تمرینات سری ۱۲

تمرین شمارهٔ ۱:(۲۰ نمره)

فرض کنید $f(x), g(x) \in C([0,1])$ ، نشان دهید:

الف.

$$[\int_0^1 f(x)g(x)dx]^2 \leq [\int_0^1 f^2(x)dx][\int_0^1 g^2(x)dx]$$

ب.

$$[\int_0^1 (f(x)+g(x))^2dx]^{\frac{1}{2}} \leq [\int_0^1 f^2(x)dx]^{\frac{1}{2}} + [\int_0^1 g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}$$

تمرین شمارهٔ ۲:(۳۰ نمره)

فرض کنید V یک فضای برداری متناهی بعد با ضرب داخلی است، و β پایهٔ آن است.

الف. ثابت کنید اگر برای هر $z \in \beta$ داشته باشیم $< x, z >= 0$ ، آنگاه $x = 0$.

ب. ثابت کنید اگر برای هر $z \in \beta$ داشته باشیم $< x, z >=< y, z >$ ، آنگاه $x = y$.

پ. فرض کنید T یک تبدیل خطی روی V باشد، ثابت کنید اگر برای هر $x \in V$ داشته باشیم $||T(x)|| = ||x||$ ، آنگاه T یک به یک است.

تمرین شمارهٔ ۳:(۴۰ نمره)

فرض کنید $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. $A^\star \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ را به این صورت تعریف می کنیم:
$(A^\star)_{ij} = \bar{A}_{ji}$.

الف. ثابت کنید برای هر $x, y \in \mathbb{C}^n$ داریم: $< x, Ay >=< A^\star x, y >$.

ب. اگر $B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in \mathbb{C}^n$ داشته باشیم $< x, Ay >=< Bx, y >$ ، نشان دهید $B = A^\star$.

ج. فرض کنید β پایهٔ متعامدی برای $\mathbb{C}^n$ باشد، و Q ماتریسی n در n که ستون هایش، اعضای β هستند. ثابت کنید $Q^\star = Q^{-1}$.

د. تبدیلات خطی T و U روی $\mathbb{C}^n$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:
$T(x) = Ax$ و $U(x) = A^\star x$.
نشان دهید برای هر β که پایهٔ متعامد $\mathbb{C}^n$ باشد، داریم: $[U]_\beta = [T]_\beta^\star$.

تمرین شمارهٔ ۴:(۱۰ نمره)

ثابت کنید که در هر متوازی الاضلاع مجموع مربعات دو قطر، برابر مجموع مربعات اضلاع متوازی الاضلاع می باشد.