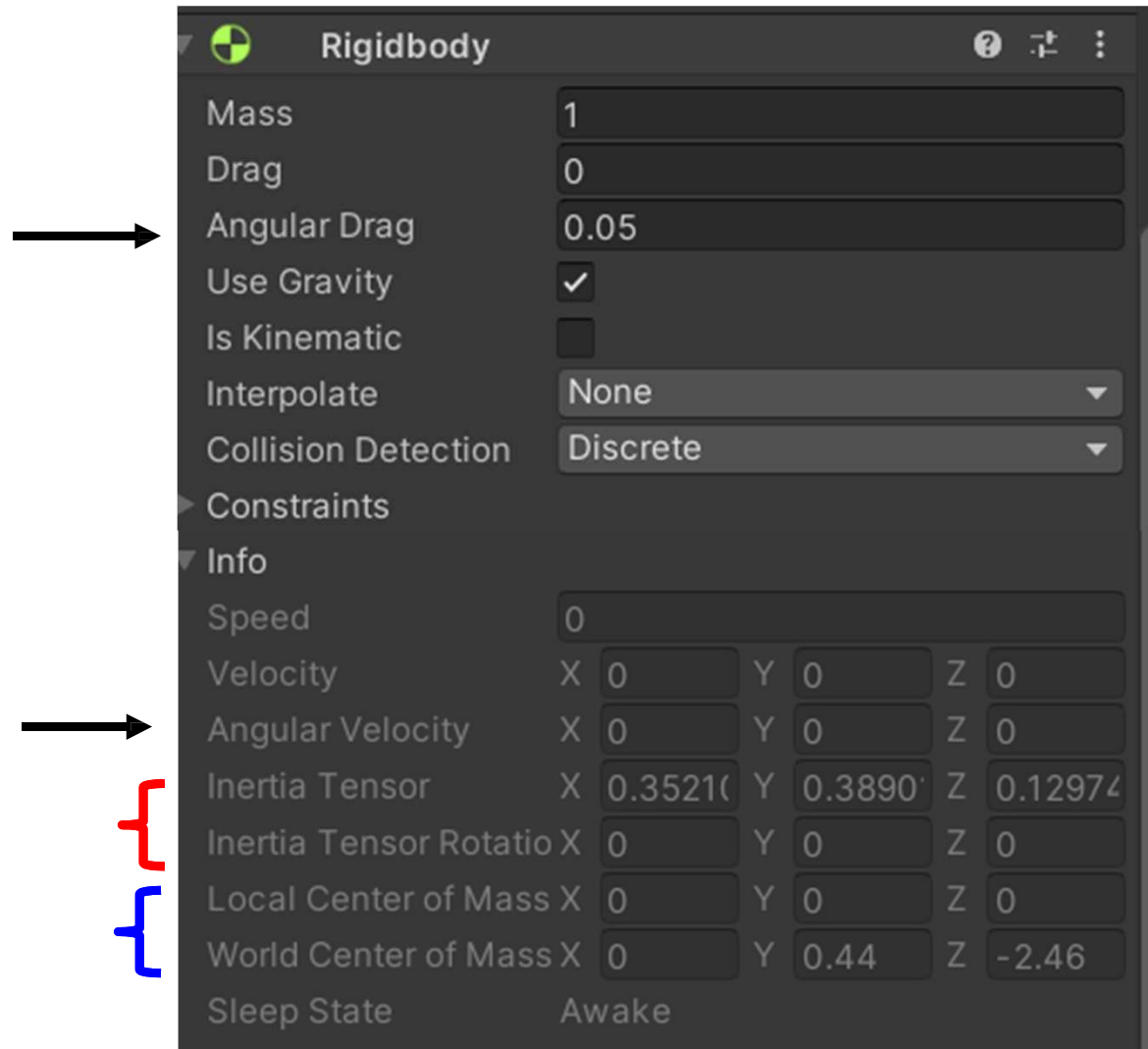
- Quelles différences dans la description du mouvement d'un **point matériel** et d'un **corps rigide indéformable** ?
- Quelles sont les règles qui régissent le mouvement d'un **corps rigide indéformable**?
- Comment transposer tout cela dans le monde virtuel ?

- **Corp rigide indéformable**: Objet pour lequel les distances « inter-**points** » ne changent pas !



Généraliser l'approche pour **un point matériel** à **N points** matériels ?

Dans PhysX



Vitesse et vitesse angulaire



Vitesse et vitesse angulaire

N'importe quel point de la roue tourne avec la même vitesse angulaire $\vec{\omega}$

La roue tourne avec une

vitesse angulaire $\vec{\omega}$



Variation de l'angle θ par unité de temps (rad/seconde)

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

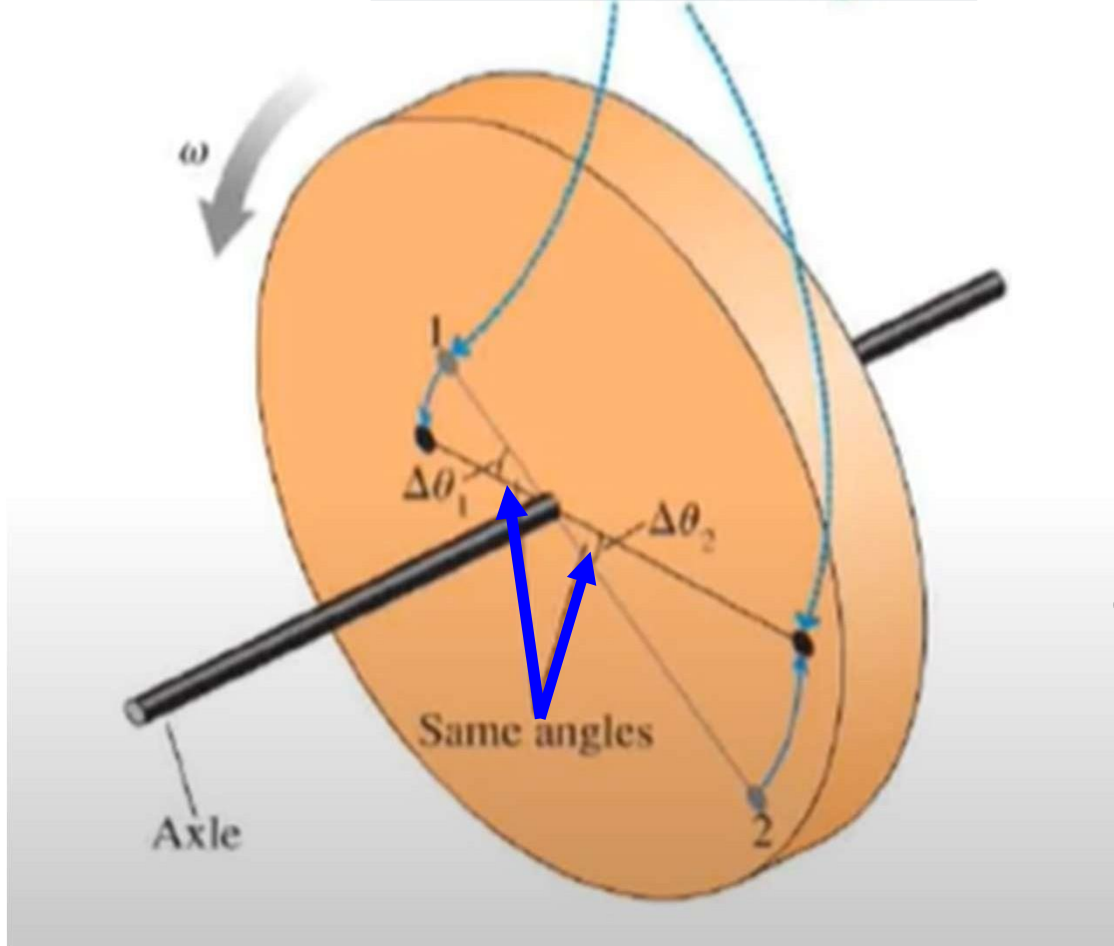
Même variation d'angle donc
même vitesse angulaire

