



Moteur Physique pour les jeux vidéo

5^{ème} GamiX

Chapitre 1 : Géométrie des mondes virtuels

2025 – 2026

AHMED AMMAR

Compétences attendues

- Être capable de **positionner** un objet dans un environnement virtuel 3D.
- Être capable d'**orienter** un objet dans un environnement virtuel 3D.
- Être capable de **transformer** et/ou **déplacer** un objet virtuel 3D.

Compétences attendues

- ❑ Notions de base sur les vecteurs.
- ❑ Coordonnées Cartésiennes.
- ❑ Notions de base en algèbre linéaire (Matrices, déterminants, inversion d'une matrice, etc.)
- ❑ Fonctions trigonométriques de base.

Compétences attendues

- ❑ Notions de base sur les vecteurs.
- ❑ Coordonnées Cartésiennes.
- ❑ Notions de base en algèbre linéaire (Matrices, déterminants, inversion d'une matrice, etc.)
- ❑ Fonctions trigonométriques de base.

Mondes virtuels : les besoins

Moteur de rendu, moteur physique, moteur de jeu...

Géométrie

dans l'espace
de l'observateur

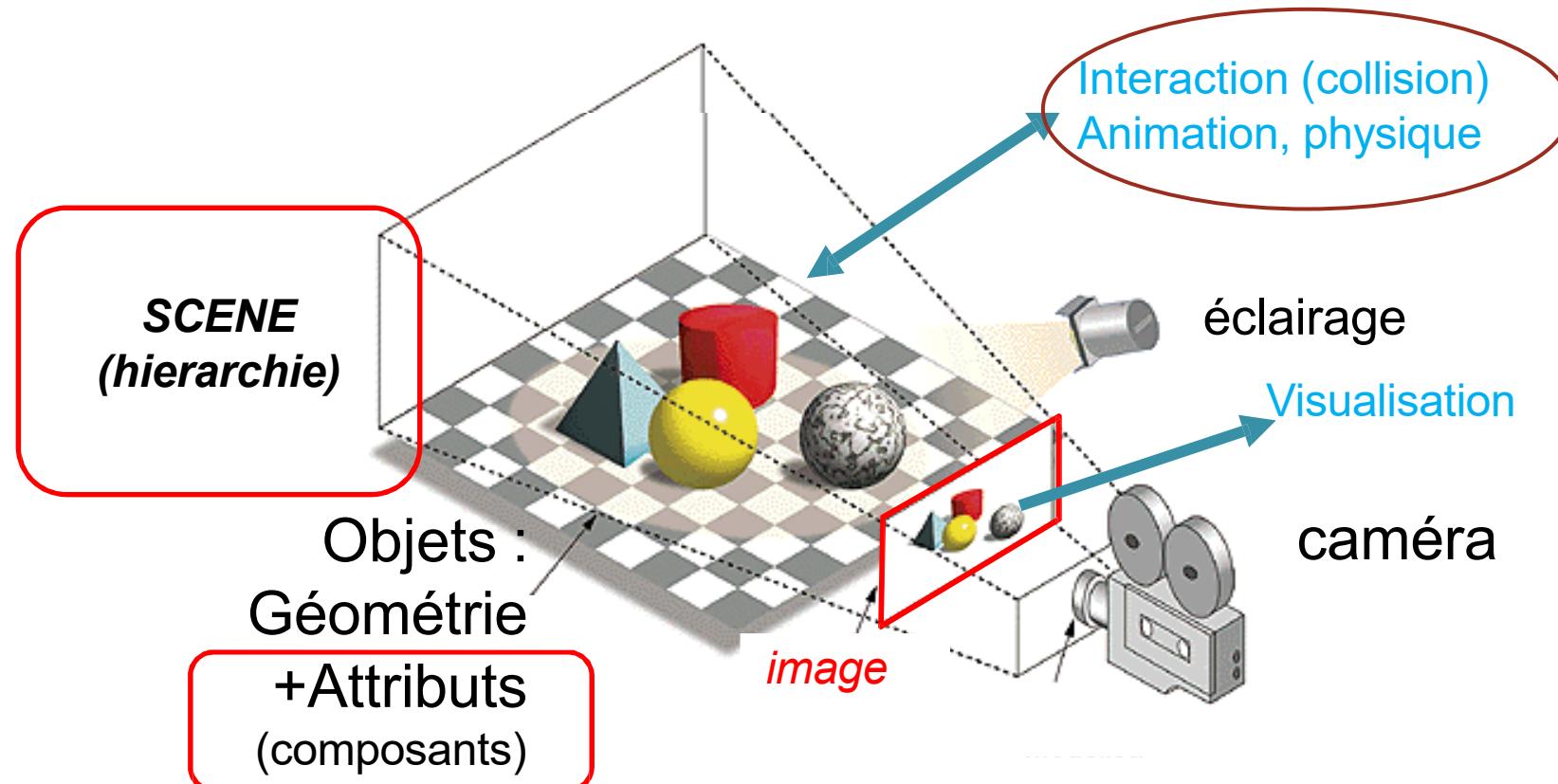
Rendu

aspects visuels
des surfaces

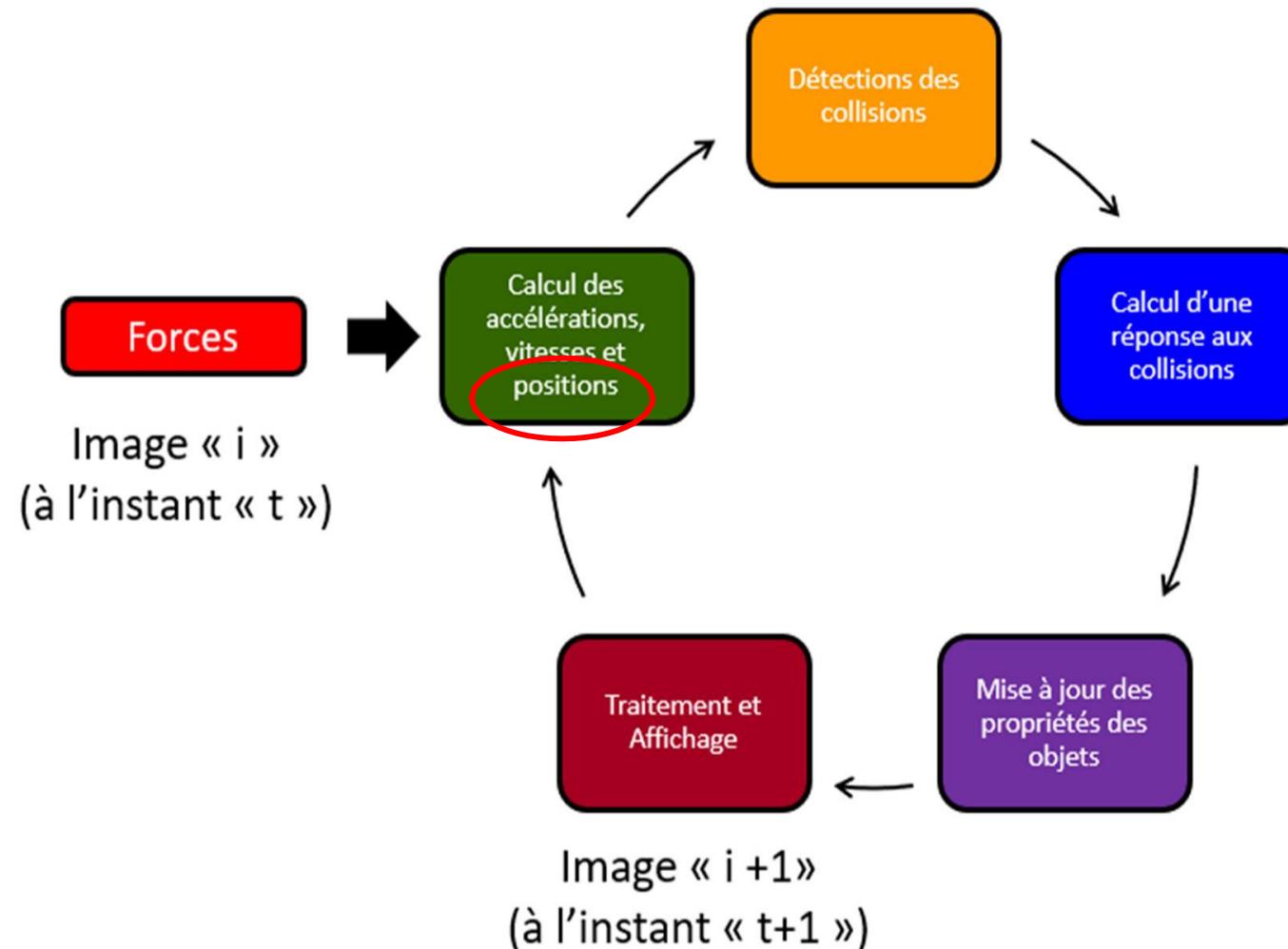
Rastérisation

affichage sur
le support

From Computer Desktop Encyclopedia
Reprinted with permission.
© 1998 Integraph Computer Systems



Rappel

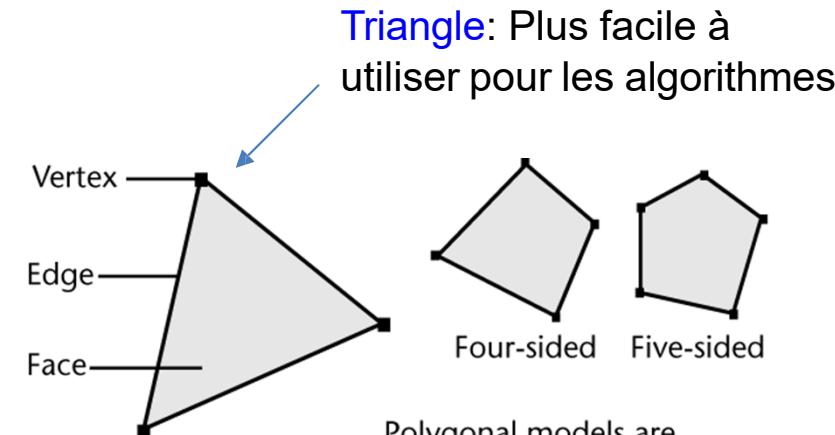


Modèles

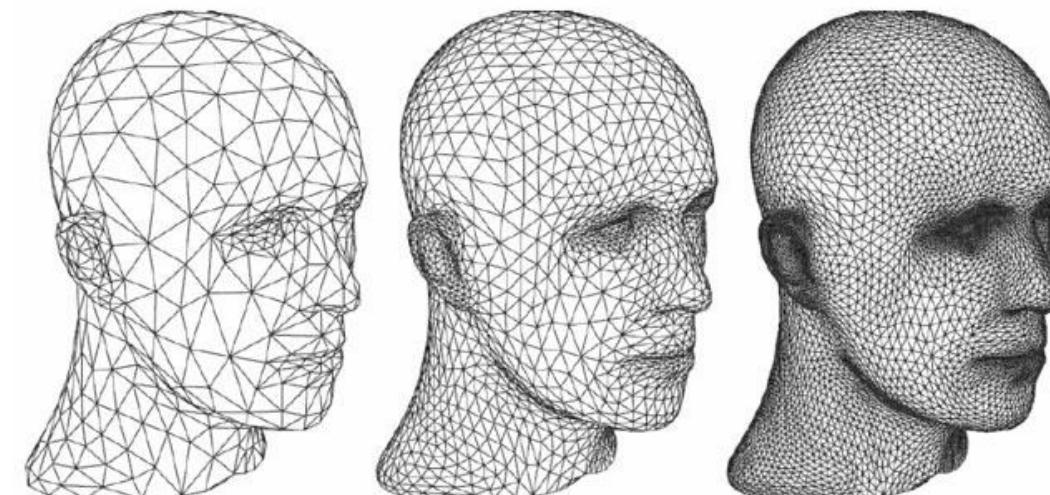


Combien de points comprend chaque objet ?

On utilise tous les points dans nos simulations ?

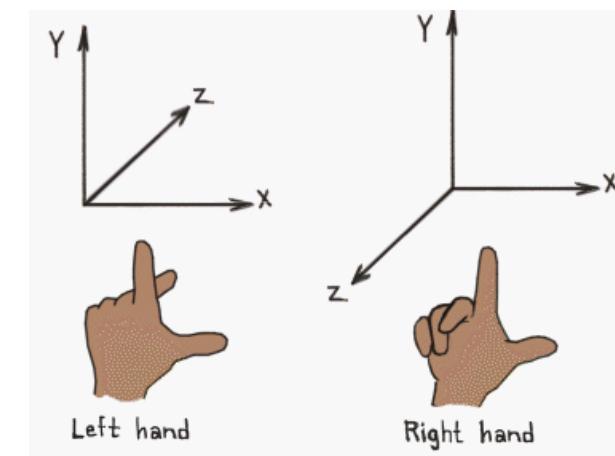


Polygonal models are composed of many separate polygons combined into a polygon mesh.



Localiser les modèles

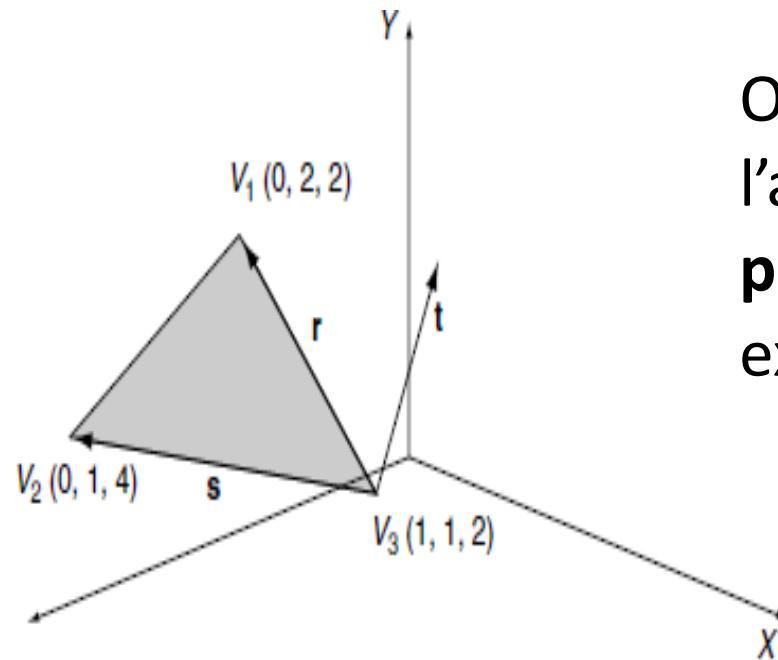
Espace euclidien 3D avec coordonnées cartésiennes



Mathématiques:
Repère main droite, Z-up !



