

## تمرینات سری ۸

تمرین شماره ۱: (۳۰ نمره)

هر یک از ماتریس های زیر را به فرم سطری تحویل یافته تبدیل کنید و سپس رتبه هر یک را به دست آورید.

الف.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -8 & 4 & 3 \\ -3 & -9 & 9 & -7 & -2 \\ 3 & 10 & -7 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

ب.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ -3 & 9 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & 4 & -3 \\ -4 & 12 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

ج.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرین شماره ۲: (۲۰ نمره)

برای هر کدام از تبدیلات خطی داده شده، وارونپذیری را بررسی کنید. اگر وارون پذیر بود، وارون آن را ارائه کنید.

الف.  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  که  $T(f(x)) = f''(x) + 2f'(x) - f(x)$

ب.  $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$  که  $T(A) = (tr(A), tr(A^t), tr(EA), tr(AE))$  و

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

تمرین شماره ۳: (۳۰ نمره)

الف. فرض کنید  $T, U : V \rightarrow W$  دو تبدیل خطی و  $W$  از بعد متناهی باشد. نشان دهید  
$$r(T + U) \leq r(T) + r(U)$$

ب. از قسمت قبل نتیجه بگیرید که برای  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  داریم:  
$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

ج. فرض کنید  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  ثابت کنید اگر  $AB = 0$ ، آنگاه  $r(A) + r(B) \leq n$ .

تمرین شماره ۴: (۲۰ نمره)

الف. فرض کنید  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  و  $r(A) = m$ . ثابت کنید  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$  وجود دارد به طوری که  $AB = I_m$ .

ب. فرض کنید  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$  و  $r(B) = m$ . ثابت کنید  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  وجود دارد به طوری که  $AB = I_m$ .