On a : **$V = \omega \cdot r$**

vitesse

Distance à
l'axe de
rotation

**Même vitesse angulaire mais
vitesses différentes !**



- On a également:

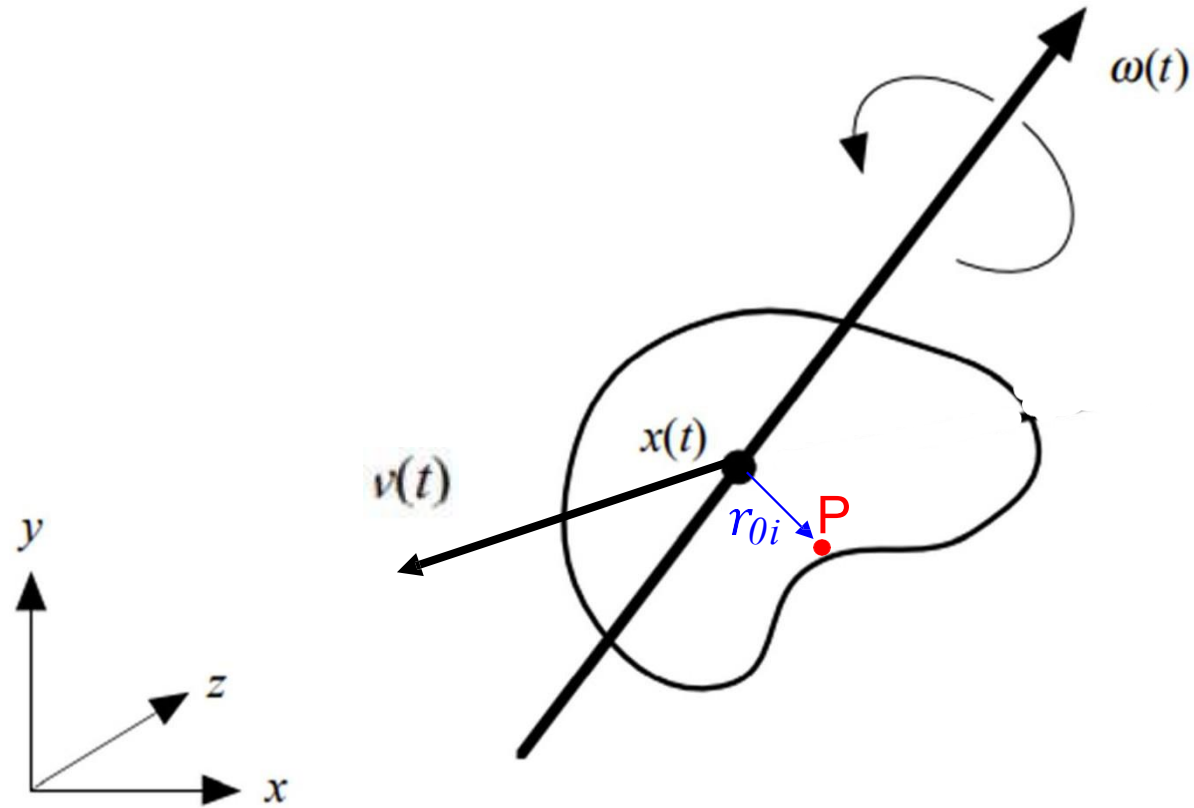
$$a_{cc} = \omega^2 \cdot r$$

L'accélération
« linéaire » de P

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

L'accélération **angulaire** de P

Généralisation

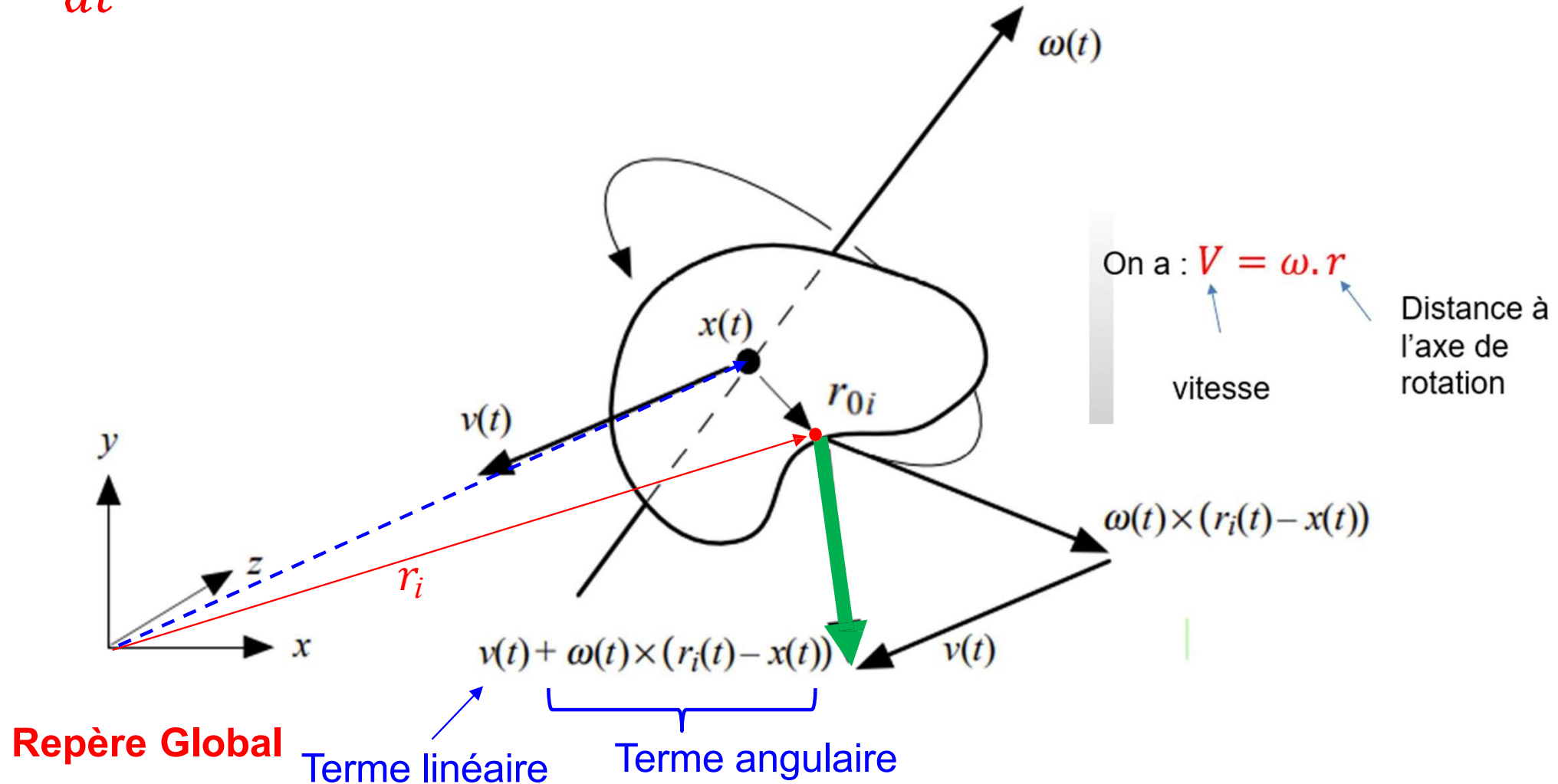


Repère Global

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = ?$$





Généralisation

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{r}_i(t) - \vec{x}(t))$$



- Quantité de mouvement: Pour un point matériel, il s'agit du produit de sa masse par son vecteur vitesse ($\vec{p}_M = m \cdot \vec{v}_M$).
- Barycentre (centre de masse): Point particulier du solide pour lequel la masse est répartie de la même façon dans n'importe quelle direction.

