



Moteur Physique pour les jeux vidéo

5^{ème} GamiX

Chapitre 2 : Mouvements dans les mondes réel et virtuels
Partie 2 : Corps rigides

2025 – 2026

AHMED AMMAR

Compétences attendues

- Être capable de **simuler** le mouvement d'un **objet rigide indéformable** dans le monde virtuel.

Prérequis

- ❑ Notions de base de cinématique.
- ❑ Notions de base de dynamique.

Problématique

- Quelles différences dans la description du mouvement d'un **point matériel** et d'un **corps rigide indéformable** ?
- Quelles sont les règles qui régissent le mouvement d'un **corps rigide indéformable**?
- Comment transposer tout cela dans le monde virtuel ?

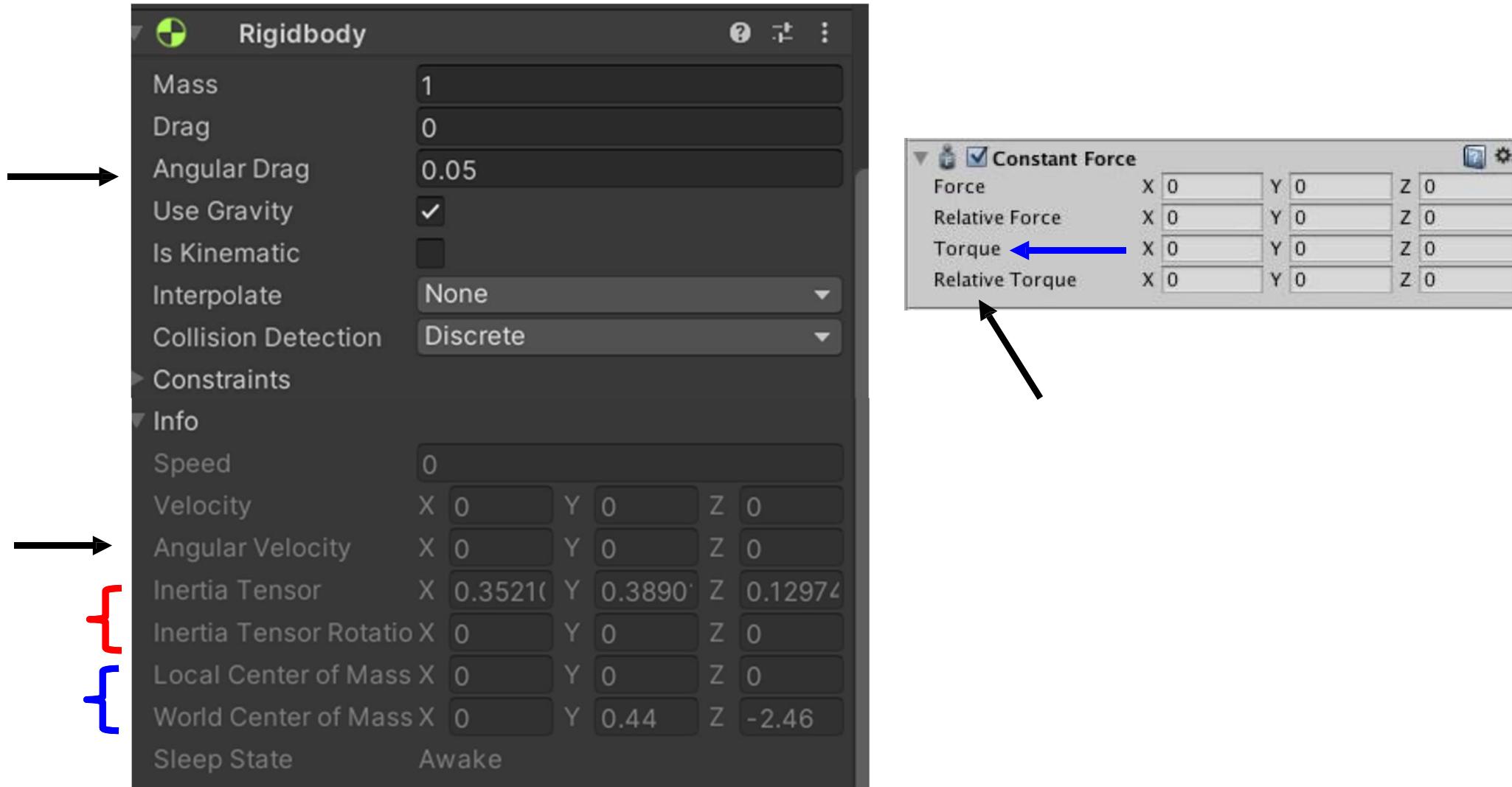
Problématique

- Corp rigide indéformable: Objet pour lequel les distances « inter-points » ne changent pas !



Généraliser l'approche pour un point matériel à N points matériels ?

Dans PhysX

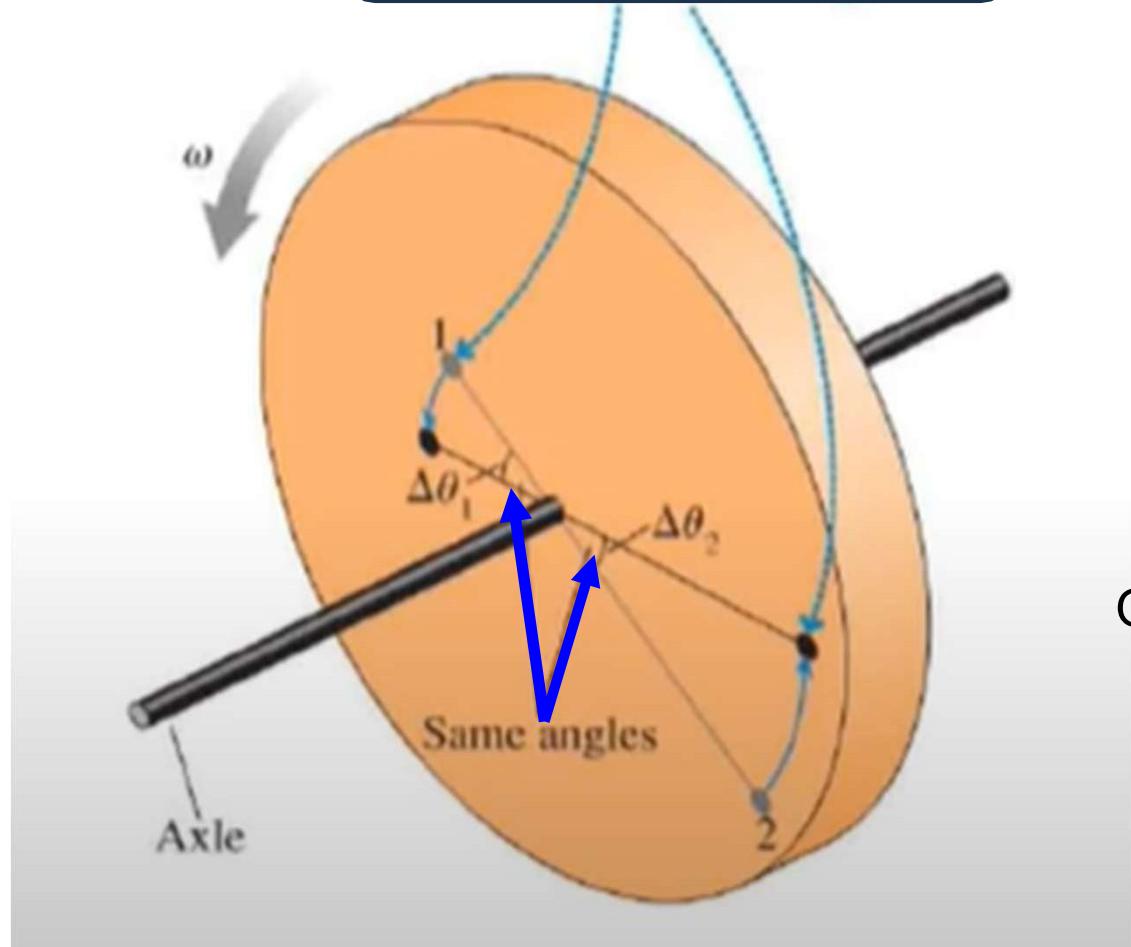


Vitesse et vitesse angulaire



Vitesse et vitesse angulaire

N'importe quel point de la roue tourne avec la même vitesse angulaire $\vec{\omega}$



La roue tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$



Variation de l'angle θ par unité de temps (rad/seconde)

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Même variation d'angle donc même vitesse angulaire

On a : $V = \omega \cdot r$

vitesse

Distance à l'axe de rotation

Même vitesse angulaire mais vitesses différentes !