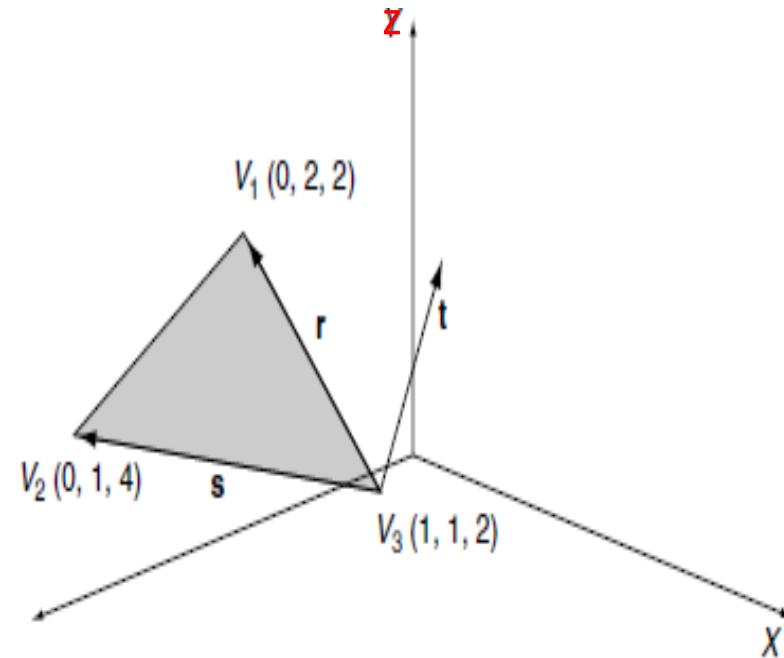
Espace euclidien 3D avec coordonnées cartésiennes



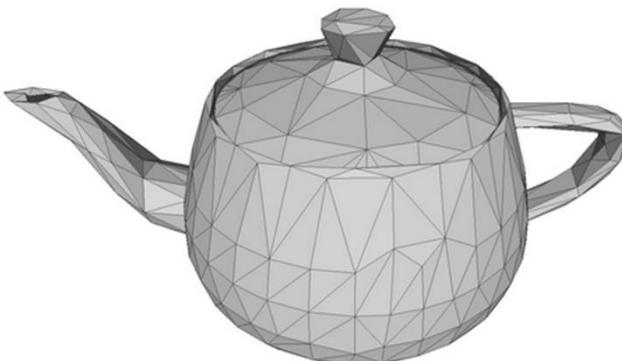
On repère la face d'un polygone à l'aide d'un **vecteur unitaire, perpendiculaire** à celle-ci (en V3 par exemple)

Positionner les modèles

Déterminer le vecteur unitaire \vec{t} , perpendiculaire au polygone en V_3



Positionner les modèles



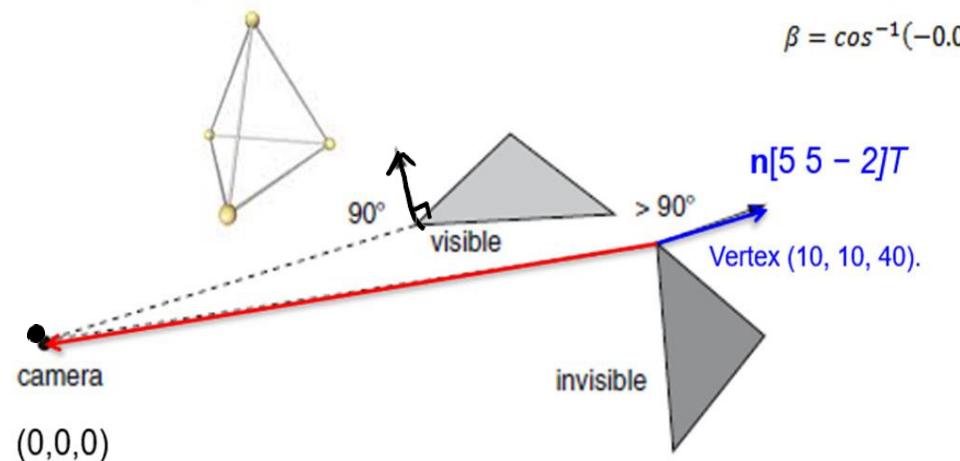
Exemple: Que se passe-t'il lors du rendu de cette scène ?

Application: Détection de face arrière

- ❑ Le produit scalaire permet de déterminer si le maillage (triangle) est visible ou non par la caméra virtuelle.
- ❑ On calcule **l'angle β** entre la normale au triangle **et le rayon** issu du vertex considéré et arrivant à la caméra :
 - Si $\beta < 90^\circ$: il est **visible**
 - Si $\beta > 90^\circ$: il n'est **pas visible**

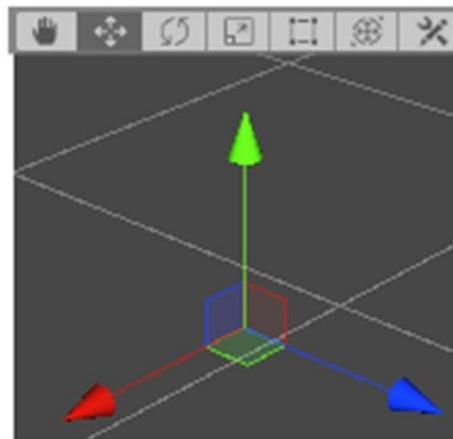
Réponse :

$$\beta = \cos^{-1}(-0.0634) = 93.635^\circ$$

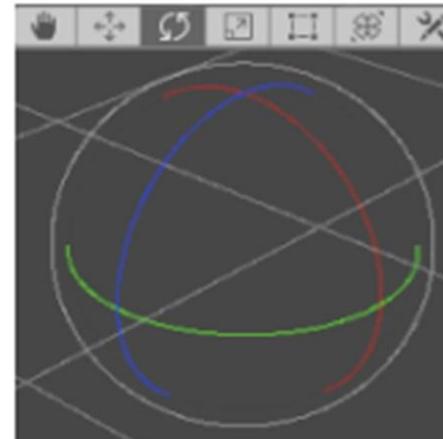


Changer la position et/ou l'orientation

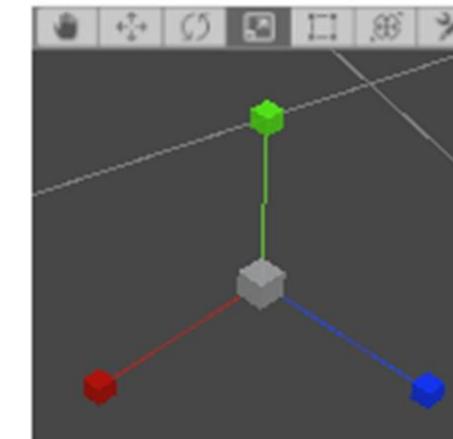
Nous appliquons une même transformation à chacun des vertex de chaque polygone de notre modèle.



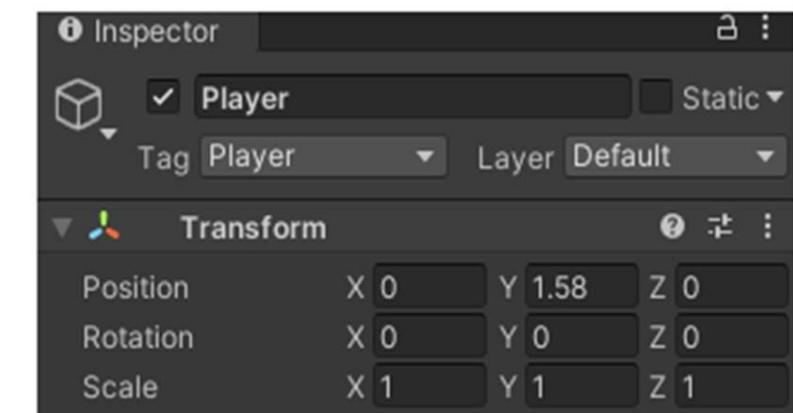
Translate (W)



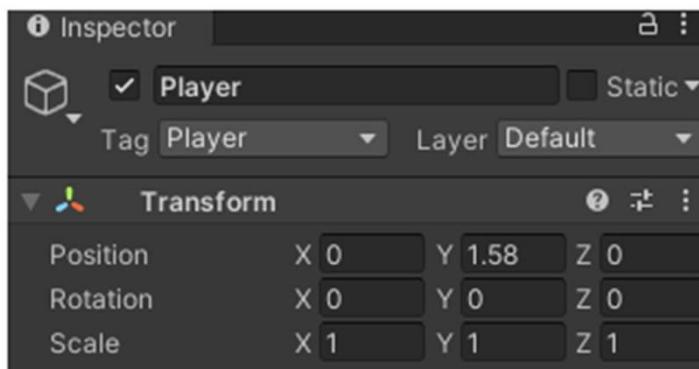
Rotate (E)



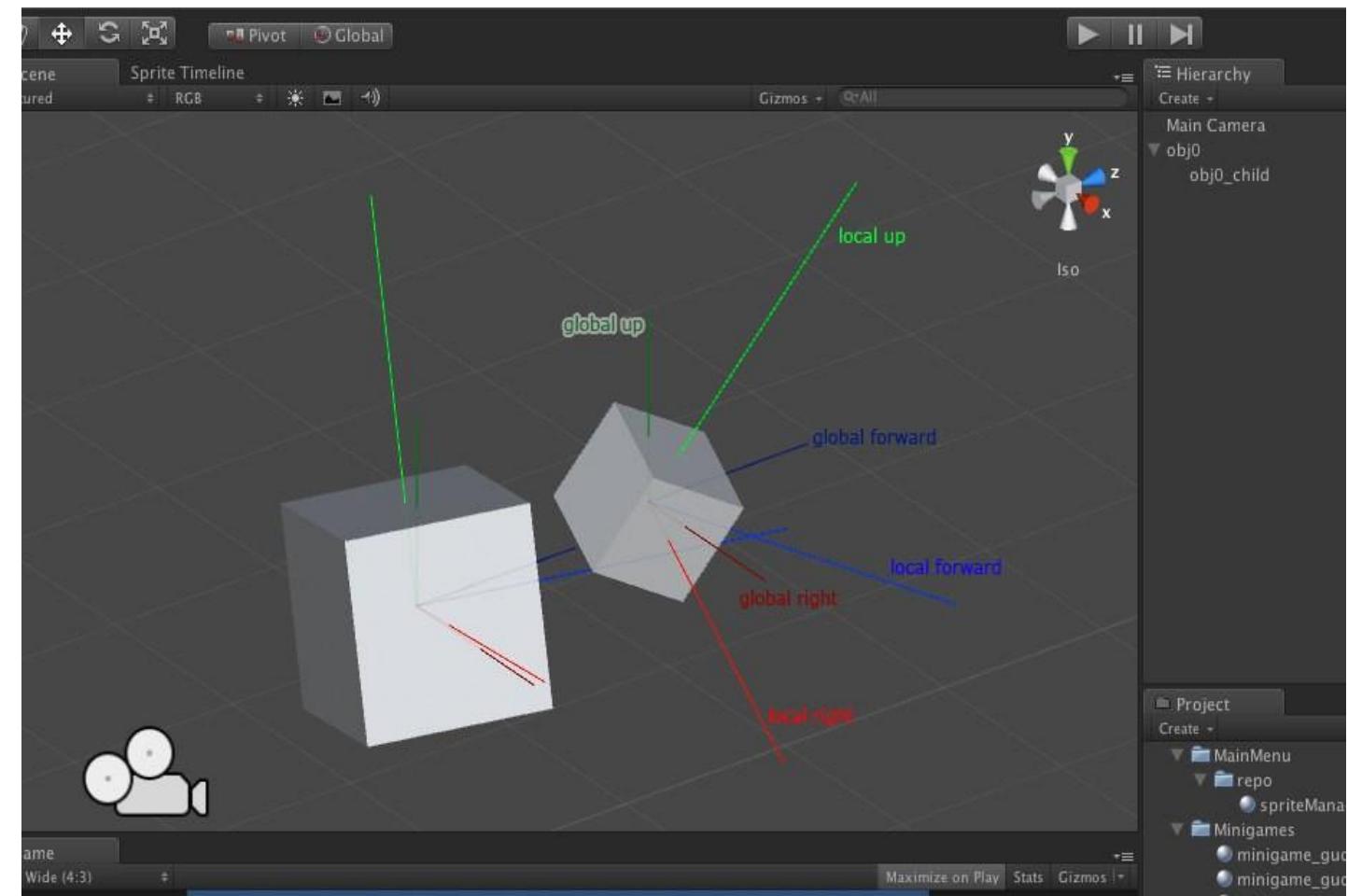
Scale (R)



Changer la position et/ou l'orientation

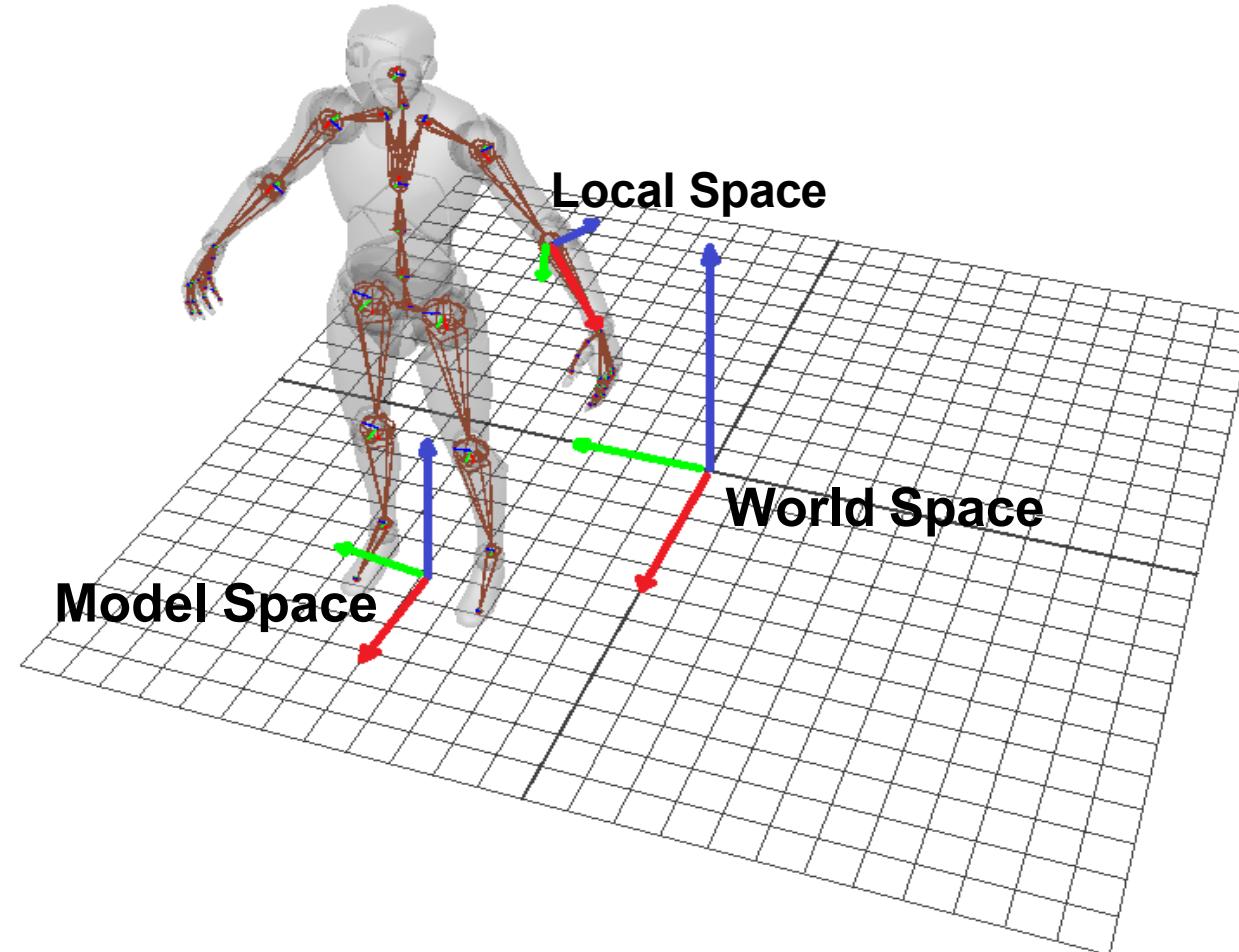


Attention à la Hiérarchie Parent-Enfant.