Centre de masse

 **Rigidbody**   

Mass

Drag

Angular Drag

Use Gravity ☒

Is Kinematic ☐

Interpolate

Collision Detection

Constraints

Info

Speed

Velocity X Y Z

Angular Velocity X Y Z

Inertia Tensor X Y Z

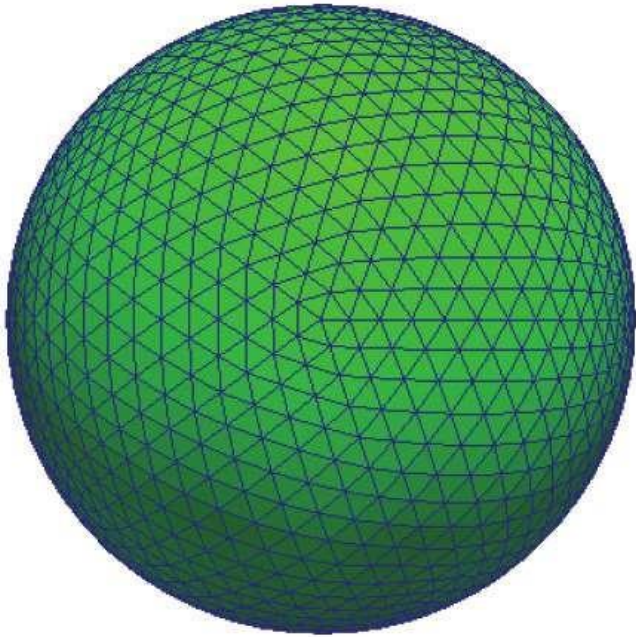
Inertia Tensor Rotatio X Y Z

Local Center of Mass X Y Z

World Center of Mass X Y Z

Sleep State

La masse est répartie d'une façon homogène ?



S'il s'agit d'un alliage ?

S'il y a une cavité à l'intérieur?

Comment calculer la **quantité de mouvement** ?

Quantité de Mouvement

La quantité de mouvement d'un point M, de masse m, animé d'une vitesse \vec{v}_M est donnée par :

$$\vec{p}_M = m \cdot \vec{v}_M$$

La quantité de mouvement d'un système de **N** points matériels, de masses **m_i** (**$i=0,1,\dots,N$**) se construit en **sommant les contributions** de chaque point matériel.

$$\vec{p}_{sys} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_{M_i} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt}$$

Barycentre (centre de masse)

Le centre de masse **G** (centre d'inertie, barycentre des masses m_i) est donné par :

$$m \cdot \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \overrightarrow{OM_i} \quad \text{où} \quad m = \sum_{i=1}^N m_i$$



$$m \cdot \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} = \overrightarrow{p_{sys}}$$

Il suffit de savoir où se situe le **centre d'inertie** et quelle est la **masse totale** !

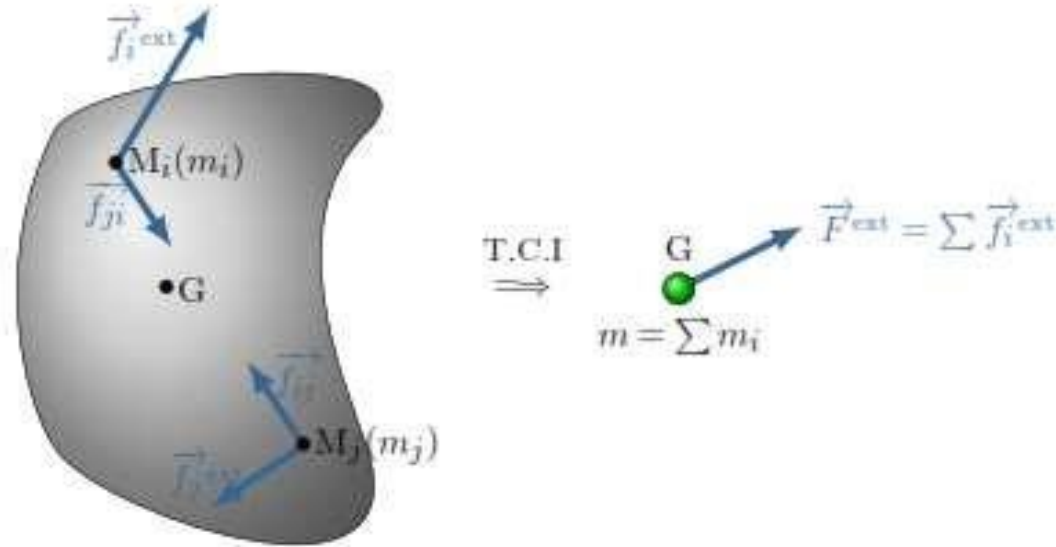
Théorème du Centre d'inertie

La quantité de mouvement d'un système de points matériels S, de masse totale m, est **la même que** celui d'un **point matériel de même masse** et **situé au centre de masse G**.

Remarques

$$m. \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i. \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} = \overrightarrow{p_{sys}} \quad \Rightarrow \quad m. \overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{p_{sys}}$$

$$\frac{d\overrightarrow{p_{sys}}}{dt} = \frac{d(m. \overrightarrow{v_G})}{dt} = m. \frac{d(\overrightarrow{v_G})}{dt} = m. \overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{F_{ext}}$$

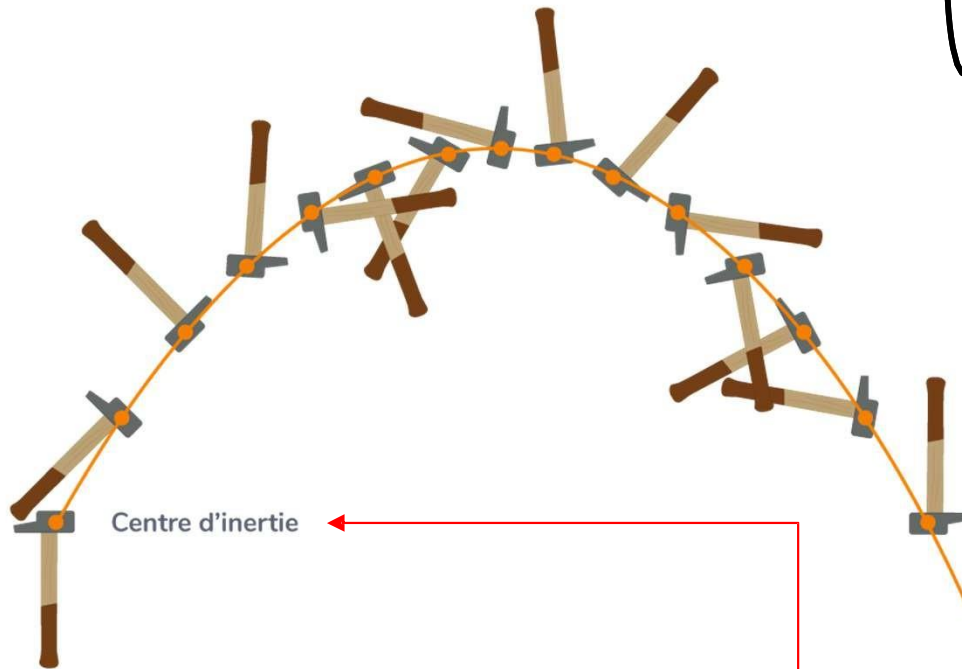


Système S de points matériels

Remarques

$$\frac{d\vec{p}_{sys}}{dt} = \frac{d(m.\vec{v}_G)}{dt} = m. \frac{d(\vec{v}_G)}{dt} = m. \vec{a}_G = \vec{F}_{ext}$$




➡ L'action d'une force extérieure sur un système conduit à une **variation** de sa quantité de mouvement



..de sa vitesse \vec{v}_G

↓
Quel type de mouvement ?