- On a également:

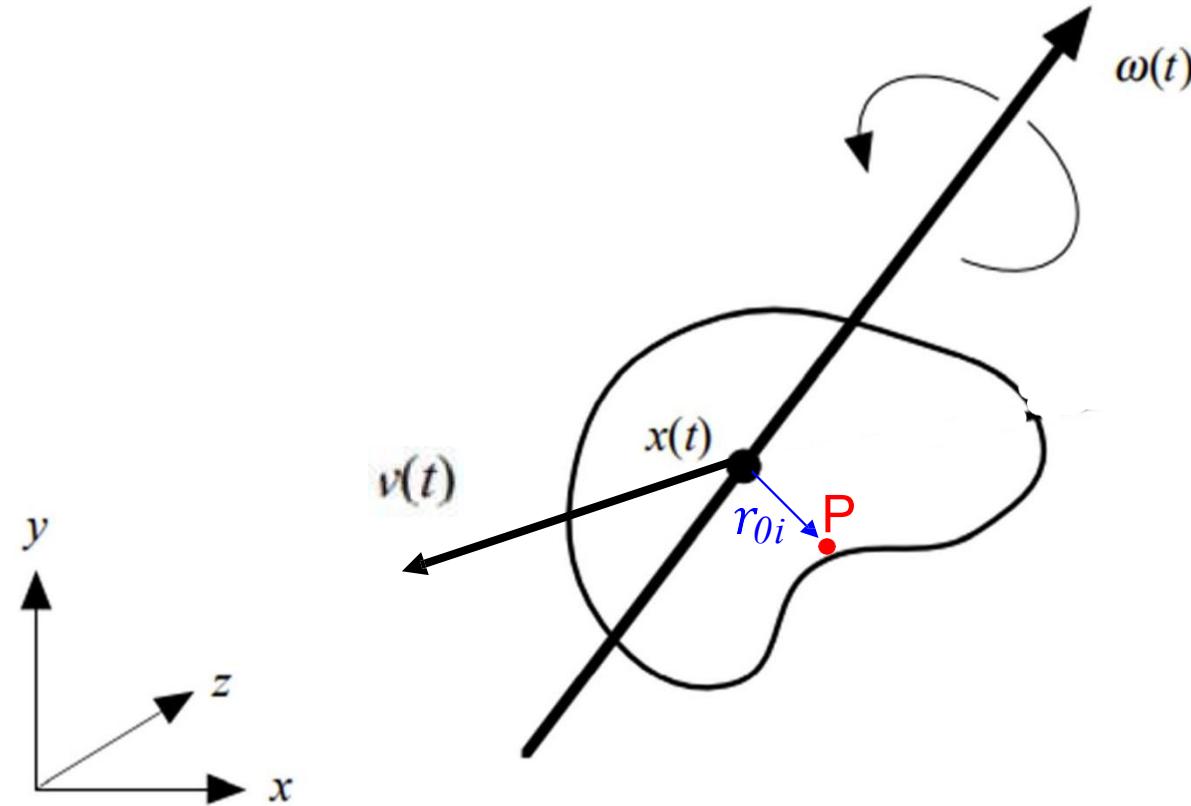
$$a_{cc} = \omega^2 \cdot r$$

L'accélération
« linéaire » de P

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

L'accélération **angulaire** de P

Généralisation

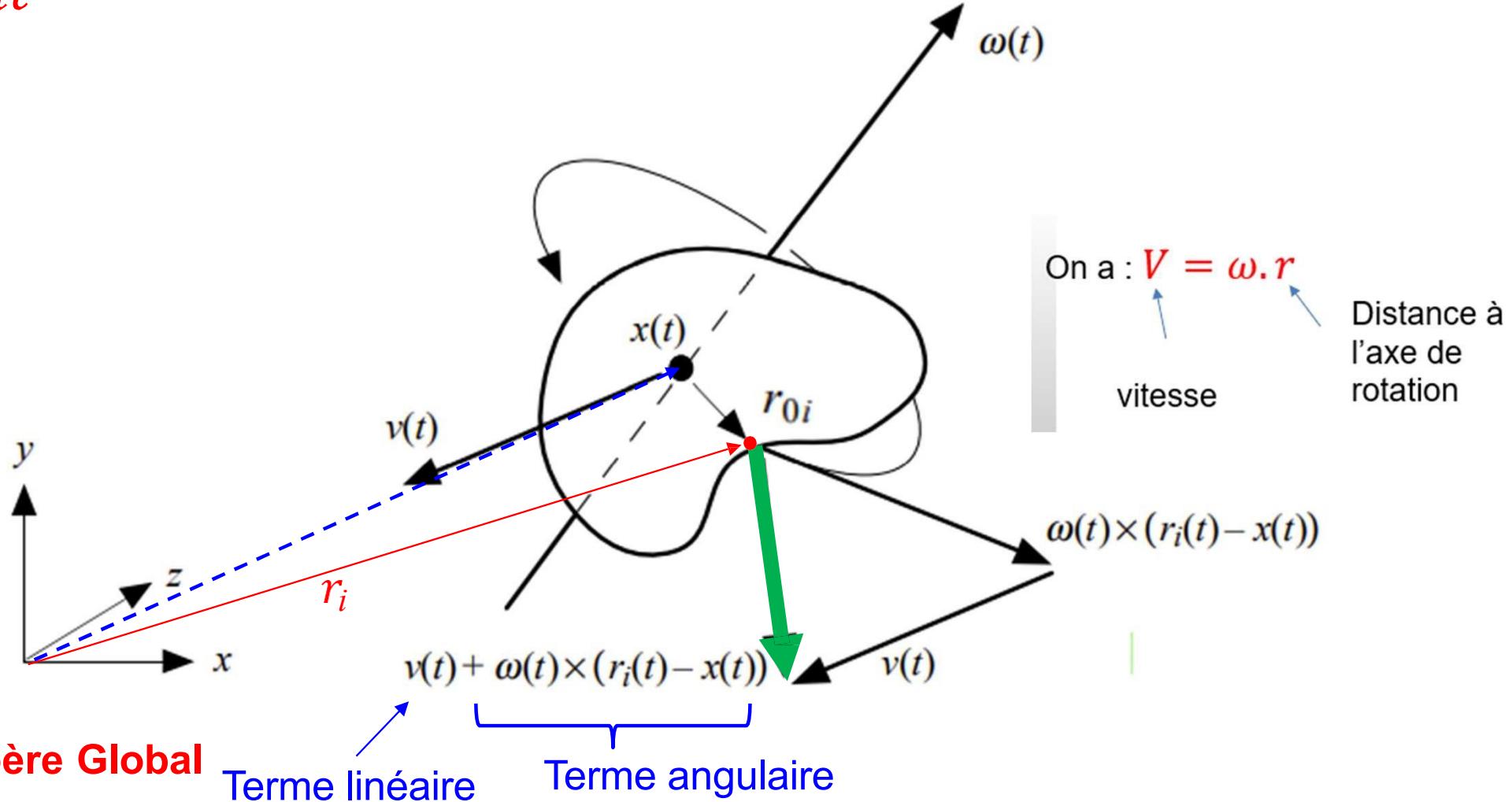


Repère Global

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = ?$$

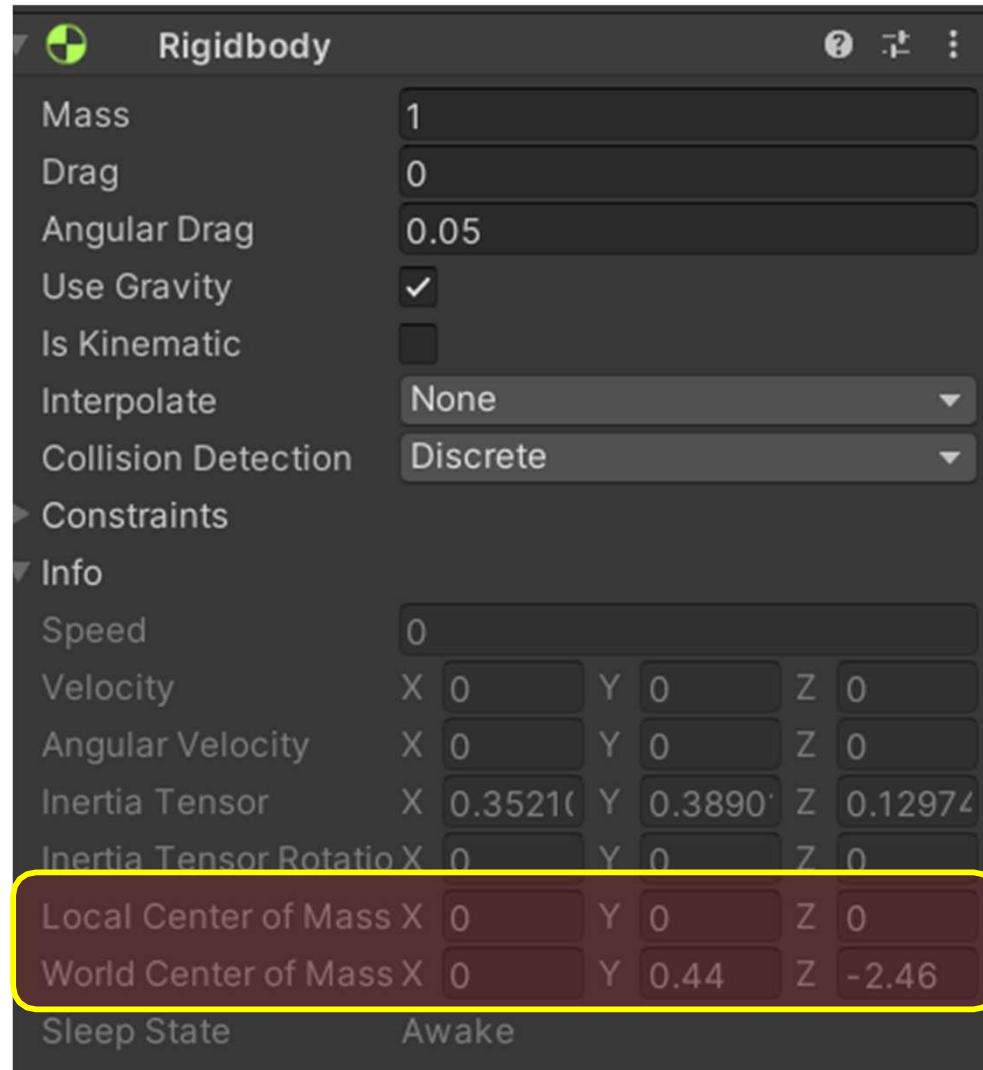
Généralisation

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{r}_i(t) - \vec{x}(t))$$



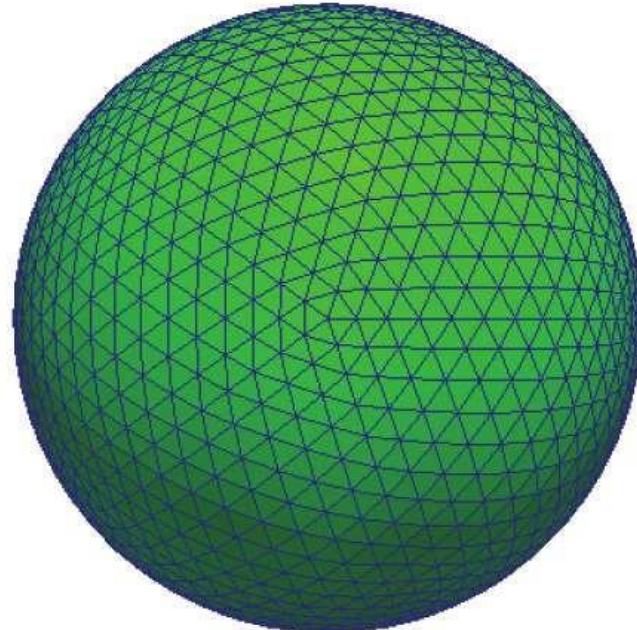
- Quantité de mouvement: Pour un point matériel, il s'agit du produit de sa masse par son vecteur vitesse ($\vec{p}_M = m \cdot \overrightarrow{v_M}$).
- Barycentre (centre de masse): Point particulier du solide pour lequel la masse est répartie de la même façon dans n'importe quelle direction.

Centre de masse



Centre de masse

La masse est répartie d'une façon homogène ?



S'il s'agit d'un alliage ?

S'il y a une cavité à l'intérieur?

Comment calculer la **quantité de mouvement** ?

Quantité de Mouvement

La quantité de mouvement d'un point M, de masse m, animé d'une vitesse \vec{v}_M est donnée par :

$$\vec{p}_M = m \cdot \overrightarrow{v_M}$$

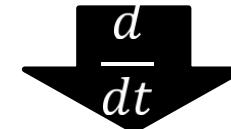
La quantité de mouvement d'un système de N points matériels, de masses m_i ($i=0,1,\dots,N$) se construit en sommant les contributions de chaque point matériel.

$$\vec{p}_{sys} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_{M_i} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt}$$