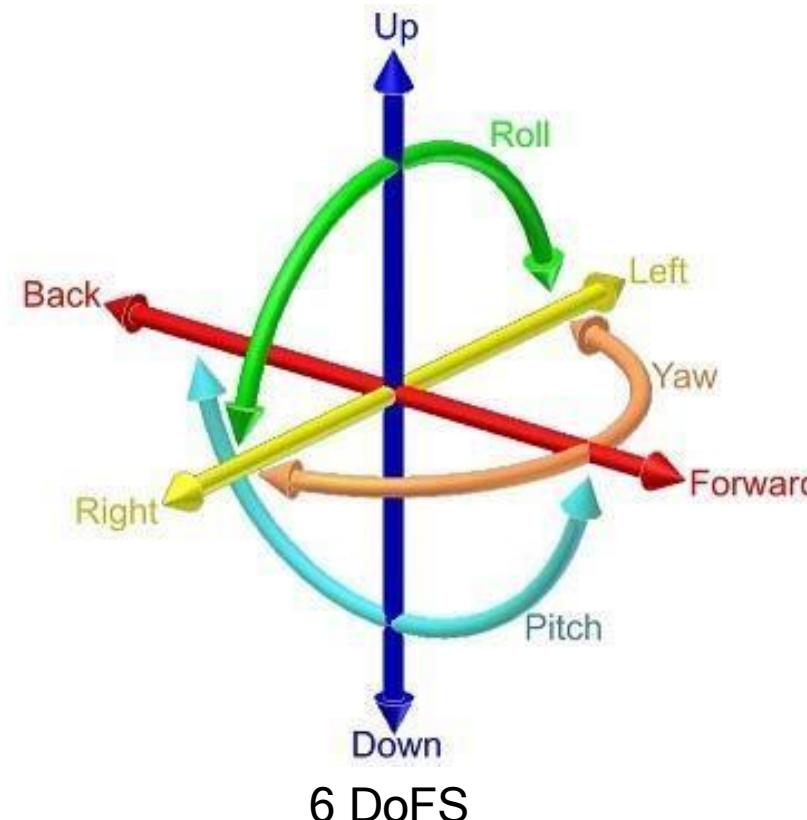
Les différents espaces

Espace local, espace modèle et espace global



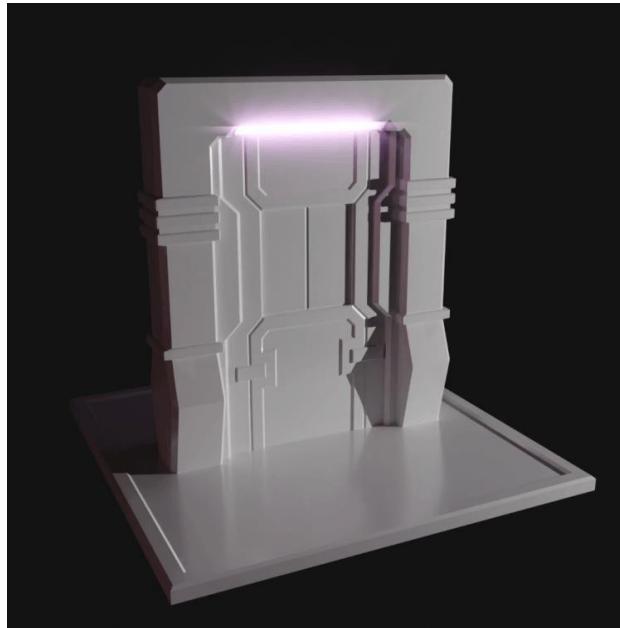
DoF (degrés de liberté)

- désigne le nombre de variables indépendantes ou de paramètres d'un système



DoF Pour les objets rigides

- 6 DoFs par objet ou sous-élément



Translation de la porte



Rotation du moulin à vent
(ou d'une éolienne)



Translation et rotation
du pneu

Changer la position et/ou l'orientation

- Transformations :
 - Translation
 - Changement d'échelle
 - Rotation
- 2D et/ou 3D :
 - Les transformations 2D
 - Les coordonnées homogènes 2D
 - Les transformations 3D
 - Les coordonnées homogènes 3D

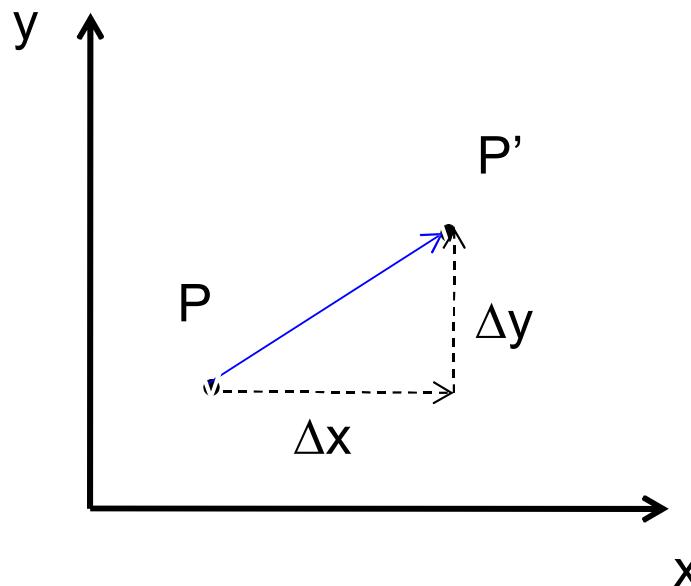
Transformations 2D : Translation

Soit un système d'axes orthonormés (Ox, Oy) et un point P de coordonnées x et y . On effectue une translation de P en ajoutant les quantités Δx et Δy à x et y , respectivement.

$$P(x, y) \dashrightarrow P'(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

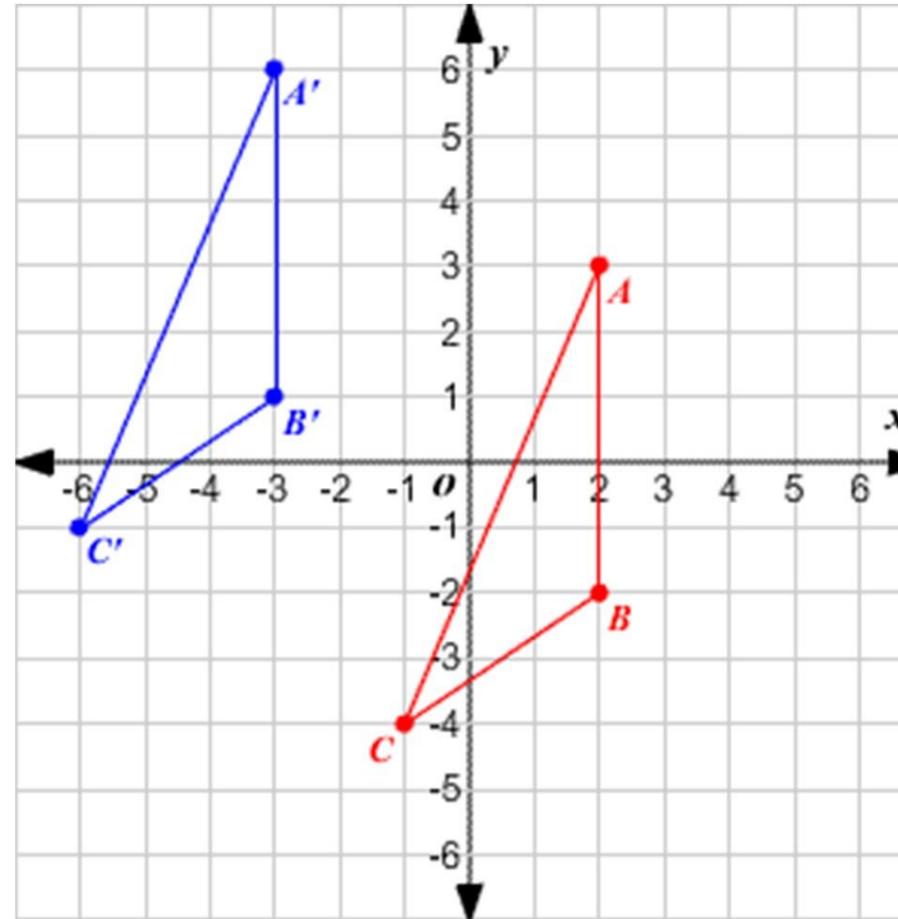
$$\rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P' = T + P$$



Transformations 2D : Translation

Remarque



La forme et les dimensions du triangle sont conservées.

Transformations 2D : Changement d'échelle

On effectue un changement d'échelle (scaling) en multipliant l'abscisse de chaque point par la quantité Δx et chaque ordonnée par Δy .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x & 0 \\ 0 & \Delta y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

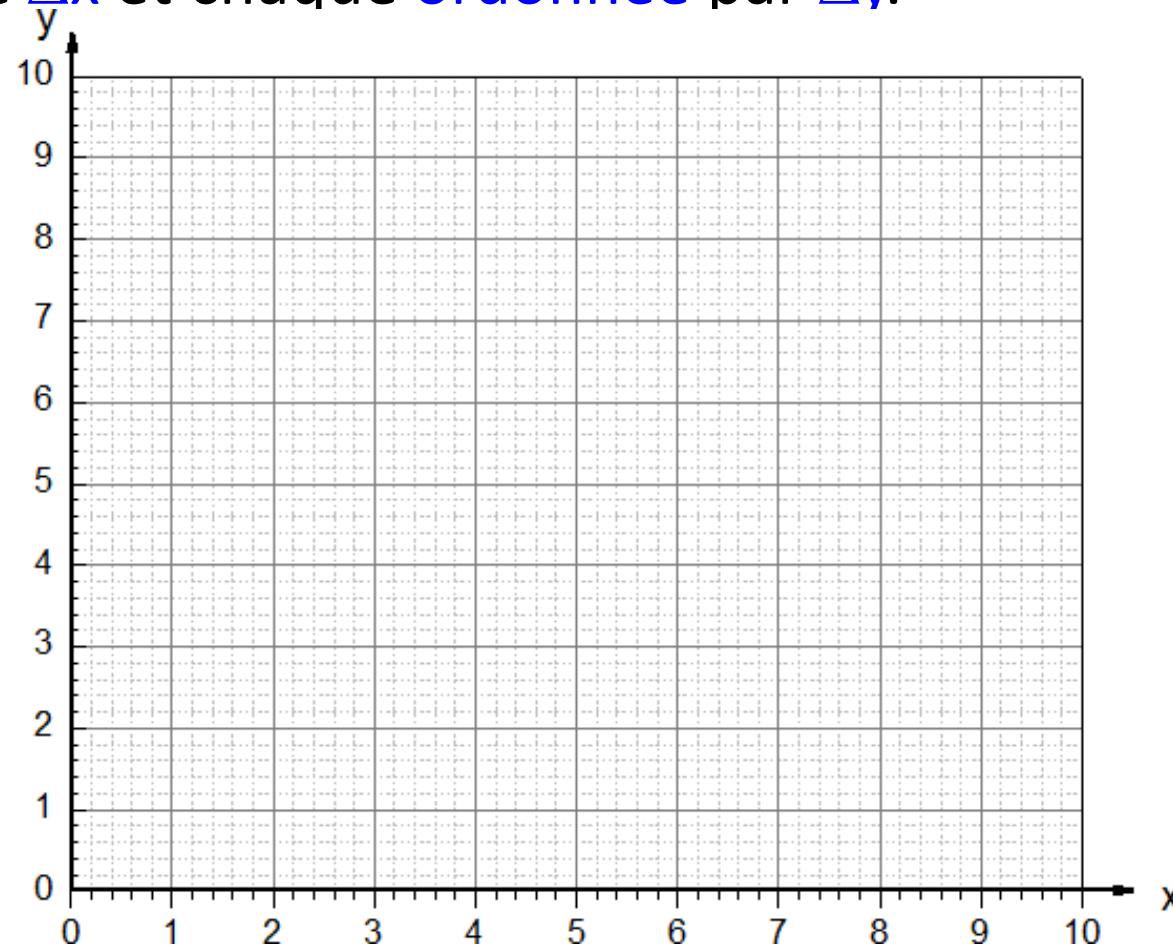


$$P' = S.P$$

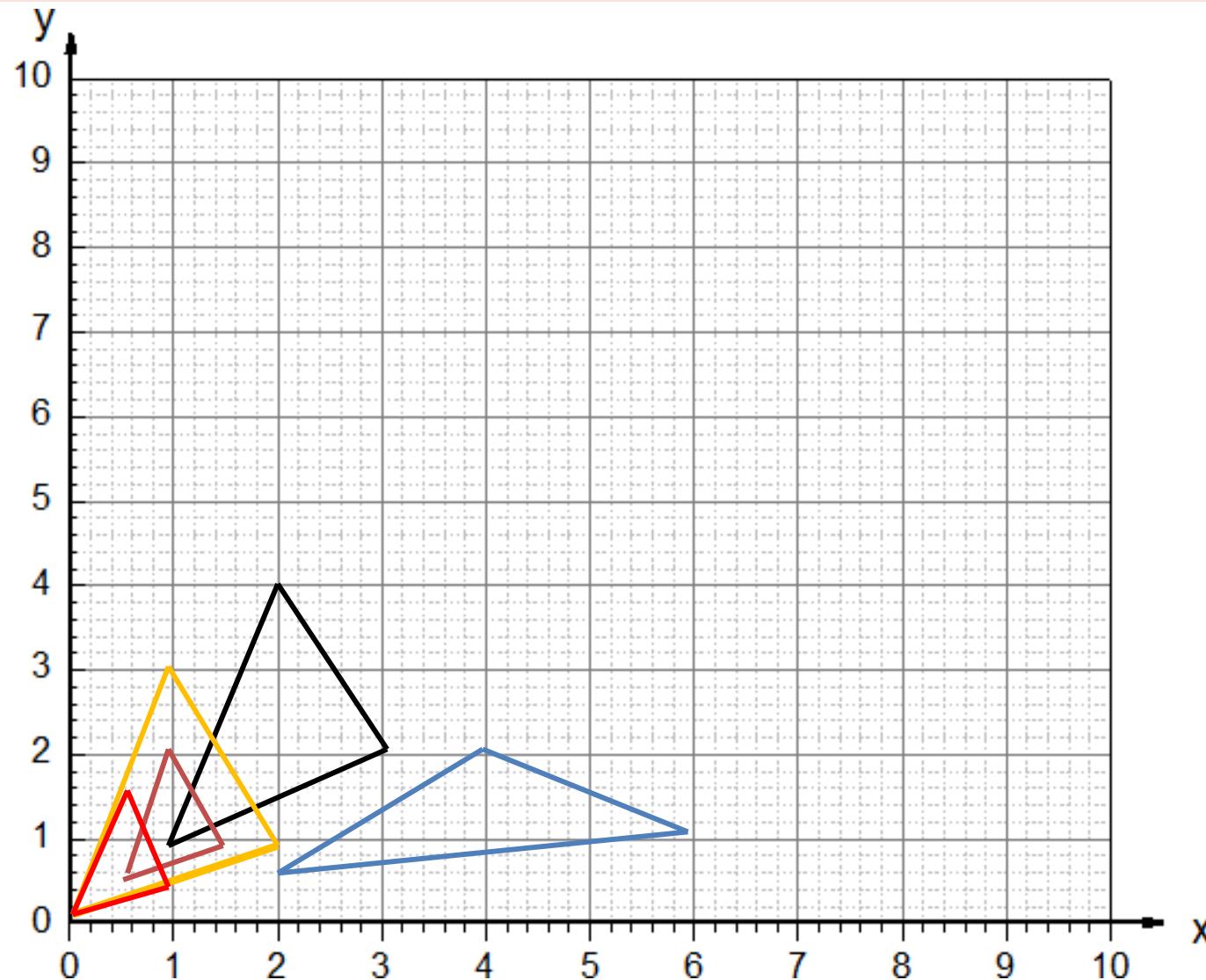
$$\left\{ \begin{array}{l} A(1,1), B(3,2), C(2,4) \\ \Delta x = 0.5, \Delta y = 0.5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(1,1), B(3,2), C(2,4) \\ \Delta x = 2, \Delta y = 0.5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(0,0), B(2,1), C(1,3) \\ \Delta x = 0.5, \Delta y = 0.5 \end{array} \right.$$



Transformations 2D : Changement d'échelle



Transformations 2D : Rotation

Soit un système d'axes orthonormés (Ox, Oy) et un point $P(x, y)$ repéré également par ses coordonnées polaires r et θ tq $x=r.\cos(\theta)$ et $y=r.\sin(\theta)$.