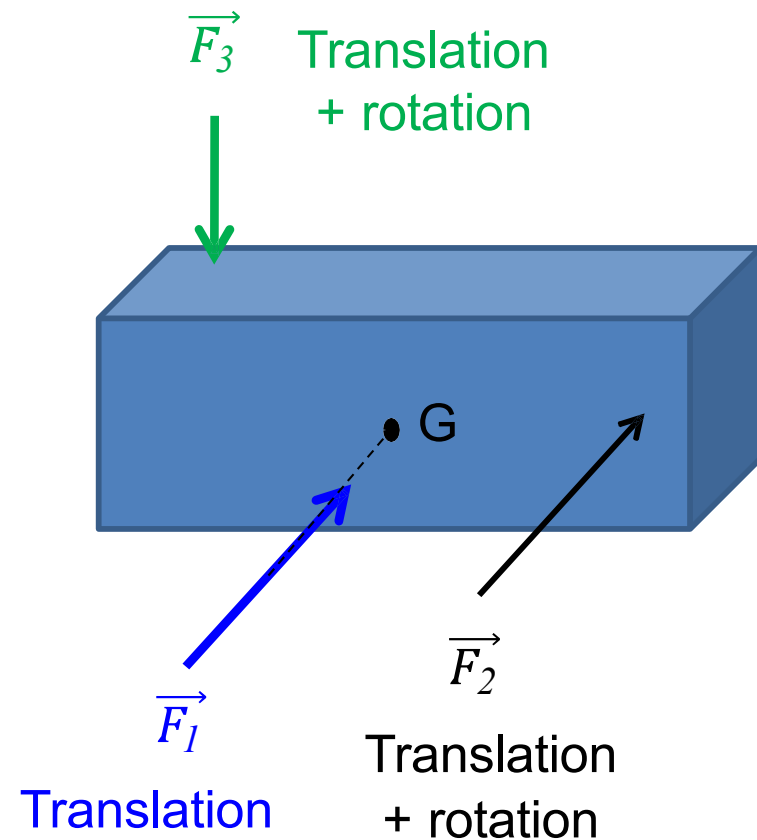
Moment d'une force

▼  ☒ Constant Force  

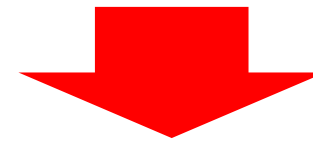
Force	X	0	Y	0	Z	0
Relative Force	X	0	Y	0	Z	0
Torque	X	0	Y	0	Z	0
Relative Torque	X	0	Y	0	Z	0

Moment d'une force (Torque ou Couple)

Quel mouvement est engendré par l'application de la force \vec{F}_i ($i=1,2$ ou 3)?



L'application d'une force dont la direction ne passe pas par le centre de masse crée une accélération au niveau de la rotation d'un corps solide.



L'orientation du solide va changer !

Moment d'une force (Torque ou Couple)

Le Moment d'une force par rapport à un point fixe: c'est une mesure de combien une force agissant sur un objet est susceptible de mettre ce dernier en mouvement de rotation autour de ce point.

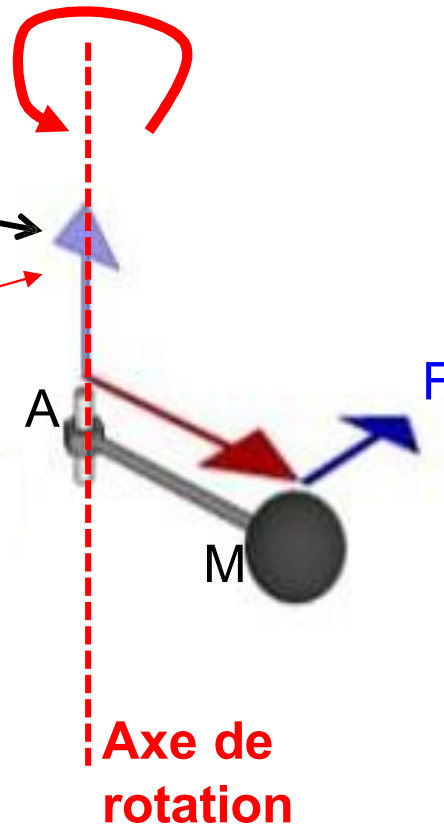
Moment
de la force
en A

$$\vec{\tau} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

Représente la direction
de l'axe de rotation

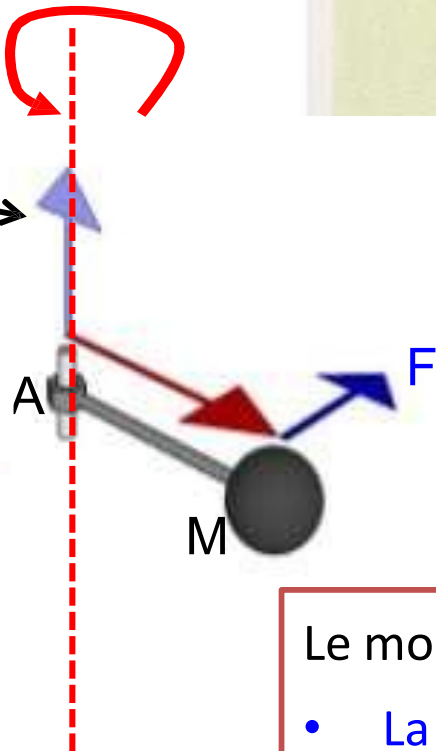
Le mvt de rotation s'effectue dans un
plan perpendiculaire à l'axe de rotation

Le
Moment

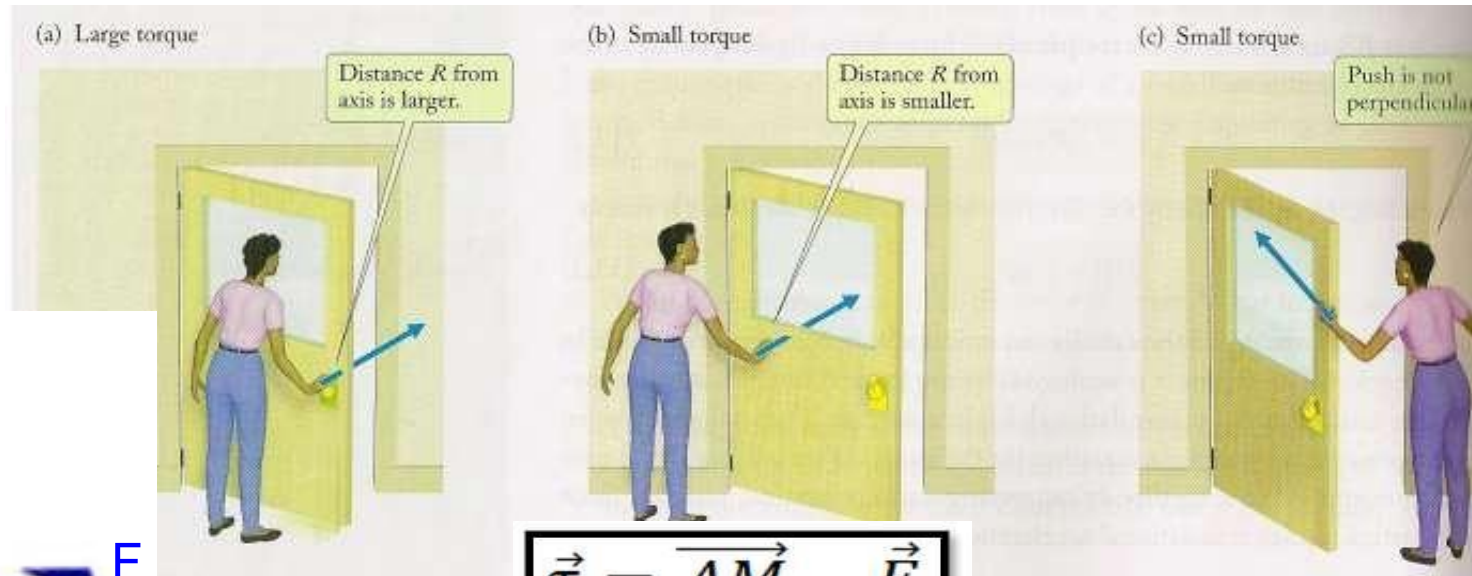


Moment d'une force (Torque ou Couple)

Le
Moment



Axe de
rotation



$$\vec{\tau} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

$$\|\vec{\tau}\| = \|\overrightarrow{AM}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot |\sin(\overrightarrow{AM}, \vec{F})|$$