Barycentre (centre de masse)

Le centre de masse **G** (centre d'inertie, barycentre des masses m_i) est donné par :

$$m \cdot \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \overrightarrow{OM_i} \quad \text{où} \quad m = \sum_{i=1}^N m_i$$



$$m \cdot \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} = \overrightarrow{p_{sys}}$$

Il suffit de savoir où se situe le **centre d'inertie** et quelle est la **masse totale** !

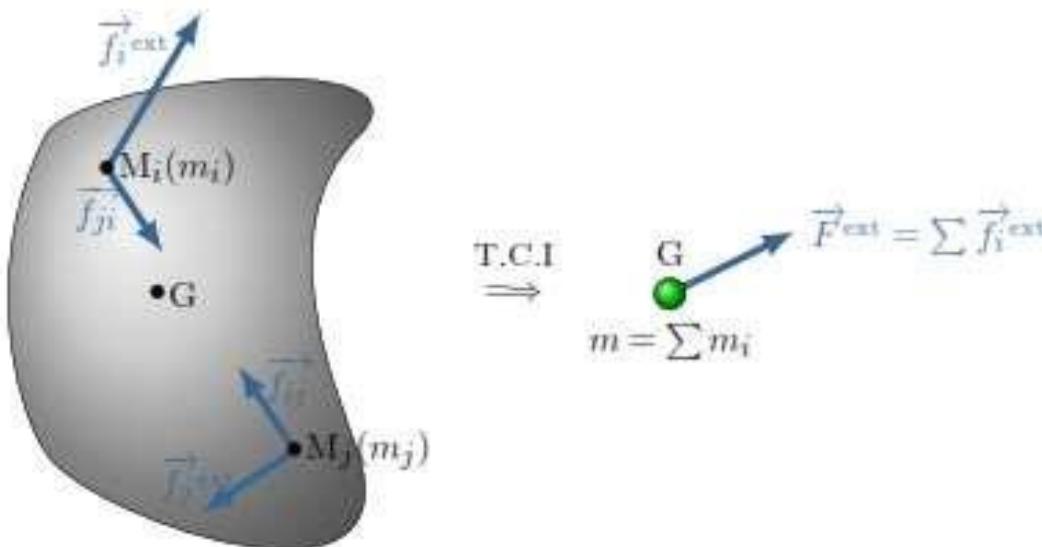
Théorème du Centre d'inertie

La quantité de mouvement d'un système de points matériels S, de masse totale m, est **la même que** celui d'un **point matériel de même masse** et **situé au centre de masse G**.

Remarques

$$m \cdot \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} = \overrightarrow{p_{sys}} \quad \Rightarrow \quad m \cdot \overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{p_{sys}}$$

$$\frac{d\overrightarrow{p_{sys}}}{dt} = \frac{d(m \cdot \overrightarrow{v_G})}{dt} = m \cdot \frac{d(\overrightarrow{v_G})}{dt} = m \cdot \overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{F_{ext}}$$

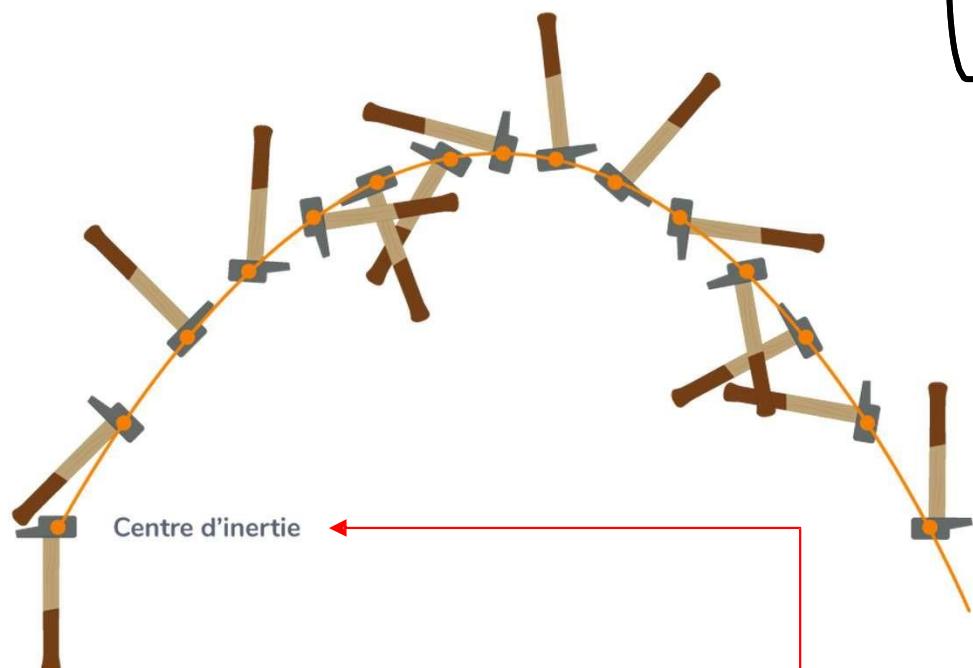


Système \mathcal{S} de points matériels

Remarques

$$\frac{d\overrightarrow{p_{sys}}}{dt} = \frac{d(m.\overrightarrow{v_G})}{dt} = m. \frac{d(\overrightarrow{v_G})}{dt} = m. \overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{F_{ext}}$$

