Постановка задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y), \quad u(x,y)\big|_{\partial D} = g(x,y).$$

Область задания функции: $D = \{(x,y) \in D:\ 0 \le x, y \le 1\}$

Правая часть: $f(x,y) = 4 + 2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y, \quad (x,y) \in D;$

Граничные условия:

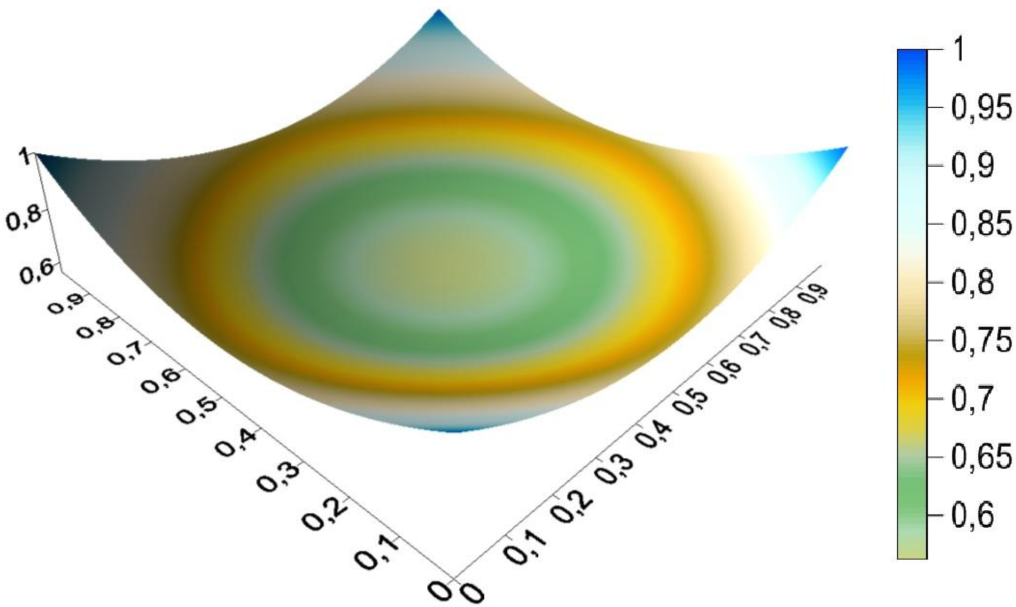
$$U(x,y)\big|_{\partial D} = y^2 - y + 1\,, x = 0, x = 1$$

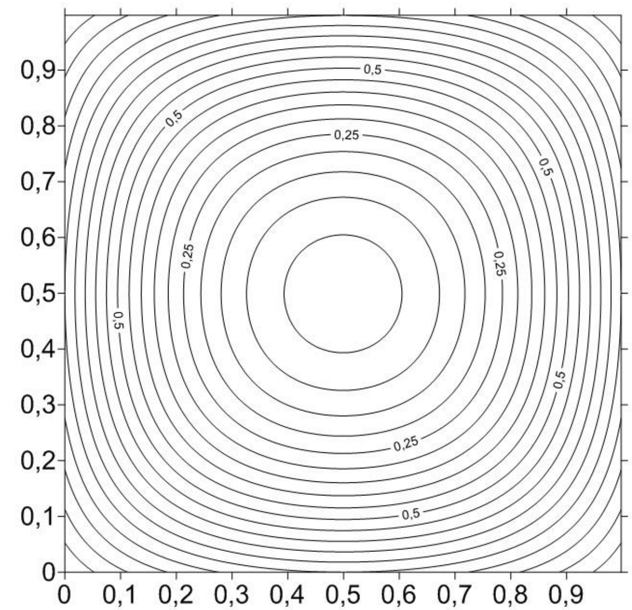
$$U(x,y)\big|_{\partial D} = x^2 - x + 1\,, y = 0, y = 1$$

$$u(x,y) = (x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)$$

Точное решение

$$u(x,y) = (x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)$$

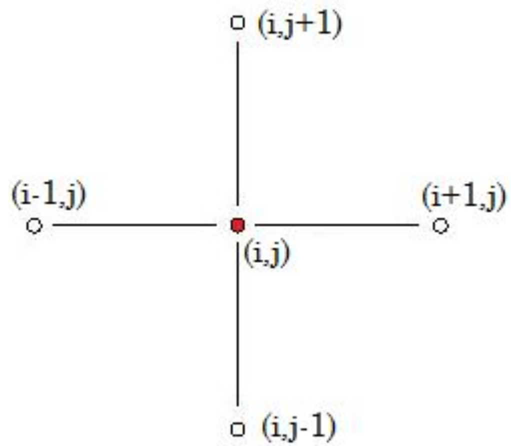


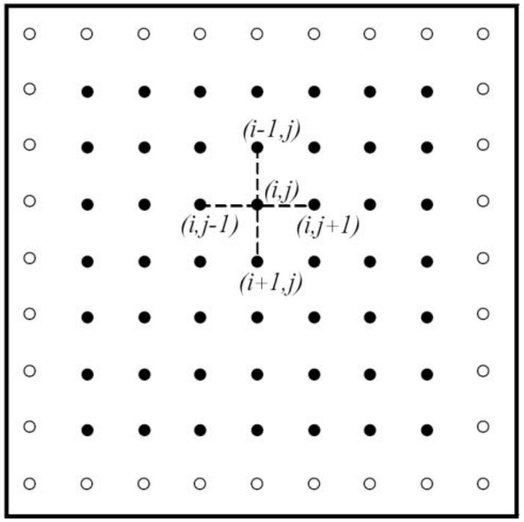


Итерационные методы решения

Равномерная сетка в области D.