Le moment dépend de:

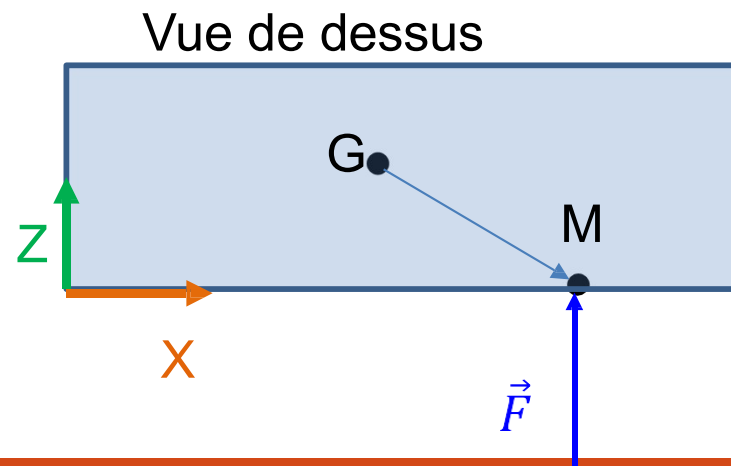
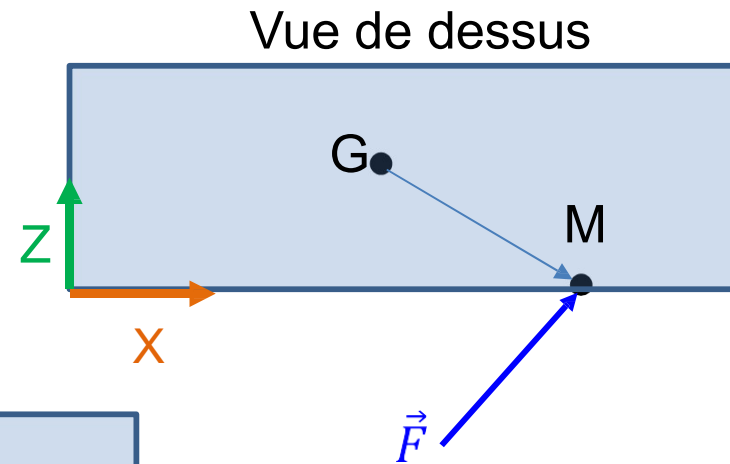
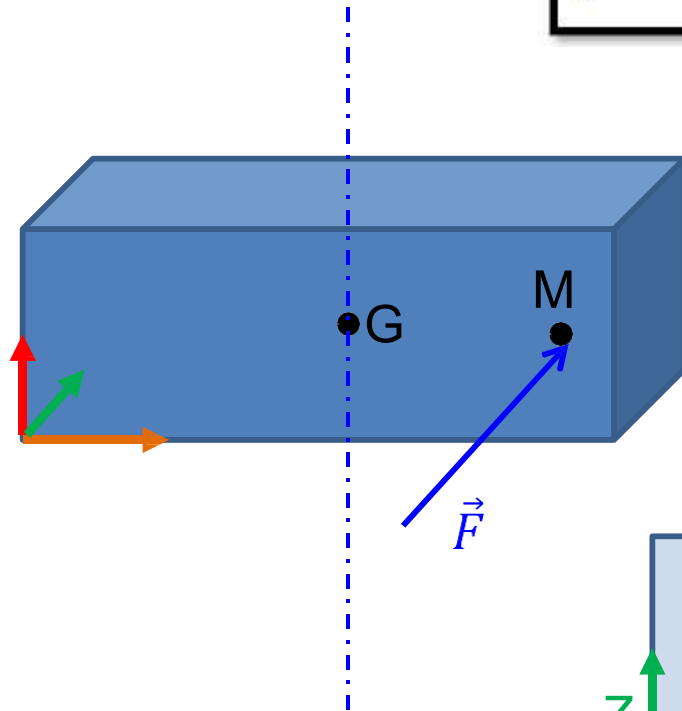
- La norme de la force
- La distance du point d'application au pivot
- De l'angle!

Moment d'une force

Moment = la capacité d'une force à provoquer un mouvement de rotation

$$\vec{\tau} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

$$\|\vec{\tau}\| = \|\overrightarrow{AM}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot |\sin(\overrightarrow{AM}, \vec{F})|$$



Laquelle de ces deux forces va engendrer plus de rotation ?

Remarque

Rigidbody.AddTorque

SWITCH TO MANUAL

Declaration

public void AddTorque(Vector3 torque, ForceMode mode = ForceMode.Force);

Axe de rotation



Parameters

torque	Torque vector in world coordinates.
mode	The type of torque to apply.

Description

Adds a torque to the rigidbody.

Applique une force qui fait tourner l'objet autour de l'axe spécifié.

ForceMode.Force

ForceMode.Acceleration

ForceMode.Impulse

ForceMode.VelocityChange

Declaration

public void AddTorque(float x, float y, float z, ForceMode mode = ForceMode.Force);

Parameters

x	Size of torque along the world x-axis.
y	Size of torque along the world y-axis.
z	Size of torque along the world z-axis.
mode	The type of torque to apply.

<https://www.youtube.com/watch?v=De0PoxaKlww>

❑ Le moment Angulaire (également appelé moment cinétique) est une grandeur vectorielle conservée utilisée pour décrire l'état général de rotation d'un système physique

❑ Le moment Angulaire est l'analogue de ce que la quantité de mouvements est pour la translation.

Moment Angulaire (ou cinétique)

❑ Pour un point matériel M :

Soit un **point matériel M**, de masse m et de **vecteur vitesse** $\vec{V}_{M/R}$ par rapport à un référentiel R.

Le Moment cinétique de M pr/pr à un point O est donné par :

$$\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge \vec{p} = \vec{OM} \wedge m \vec{v}$$