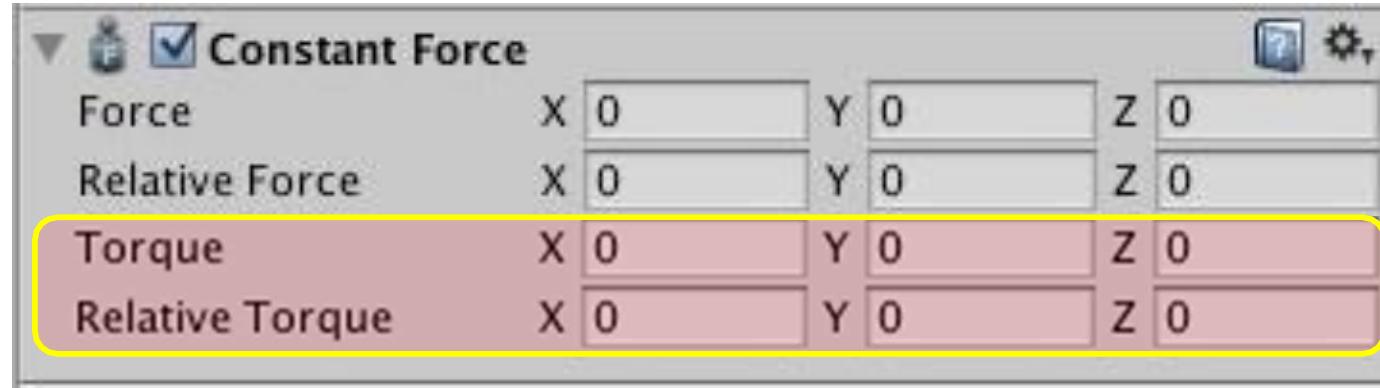
→ L'action d'une force extérieure sur un système conduit à une **variation** de sa quantité de mouvement



..de sa vitesse $\overrightarrow{v_G}$

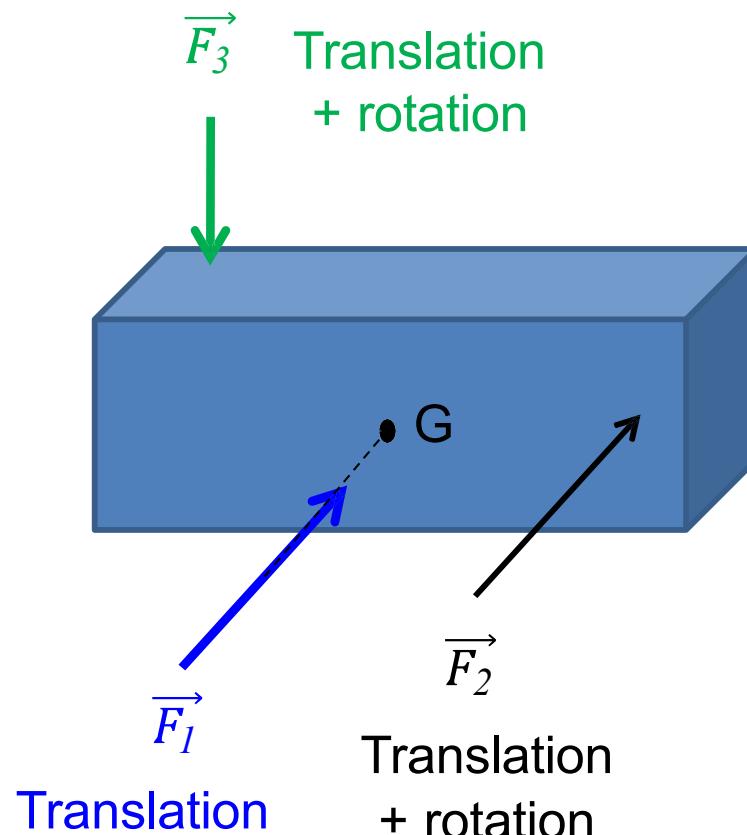
Quel type de mouvement ?

Moment d'une force

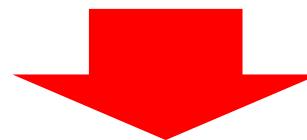


Moment d'une force (Torque ou Couple)

Quel mouvement est engendré par l'application de la force \vec{F}_i ($i=1,2$ ou 3)?



L'application d'une force dont **la direction ne passe pas** par le centre de masse crée une accélération au niveau de la **rotation** d'un corps solide.



L'**orientation** du solide va changer !

Moment d'une force (Torque ou Couple)

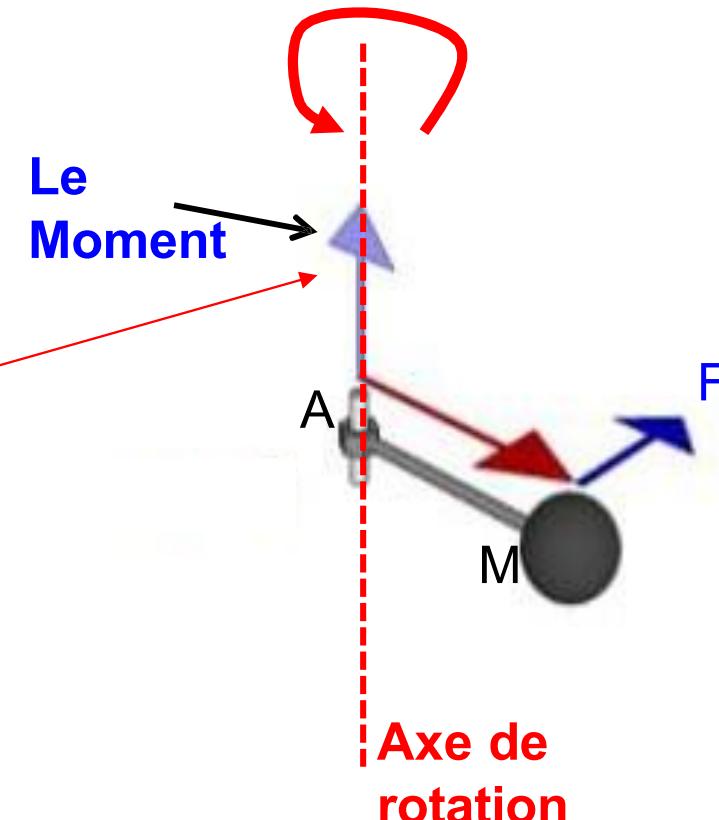
Le Moment d'une force par rapport à un point fixe: c'est une mesure de combien une force agissant sur un objet **est susceptible** de mettre ce dernier en mouvement de rotation autour de ce point.

Moment
de la force
en A

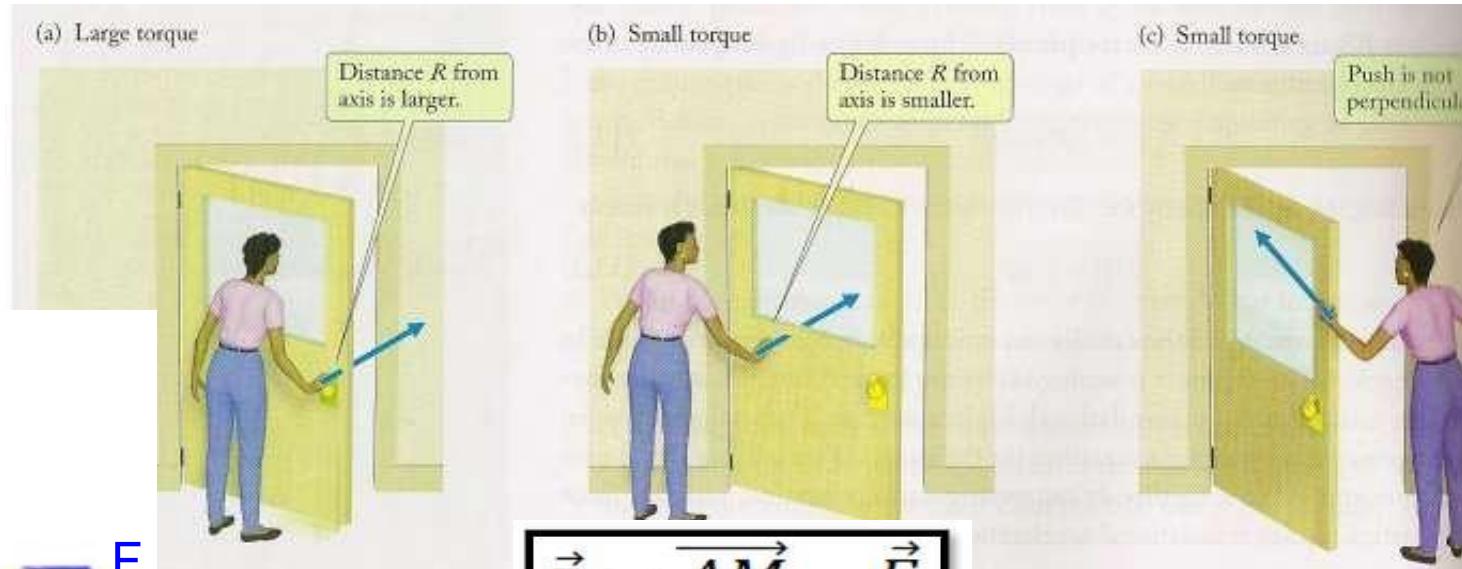
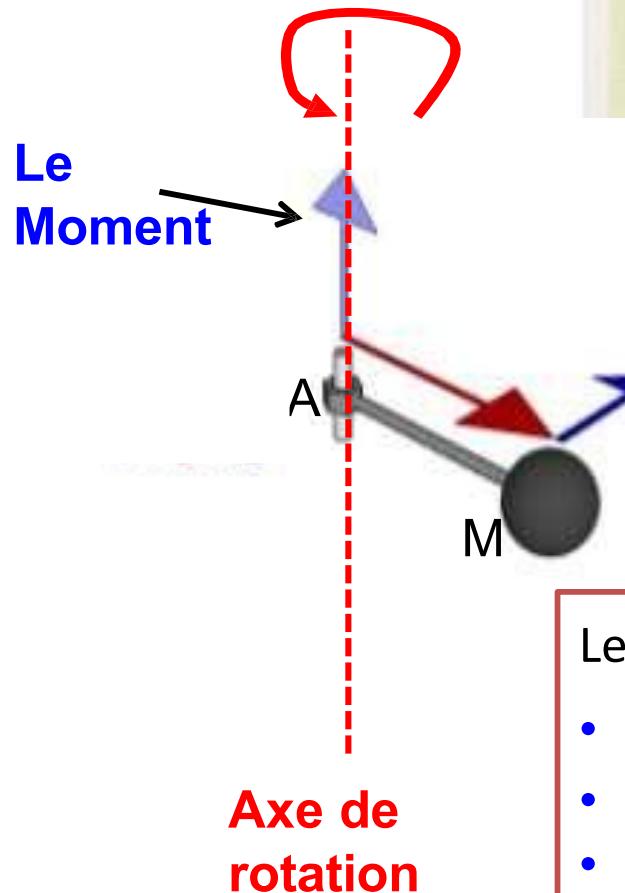
$$\vec{\tau} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