Rotation d'angle φ dans le sens anti-horaire, autour de l'origine.

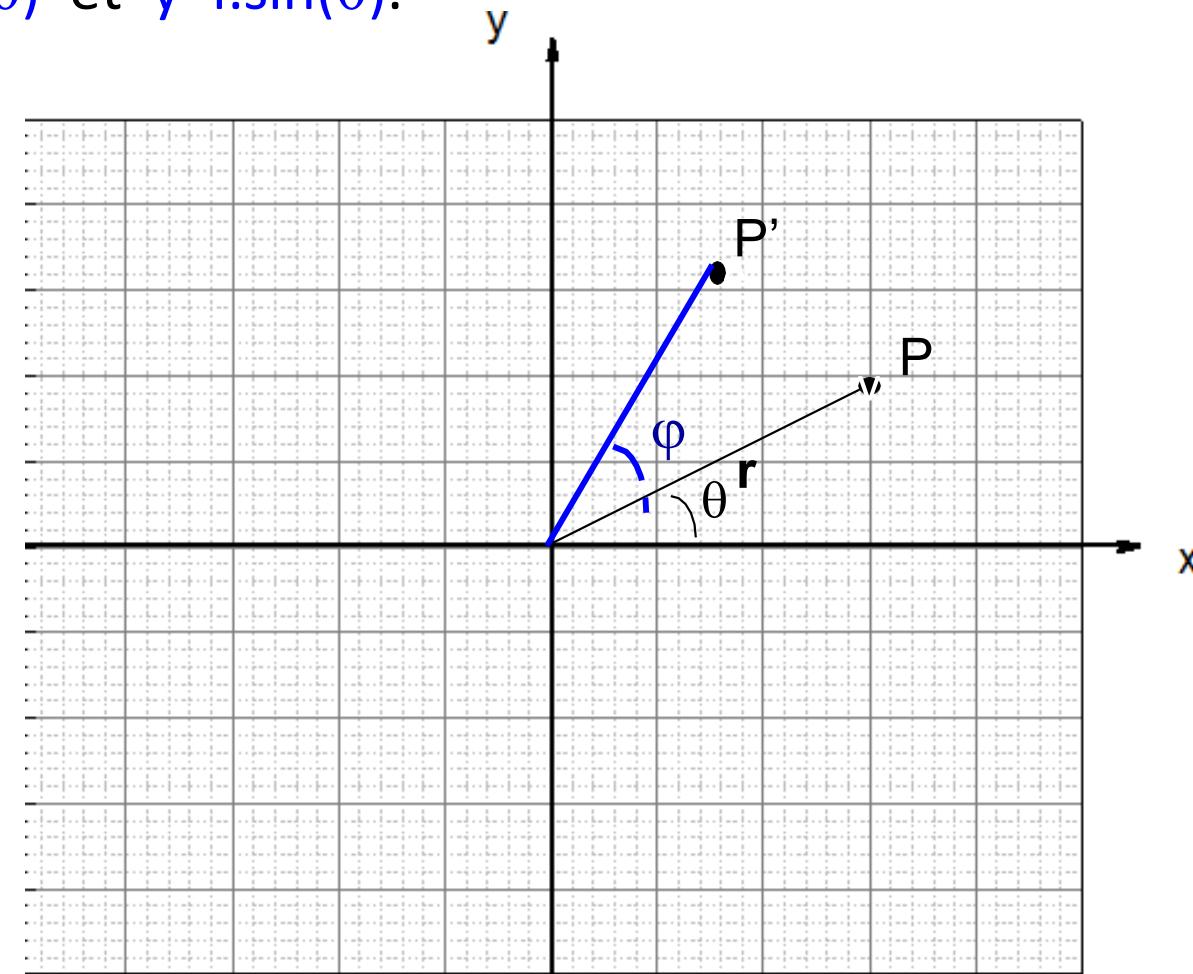
$$x' = r \cdot \cos(\theta + \varphi)$$

$$y' = r \cdot \sin(\theta + \varphi)$$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P' = R \cdot P$$



• TRIGONOMETRIE

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

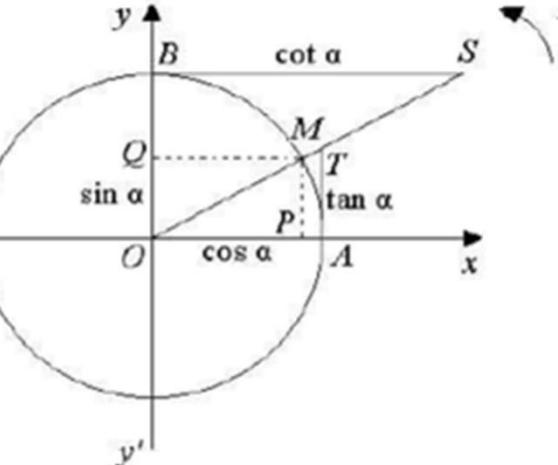
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

a et $-a$

- $\cos(-a) = \cos a$
- $\sin(-a) = -\sin a$
- $\tan(-a) = -\tan a$
- $\cot(-a) = -\cot a$

a et $\pi - a$

- $\cos(\pi - a) = -\cos a$
- $\sin(\pi - a) = \sin a$
- $\tan(\pi - a) = -\tan a$
- $\cot(\pi - a) = -\cot a$



Relations fondamentales

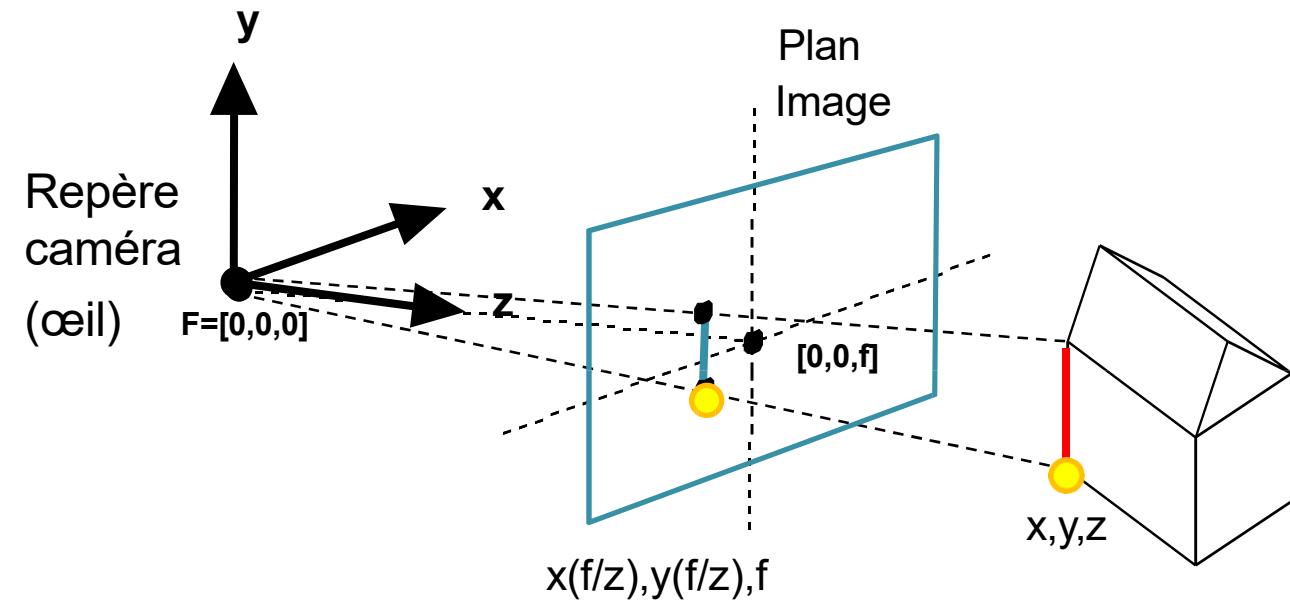
- $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$
- $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$ ou $\cos^2 a = \frac{1}{1 + \tan^2 a}$
- $1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$ ou $\sin^2 a = \frac{1}{1 + \cot^2 a}$

a et $\pi + a$

- $\cos(\pi + a) = -\cos a$
- $\sin(\pi + a) = -\sin a$
- $\tan(\pi + a) = \tan a$
- $\cot(\pi + a) = \cot a$

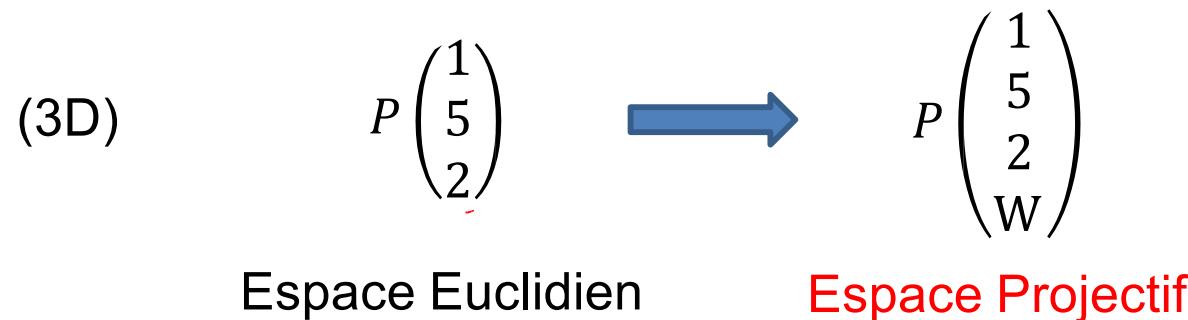
Coordonnées homogènes

Permettent de représenter les points à l'infini, les homographies, la projection perspective, etc.



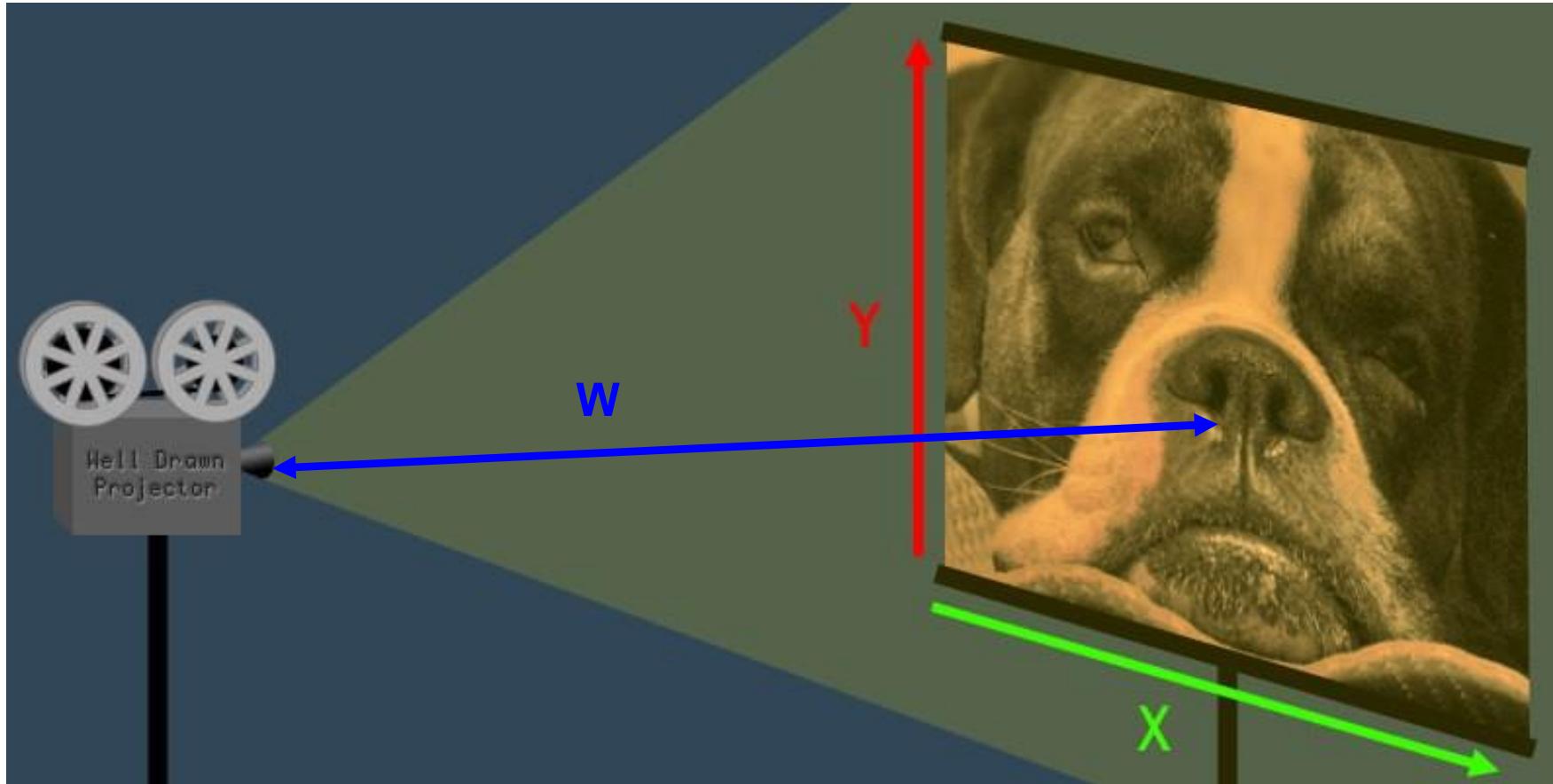
Géométrie Projective

- La géométrie projective a une dimension supplémentaire, appelée **W**, en plus des dimensions X, Y et Z.