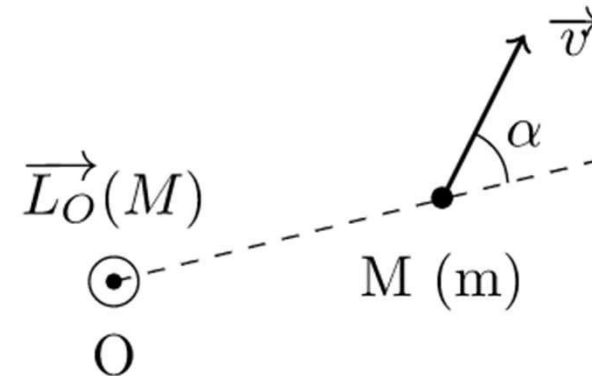


Figure 1 - Moment cinétique d'un point M en un point O

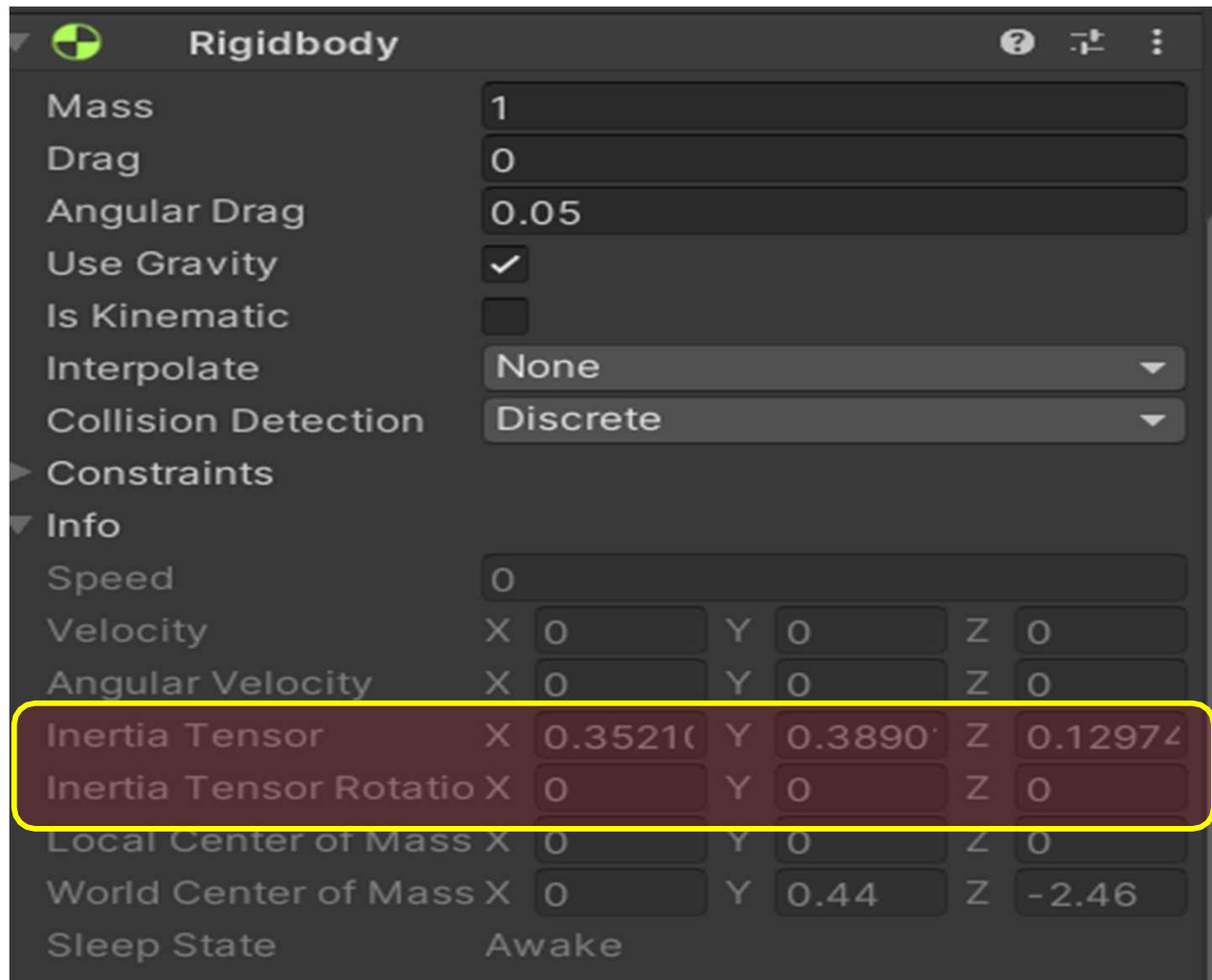
Moment Angulaire (ou cinétique)

□ Pour un système à **N-points** matériels :

Le moment angulaire d'un système de points matériels M_i est la somme vectorielle des moments cinétiques individuels:

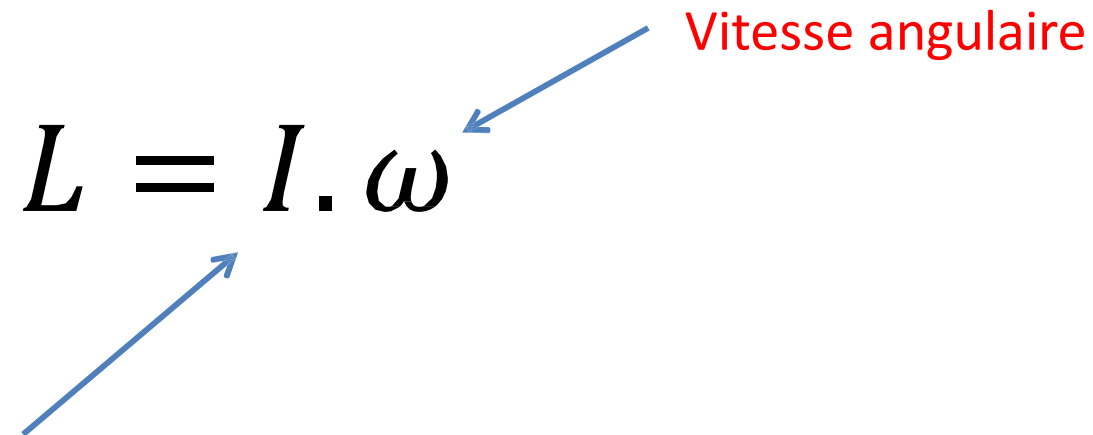
$$\vec{L}(S)_A = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \times m_i \cdot \vec{V}_{M_i/R}$$

➡ Et pour un **Rigid Body** ?



Moment angulaire : Rigid Body

Pour un corps rigide tournant autour d'un axe de symétrie (exemple sphère ou cylindre), le moment angulaire peut être exprimé comme le produit de son moment d'inertie par sa **vitesse angulaire**:

$$L = I \cdot \omega$$
The diagram shows the equation $L = I \cdot \omega$ in black text. A blue arrow points from the text 'Moment d'inertie (I ou J)' below to the variable 'I' in the equation. Another blue arrow points from the text 'Vitesse angulaire' above to the variable 'omega' in the equation.

Moment d'inertie (I ou J) = Mesure de la résistance d'un objet à sa mise en rotation (L'effort qu'il faut pour mettre un objet en rotation autour d'un axe)

Décrit comment la masse est répartie autour du centre de masse

Moment angulaire : Rigid Body

$$L = I \cdot \omega$$



$$L = I \cdot \omega$$



Décrit comment la masse est répartie autour du centre de masse

Moment angulaire : Rigid Body

- ❑ Le moment angulaire caractérise la tendance de l'objet à continuer à tourner autour de l'axe, du fait de son inertie.
- ❑ Soit $r'_i = r_i(t) - x(t)$ le déplacement de la ieme particule par rapport au centre de masse , calculée **dans le repère global**:

$$I(t) = \sum \begin{pmatrix} m_i(r_{iy}'^2 + r_{iz}'^2) & -m_i r'_{ix} r'_{iy} & -m_i r'_{ix} r'_{iz} \\ -m_i r'_{iy} r'_{ix} & m_i(r_{ix}'^2 + r_{iz}'^2) & -m_i r'_{iy} r'_{iz} \\ -m_i r'_{iz} r'_{ix} & -m_i r'_{iz} r'_{iy} & m_i(r_{ix}'^2 + r_{iy}'^2) \end{pmatrix}$$

Doit être recalculé à chaque image !

Moment angulaire : Rigid Body

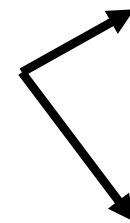
$$I(t) = R(t) \cdot I_{body} \cdot R(t)^T$$



Exprimé dans l'espace objet.



CONSTANTE
d'une image à
l'autre


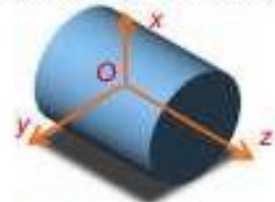
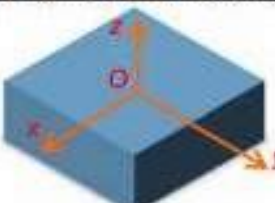