Représente la direction
de l'axe de rotation

Le mvt de rotation s'effectue **dans un**
plan perpendiculaire à l'axe de rotation



Moment d'une force (Torque ou Couple)



$$\vec{\tau} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

$$\|\vec{\tau}\| = \|\overrightarrow{AM}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot |\sin(\overrightarrow{AM}, \vec{F})|$$

Le moment dépend de:

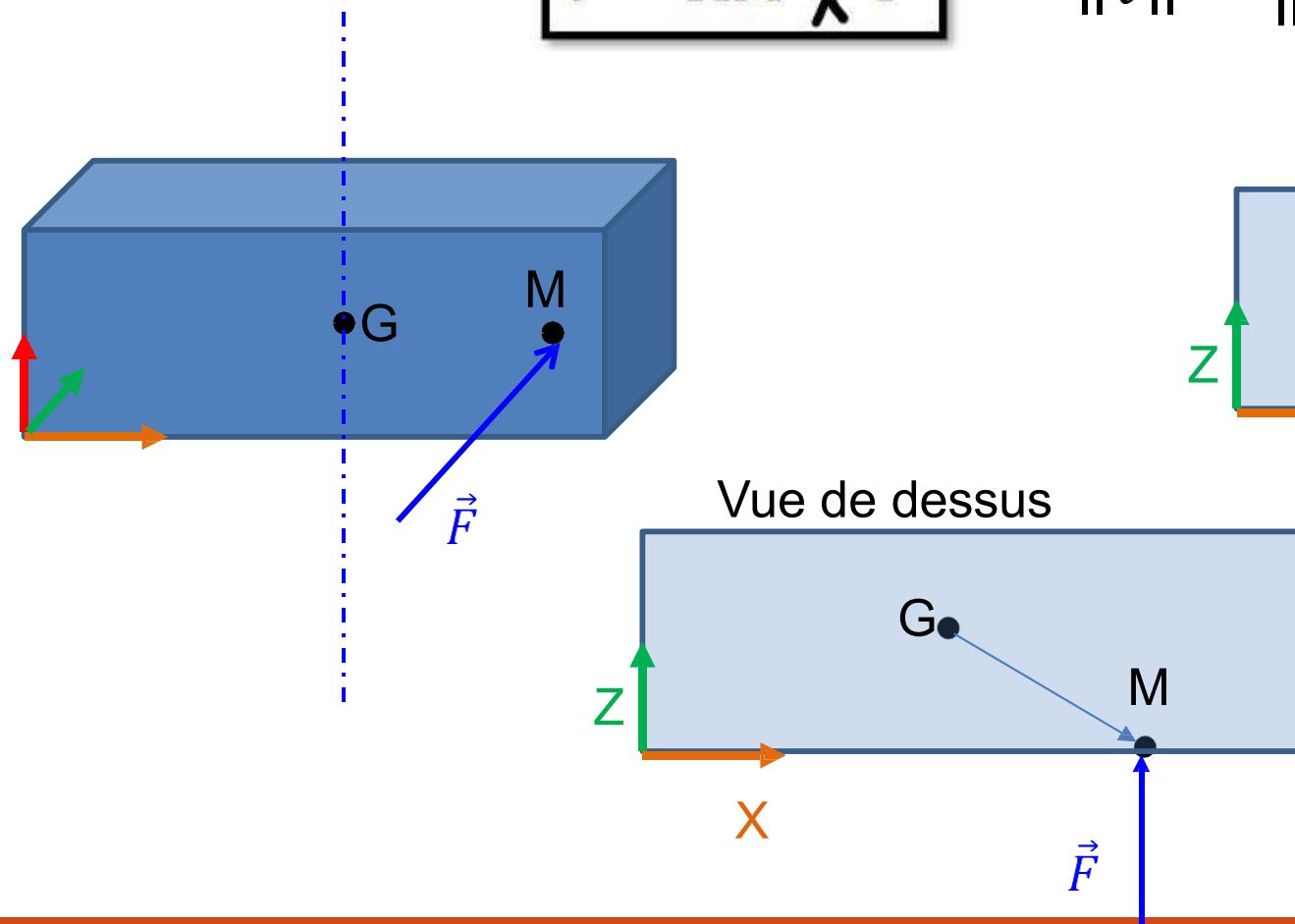
- La norme de la force
- La distance du point d'application au pivot
- De l'angle!

Moment d'une force

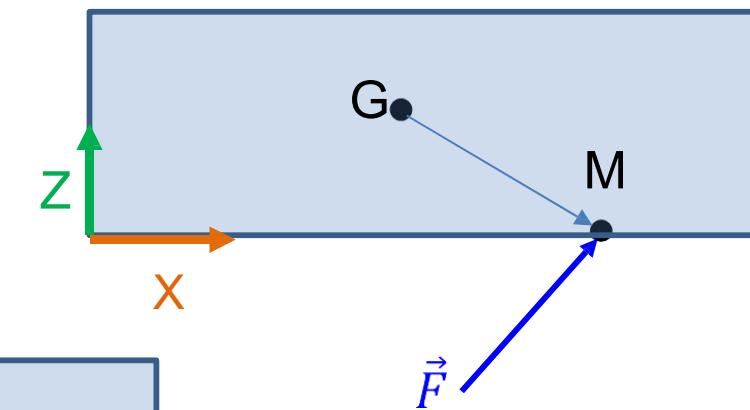
Moment = la capacité d'une force à provoquer un mouvement de rotation

$$\vec{\tau} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

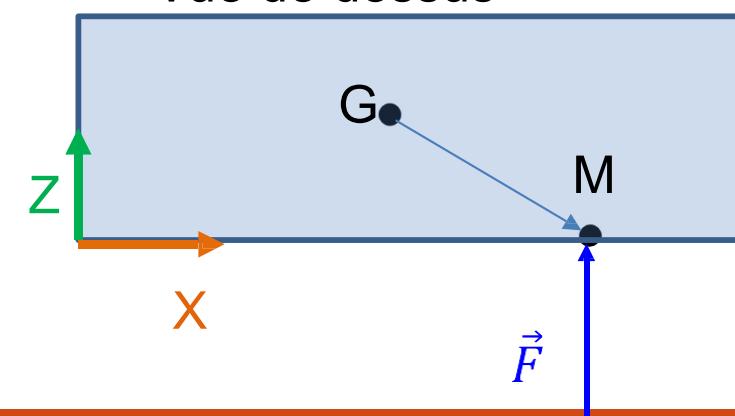
$$\|\vec{\tau}\| = \|\overrightarrow{AM}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot |\sin(\overrightarrow{AM}, \vec{F})|$$



Vue de dessus



Vue de dessus



Laquelle de ces deux forces va engendrer plus de rotation ?

Remarque

Rigidbody.AddTorque

[SWITCH TO MANUAL](#)

Declaration

```
public void AddTorque(Vector3 torque, ForceMode mode = ForceMode.Force);
```

Parameters

torque	Torque vector in world coordinates.
mode	The type of torque to apply.

Description

Adds a torque to the rigidbody.

Axe de rotation


Applique une force qui fait tourner l'objet autour de l'axe spécifié.