- Pour les logiciels 3D, les termes « projectif » et « homogène » sont interchangeables avec « 4D ».
 - **A quoi correspond W et quelle est sa valeur ?**

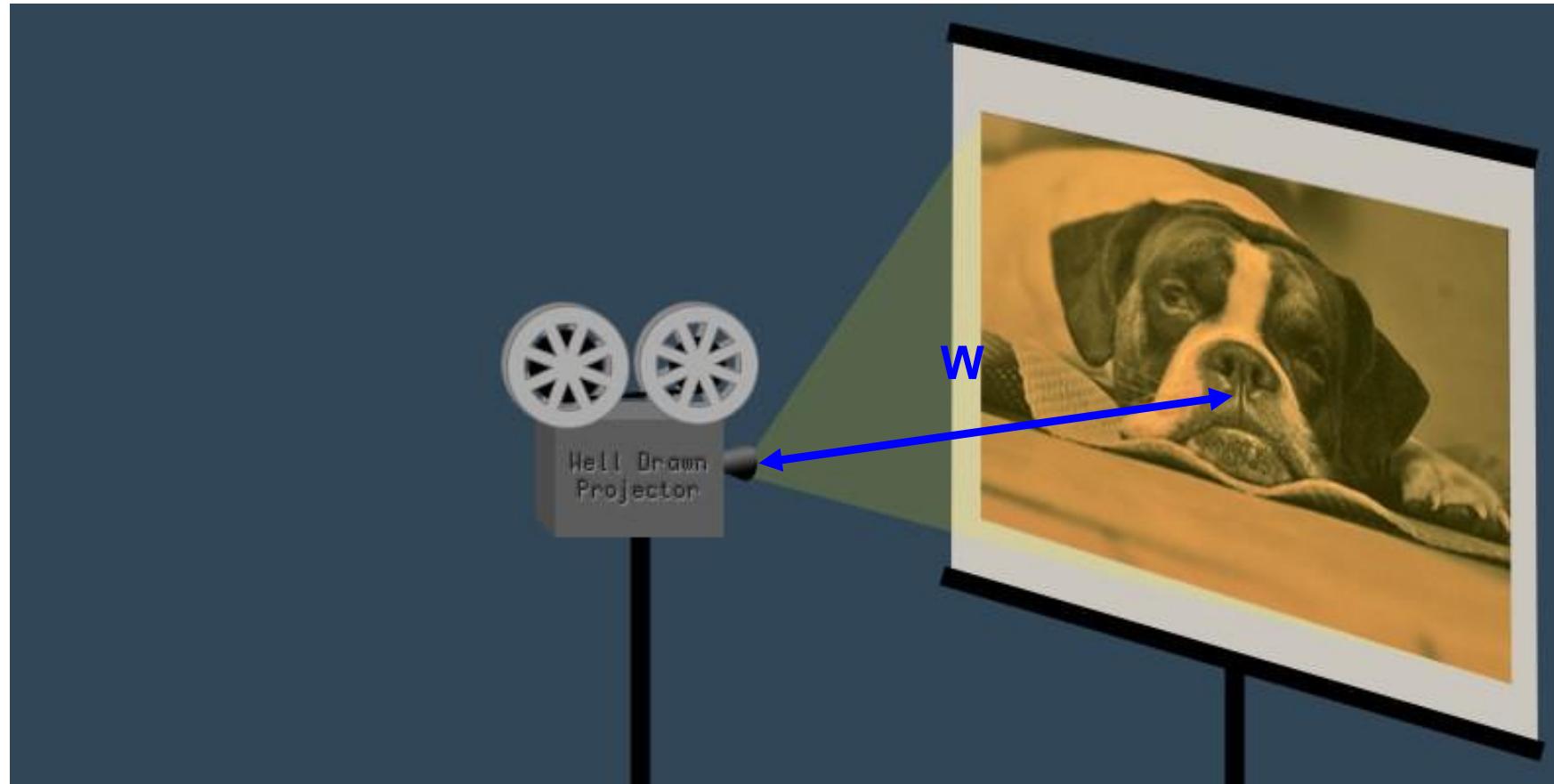
Coordonnées homogènes



$$\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ W \end{pmatrix}$$

Si on modifie la distance
Caméra- écran ?

Coordonnées homogènes

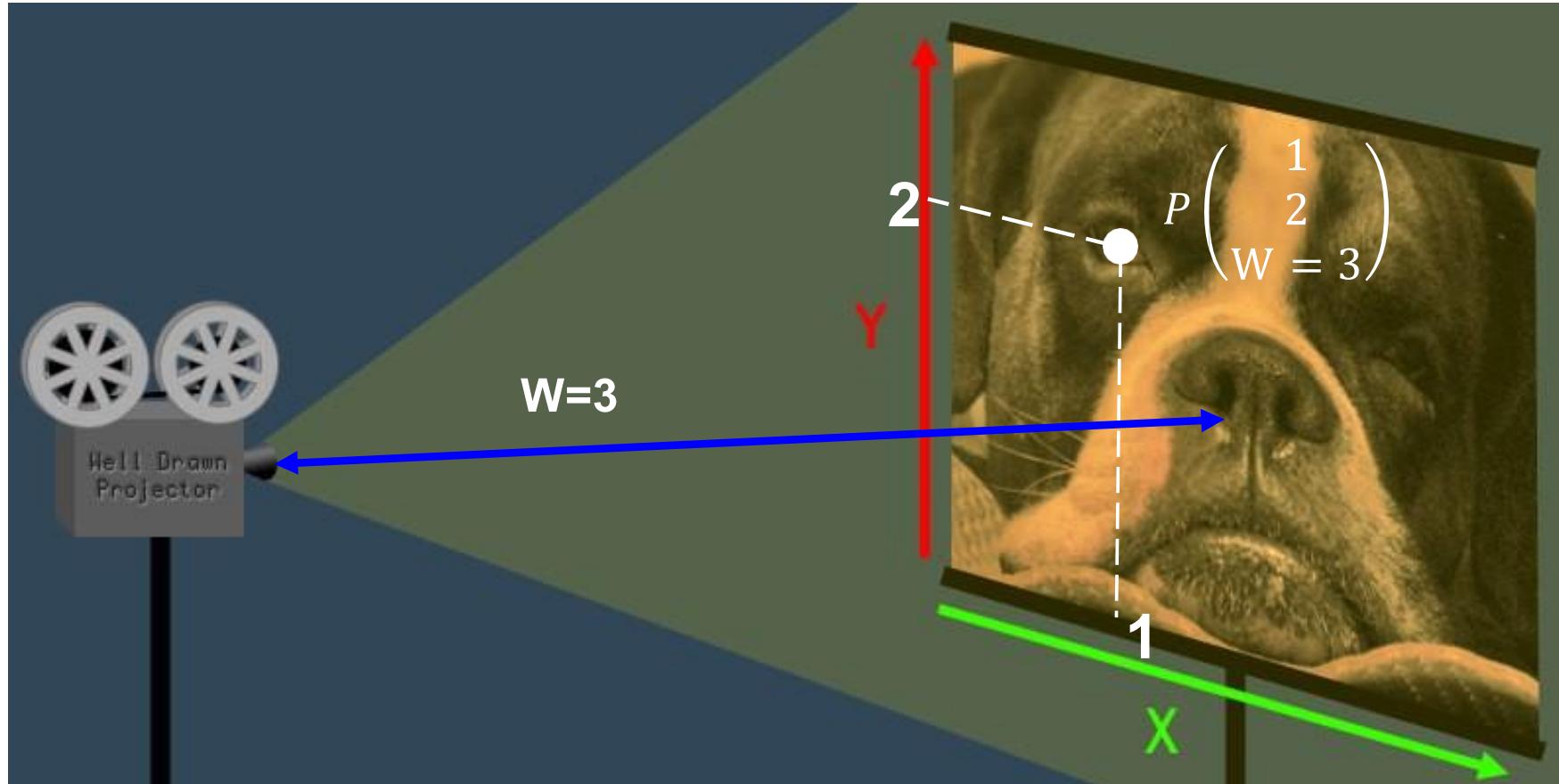


→ Faire varier W affecte la taille de l'image. (facteur d'échelle)

(Si $W=1$ Cela n'affecte pas la taille de l'image.)

Coordonnées homogènes

Espace Euclidien \leftrightarrow Espace Projectif



Dans l'**espace Euclidien**, la distance caméra-plan ne doit pas intervenir !

Coordonnées homogènes

$$\begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ représente } \begin{pmatrix} 21/7 \\ 7/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

représente

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ représente } \begin{pmatrix} 12/4 \\ 4/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

représente

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ représente } \begin{pmatrix} 3/1 \\ 1/1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

représente

Espace Projectif

Espace Euclidien

C'est le même point
dans l'espace
Euclidien mais
représenté à trois
échelles différentes !

Translation → Addition de matrices

Scaling ou Rotation → Multiplication de matrices

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & t_x \\ m_{21} & m_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une représentation matricielle **unique** pour
l'ensemble des transformations ?

Coordonnées homogènes 2D : Translation

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & t_x \\ m_{21} & m_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & D_x \\ 0 & 1 & D_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_{(\Delta x, \Delta y)}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow P' = T_{(\Delta x, \Delta y)} P$$

□ Combinaison de translations ?

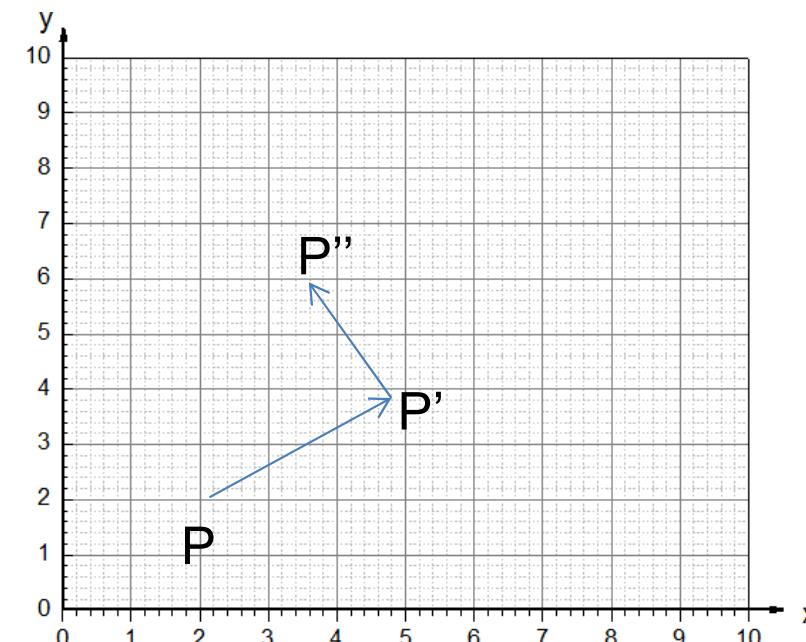
$$P' = T_{(\Delta x_1, \Delta y_1)} . P$$

$$P'' = T_{(\Delta x_2, \Delta y_2)} . P'$$

$$P'' = T_{(\Delta x_2, \Delta y_2)} . P' = T_{(\Delta x_2, \Delta y_2)} . T_{(\Delta x_1, \Delta y_1)} . P$$

$$P'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x_1 + \Delta x_2 \\ 0 & 1 & \Delta y_1 + \Delta y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P'' = T_{(\Delta x_1 + \Delta x_2, \Delta y_1 + \Delta y_2)} . P$$



Coordonnées homogènes 2D : Scaling

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & t_x \\ m_{21} & m_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta x & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S(\Delta x, \Delta y)} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow P' = S(\Delta x, \Delta y) \cdot P$$

□ Combinaison de changement d'échelles ?

$$P' = S(\Delta x_1, \Delta y_1) \cdot P$$

$$P'' = S(\Delta x_2, \Delta y_2) \cdot P' = S(\Delta x_2, \Delta y_2) \cdot S(\Delta x_1, \Delta y_1) \cdot P$$

$$P'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y_1 \cdot \Delta y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P'' = S(\Delta x_1 \cdot \Delta x_2, \Delta y_1 \cdot \Delta y_2) \cdot P$$

Coordonnées homogènes 2D : Rotation

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & t_x \\ m_{21} & m_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R(\varphi)} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow P' = R(\varphi) \cdot P$$

$$P' = R(\varphi_1) \cdot P$$

$$P'' = R(\varphi_2) \cdot P' = R(\varphi_2) \cdot R(\varphi_1) \cdot P$$

$$P'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P'' = R(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot P$$

Propriétés des matrices de transformation

□ Commutativité :

$$T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1$$

$$S_1 \cdot S_2 = S_2 \cdot S_1$$

$$R_1 \cdot R_2 = R_2 \cdot R_1$$

$$S_{(\Delta x = \Delta y)} \cdot R = R \cdot S_{(\Delta x = \Delta y)}$$

□ Transformations Inverses:

$$T_{(\Delta x, \Delta y)}^{-1} = T_{(-\Delta x, -\Delta y)}$$

$$S_{(\Delta x, \Delta y)}^{-1} = S_{(\frac{1}{\Delta x}, \frac{1}{\Delta y})}$$

$$R_{(\theta)}^{-1} = R_{(-\theta)} = R_{(\theta)}^t$$

Propriétés des matrices de transformation

□ Exercice: Chercher la matrice de transformation M qui permet d'effectuer une rotation d'un angle θ autour d'un point Q du plan non confondu avec l'origine du repère.

Propriétés des matrices de transformation

□ Exercice: Chercher la matrice de transformation M qui permet d'effectuer une rotation d'un angle θ autour d'un point Q du plan non confondu avec l'origine du repère.

□ Solution:

$$M = T_{(-\Delta x, -\Delta y)} \cdot R(\theta) \cdot T_{(\Delta x, \Delta y)}$$

1/ Translation vers l'origine

2/ Effectuer la rotation autour de l'origine

3/ Translation inverse

Les transformations 3D

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

- Les transformations seront représentées par des matrices 4x4

$$T_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z)} : \begin{pmatrix} \Delta x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et la
ROTATION ?

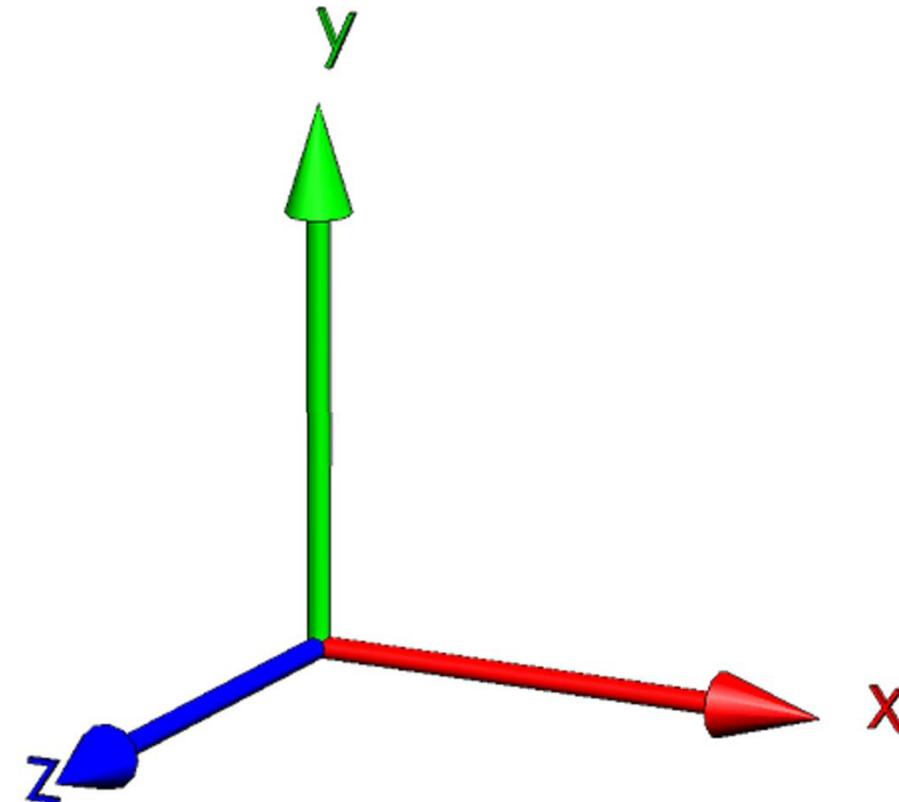
Les transformations 3D : Les Rotations

- La rotation s'effectue autour d'un axe
- Les rotations autour d'un axe du repère ont une expression simple



Les autres rotations s'expriment
comme combinaison de ces rotations
simples

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_y(\alpha)R_x(\beta)R_z(\gamma).$$



