

تمرینات سری ۱

تمرین شماره ۱:

مجموعه $V = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in R\}$ را در نظر بگیرید. جمع روی V را جمع مولفه ای و ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف می کنیم. (برای $c \in R$)

$$c(a_1, a_2) = \begin{cases} (0, 0) & \text{if } c = 0 \\ (ca_1, \frac{1}{c}a_2) & \text{if } c \neq 0 \end{cases}$$

با جمع و ضرب اسکالر تعریف شده، آیا V یک فضای برداری روی R می باشد؟ پاسختان را ثابت کنید.

تمرین شماره ۲:

فرض کنید V و W دو فضای برداری روی میدان F می باشند. ثابت کنید مجموعه زیر با جمع و ضرب تعریف شده، یک فضای برداری روی F است.

$$Z = \{(v, w) : v \in V \text{ and } w \in W\}$$

$$c \in F \text{ برای } c(v, w) = (cv, cw) \text{ و } (v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

تمرین شماره ۳:

تعداد اعضای فضای برداری $M_{n \times n}(Z_2)$ را به دست آورید.

از ۳ تمرین بعدی (۴ و ۵ و ۶)، به دلخواه یکی را پاسخ دهید.

ممکن است به چند تعریف نیاز پیدا کنید.

تعریف ۱. ترانهادۀ یک ماتریس: برای ماتریس $A_{m \times n}$ ماتریس ترانهادۀ را با A^t نشان می دهیم و عبارت است از یک ماتریس $n \times m$ که از تعویض سطر ها با ستون های ماتریس A پدید می آید. یعنی اگر $A = [a_{ij}]$ آنگاه $A^t = [a_{ji}]$.

تعریف ۲. ماتریس متقارن: ماتریس مربعی A را متقارن گوئیم هر گاه $A = A^t$

تعریف ۳. ماتریس پادمتقارن: ماتریس مربعی A را پادمتقارن گوئیم هر گاه $A = -A^t$

تعریف ۴. تریس یک ماتریس: برای ماتریس مربعی A تریس را با $t(A)$ نشان می دهیم و عبارت است از مجموع عناصر روی قطر.

تمرین شماره ۴:

نشان دهید برای هر $A, B \in M_{n \times n}(F)$ و هر $a, b \in F$ رابطه زیر برقرار است.

$$(aA + bB)^t = aA^t + bB^t$$

تمرین شماره ۵:

الف) نشان دهید برای هر ماتریس مربعی A ، ماتریس $A + A^t$ یک ماتریس متقارن است.

ب) نشان دهید هر ماتریس را می توان به صورت حاصل جمع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن نوشت.

تمرین شماره ۶:

نشان دهید برای هر $A, B \in M_{n \times n}(F)$ و هر $a, b \in F$ رابطه زیر برقرار است.

$$tr(aA + bB) = a tr(A) + b tr(B)$$

تمرین شماره ۷:

فرض کنید V مجموعه تمام توابع f از \mathbb{R} به \mathbb{C} باشد که $f(-t) = \overline{f(t)}$. (توجه کنید علامت بار بروی یک عدد مختلط یعنی مزدج آن عدد. اگر عدد مختلط $z = x + iy$ آنگاه $\bar{z} = x - iy$) نشان دهید V با جمع و ضرب اسکالر زیر، یک فضای برداری روی \mathbb{R} است.
 $(cf)(t) = cf(t)$ و $f + g(t) = f(t) + g(t)$
 یک مثال از چنین تابعی ارائه کنید که حقیقی مقدار نباشد.