ForceMode.Force

ForceMode.Acceleration

ForceMode.Impulse

ForceMode.VelocityChange

Declaration

```
public void AddTorque(float x, float y, float z, ForceMode mode = ForceMode.Force);
```

Parameters

x	Size of torque along the world x-axis.
y	Size of torque along the world y-axis.
z	Size of torque along the world z-axis.
mode	The type of torque to apply.

<https://www.youtube.com/watch?v=De0PoxaKlww>

Moment Angulaire (ou cinétique)

- Le moment Angulaire (également appelé moment cinétique) est une grandeur vectorielle conservée utilisée pour décrire l'état général de rotation d'un système physique

- Le moment Angulaire est l'analogie de ce que la quantité de mouvements est pour la translation.

Moment Angulaire (ou cinétique)

□ Pour un point matériel M :

Soit un **point matériel M**, de masse m et de **vecteur vitesse** $\vec{V}_{M/R}$ par rapport à un référentiel R.

Le Moment cinétique de M pr/pr à un point O est donné par :

$$\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge \vec{p} = \vec{OM} \wedge m \vec{v}$$

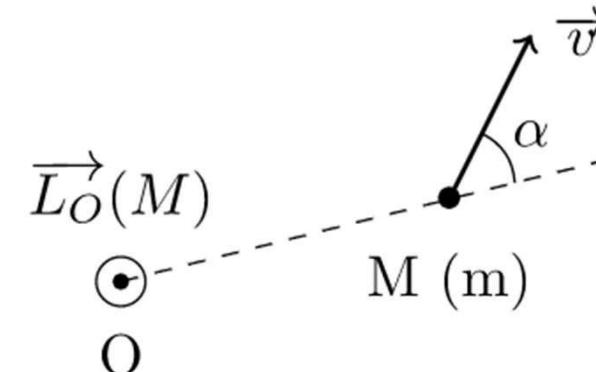


Figure 1 - Moment cinétique d'un point M en un point O

Moment Angulaire (ou cinétique)

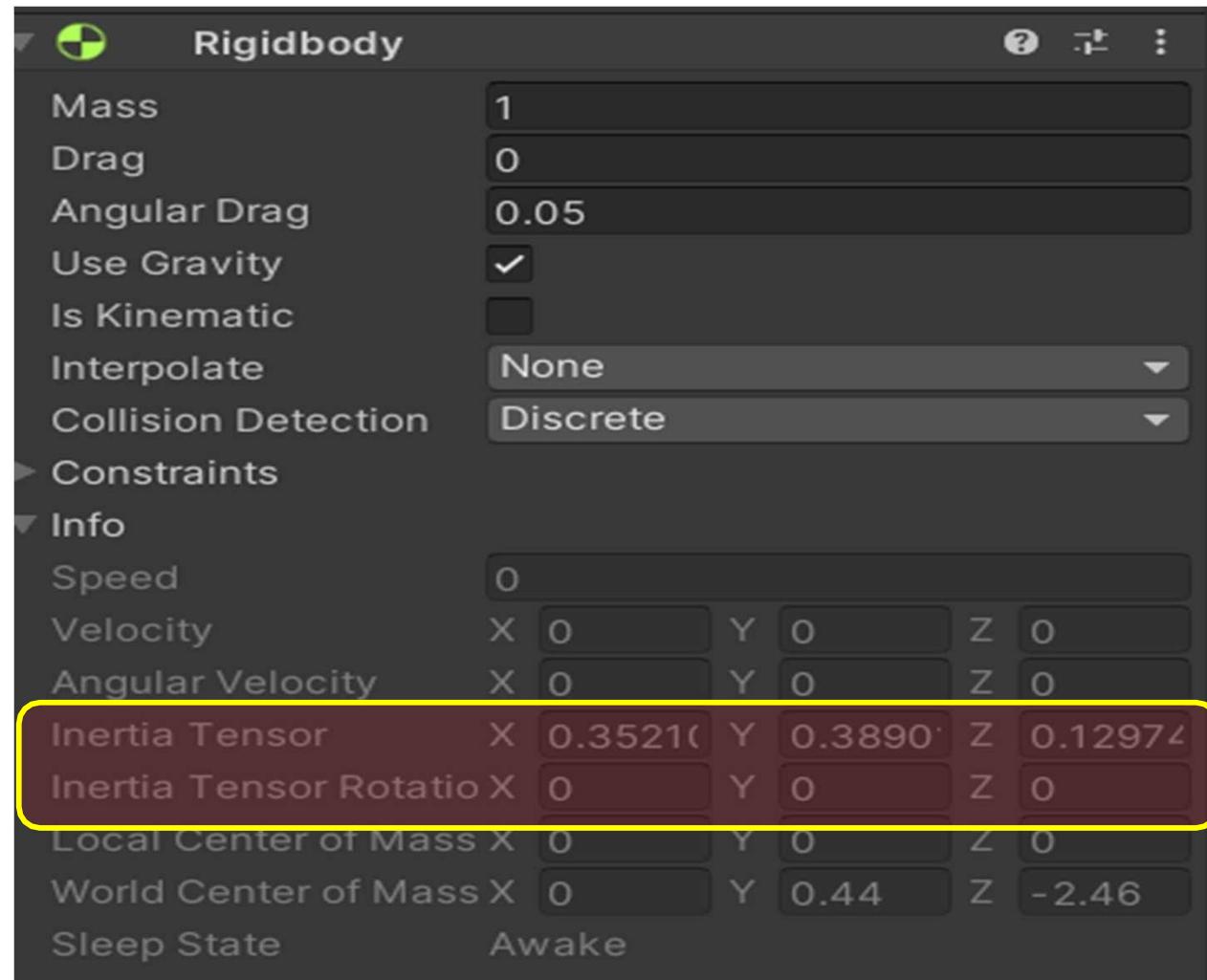
□ Pour un système à N-points matériels :

Le moment angulaire d'un système de points matériels Mi est la somme vectorielle des moments cinétiques individuels:

$$\vec{L}(S)_{/A} = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \times m_i \cdot \vec{V}_{M_i/R}$$

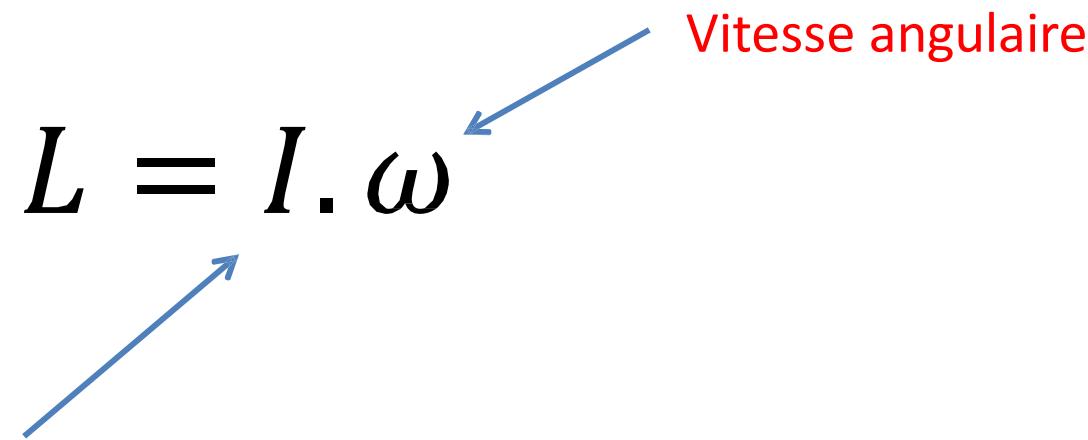


Et pour un **Rigid Body** ?



Moment angulaire : Rigid Body

Pour un **corps rigide** tournant **autour d'un axe de symétrie** (exemple sphère ou cylindre), le moment angulaire peut être exprimé comme **le produit** de son **moment d'inertie** par sa **vitesse angulaire**:

$$L = I \cdot \omega$$


Vitesse angulaire

Moment d'inertie (I ou J) = Mesure de la résistance d'un objet à sa mise en rotation (L'effort qu'il faut pour mettre un objet en rotation autour d'un axe)

Décrit comment la masse est répartie autour du centre de masse

Moment angulaire : Rigid Body

$$L = I \cdot \omega$$



$$L = I \cdot \omega$$



Décrit comment la masse est répartie autour du centre de masse

Moment angulaire : Rigid Body

- Le moment angulaire caractérise la tendance de l'objet à continuer à tourner autour de l'axe, du fait de son inertie.
- Soit $r'_i = r_i(t) - x(t)$ le déplacement de la ième particule par rapport au centre de masse , calculée **dans le repère global**:

$$I(t) = \sum \begin{pmatrix} m_i(r'_{iy}^2 + r'_{iz}^2) & -m_i r'_{ix} r'_{iy} & -m_i r'_{ix} r'_{iz} \\ -m_i r'_{iy} r'_{ix} & m_i(r'_{ix}^2 + r'_{iz}^2) & -m_i r'_{iy} r'_{iz} \\ -m_i r'_{iz} r'_{ix} & -m_i r'_{iz} r'_{iy} & m_i(r'_{ix}^2 + r'_{iy}^2) \end{pmatrix}$$

Doit être recalculé à chaque image !