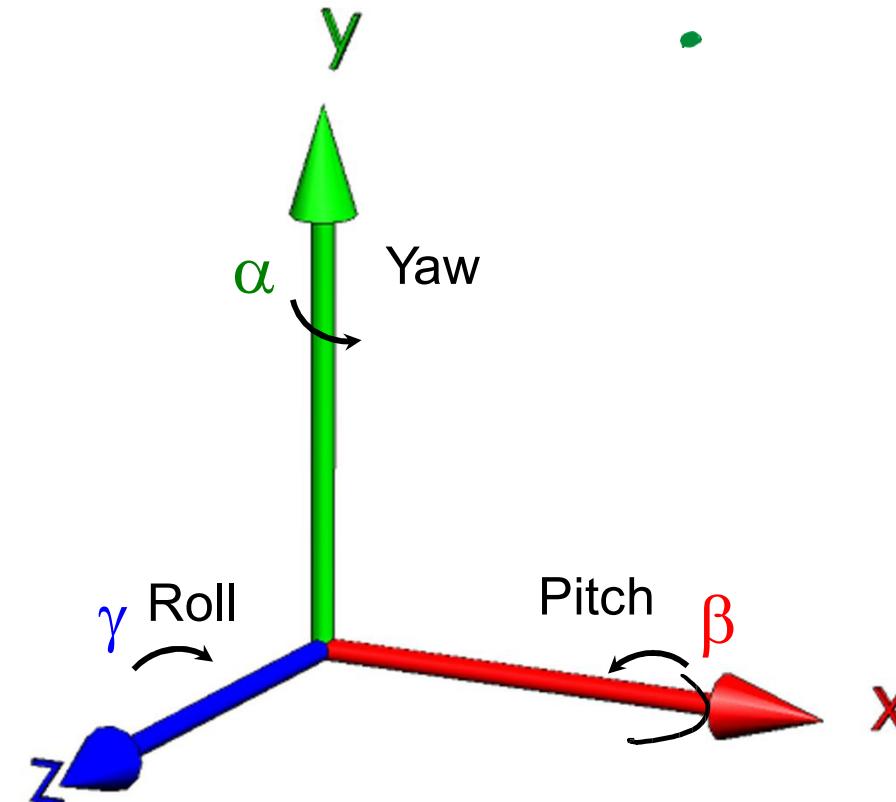
Les transformations 3D : Les Rotations

$$R_x(\beta) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(y) := \begin{pmatrix} \cos(y) & -\sin(y) & 0 & 0 \\ \sin(y) & \cos(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On est à l'extrémité de l'axe de rotation
- On regarde l'origine
- On tourne dans le sens antihoraire



Les transformations 3D : Les Rotations

Rotation autour de l'axe des X, d'angle $\frac{\pi}{2}$?

$$R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

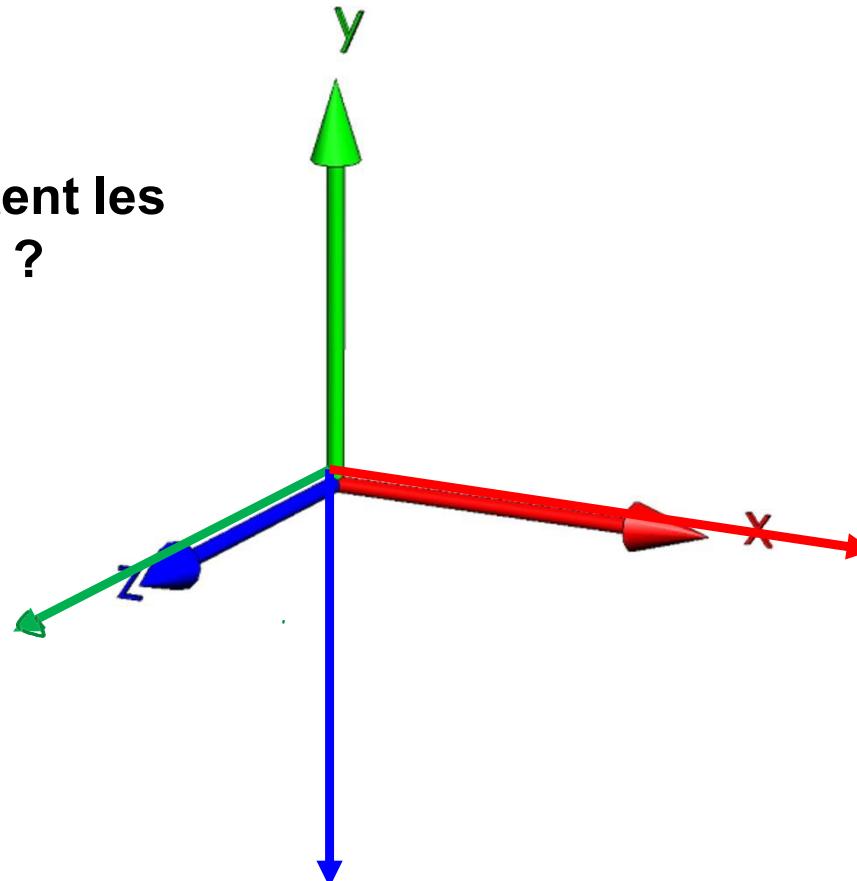
$$R_y\left(\frac{\pi}{2}\right) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z\left(\frac{\pi}{2}\right) := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

?

- On est à l'extrémité de l'axe de rotation
- On regarde l'origine
- On tourne dans le sens antihoraire

Que représentent les colonnes ?



Les transformations 3D : Les Rotations

La multiplication des matrices n'est pas commutative !

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_y(\alpha)R_x(\beta)R_z(\gamma).$$

3eme rotation effectuée

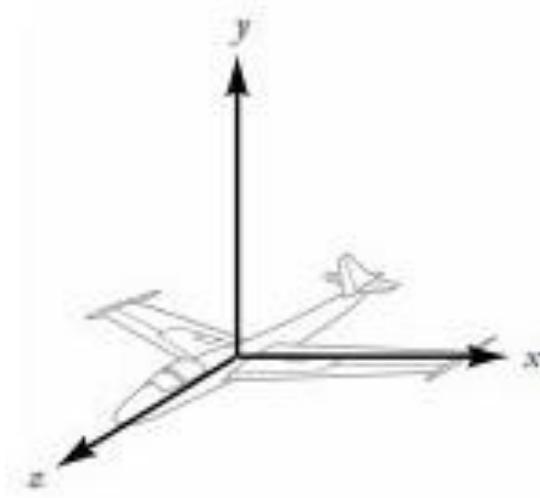
1ere rotation effectuée

2eme rotation effectuée

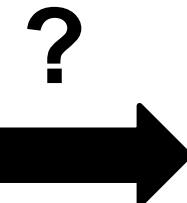
```
graph TD; A[R(\alpha, beta, gamma)] --> B[Ry(alpha)]; A --> C[Rx(beta)]; A --> D[Rz(gamma)]; B --> E[3eme rotation effectuée]; C --> F[1ere rotation effectuée]; D --> G[2eme rotation effectuée]
```

Application : Les transformations 3D : Orientation

Position initiale

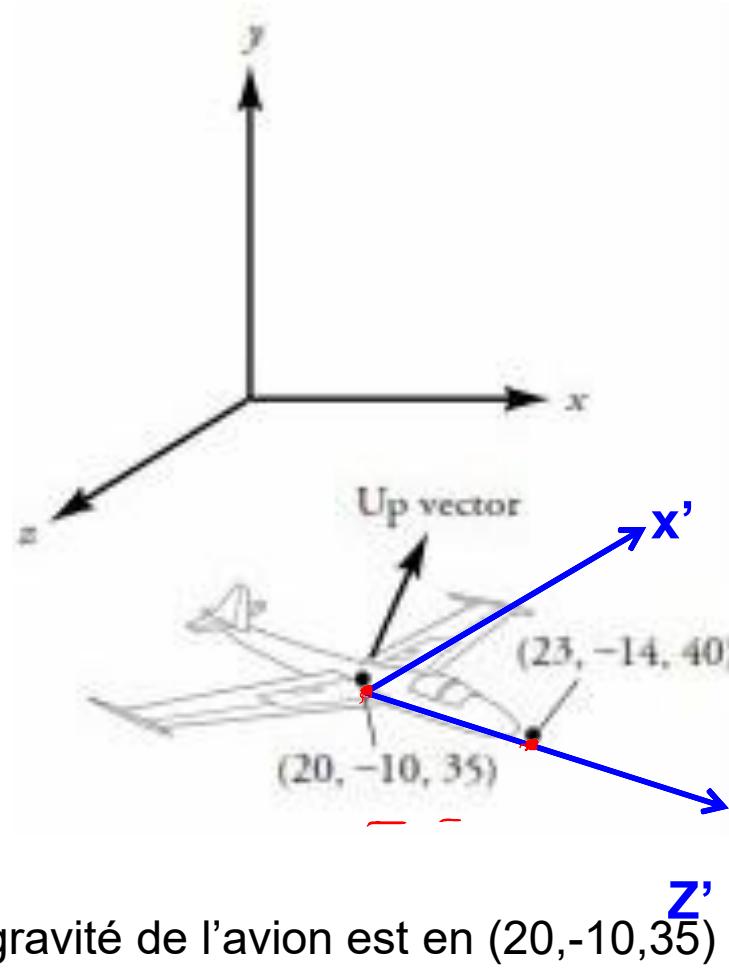


- Les ailes sont supposées perpendiculaires au corps de l'avion.
- L'origine du repaire coïncide avec le centre de gravité de l'avion.



Quelle est la matrice de transformation ?

Position finale



- Le centre de gravité de l'avion est en $(20, -10, 35)$
- L'avant de l'avion en $(23, -14, 40)$

Les transformations 3D : Orientation

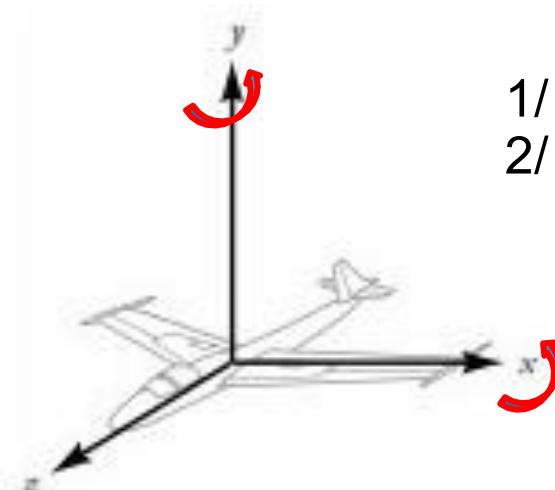
- Une rotation suivie d'une translation



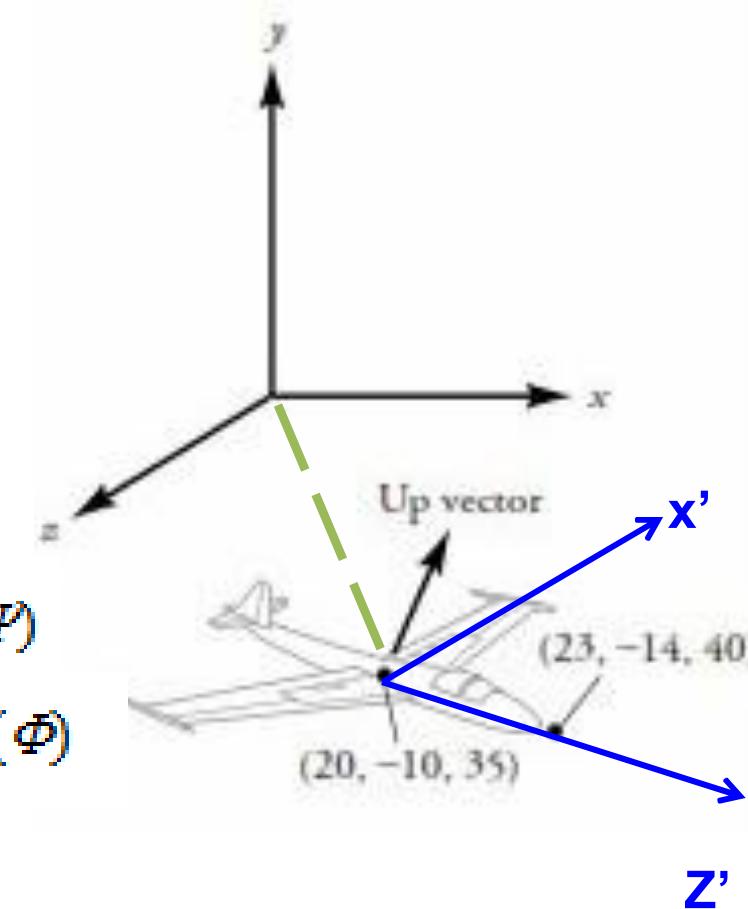
$$T_{(20, -10, 35)}$$

Avion centré à l'origine, il pointe vers :

$$(23 - 20, -14 + 10, 40 - 35) = (3, -4, 5)$$



- 1/ Rotation autour de $R_x(\Psi)$
- 2/ Rotation autour de $R_y(\Phi)$

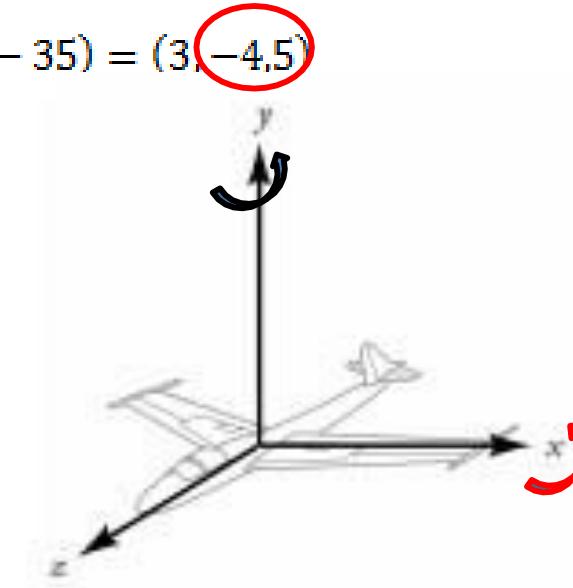
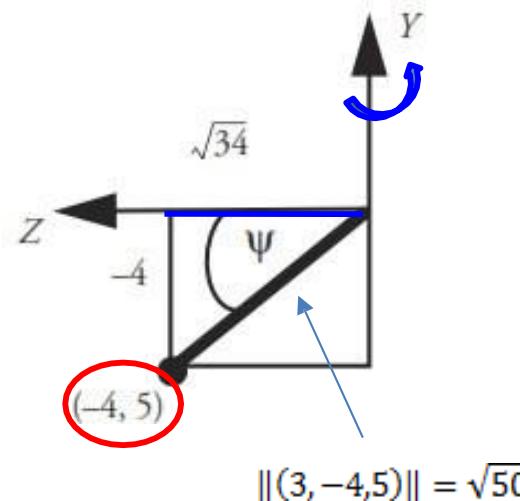


Les transformations 3D : Orientation

Avion centré à l'origine, il pointe vers : $(23 - 20, -14 + 10, 40 - 35) = (3, -4, 5)$

$$R_x(\theta): \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Psi) & -\sin(\Psi) & 0 \\ 0 & \sin(\Psi) & \cos(\Psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\Psi) = \frac{4}{\sqrt{50}} \\ \cos(\Psi) = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{50}} \end{array} \right.$$



