به نام خدا

دانشکده مهندسی کامپیوتر

درس هوش مصنوعی- ترم بهار 1401-1400

استاد درس: دکتر محمدحسین رهبان

گزارش بخش اول سوال دوم عملی تمرین چهارم

نام و نام خانوادگی: امیرحسین حاجی محمد رضایی

شماره دانشجویی: 99109252

در این گزارش در مورد نحوه نمونه گیری از توزیع ها در این سوال به توضیح خواهم پرداخت.

روش نمونه گیری

در ابتدا باتوجه به فرم خطی بودن همه توزیع ها، برای نمونه گیری از ضرایب در پشت هر توزیع استفاده می‌کنم و به این صورت عمل می‌کنم که یک عدد رندوم بین 0 تا 1 تولید کرده و اگر این عدد از ضریب توزیع اول کوچکتر بود، از آن توزیع نمونه گرفته و در غیر این صورت اگر از مجموع ضریب در پشت دو توزیع اول کوچکتر بود، از توزیع دوم نمونه میگیرم و درغیر این صورت از توزیع سوم نمونه خواهیم گرفت. برای این روش مثال زیر را درنظر بگیرید:

$$\frac{3}{10} gaussian(4,2) + \frac{3}{10}\ gaussian(3,2) + \frac{4}{10}\ exponential(0.01)$$

$$\text{عدد رندوم}: r \rightarrow \begin{cases} if\ 0 \leq r < 0.3: gaussian(4,2) \\ if\ 0.3 \leq r < 0.6: gaussian(3,2) \\ if\ 0.6 \leq r < 1: exponential(0.01) \end{cases}$$

حال در بخش های بعدی به نحوه نمونه گرفتن از هریک از این توزیع ها خواهیم پرداخت.

توزیع گاوسی:

برای نمونه گرفتن از این توزیع درابتدا از قانون حد مرکزی استفاده می‌کنم که به صورت زیر است:

اگر متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots\ , X_n$ همه از یک توزیع یکسان و از یکدیگر مستقل باشند که میانگین آنها μ و انحراف معیار آنها σ است ، آنگاه $S_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ دارای توزیع نرمال $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ می‌باشد.

با استفاده از این قضیه میتوانی توزیع استاندارد نرمال $N(0,1)$ را از S_n بدست آوریم:

$$\frac{S_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \approx N(0,1)$$

درنتیجه به این صورت میتوانیم یک متغیر تصادفی از توزیع نرمال استاندارد بدست آوریم. حال اگر فرض کنیم که y یک نمونه از این توزیع باشد، برای بدست آوردن نمونه از توزیع نرمال $N(\mu,\sigma)$، میتوانیم از y استفاده کنیم:

$$y \times \sigma + \mu \approx N(\mu,\sigma)$$

در نتیجه از این روش برای نمونه گرفتن از توزیع نرمال استفاده کرده‌ایم. برای متغیر های $X_1, X_2, \ldots, X_n$ توزیع برنولی $bernouli(p = 0.5)$ را در نظر گرفته‌ایم که به سادگی با استفاده تابع زیر آنرا تولید می‌کنیم:

```
def get_bernouli_sample():
    return random.randint(0, 1)
```

و عبارت ساده شده قضیه حد مرکز ی برای این توزیع به این صورت خواهد بود:

$$bernouli(p) \to \mu = p, \sigma^2 = p(1-p)$$

$$N(0,1) \approx \frac{S_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \xrightarrow{p=0.5} 2\sqrt{n}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - 0.5\right)$$

در این صورت طبق رابطه بالا از این توزیع نمونه خواهیم گرفت:

```
def gausian_sample(e, var, n=2500):
    normal = 2 * math.sqrt(n) * ((sum(get_bernouli_sample() for _ in range(n)) / n)
- 0.5)
    return math.sqrt(var) * normal + e
```

که کد بالا برای نمونه گرفتن از توزیع باتوجه به پارامترهای داده شده است.

نمونه گرفتن از توزیع هندسی:

برای نمونه گرفتن از این توزیع، از تعریف آن استفاده می‌کنیم که برابر است با تعداد تلاش هایی برای رسیدن به موفقیت برای یک اتفاق که توزیع برنولی دارد، به عنوان مثال یک سکه را درنظر بگیرید که با احتمال p میتواند رو بیاید، در این صورت دارای توریع برنولی است. حال متغیر تصادفی‌ای که تعداد دفعات انداختن سکه برای رو آمدن را نشان می‌دهد دارای توزیع هندسی است که احتمال اینکه بعد از k بار انداختن سکه رو بیاید برابر است با $p[X = k] = (1-p)^{k-1}p$

ما از همین تعریف و روش برای نمونه گرفتن از این توزیع استفاده می‌کنیم:

```python
def bernouli(p):
    rand = random.uniform(0, 1)
    if 0 <= rand < p:
        return 1
    else:
        return 0
```

تابع بالا برای گرفتن نمونه از توزیع برنولی است که یک عدد رندوم بین 0 تا 1 تولید می‌کند و اگر این عدد کوچکتر از p باشد در این صورت عدد یک را برمی‌گرداند و درغیر این صورت عدد صفر را برمی‌گرداند.

```python
def geometric(p):
    i = 0
    result = 0
    while not result:
        result = bernouli(p)
        i += 1


    return i
```

تابع بالا برای نمونه گرفتن از توزیع هندسی است که تا زمانی که نتیجه متغیر تصادفی برنولی برابر صفر است، از این توزیع نمونه می‌گیرد تا نتیجه برابر یک شود و تعداد دفعات نمونه گیری را در متغیر i ذخیره می‌کند و در نهایت این عدد را به عنوان نمونه برمی‌گرداند.

نمونه گرفتن از توزیع نمایی:

باتوجه به اینکه این توزیع، یک توزیع پیوسته است، برای نمونه گرفتن از این توزیع میتوانیم از روش تبدیل وارون استفاده کنیم. این روش به این صورت است که اگر فرض کنیم که متیغر تصادفی X دارای توزیع $F_X(x)$ باشد، متعیر تصادفی U با رابطه $u = F_X(x)$ یک توزیع یکنواخت بین صفر و یک است. در این صورت میتوانیم با تولید عدد رندوم بین صفر و یک و استفاده از تابع معکوس تابع توزیع تجمعی، متغیر $x = F_X^{-1}(u)$ از این توزیع نمونه خواهیم گرفت. برای توزیع نمایی، تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر است:

$$F_X(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda x} \rightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \times \ln(1-u)$$

```python
def exponential(l):
    rand = random.uniform(0, 1)
    return (-1 / l) * math.log(1 - rand)
```

که در واقع کد بالا برای گرفتن نمونه از این توزیع استفاده می‌شود.

برای بدست آورن *pdf* توزیع ها نیز توابع آنها نوشته شده است.

$$guassian:\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$geometric: P[X = K] = (1-p)^{k-1}\, p$$

$$exponential: f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

```
def gaussian_pdf(x, mean, var):
    a = 1 / math.sqrt(2 * math.pi * var)
    b = math.e ** (-((x - mean)**2)/(2*var))
    return a * b



def geometric_pdf(x, p):
    return p * (1-p)**(x - 1)



def exponential_pdf(x, l):
    return math.e**(-l*x)
```