Dépend des
dimensions de
l'objet

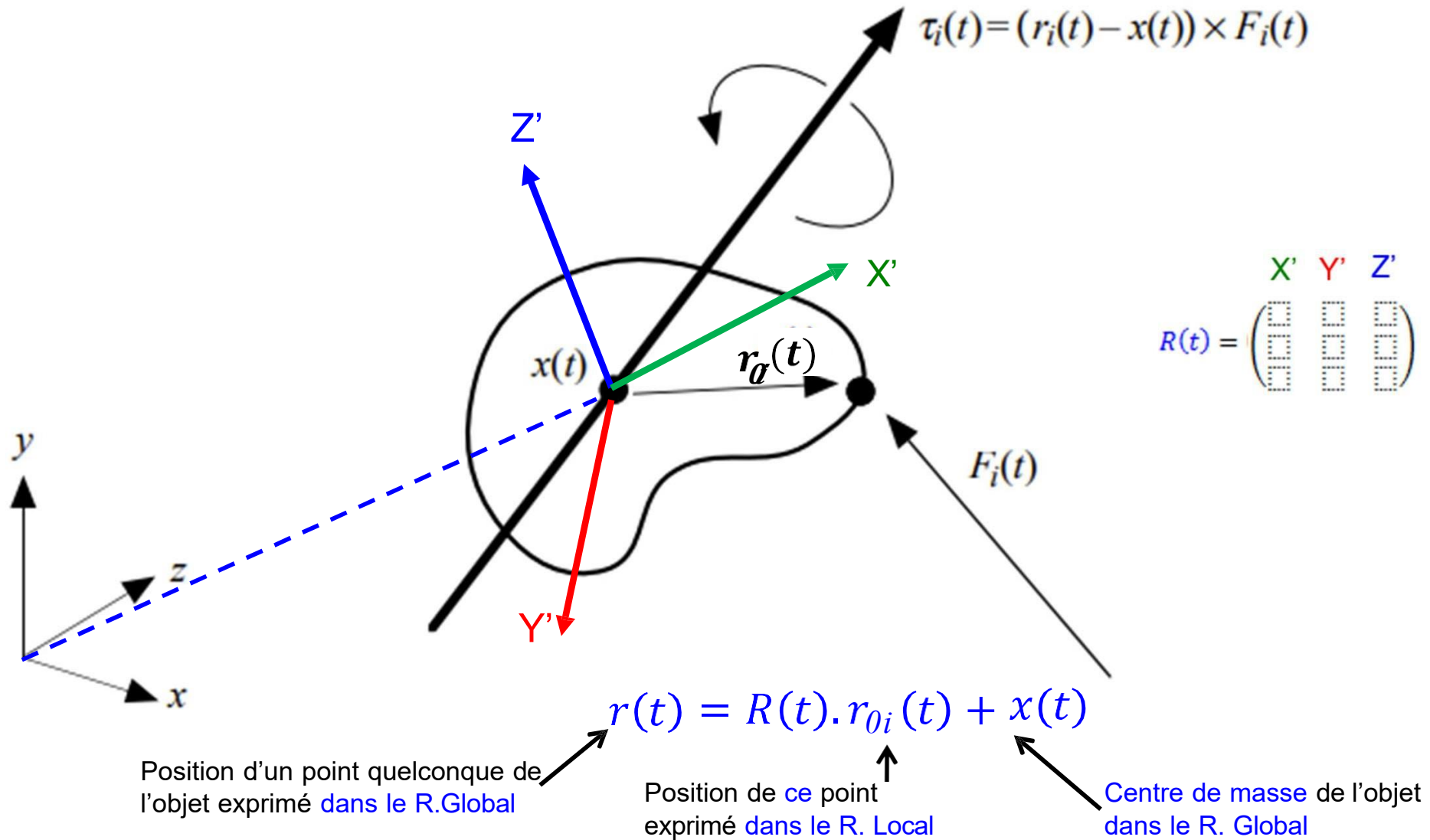
Dépend de la
forme de l'objet

- I_{body}

Matrice
diagonale

Corps homogène de masse m	Centre d'inertie	Matrice d'inertie en $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
 cylindre creux : rayon R et longueur l	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$
 cylindre plein : rayon R et longueur l	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix}$
 parallélépipède rectangle : coté a, b, c	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$
	centre	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 \end{pmatrix}$

Evolution temporelle



Evolution temporelle

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{r}_i(t) - \vec{x}(t))$$

$$\frac{d\vec{p}_{sys}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

$$R(t) = \begin{pmatrix} \overset{\text{X}'}{\square} & \overset{\text{Y}'}{\square} & \overset{\text{Z}'}{\square} \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} \frac{d\vec{X}'}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{X}' = \vec{T} \\ \frac{d\vec{Y}'}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{Y}' = \vec{N} \\ \frac{d\vec{Z}'}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{Z}' = \vec{B} \end{aligned}$$

$$\frac{dR}{dt} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Remarque

A cause des erreurs de calcul de $\dot{\vec{R}}$ on perd l'orthogonalité des vecteurs composant les colonnes de celle-ci.



Method d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

On normalise \vec{T} \longrightarrow $\vec{T}' = \frac{\vec{T}}{\|\vec{T}\|}$

On retranche la projection de \vec{N} sur \vec{T}' \longrightarrow $\vec{N}' = \vec{N} - \vec{T}' (\vec{N} \vec{T}')$

On normalise \vec{N}' \longrightarrow $\vec{N}' = \frac{\vec{N}'}{\|\vec{N}'\|}$

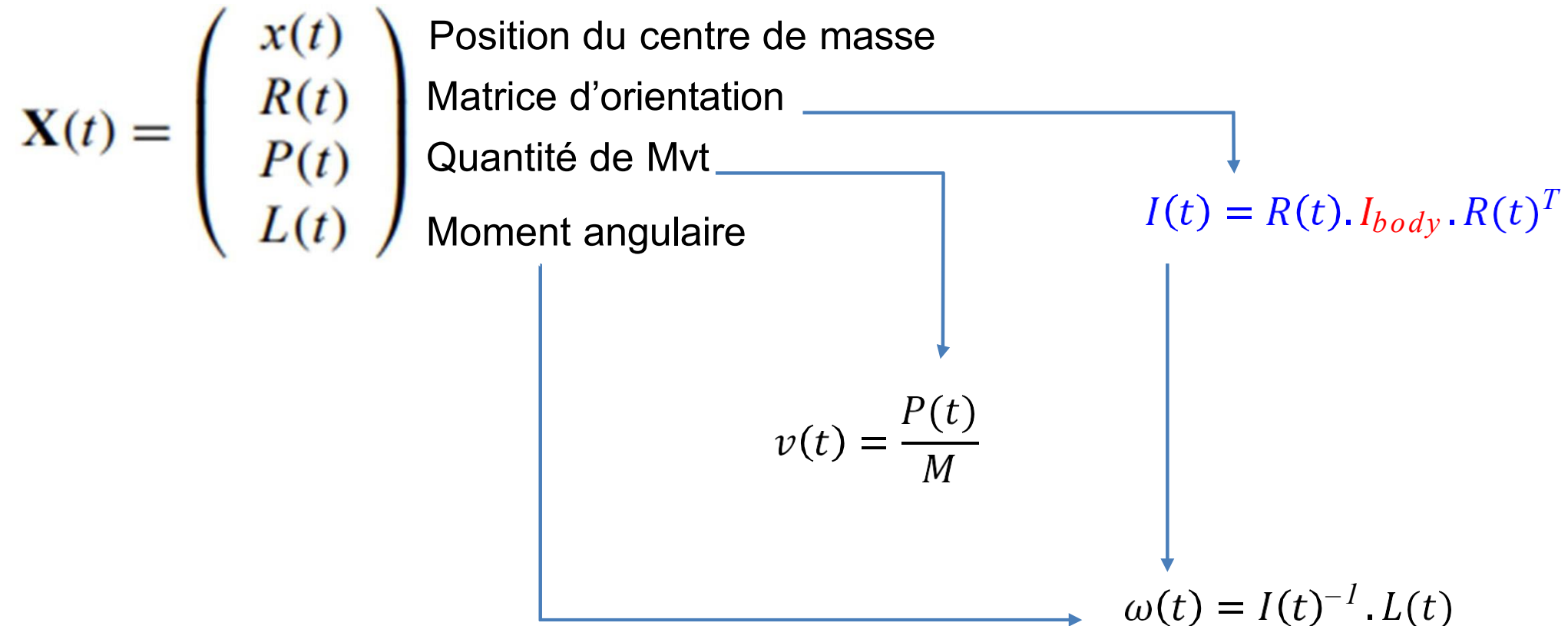
On calcule $\vec{B}' \longrightarrow \vec{B}' = \vec{T}' \wedge \vec{N}'$

La programmation

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau} = \sum (\vec{r}_i - \vec{x}(t)) \wedge \vec{F}_i$$

Les résultantes !