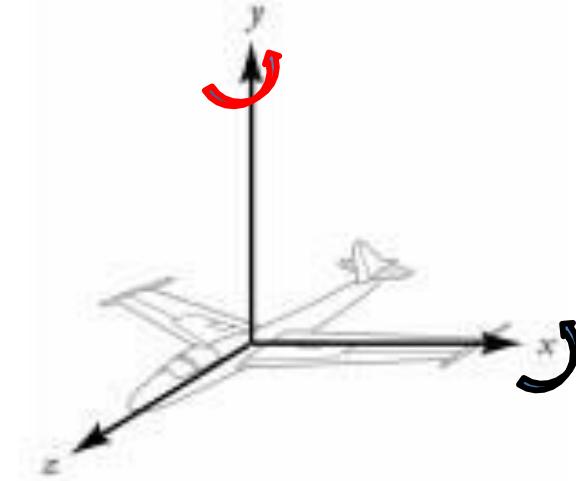
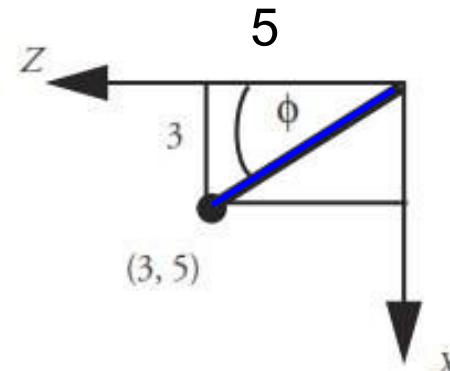
$$\|(3, -4, 5)\| = \sqrt{50}$$

Les transformations 3D : Orientation

Avion centré à l'origine, il pointe vers : $(23 - 20, -14 + 10, 40 - 35) = (3, -4, 5)$

$$R_y(\theta): \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\phi) = \frac{3}{\sqrt{34}} \\ \cos(\phi) = \frac{5}{\sqrt{34}} \end{array} \right.$$



Les transformations 3D : Orientation

$$R = R_y(\Phi) \cdot R_x(\Psi) = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{34}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{34}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{34}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{34}} & 0 \\ \frac{\sqrt{34}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{34}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{\sqrt{50}} & \frac{-4}{\sqrt{50}} & 0 \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{50}} & \frac{34}{\sqrt{50}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R =

0.8575	0.2910	0.4243	0
0	0.8246	-0.5657	0
-0.5145	0.4851	0.7071	0
0	0	0	1.0000

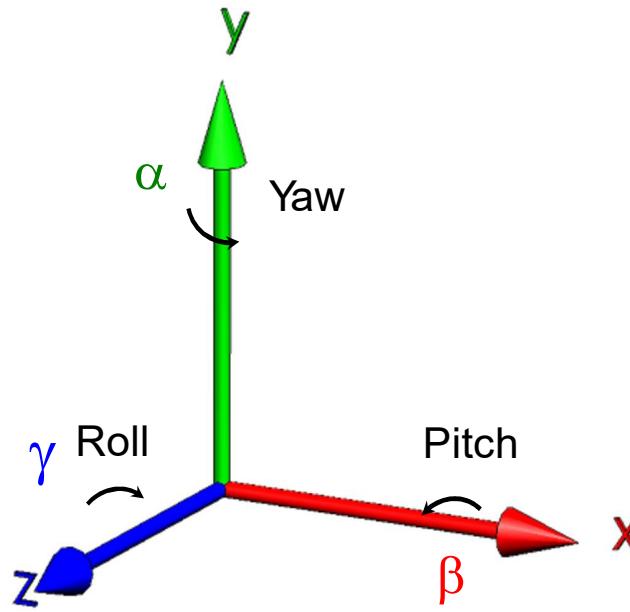
$$T_{(20, -10, 35)} \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot R =$$

Transformation =

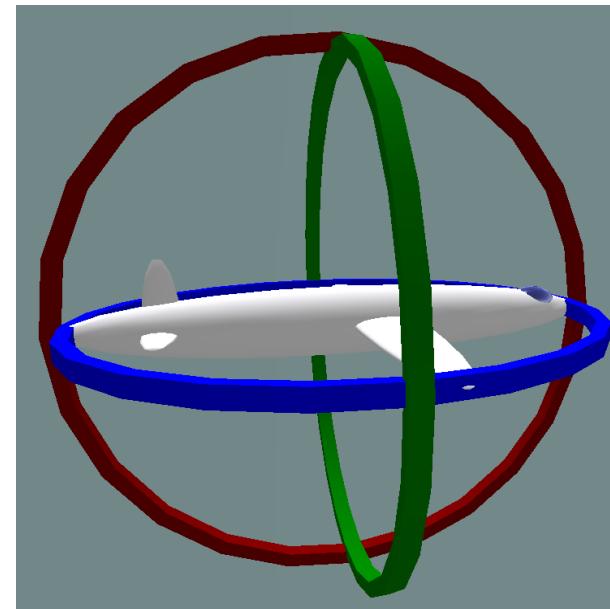
0.8575	0.2910	0.4243	20.0000
0	0.8246	-0.5657	-10.0000
-0.5145	0.4851	0.7071	35.0000
0	0	0	1.0000

Angles d'Euler et Blocage de cardan (**Gimbal lock**)

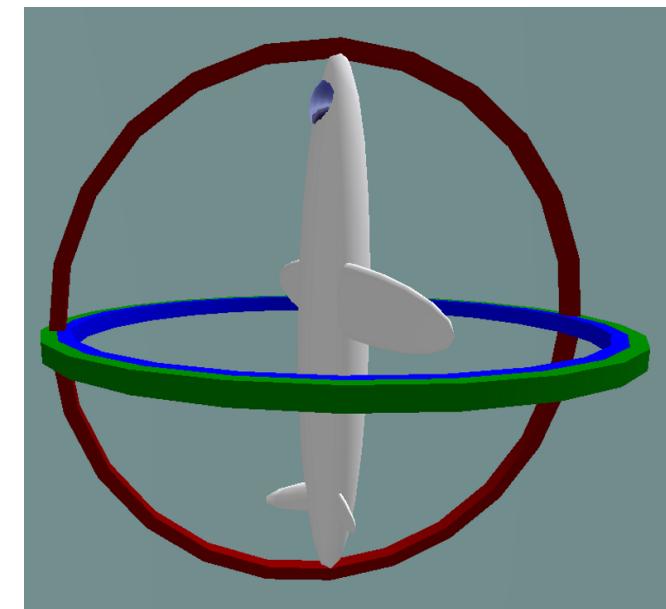
Le **blocage de cardan** est la perte d'un degré de liberté, connue aussi sous le nom anglais de **gimbal lock**, qui survient quand les axes de deux des trois cardans nécessaires pour appliquer ou compenser les rotations dans l'espace à trois dimensions sont portés par la même direction.



Angles d'Euler



Situation normale : les trois cardans sont indépendants



Blocage de cardan : deux des trois cardans sont coplanaires, un degré de liberté est perdu

Angles d'Euler et Gimbal lock

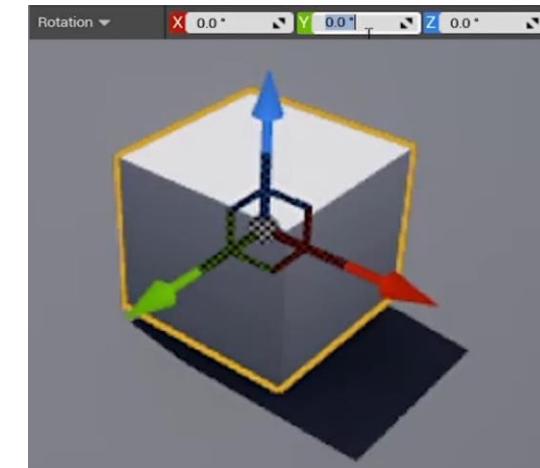
$$\frac{\pi}{2}$$

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_y(\alpha)R_x(\beta)R_z(\gamma).$$

$$R\left(\alpha, \frac{\pi}{2}, \gamma\right) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} \cos(\underline{\alpha} - \underline{\gamma}) & \sin(\underline{\alpha} - \underline{\gamma}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\sin(\underline{\alpha} - \underline{\gamma}) & \cos(\underline{\alpha} - \underline{\gamma}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec α qui varie et β qui varie **on a cependant 1 seul degré de liberté** car c'est la différence $(\alpha - \gamma)$ qui affecte le résultat !



Problèmes liés aux angles d'Euler

□ Verrouillage de cardan (Gimbal Lock)

Le verrouillage du cardan se produit en raison de la perte d'un DoF.

□ Difficile d'interpoler

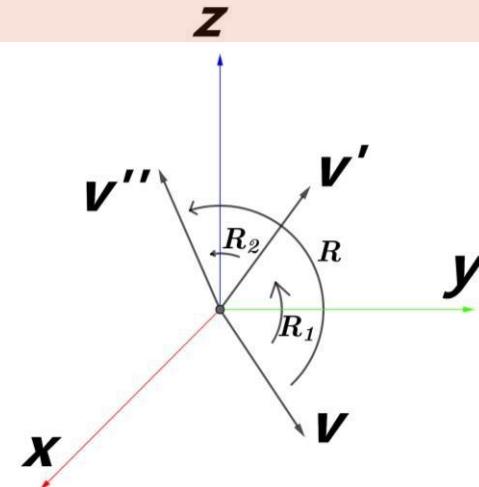
Le problème de la singularité rend l'interpolation difficile.

Difficile de combiner les rotations

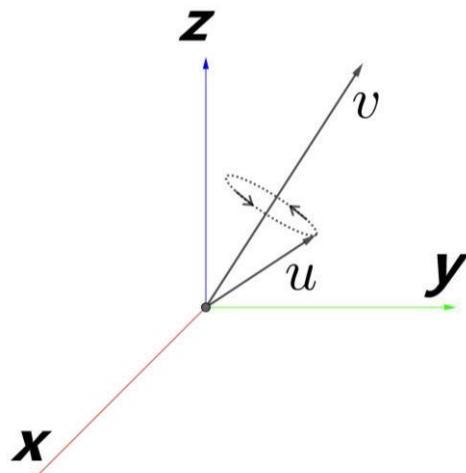
La combinaison des rotations nécessite une matrice de rotation

□ Difficile de tourner sur certains axes

Facile à tourner sur les axes x,y,z mais difficile sur d'autres axes.



Combinaison de rotation.



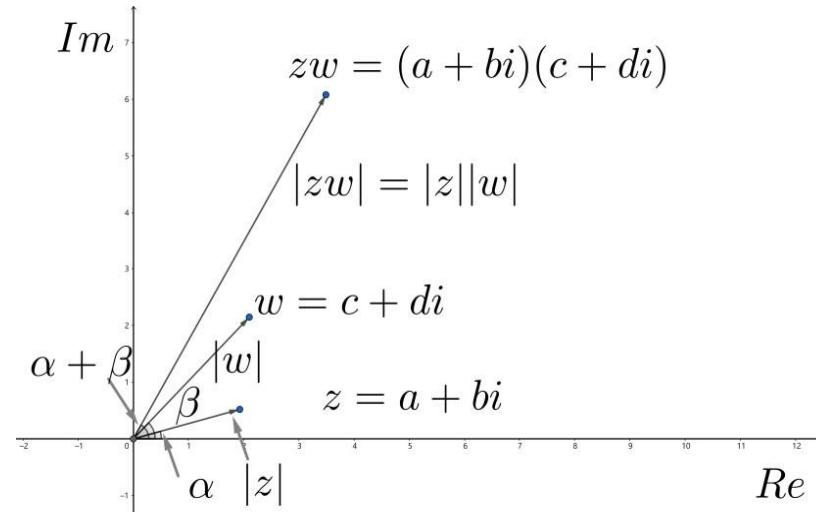
Rotation selon certains axes

Les Quaternions : Histoire

Nombre complexe et rotation 2D



Sir William Rowan Hamilton
Mathématicien irlandais



Et pour la rotation 3D?

Nombre complexe

□ Définition

$$c = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$i^2 = -1$$

□ Représentation sous forme de vecteur

$$c = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

□ Produit

$$\begin{aligned} c_1 &= a + bi \\ c_2 &= c + di \end{aligned} \quad c_1 c_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

Les Quaternions : Histoire

Hamilton a plus de succès avec les quadruplets. L'anecdote est entrée dans la légende : le **16 octobre 1843**, il marche le long du Canal Royal de Dublin avec sa femme, en route vers une soirée de la Royal Irish Academy. La solution lui apparaît soudain, sous la forme $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.



Sir William Rowan Hamilton
Mathématicien irlandais



Plaque de quaternion sur le pont Brougham (Broom), Dublin

Quaternion

- Définition

$$q = a + bi + cj + dk \quad (a,b,c,d \in R)$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

- Représentation sous la forme d'une paire de parties (nombre réel et vecteur)

$$q = (a, v) \quad (v = \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix}, a, b, c, d \in R)$$

- Produit

$$q_1 = a + bi + cj + dk$$
$$q_2 = e + fi + gj + hk$$
$$q_1 q_2 = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

- Norme

$$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

- Conjugué

$$q^* = a - bi - cj - dk$$

- Inverse

$$q^{-1}q = qq^{-1} = 1$$

- C'est un vecteur 4D noté: $q = (a, b, c, d)$ a, b, c et $d \in \mathbb{R}$
- Un quaternion est un point dans \mathbb{R}^4
- Un quaternion est **unitaire** si: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$
- Les rotations 3D vont être représentées dans l'espace des **quaternions unitaires**.

Les Quaternions

Soit une **rotation 3D** d'angle θ autour d'un axe, **passant par l'origine** et de vecteur directeur unitaire \vec{v} :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

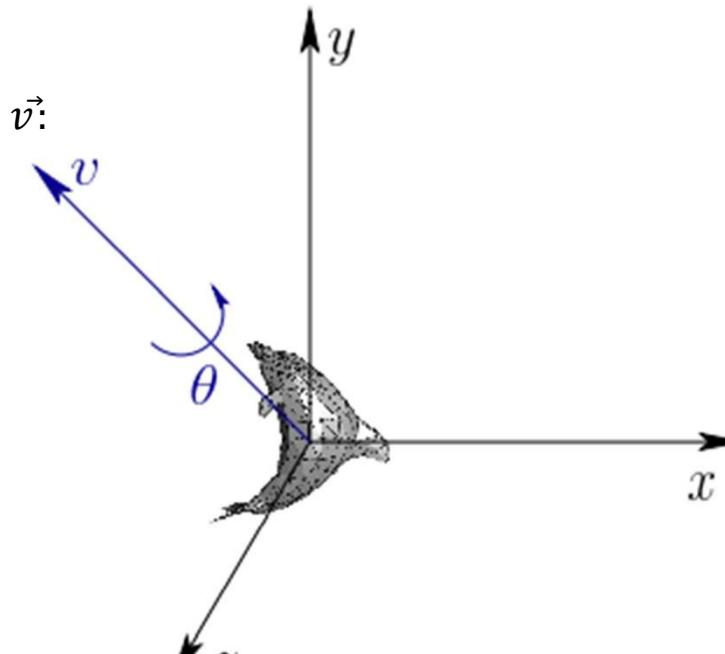
quaternion

$$q = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), v_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), v_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), v_3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

Avec les règles de passages:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = 2 \cos^{-1}(a) \\ \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

($a=1 \Leftrightarrow$ Rotation identité)



$$q = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \vec{v} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

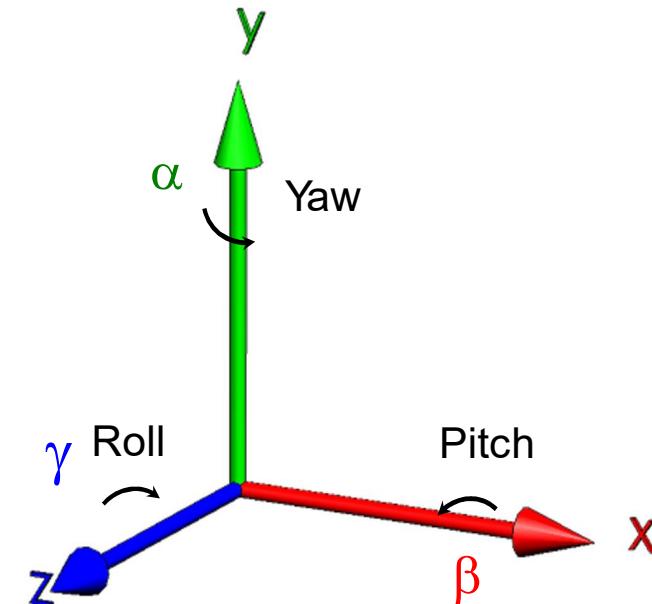
Réel

Vect.