Moment angulaire : Rigid Body

$$I(t) = R(t) \cdot I_{body} \cdot R(t)^T$$



Exprimé dans l'espace objet.



CONSTANTE
d'une image à
l'autre

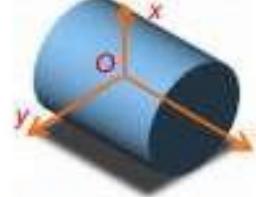
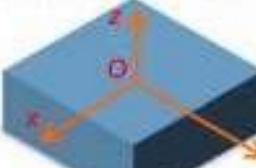
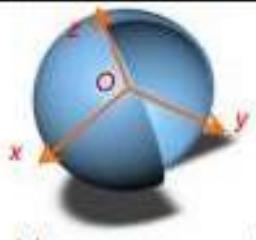
Dépend des
dimensions de
l'objet

Dépend de la
forme de l'objet

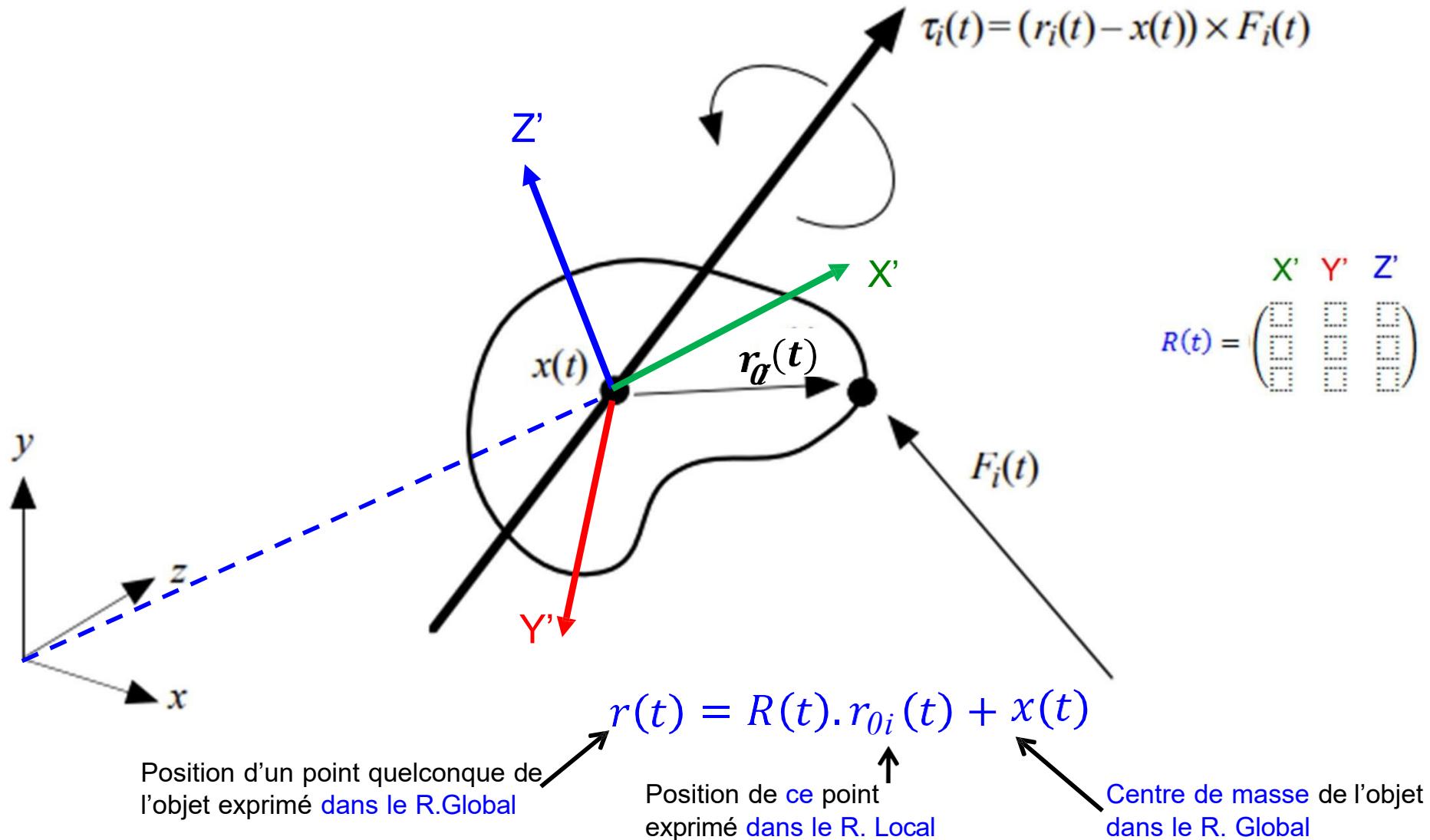
Moment d'inertie

• I_{body}

Matrice diagonale

Corps homogène de masse m	Centre d'inertie	Matrice d'inertie en $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$
cylindre creux : rayon R et longueur l		
	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix}$
cylindre plein : rayon R et longueur l		
	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$
parallélépipède rectangle : coté a, b, c		
	centre	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 \end{pmatrix}$

Evolution temporelle



Evolution temporelle

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{r}_i(t) - \vec{x}(t))$$

$$\frac{d\overrightarrow{p_{sys}}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

$$R(t) = \begin{pmatrix} \textcolor{brown}{X'} & \textcolor{red}{Y'} & \textcolor{blue}{Z'} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$



$$\frac{d\vec{X}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{X}' = \vec{T}$$

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{Y}' = \vec{N}$$

$$\frac{d\vec{Z}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{Z}' = \vec{B}$$

$$\frac{dR}{dt} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Remarque

A cause des erreurs de calcul de \hat{R} on perd l'orthogonalité des vecteurs composant les colonnes de celle-ci.



Method d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

On normalise \vec{T} $\rightarrow \vec{T}' = \frac{\vec{T}}{\|\vec{T}\|}$

On retranche la projection de \vec{N} sur \vec{T}' $\rightarrow \vec{N}' = \vec{N} - \vec{T}'(\vec{N}\vec{T}')$

On normalise \vec{N}' $\rightarrow \vec{N}' = \frac{\vec{N}'}{\|\vec{N}'\|}$

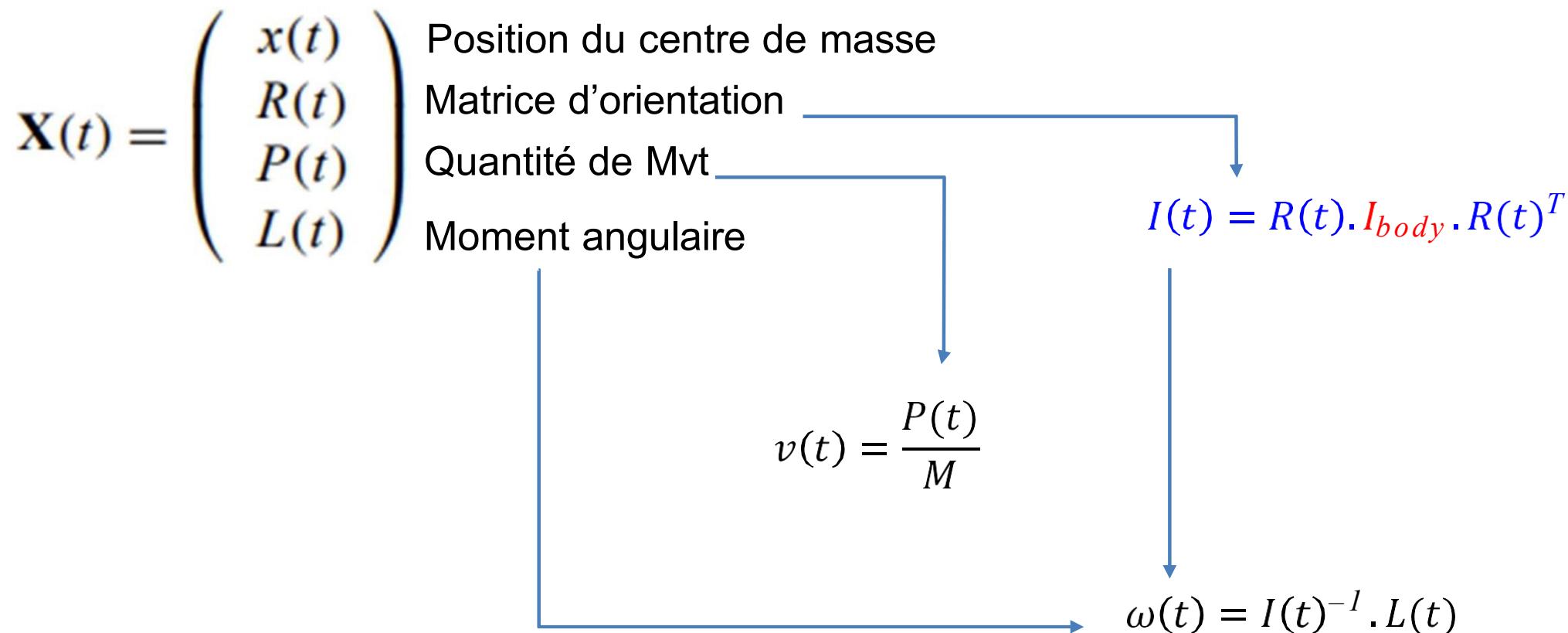
On calcule $\vec{B}' \rightarrow \vec{B}' = \vec{T}' \wedge \vec{N}'$

La programmation

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i \quad \rightarrow \quad \vec{\tau} = \sum (\vec{r}_i - \overline{x(t)}) \wedge \vec{F}_i$$

Les résultantes !