Vecteur d'état du Rigidbody



$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t)^* R(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}.$$

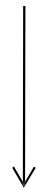
$\frac{d\vec{X}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{X}'$
 $\frac{d\vec{Y}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{Y}'$
 $\frac{d\vec{Z}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{Z}'$

$\frac{dR}{dt} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

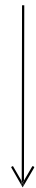
$\tau = \sum_i \tau_i(t) = \sum_i (r_i(t) - x(t)) \wedge F_i(t)$

- Equation du mouvement de l'objet:

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \Delta t \cdot \frac{dX(t)}{dt}$$



Etat de l'objet à
l'image suivante



Etat actuel
de l'objet



?

Evolution temporelle

- Etat de l'objet:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix}$$

↔ Position du barycentre de l'objet dans l'espace monde

↔ Rotation **pr/pr au barycentre** de l'objet (orientation)

↔ Quantité de mouvement (**infos Translation**)

↔ Moment cinétique (**infos Rotation**)

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix}$$

→ $v(t) = \frac{P(t)}{M}$

→ $\omega(t) = I^{-1}(t).L(t)$ / $I^{-1}(t) = R(t).I^{-1}_{body}.R(t)^T$

Evolution temporelle

- Evolution de l'état de l'objet:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftrightarrow \text{Position du barycentre de l'objet dans l'espace monde} \\ \longleftrightarrow \text{Rotation pr/pr au barycentre de l'objet (orientation)} \\ \longleftrightarrow \text{Quantité de mouvement (infos Translation)} \\ \longleftrightarrow \text{Moment cinétique (infos Rotation)} \end{array}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow v(t) = \frac{P(t)}{M} \\ \longrightarrow \omega(t) = I^{-1}(t).L(t) \end{array} \quad / \quad I^{-1}(t) = R(t).I^{-1}_{body}.R(t)^T$$

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dR(t)}{dt} \\ \frac{dP(t)}{dt} \\ \frac{dL(t)}{dt} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{--- } v(t) \\ \text{--- } \vec{\omega} * R(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} . R(t) \\ \text{--- } F(t) \\ \text{--- } \tau(t) \end{array} \quad \tau = \sum_i \tau_i(t) = \sum_i (r_i(t) - x(t)) \wedge F_i(t)$$

Evolution temporelle

$$\begin{pmatrix} x(t + \Delta t) \\ R(t + \Delta t) \\ P(t + \Delta t) \\ L(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} + \Delta t. \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dR(t)}{dt} \\ \frac{dP(t)}{dt} \\ \frac{dL(t)}{dt} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x(t + \Delta t) \\ R(t + \Delta t) \\ P(t + \Delta t) \\ L(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} + \Delta t. \begin{pmatrix} v(t) \\ \vec{\omega} * R(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$

Evolution temporelle

● Itération i

$x(t)$ connu

$P(t)$ connu $\rightarrow v(t) = \frac{P(t)}{M}$

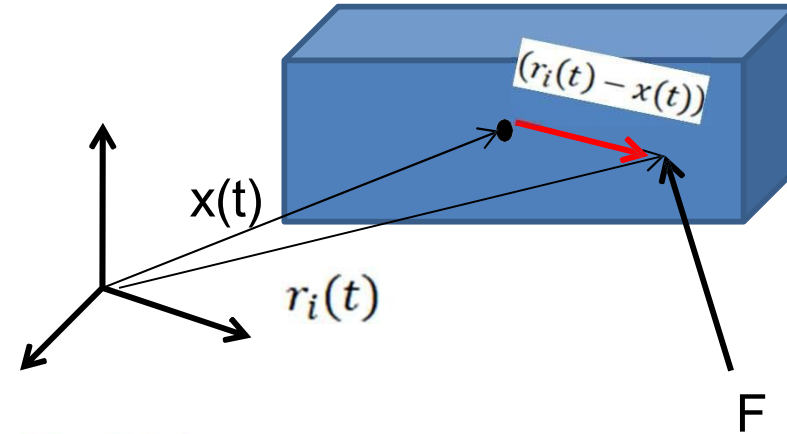
$R(t)$ connu $\rightarrow I^{-1}(t) = R(t).I^{-1}_{body}.R(t)^T$

$L(t)$ connu $\rightarrow \omega(t) = I^{-1}(t).L(t) \Rightarrow \dot{R}(t) = \vec{\omega} * R(t)$

$F \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} dP/dt \end{array} \right.$

$$\tau = \sum_i \tau_i(t) = \sum_i (r_i(t) - x(t)) \wedge F_i(t) \Rightarrow dL/dt$$

$$\begin{pmatrix} x(t + \Delta t) \\ R(t + \Delta t) \\ P(t + \Delta t) \\ L(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} + \Delta t. \begin{pmatrix} v(t) \\ \vec{\omega} * R(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$



Evolution temporelle

● Itération 1

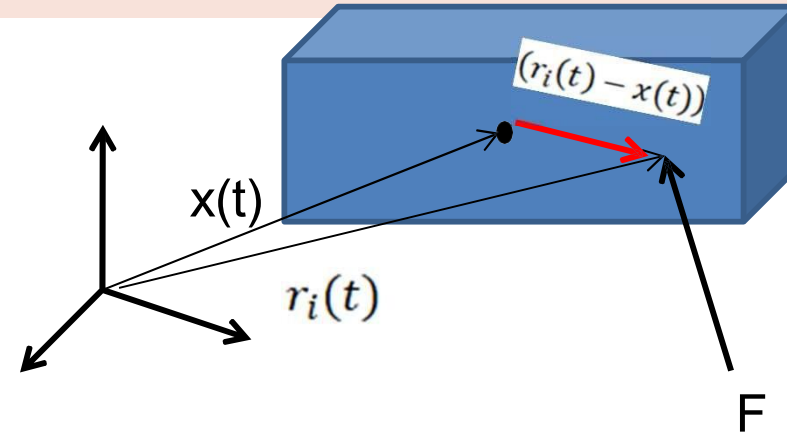
$x(t)$ connu

$P(t)$ connu $\rightarrow v(t) = \frac{P(t)}{M}$

② $R(t)$ connu $\rightarrow I^{-1}(t) = R(t).I^{-1}_{body}.R(t)^T$

② $L(t)$ connu $\rightarrow \omega(t) = I^{-1}(t).L(t) \Rightarrow \dot{R}(t) = \vec{\omega} * R(t)$

① $F \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} dP/dt \\ \textcircled{1} \tau = \sum_i \tau_i(t) = \sum_i (r_i(t) - x(t)) \wedge F_i(t) \end{array} \right. \Rightarrow dL/dt$



$$\begin{pmatrix} x(t + \Delta t) \\ R(t + \Delta t) \\ P(t + \Delta t) \\ L(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \Delta t. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ \Delta t. F(t) \\ \Delta t. \tau(t) \end{pmatrix} \quad \text{Etat actuel de l'itération 2}$$

Evolution temporelle

● Itération 2

$x(t)$ connu

$P(t)$ connu $\rightarrow v(t) = \frac{P(t)}{M}$

$R(t)$ connu $\rightarrow I^{-1}(t) = R(t) \cdot I^{-1}_{body} \cdot R(t)^T$

$L(t)$ connu $\rightarrow \omega(t) = I^{-1}(t) \cdot L(t)$

$$\Rightarrow \dot{R}(t) = \vec{\omega} * R(t)$$

$$F \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} dP/dt \\ \tau = \sum_i \tau_i(t) = \sum_i (r_i(t) - x(t)) \wedge F_i(t) \Rightarrow dL/dt \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ \Delta t \cdot F(t) \\ \Delta t \cdot \tau(t) \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x(t + \Delta t) \\ R(t + \Delta t) \\ P(t + \Delta t) \\ L(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} v(t) \\ \vec{\omega} * R(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$

Bibliographie

BARAFF D.: An introduction to physically based modeling: Rigid body simulation. In SIGGRAPH '97 Course Notes (1997).
<https://www.cs.cmu.edu/~baraff/pbm/rigid1.pdf>