Les Quaternions

$$q = (a, b, c, d)$$

Quaternion	Axis-Angle	Description
(1, 0, 0, 0)	(undefined, 0)	Identity rotation
(0, 1, 0, 0)	((1, 0, 0), π)	Pitch by π
(0, 0, 1, 0)	((0, 1, 0), π)	Yaw by π
(0, 0, 0, 1)	((0, 0, 1), π)	Roll by π
$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$	((1, 0, 0), $\pi/2$)	Pitch by $\pi/2$
$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$	((0, 1, 0), $\pi/2$)	Yaw by $\pi/2$
$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$	((0, 0, 1), $\pi/2$)	Roll by $\pi/2$



Les Quaternions

$$q1 = (a, b, c, d)$$

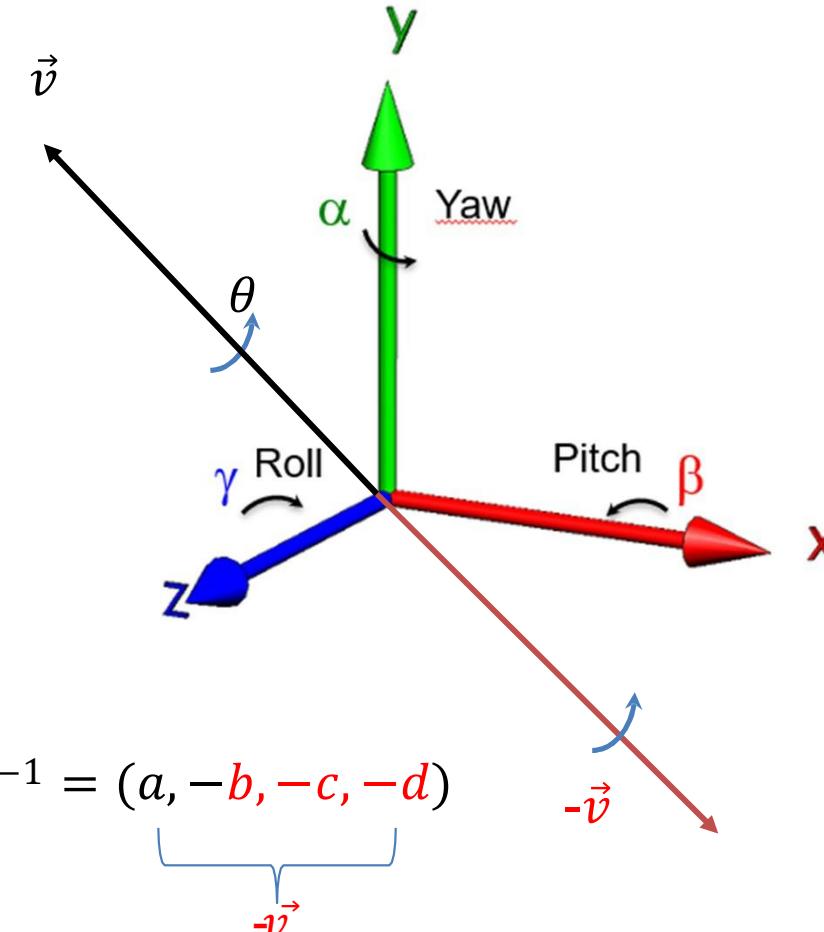
$$\theta = 2 \cos^{-1}(a)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$q1 = (a, b, c, d)$$

inverse

$$q^{-1} = (a, -b, -c, -d)$$



$$q^{-1} = (a, -b, -c, -d)$$

$$\underbrace{-\vec{v}'}_{-\vec{v}}$$

L'inversion du sens de l'axe provoque l'inversion de la rotation !

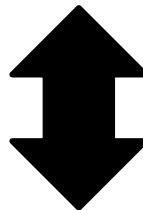
Comment utiliser le quaternion pour effectuer la rotation ?

- Soit un point de l'espace 3D, $P(x,y,z)$, à modifier.
- On adopte une nouvelle notation $P(0,x,y,z)$ de ce point pour avoir la même dimension que le quaternion.
- On transforme le point P en $P'(0,x',y',z')$ grâce à:

$$P' = q \cdot P \cdot q^{-1}$$

Comment trouver la matrice de rotation équivalente ?

$$q = (a, b, c, d)$$



$$R := \begin{pmatrix} 2(a^2 + b^2) - 1 & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & 2(a^2 + c^2) - 1 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & 2(a^2 + d^2) - 1 \end{pmatrix}$$

□ Utiliser des quaternions est **plus avantageux** qu'utiliser des matrices de rotation car :

- Nécessite **moins d'espace mémoire**:

- 4 input au lieu de 9 (9 entrées de matrice)

- Pour les matrices, les axes de rotation changent à chaque fois

- Pour les matrices, opérations non commutatives

- Possibilité d'effectuer des **interpolations** pour avoir une **animation fluide (interpolation)**.

Les Quaternions : Interpolation

L'interpolation des quaternions est utilisée principalement pour créer des transitions douces entre deux orientations dans l'espace 3D, ce qui est essentiel dans des applications comme les jeux vidéo et la réalité virtuelle. Les quaternions permettent d'éviter les problèmes liés aux angles d'Euler, comme le blocage de gimbal (gimbal lock), et fournissent une interpolation fluide sans discontinuités.

Deux quaternions q_1 et q_2 sont interpolés à l'aide de la formule:

$$q(t) = \frac{\sin(\theta \cdot (1 - t))}{\sin(\theta)} q_1 + \frac{\sin(\theta \cdot t)}{\sin(\theta)} q_2$$

$$t \in [0,1]$$

Quaternion.Lerp

$$\theta = \cos(q_1, q_2)^{-1}$$

Quaternion.Slerp

Slerp (Spherical Linear intERPolation)

Remarque

-  En pratique, les fonctions de rotation intégrées de Unity ne présentent pas le problème du Gimbal Lock **même lors du passage par les angles d'Euler.**
-  Unity convertira la valeur d'Euler et travaillera avec les Quaternions en arrière-plan.
- Cela évite les problèmes typiques associés aux angles d'Euler, tout en gardant leur facilité d'utilisation.



Exercice : Quaternions

- Déplacement d'un cube (roulement) à l'aide
 - des quaternions:
 - Les quatre flèches pour les 4 directions
 - Spacebar pour tourner sur place
 - Travail en groupe
 - Package (Unity C# sans fonctions prédefinies)
 - Github (blackboard)
 - Date : Avant le 2/10/2025

Matrix4x4

struct in [UnityEngine](#) / Implemented in: [UnityEngine.CoreModule](#)

[Leave feedback](#)

Description

A standard 4x4 transformation matrix.

A transformation matrix can perform arbitrary linear 3D transformations (i.e. translation, rotation, scale, shear etc.) and perspective transformations using homogenous coordinates.

Static Variables

[identity](#) Returns the identity matrix (Read Only).

[zero](#) Returns a matrix with all elements set to zero (Read Only).

Variables

[determinant](#) The determinant of the matrix.

[inverse](#) The inverse of this matrix (Read Only).

[isIdentity](#) Is this the identity matrix?

[this\[int,int\]](#) Access element at [row, column].

[transpose](#) Returns the transpose of this matrix (Read Only).

Public Functions

GetColumn	Get a column of the matrix.
GetRow	Returns a row of the matrix.
MultiplyPoint	Transforms a position by this matrix (generic).
MultiplyPoint3x4	Transforms a position by this matrix (fast).
MultiplyVector	Transforms a direction by this matrix.
SetColumn	Sets a column of the matrix.
SetRow	Sets a row of the matrix.
SetTRS	Sets this matrix to a translation, rotation and scaling matrix.
ToString	Returns a nicely formatted string for this matrix.

Static Functions

<u>Ortho</u>	Creates an orthogonal projection matrix.
<u>Perspective</u>	Creates a perspective projection matrix.
<u>Scale</u>	Creates a scaling matrix.
<u>TRS</u>	Creates a translation, rotation and scaling matrix.

Operators

<u>operator *</u>	Multiplies two matrices.
-----------------------------------	--------------------------

Rappels et complément mathématique

Calcul vectoriel

Produit Vectoriel (3D)

Rappels de géométrie (1)

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$$

$$\overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{W}}{\|\overrightarrow{W}\|}$$
$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{W}\| = \|\overrightarrow{U}\| \|\overrightarrow{V}\| \sin(\theta)$$

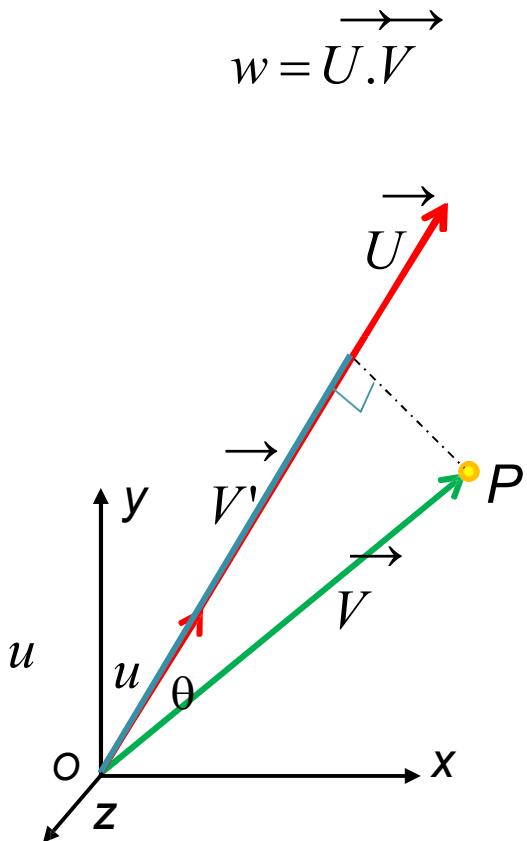
$$W = \begin{pmatrix} w_x = u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y \\ w_y = u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z \\ \boxed{w_z = u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x} \end{pmatrix}$$

$$M_u V = \begin{pmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_z v_y + u_y v_z \\ u_z v_x - u_x v_z \\ -u_y v_x + u_x v_y \end{pmatrix}$$

Scilab : $W = \text{cross}(U, V)$

Produit scalaire (3D)

Rappels de géométrie (2)



Scilab : $w=U'*V$

$$w = \|\overrightarrow{U}\| \|\overrightarrow{V}\| \cos(\theta)$$

$$\|\overrightarrow{V}\|^2 = \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}$$

$$w = {}^t U * V$$

Projection d'un vecteur V sur l'axe u

$$\overrightarrow{V'} = \|\overrightarrow{V}\| \cos(\theta) \overrightarrow{u}$$

Écriture matricielle de la projection :

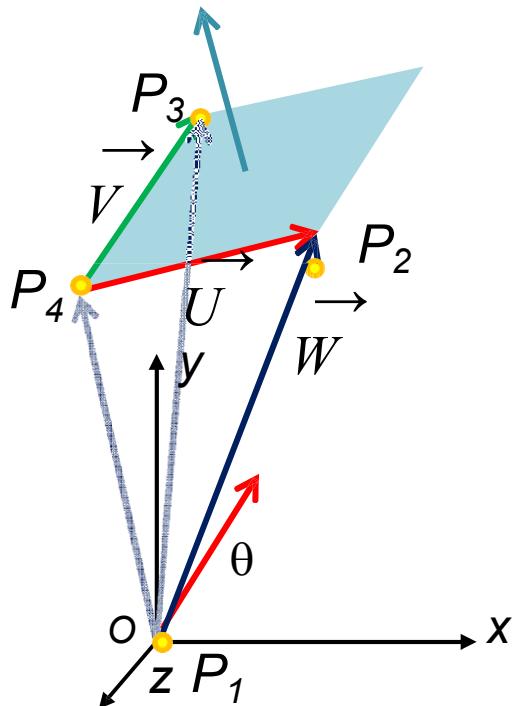
$$w = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$

$$P_u * V = \begin{pmatrix} u_x^2 & u_x \cdot u_y & u_x \cdot u_z \\ u_y \cdot u_x & u_y^2 & u_y \cdot u_z \\ u_z \cdot u_x & u_z \cdot u_y & u_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \cdot u_x \\ w \cdot u_y \\ w \cdot u_z \end{pmatrix}$$

P_u est matrice de projection sur l'axe u

Produit mixte (3D)

Rappels de géométrie (3)



$$\vec{m} = \vec{W} \cdot (\vec{U} \wedge \vec{V})$$

Écriture matricielle :

$$\vec{W} \cdot (\vec{U} \wedge \vec{V}) = \text{Det} \begin{pmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{pmatrix}$$

Volume du tétraèdre :

$$vol(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{1}{6} (\vec{W} \cdot (\vec{U} \wedge \vec{V}))$$

Inversion d'une matrice

Les mineurs

- Les mineurs m_{ij} des éléments a_{ij} d'une matrice A carrée, sont les déterminants de la partie restante, lorsqu'on ignore la ligne i et la colonne j.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$



?

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3*3}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{?}} m_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- Les mineurs principaux d'une matrice A **carrée** sont donnés par.

$$m_1 = a_{11}$$

$$m_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$m_3 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots \\ \dots & a_{33} \end{pmatrix}$$

...

$$m_n = \det(\mathbf{A})$$

- Pour une matrice **carrée A**:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$$

Les mineurs
des éléments de A



La **matrice adjointe** de A

$$\tilde{\mathbf{A}} = \text{adj}(\mathbf{A}) = [c_{ij}]^T = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}^T, \text{ avec } \mathbf{C} = [c_{ij}]$$

Les transformations 3D

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3*3}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad m_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad c_{ij} = (-1)^{2+3} m_{23} = - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Les transformations 3D

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})}$$

- Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n*n}$ et $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n*n}$

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

• TRIGONOMETRIE

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

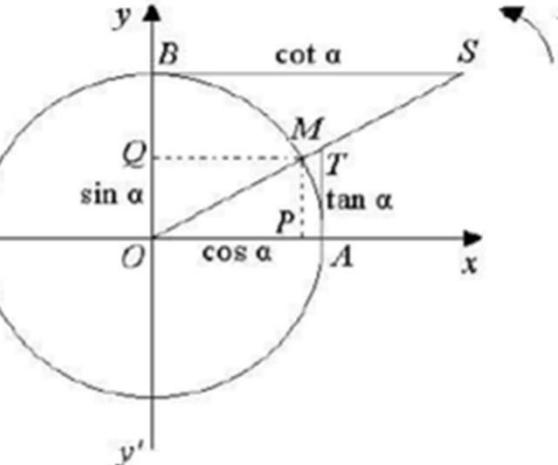
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

a et $-a$

- $\cos(-a) = \cos a$
- $\sin(-a) = -\sin a$
- $\tan(-a) = -\tan a$
- $\cot(-a) = -\cot a$

a et $\pi - a$

- $\cos(\pi - a) = -\cos a$
- $\sin(\pi - a) = \sin a$
- $\tan(\pi - a) = -\tan a$
- $\cot(\pi - a) = -\cot a$



Relations fondamentales

- $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$
- $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$ ou $\cos^2 a = \frac{1}{1 + \tan^2 a}$
- $1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$ ou $\sin^2 a = \frac{1}{1 + \cot^2 a}$

a et $\pi + a$

- $\cos(\pi + a) = -\cos a$
- $\sin(\pi + a) = -\sin a$
- $\tan(\pi + a) = \tan a$
- $\cot(\pi + a) = \cot a$