Vecteur d'état du Rigidbody



La programmation

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t)^* R(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}.$$

$\frac{d\vec{X}^i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{X}^i$

$\frac{d\vec{Y}^i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{Y}^i$

$\frac{d\vec{Z}^i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{Z}^i$

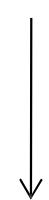
$\frac{dR}{dt} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$\tau = \sum_i \tau_i(t) = \sum_i (r_i(t) - x(t)) \wedge F_i(t)$

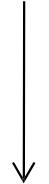
Evolution temporelle

- Equation du mouvement de l'objet:

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \Delta t \cdot \frac{dX(t)}{dt}$$



Etat de l'objet à
l'image suivante



Etat actuel
de l'objet

?

Evolution temporelle

- Etat de l'objet:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Position du barycentre de l'objet dans l'espace monde} \\ \text{Rotation pr/pr au barycentre de l'objet (orientation)} \\ \text{Quantité de mouvement (infos Translation)} \\ \text{Moment cinétique (infos Rotation)} \end{array}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{ }} v(t) = \frac{P(t)}{M} \\ \xrightarrow{\text{ }} \omega(t) = I^{-1}(t).L(t) \end{array} \quad / \quad I^{-1}(t) = R(t).I^{-1}_{body}.R(t)^T$$

Evolution temporelle

- Evolution de l'état de l'objet:

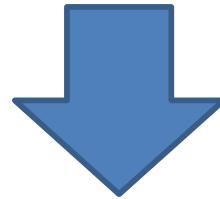
$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \longleftrightarrow \text{Position du barycentre de l'objet dans l'espace monde} \\ \longleftrightarrow \text{Rotation pr/pr au barycentre de l'objet (orientation)} \\ \longleftrightarrow \text{Quantité de mouvement (infos Translation)} \\ \longleftrightarrow \text{Moment cinétique (infos Rotation)} \end{array}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \rightarrow v(t) = \frac{P(t)}{M} \\ \rightarrow \omega(t) = I^{-1}(t).L(t) \end{array} \quad / \quad I^{-1}(t) = R(t).I^{-1}_{body}.R(t)^T$$

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dR(t)}{dt} \\ \frac{dP(t)}{dt} \\ \frac{dL(t)}{dt} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{--- } v(t) \\ \text{--- } \vec{\omega} * R(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}.R(t) \\ \text{--- } F(t) \\ \text{--- } \tau(t) \end{array}$$
$$\tau = \sum_i \tau_i(t) = \sum_i (r_i(t) - x(t)) \wedge F_i(t)$$

Evolution temporelle

$$\begin{pmatrix} x(t + \Delta t) \\ R(t + \Delta t) \\ P(t + \Delta t) \\ L(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dR(t)}{dt} \\ \frac{dP(t)}{dt} \\ \frac{dL(t)}{dt} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x(t + \Delta t) \\ R(t + \Delta t) \\ P(t + \Delta t) \\ L(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} v(t) \\ \vec{\omega} * R(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$

Evolution temporelle

- Itération i

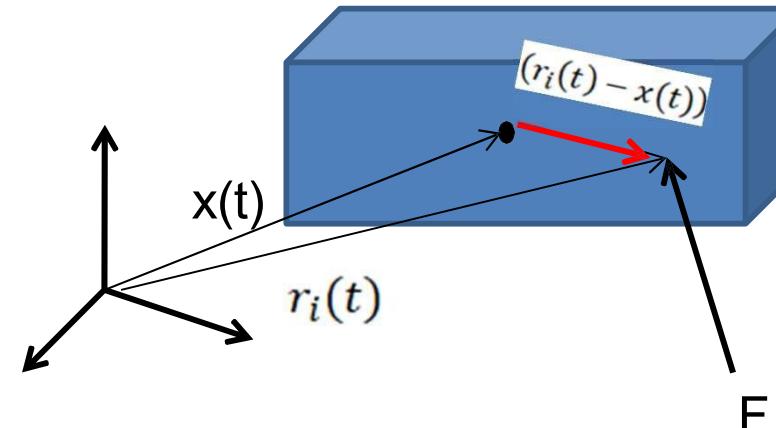
$x(t)$ connu

$$P(t) \text{ connu} \rightarrow v(t) = \frac{P(t)}{M}$$

$$R(t) \text{ connu} \rightarrow I^{-1}(t) = R(t).I^{-1}_{body}.R(t)^T$$

$$L(t) = \text{connu} \rightarrow \omega(t) = I^{-1}(t).L(t) \rightarrow \dot{R}(t) = \vec{\omega} * R(t)$$

$$F \rightarrow \left[\begin{array}{l} dP/dt \\ \tau = \sum_i \tau_i(t) = \sum_i (r_i(t) - x(t)) \wedge F_i(t) \end{array} \right] \rightarrow dL/dt$$



$$\begin{pmatrix} x(t + \Delta t) \\ R(t + \Delta t) \\ P(t + \Delta t) \\ L(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} v(t) \\ \vec{\omega} * R(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$

Evolution temporelle

- Itération 1

$x(t)$ connu

$$P(t) \text{ connu} \rightarrow v(t) = \frac{P(t)}{M}$$

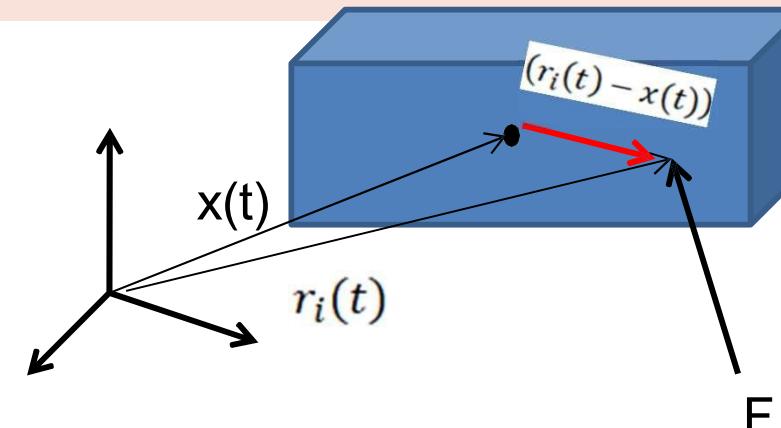
② $R(t)$ connu $\rightarrow I^{-1}(t) = R(t).I^{-1}_{body}.R(t)^T$

② $L(t) = \text{connu} \rightarrow \omega(t) = I^{-1}(t).L(t) \Rightarrow \dot{R}(t) = \vec{\omega} * R(t)$

① $F \rightarrow \begin{cases} dP/dt \\ 1 \tau = \sum_i \tau_i(t) = \sum_i (r_i(t) - x(t)) \wedge F_i(t) \end{cases} \Rightarrow dL/dt$

$$\begin{pmatrix} x(t + \Delta t) \\ R(t + \Delta t) \\ P(t + \Delta t) \\ L(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \Delta t. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ F(t) & 0 & 0 & 1 \\ \tau(t) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ \Delta t \cdot F(t) \\ \Delta t \cdot \tau(t) \end{pmatrix}$$

Etat actuel de l'itération 2



Evolution temporelle

- Itération 2

$x(t)$ connu

$$P(t) \text{ connu} \rightarrow v(t) = \frac{P(t)}{M}$$

$$R(t) \text{ connu} \rightarrow I^{-1}(t) = R(t).I^{-1}_{body}.R(t)^T$$

$$L(t) = \text{connu} \rightarrow \omega(t) = I^{-1}(t).L(t)$$

$$\Rightarrow \dot{R}(t) = \vec{\omega} * R(t)$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ \Delta t \cdot F(t) \\ \Delta t \cdot \tau(t) \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x(t + \Delta t) \\ R(t + \Delta t) \\ P(t + \Delta t) \\ L(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} v(t) \\ \vec{\omega} * R(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$

$$F \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} dP/dt \\ \tau = \sum_i \tau_i(t) = \sum_i (r_i(t) - x(t)) \wedge F_i(t) \end{array} \right. \Rightarrow dL/dt$$

Bibliographie

BARAFF D.: An introduction to physically based modeling: Rigid body simulation. In SIGGRAPH '97 Course Notes (1997).
<https://www.cs.cmu.edu/~baraff/pbm/rigid1.pdf>