Пятиточечный шаблон:





$h = \frac{1}{N}$ шаг сетки

$N = 512$ или $= 1024$

k номер итерации

Метод Якоби

$$u_{ij}^{k+1} = 0.25(u_{i-1,j}^{k} + u_{i+1,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k} + u_{i,j+1}^{k} - h^2 f_{ij}); \quad i, j = 1, \ldots, N-1.$$

Метод Гаусса-Зейделя

$$u_{ij}^{k+1} = 0.25(u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k} - h^2 f_{ij}); \quad i, j = 1, \ldots, N-1.$$

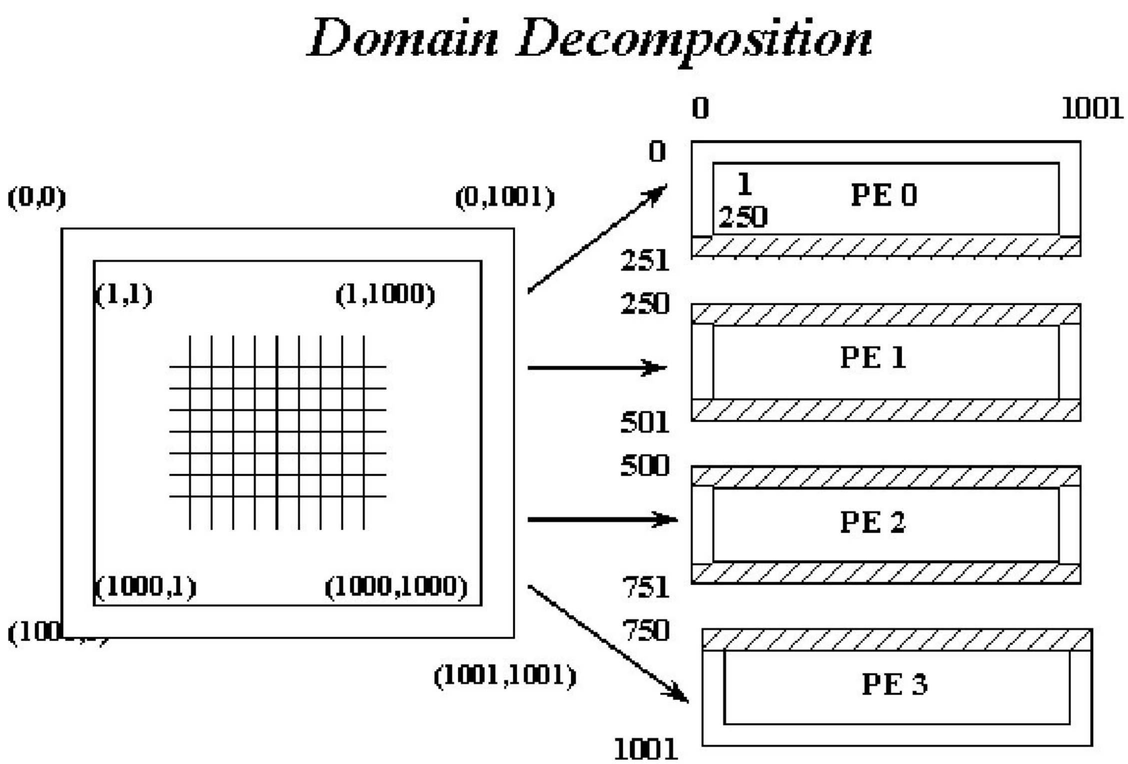
Метод верхней релаксации

$$u_{ij}^{k+1} = \frac{\omega}{4}(u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k} - h^2 f_{ij}) + (1-\omega)u_{i,j}^{k}; \quad i, j = 1, \ldots, N-1.$$

Условие останова $\max_{ij=1,\ldots,N}\left\{\left|u_{ij}^{T} - u_{ij}^{k}\right|\right\} < \varepsilon, \quad \varepsilon = 0.001, \quad N = 512.$

Параллельная реализация метода Якоби

Декомпозиция расчетной области по процессорам с перекрытием подобластей. Заштрихованные области на каждом процессоре обозначают те точки, в которых расчет не производится, но они необходимы для выполнения расчета в пограничных точках. В них должна быть предварительно помещена информация с пограничного слоя соседнего процессора.



Параллельная реализация методов Г-З и верхней релаксации

Красно-черное упорядочивание узлов сетки.
Каждая итерация разбивается на две –
вычисление значений в красных узлах и в черных узлах.